საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

დ. ნატროშვილი, გ. სამსონაძე, რ. ბიწაძე, მ. შუბლაძე

წრფივი ალგებრა

გამოყენებითი ალგებრის ელემენტები

II ნაწილი

დამტკიცებულია სტუ-ს
სასწავლო-მეთოდური
საბჭოს მიერ

თბილისი

2003

უაკ 512.8

სახელმძღვანელო განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების კავშირგაბმულობის, ელექტრონიკის, გამოთვლითი ტექნიკის, ინფორმატიკის და ენერგეტიკის სპეციალობების სტუდენტებისათვის. წიგნის მეორე ნაწილი შედგება ოთხი თავისაგან, რომლებშიც გარდა ტრადიციული მასალისა (წრფივი სივრცეები და წრფივი ოპერატორები), განხილულია საკითხები გამოყენებითი ალგებრის ისეთი დარგებიდან, როგორიცაა ბულის ალგებრების თეორია და გრაფთა თეორია, აგრეთვე, კოდირების თეორიის და წრფივი მოდულარული სისტემების თეორიის ელემენტები.

რეცენზენტები: პროფ. ვ. ლომაძე
პროფ. თ. კუპატაძე
პროფ. ნ. უღრელიძე

პროფ. დ. ნატროშვილის საერთო რედაქციით

© გამომცემლობა "ტექნიკური უნივერსიტეტი", 2003
ISBN 99940–14–07–2

წინასიტყვაობა

საინჟინრო ტექნიკურ მეცნიერებებში აბსტრაქტული მათემატიკა ყველაზე მეტად კავშირგაბმულობის, ელექტრონიკის, გამოთვლითი ტექნიკის, ავტომატიკის და ენერგეტიკის დარგებში გამოიყენება. ციფრული ტექნიკის განვითარებასთან დაკავშირებით განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს გამოყენებითი ალგებრის ისეთი მიმართულებები, როგორიცაა: კოდირების თეორია, გრაფთა თეორია, ბულის ალგებრები, სასრულ ავტომატთა თეორია. ამ საკითხებისადმი მიძღვნილი სპეციალური მათემატიკური ლიტერატურის გაცნობა, მისი საფუძვლიანი დამუშავება და გამოყენება პრაქტიკული საინჟინრო ამოცანების შესწავლაში მოითხოვს გარკვეულ მათემატიკურ მომზადებას.

შემოთავაზებული სახელმძღვანელოს ძირითადი მიზანია: ერთი მხრივ, სტუდენტთა მომზადების იმ დონის უზრუნველყოფა, რაც აუცილებელია შემდგომში შესაბამისი სპეციალური დისციპლინების შესასწავლად და, მეორე მხრივ, იმ უნარ-ჩვევების გამომუშავება, რაც საჭიროა მათემატიკური თეორიულ-ალგორითმული ცოდნის გამოყენებისათვის პრაქტიკული საინჟინრო ამოცანების გადასაწყვეტად. წიგნში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკური აპარატის, კერძოდ, წრფივი ალგებრის მეთოდების გამოყენების ილუსტრირებას კონკრეტული ტექნიკური ამოცანების ამოხსნისათვის. ეს ასპექტი შინაარსობრივი და სტილისტიკური თვალსაზრისით წიგნს აახლოებს მსოფლიოს მოწინავე ტექნიკურ უნივერსიტეტებში ამჟამად მოქმედ "საინჟინრო მათემატიკის" სახელმძღვანელოებთან.

ავტორები დიდი სიამოვნებითა და გულისხმიერებით მიიღებენ ყველა იმ შენიშვნას, რომელიც სახელმძღვანელოს გაუმჯობესების სურვილით იქნება გამოთქმული.

დიდი მადლობა გვინდა გადავუხადოთ საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის კავშირგაბმულობის ფაკულტეტის დეკანს, პროფესორ თამაზ კუპატაძეს და ენერგეტიკის ფაკულტეტის დეკანს, პროფესორ დემი ლაოშვილს იმ უდიდესი თანადგომისათვის, რომლის გარეშეც ეს წიგნი ვერ ეღირსებოდა დღის სინათლეს.

ავტორები
იანვარი, 2003 წ.

წიგნში გამოყენებული აღნიშვნები:

∇ – ამოცანის ამოხსნის ან თეორემის დამტკიცების დასაწყისი

$\square$ – ამოცანის ამოხსნის ან თეორემის დამტკიცების დასასრული ან შენიშვნის დასასრული

$\forall x$ – ყველა (ნებისმიერი) x-თვის

$\exists x$ – მოიძებნება (არსებობს) ისეთი x

$\Longrightarrow$ – გამომდინარეობს

$\Longleftrightarrow$ – ტოლფასია, ეკვივალენტურია

$\mathbb{N}$ – ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Z}$ – მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Z}^{+}$ – არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Z}'$ – კენტ მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Z}^{(2)}$ – ლუწ მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Z}^{(n)}$ – n რიცხვის ჯერად მთელ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Q}$ – რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{Q}^{+}$ – დადებით რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{R}$ – ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{R}^{+}$ – დადებით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე

$\mathbb{C}$ – კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლე

$C[a,b]$ – $[a,b]$ მონაკვეთზე უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე

$E(n)$ – n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ველზე

$E(m,n)$ – $m \times n$ განზომილების მატრიცთა სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთა ველზე

V_3 – გეომეტრიულ ვექტორთა (მიმართულ მონაკვეთთა) სიმრავლე

$|A|$ ან $\det A$ – კვადრატული A მატრიცის დეტერმინანტი

$A^{\top}$ – A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა

I.n.m – წიგნის I ნაწილის შესაბამისი თეორემის ან ფორმულის მითითება (მაგალითად, “თეორემა I.13.1” ნიშნავს I ნაწილის 13.1 თეორემას)

თავი I

წრფივი სივრცე

წიგნის I ნაწილში განხილულია ვექტორები სიბრტყეზე და სივრცეში. ნებისმიერი ასეთი ვექტორი ცალსახად განისაზღვრება თავისი კოორდინატებით: $\vec{a} = (x, y)$ ან $\vec{a} = (x, y, z)$. პირველ შემთხვევაში ვექტორი ორგანზომილებიანია, მეორეში – სამგანზომილებიანი. მაგრამ მრავალი საინჟინრო ამოცანის მათემატიკური აღწერისა და ამოხსნისათვის აუცილებელია უფრო მაღალი განზომილების მქონე ვექტორის განხილვა (იხ., მაგალითად, თავი V). სამგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურად, n-განზომილებიანი ვექტორი (n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) განისაზღვრება თავისი კოორდინატების n-ეულით: $a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ყველა ასეთი ვექტორის სიმრავლე ქმნის n-განზომილებიან ვექტორულ სივრცეს. წრფივ ვექტორულ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერაციები - ვექტორების შეკრება და ვექტორის სკალარზე გამრავლება აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს (აქსიომებს). აღსანიშნავია, რომ ვექტორი ამ შემთხვევაში არის პირობითი სახელი, რადგან ასეთივე პირობებს აკმაყოფილებს სხვა ბუნების ობიექტთა სიმრავლეზე განსაზღვრული წრფივი ოპერაციები. თუ ახლა ყურადღებას გადავიტანთ არა სიმრავლეების ელემენტების ბუნებაზე (ე.ი. იმაზე, არის თუ არა ეს ელემენტები რიცხვები, ვექტორები, ფუნქციები და ა.შ.), არამედ ამ სიმრავლეებზე განსაზღვრულ ოპერაციების თვისებებზე, მაშინ შესაძლებელი იქნება სხვადასხვა

ბუნების ობიექტთა სიმრავლის ერთობლივი შესწავლა. სწორედ ამ მიზნით არის შემოღებული მათემატიკაში წრფივი სივრცის ცნება, რომელსაც ეძღვნება აღნიშნული თავი.

§1. ალგებრული ოპერაციები. ჯგუფი, რგოლი, ველი *)

1. დეკარტული ნამრავლი. ვთქვათ, A და B არაცარიელი სიმრავლეებია. (a,b) სახის ყველა დალაგებულ წყვილთა სიმრავლეს, სადაც $a \in A$ და $b \in B$, ეწოდება A და B სიმრავლეების *დეკარტული ნამრავლი* და $A \times B$ სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

მაგალითად, თუ $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, მაშინ

$$A \times B = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,2),\ (2.3)\}.$$

ამავე დროს,

$$B \times A = \{(2,1),\ (2,2),\ (3,1)\ (3,2)\},$$

ე.ი. ზოგადად, $A \times B \neq B \times A$.

არაცარიელ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ განისაზღვრება როგორც დალაგებულ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-ულთა სიმრავლე, სადაც $a_i \in A_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1,2,\ldots,n\}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ყველა $A_i = A$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, შესაბამის დეკარტულ ნამრავლს ეწოდება *A-ს დეკარტული n-ური ხარისხი* და A^n სიმბოლოთი აღინიშნება:

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{-ჯერ}}.$$

---

*) შემდგომი მასალის აგებულება საშუალებას იძლევა პირველ ეტაპზე გამოვტოვოთ ეს პარაგრაფი და დავუბრუნდეთ მას მოგვიანებით.

2. ბინარული მიმართება. ვთქვათ, A არაცარიელი სიმრავლეა. დეკარტული კვადრატის, ე.ი. $A^2 = A \times A$-ის ნებისმიერ P ქვესიმრავლეს *ეწოდება ბინარული მიმართება A სიმრავლეზე*

$$P \subset A \times A.$$

თუ $(x, y) \in P$, მაშინ ამბობენ, რომ x *ელემენტი იმყოფება y ელემენტთან P მიმართებაში* და წერენ: xPy.

მოვიტანოთ ბინარული მიმართების მაგალითები:

1. ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ $P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ მიმართება შემდეგნაირად

$$P = \{(x, y) \mid x \leq y\}$$

ან, სხვაგვარად,

$$xPy \Longleftrightarrow x \leq y.$$

მაგალითად, $(-3, 5) \in P$, $(2, 2) \in P$, მაგრამ $(3, -5) \notin P$. ამ ბინარულ მიმართებას ჩვენ აღვნიშნავთ "$\leq$" სიმბოლოთი.

2. ნებისმიერ არაცარიელ A სიმრავლეზე შემოვიღოთ $D \subset A \times A$ მიმართება შემდეგნაირად

$$D = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

ან, სხვაგვარად,

$$xDy \Longleftrightarrow x = y.$$

ასეთ D მიმართებას ეწოდება *ტოლობის მიმართება* და ის აღინიშნება "$=$" სიმბოლოთი. მაგალითად, თუ $A = \{0, 1\}$, მაშინ $D = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

3. ვთქვათ, m ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. ჩვენ დავწერთ

$$x \equiv y \pmod{m},$$

თუ x და y მთელი რიცხვების $x-y$ სხვაობა უნაშთოდ იყოფა m-ზე. მაგალითად,

$$2 \equiv 8 \pmod 3,$$

რადგან $2-8=-6$ სხვაობა უნაშთოდ იყოფა 3-ზე. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ ბინარული $P_m \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ მიმართება შემდეგნაირად

$$P_m = \{(x,y) \mid x \equiv y \pmod m\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

ან, სხვაგვარად,

$$xP_my \Longleftrightarrow x \equiv y \pmod m. \tag{1.1}$$

მაგალითად, $(2,8) \in P_3$ და, ამავე დროს, $(2,8) \in P_6$.

დავუბრუნდეთ ზოგად შემთხვევას. ბინარულ $P \subset A \times A$ მიმართებას ეწოდება

ა) *რეფლექსური*, თუ $\forall x \in A$ შესრულებულია $(x,x) \in P$ (ე.ი. $D \subset P$);

ბ) *სიმეტრიული*, თუ $xPy \Longrightarrow yPx$;

გ) *ანტისიმეტრიული*, თუ $(xPy$ და $yPx) \Longrightarrow x=y$;

დ) *ტრანზიტული*, თუ $(xPy$ და $yPz) \Longrightarrow xPz$.

მაგალითად, $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული "$\leq$" მიმართება არის რეფლექსური, ანტისიმეტრიული და ტრანზიტული.

ზოგადად, ბინარულ მიმართებას, რომელიც არის რეფლექსური, ანტისიმეტრიული და ტრანზიტული, ეწოდება *დალაგების მიმართება*, ხოლო სიმრავლეს, რომელზედაც განსაზღვრულია დალაგების მიმართება – *ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე*. ამრიგად, "$\leq$" მიმართება არის დალაგების მიმართება.

ჩვენს მიერ განხილული ტოლობის მიმართება არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული.

ზოგადად, ბინარულ მიმართებას, რომელიც არის რეფლექსური, სიმეტრიული და ტრანზიტული, ეწოდება *ეკვივალენტობის მიმართება*. ამრიგად, ტოლობის მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება. ეკვივალენტობის მიმართება არის აგრეთვე (1.1) პირობით განსაზღვრული ბინარული P_m მიმართება ($m \in \mathbb{N}$).

ვთქვათ, P ეკვივალენტობის მიმართებაა A სიმრავლეზე. A სიმრავლის ნებისმიერი x ელემენტისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\mathrm{K}_x = \{y \in A \mid xPy\}.$$

K_x ქვესიმრავლეს ეწოდება x ელემენტის *ეკვივალენტობის კლასი*, ხოლო x-ს – ამ კლასის *წარმომადგენელი*. ყოველი A სიმრავლე შეიძლება წარმოვადგინოთ ერთმანეთის არაგადამკვეთი ეკვივალენტობის კლასების გაერთიანების სახით.

ტოლობის "=" მიმართების შემთხვევაში ეკვივალენტობის კლასები ერთელემენტიანი სიმრავლეებია. მაგალითად, $A = \{0, 1\}$ სიმრავლისათვის ეკვივალენტობის კლასებია $\{0\}$ და $\{1\}$, ხოლო თვით A სიმრავლე წარმოადგენს მათ გაერთიანებას: $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$.

(1.1) ტოლობით განსაზღვრული P_m მიმართების შესაბამისი ეკვივალენტობის კლასებია:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K}_0 = \{\ell m \mid \ell \in \mathbb{Z}\},\\
&\mathrm{K}_1 = \{\ell m + 1 \mid \ell \in \mathbb{Z}\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathrm{K}_{m-1} = \{\ell m + m - 1 \mid \ell \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ K_i კლასი შედგება ისეთი მთელი რიცხვებისაგან, რომლებიც m-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევიან i რიცხვს

$(i = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე წარმოად-
გენს ასეთი კლასების გაერთიანებას

$$\mathbb{Z} = \mathrm{K}_0 \cup \mathrm{K}_1 \cup \mathrm{K}_2 \cup \cdots \cup \mathrm{K}_{m-1}\,.$$

მაგალითად, თუ $m = 2$, მაშინ

$$\mathrm{K}_0 = \{2\ell \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \ldots\},$$
$$\mathrm{K}_1 = \{2\ell + 1 \mid \ell \in \mathbb{Z}\} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\},$$

ე.ი. K_0 არის ლუწ რიცხვთა სიმრავლე, K_1 კენტ რიცხვთა სიმრავ-
ლე, ხოლო $\mathbb{Z} = \mathrm{K}_0 \cup \mathrm{K}_1$.

3. ასახვა და ალგებრული ოპერაციები. ვთქვათ, E და F არაცარიელი სიმრავლეებია. თუ მოცემულია f წესი, რომელიც E სიმრავლის *ყოველ* x ელემენტს შეუსაბამებს F სიმრავლის *ერთადერთ* y ელემენტს, მაშინ ამბობენ, რომ მოცემულია E სიმრავლის f *ასახვა* F სიმრავლეში და წერენ $f : E \to F$ ან $E \xrightarrow{f} F$. იმ $y \in F$ ელემენტს, რომელშიც f ასახვის დროს აისახება $x \in E$ ელემენტი, აღნიშავენ $f(x)$ სიმბოლოთი და უწოდებენ x ელემენტის *სახეს* f ასახვის დროს. E სიმრავლეს ეწოდება f ასახვის (ფუნქციის) *განსაზღვრის არე* და აღინიშნება $D(f)$ სიმბოლოთი. F სიმრავლის ყველა ისეთ y ელემენტთა ქვესიმრავლეს, რომლებიც წარმოადგენენ E სიმრავლის ელემენტების სახეებს, ეწოდება f ასახვის (ფუნქციის) *მნიშვნელობათა სიმრავლე* და $f(E)$ სიმბოლოთი აღინიშნება. თუ $f(E) = F$, მაშინ f-ს ეწოდება E სიმრავლის ასახვა F *სიმრავლეზე* ანუ *ზეასახვა*. თუ ამავე დროს

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

მაშინ f ასახვას ურთიერთცალსახა ასახვა ეწოდება, ხოლო E და F სიმრავლეებს – *ეკვივალენტური სიმრავლეები*.

ვთქვათ, E არაცარიელი სიმრავლეა. $f : E \times E \to E$ ასახვას ეწოდება *ბინარული ოპერაცია* E სიმრავლეზე. სხვაგვარად, ბინარული ოპერაცია E სიმრავლეზე არის წესი, რომლის მიხედვით E სიმრავლის ნებისმიერ ორ x და y ელემენტს შეესაბამება ამავე სიმრავლის ერთი z ელემენტი. ხშირად ბინარული ოპერაციის შედეგს, ე.ი. $f(x,y)$ ელემენტს აღნიშნავენ $x+y$ ან xy სიმბოლოთი, ხოლო თვით ბინარულ ოპერაციას უწოდებენ შესაბამისად *შეკრების* ან *გამრავლების ოპერაციას*. შემოვიღოთ აღნიშვნა $f(x,y)=x\dot{+}y$.

ბინარულ $\dot{+}$ ოპერაციას ეწოდება *კომუტაციური*, თუ

$$\forall x,y \in E, \quad x\dot{+}y = y\dot{+}x,$$

და ეწოდება *ასოციაციური*, თუ

$$\forall x,y,z \in E, \quad (x\dot{+}y)\dot{+}z = x\dot{+}(y\dot{+}z).$$

თუ არსებობს ისეთი $e \in E$ ელემენტი, რომ

$$\forall x \in E, \quad x\dot{+}e = x,$$

მაშინ e-ს *მარჯვენა ნეიტრალური ელემენტი* ეწოდება, ხოლო თუ

$$\forall x \in E, \quad e\dot{+}x = x,$$

მაშინ e-ს ეწოდება *მარცხენა ნეიტრალური ელემენტი*.

e ელემენტს, რომელიც ერთდროულად არის მარჯვენა და მარცხენა ნეიტრალური ელემენტი, *ნეიტრალური ელემენტი* ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ შეკრების ოპერაციის შემთხვევაში ნეიტრალურ ელემენტს აღნიშნავენ 0 სიმბოლოთი და უწოდებენ *ნულოვან ელემენტს*, ხოლო გამრავლების ოპერაციის შემთხვევაში აღნიშნავენ სიმბოლოთი 1 და E სიმრავლის *ერთეულოვან ელემენტს* უწოდებენ.

თუ $x \in E$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $\bar{x}$ ელემენტი, რომ

$$x\dot{+}\bar{x} = \bar{x}\dot{+}x = e,$$

მაშინ $\bar{x} \in E$ ელემენტს ეწოდება $x \in E$ ელემენტის *სიმეტრიული ელემენტი*. შეკრების ოპერაციის შემთხვევაში სიმეტრიულ ელემენტს აღნიშნავენ $-x$ სიმბოლოთი და უწოდებენ x ელემენტის *მოპირდაპირე ელემენტს*, ხოლო გამრავლების ოპერაციის შემთხვევაში აღნიშნავენ x^{-1} სიმბოლოთი და უწოდებენ x ელემენტის *შებრუნებულ ელემენტს*.

თუ E სიმრავლეზე განსაზღვრულია ორი ბინარული ოპერაცია $\dot{+}$ და $\circ$, მაშინ $\circ$ ოპერაციას ეწოდება *დისტრიბუციული* $\dot{+}$ ოპერაციის მიმართ, თუ $\forall x, y, z \in E$

$$x \circ (y\dot{+}z) = x \circ y\dot{+}x \circ z$$

და

$$(y\dot{+}z) \circ x = y \circ x\dot{+}z \circ x.$$

მაგალითად, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეზე განსაზღვრული შეკრების და გამრავლების ჩვეულებრივი ოპერაციები კომუტაციური და ასოციაციურია. გარდა ამისა, ისინი აკმაყოფილებენ დისტრიბუციულობის პირობებს

$$.x(y+z) = xy + xz \quad \text{და} \quad (y+z)x = yx + zx.$$

ამავე დროს, რიცხვთა გამოკლების ოპერაცია არც კომუტაციურია (მაგალითად, $5-2=3$, მაგრამ $2-5=-3$), არც ასოციაციური (მაგალითად, $(3-2)-1=0$, ხოლო $3-(2-1)=2$).

ბინარული ოპერაციის ანალოგიურად, ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის განისაზღვრება n-არული ალგებრული ოპერაცია

$$f : \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n\text{-ჯერ}} \to E.$$

როცა $n = 1$, ოპერაციას ეწოდება *უნარული*. ამრიგად, უნარული ოპერაცია არის ასახვა $f : E \to E$.

4. ჯგუფი. არაცარიელ G სიმრავლეს ეწოდება *ჯგუფი*, თუ მასში განსაზღვრულია ბინარული $\circ$ ოპერაცია, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს (აქსიომებს):

1. $\circ$ ოპერაცია ასოციაციურია;

2. G სიმრავლეში არსებობს ნეიტრალური ელემენტი e;

3. ნებისმიერი $a \in G$ ელემენტისათვის არსებობს მისი სიმეტრიული $\bar{a} \in G$ ელემენტი.

თუ ბინარული ოპერაცია ჩაწერილია შეკრების ოპერაციის სახით, მაშინ ჯგუფს ეწოდება *ადიციური ჯგუფი*, ხოლო თუ ეს ოპერაცია ჩაწერილია გამრავლების ოპერაციის სახით – *მულტიპლიკაციური ჯგუფი*.

G-ს ეწოდება *აბელური* (ან *კომუტაციური*) ჯგუფი, თუ $\circ$ ოპერაცია კომუტაციურია.

მაგალითად, მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ და ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეები შეკრების ჩვეულებრივი ოპერაციის მიმართ წარმოადგენენ აბელურ ჯგუფებს. შევნიშნოთ, რომ არც $\mathbb{Z}$ და არც $\mathbb{R}$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ ჯგუფს არ წარმოადგენს, რადგანაც არ არსებობს 0 რიცხვის შებრუნებული რიცხვი. ამავე დროს, $\mathbb{R}$ სიმრავლის არანულოვან რიცხვთა $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის კომუტაციურ ჯგუფს.

თეორემა 1.1. *G ჯგუფის ნებისმიერი a და b ელემენტისათვის*

$$a \circ x = b \quad (y \circ a = b) \tag{1.2}$$

განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი

$$x = \bar{a} \circ b \quad (y = b \circ \bar{a}). \tag{1.3}$$

∇ რადგან

$$a \circ x = a \circ (\bar{a} \circ b) = (a \circ \bar{a}) \circ b = e \circ b = b,$$

ამიტომ $x = \bar{a} \circ b$ არის $a \circ x = b$ განტოლების ამონახსნი. დავამტკიცოთ, რომ (1.2) განტოლებას სხვა ამონახსნი არა აქვს. მართლაც, თუ x_1 ამ განტოლების ამონახსნია, მაშინ $a \circ x_1 = b$ და, შესაბამისად,

$$x_1 = e \circ x_1 = (\bar{a} \circ a) \circ x_1 = \bar{a} \circ (a \circ x_1) = \bar{a} \circ b,$$

ე.ი. x_1 ემთხვევა (1.3) ამონახსნს. $\square$

შედეგი 1.2. *G ჯგუფის ნებისმიერი a ელემენტისათვის*

$$a \circ x = a \circ y \Longrightarrow x = y \quad \big((x \circ a = y \circ a) \Longrightarrow x = y\big),$$

ე.ი. ჯგუფში ნებისმიერი ტოლობა შეიძლება შეიკვეცოს ნებისმიერ მამრავლზე.

G ჯგუფის H ქვესიმრავლეს ეწოდება G ჯგუფის ქვეჯგუფი, თუ H არის ჯგუფი G ჯგუფში განსაზღვრული $\circ$ ოპერაციის მიმართ. იმისათვის, რომ ჯგუფის არაცარიელი H ქვესიმრავლე იყოს ქვეჯგუფი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ

1. $x, y \in H \Longrightarrow x \circ y \in H$;
2. $x \in H \Longrightarrow \bar{x} \in H$.

მაგალითად, მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე წარმოადგენს ადიციური $\mathbb{R}$ ჯგუფის ქვეჯგუფს.

5. რგოლი. არაცარიელ R სიმრავლეს ეწოდება რგოლი, თუ მასში განსაზღვრულია ორი ბინარული ოპერაცია "+" და "·" და ეს ოპერაციები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს(აქსიომებს):

1. "+"ოპერაციის მიმართ R წარმოადგენს აბელურ ჯგუფს;

2. "·" ოპერაცია დისტრიბუციულია "+" ოპერაციის მიმართ, ე.ი.

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

თუ გამრავლების "·" ოპერაცია ასოციაციურია, რგოლს ეწოდება ასოციაციური რგოლი, ხოლო თუ ოპერაცია კომუტაციურია – კომუტაციური რგოლი.

მაგალითად, მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ სიმრავლე წარმოადგენს ასოციაციურ-კომუტაციურ რგოლს ერთეულით. ასოციაციურ კომუტაციურ რგოლს წარმოადგენს აგრეთვე ყველა ლუწ რიცხვთა სიმრავლე და ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. მოვიტანოთ სასრული რგოლის მაგალითი.

ვთქვათ, m ნატურალური რიცხვია, ხოლო P_m არის (1.1) პირობით განსაზღვრული ეკვივალენტობის მიმართება $\mathbb{Z}$ სიმრავლეზე. ეკვივალენტობის $\mathbb{Z}_m = \{\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \ldots, \mathrm{K}_{m-1}\}$ კლასთა სიმრავლეში შემოვიღოთ შეკრებისა და გამრავლების ოპერაციები შემდეგნაირად: $\forall\, \mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j \in \mathbb{Z}_m$

$$\mathrm{K}_i + \mathrm{K}_j = \mathrm{K}_\ell,$$

სადაც K_ℓ ეკვივალენტობის ის კლასია, რომელიც შეიცავს $i+j$ რიცხვს, ხოლო

$$\mathrm{K}_i \cdot \mathrm{K}_j = \mathrm{K}_s,$$

სადაც K_s ეკვივალენტობის ის კლასია, რომელიც შეიცავს $i \cdot j$ რიცხვს. მიღებულ $\mathbb{Z}_m$ რგოლს ეწოდება *ნაშთთა რგოლი m მოდულით.* ამ რგოლის ნულოვანი ელემენტია ეკვივალენტობის K_0 კლასი, ხოლო ერთეულოვანი ელემენტი – K_1 კლასი.

შენიშვნა. ხშირად ეკვივალენტობის K_i კლასს სიმარტივისათვის აღნიშნავენ i სიმბოლოით. ასეთი შეთანხმების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ, რომ

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}.$$

მაგალითად, თუ $m = 3$, მაშინ

$$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}.$$

$\mathbb{Z}_3$ რგოლში სრულდება შემდეგი ტოლობები: $1+1 = 2$, $2+1 = 0$, $2+2 = 1$, $0 \cdot 2 = 0$, $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 2 = 1$ და ა.შ. $\square$

6. ველი. კომუტაციურ ასოციაციურ R რგოლს ერთეულით, რომლის არანულოვანი ელემენტების სიმრავლე არაცარიელია და გამრავლების ოპერაციის მიმართ ქმნის ჯგუფს, ეწოდება *ველი.*

რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ სიმრავლე, ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ და კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbb{C}$ სიმრავლეები წარმოადგენს უსასრულო ველის მაგალითებს.

მოვიტანოთ სასრული ველის მაგალითი. განვიხილოთ $\mathbb{Z}_p$ ნაშთთა რგოლი, სადაც p ნებისმიერი მარტივი რიცხვია. ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{Z}_p$ არის ველი. ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\mathrm{K}_s \in \mathbb{Z}_p$ $(s \neq 0)$ ელემენტისათვის არსებობს ისეთი $\mathrm{K}_{s'} \in \mathbb{Z}_p$ ელემენტი, რომ

$$\mathrm{K}_s \cdot \mathrm{K}_{s'} = \mathrm{K}_1\,.$$

რადგან p მარტივი რიცხვია, ამიტომ არც ერთი ნატურალური ℓ რიცხვისათვის, სადაც $1 \leq \ell \leq p-1$, რიცხვი $\ell \cdot s$ არ გაიყოფა

უნაშთოდ p რიცხვზე, ე.ი.

$$\ell s \not\equiv 0 \pmod{p}. \tag{1.4}$$

მაშასადამე,

$$\mathrm{K}_s, \mathrm{K}_{2s}, \mathrm{K}_{3s}, \ldots, \mathrm{K}_{(p-1)s} \tag{1.5}$$

ეკვივალენტობის კლასებიდან არც ერთი არ ემთხვევა K_0-ს ((1.5)-ში $\mathrm{K}_{\ell s}$-ით აღნიშნულია ის ეკვივალენტობის კლასი, რომელიც შეიცავს ℓs რიცხვს). ამავე მიზეზით ყველა ეს კლასი განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$\mathrm{K}_{is} = \mathrm{K}_{js} \quad (i \neq j)$$

ტოლობიდან მივიღებდით ტოლობას

$$is \equiv js \pmod{p},$$

საიდანაც

$$(i-j)s \equiv 0 \pmod{p},$$

რაც შეუძლებელია (იხ. (1.4)). ამრიგად, ეკვივალენტობის კლასთა (1.5) სიმრავლე ემთხვევა ეკვივალენტობის კლასთა

$$\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2, \mathrm{K}_3, \ldots, \mathrm{K}_{p-1} \tag{1.6}$$

სიმრავლეს (ელემენტების დალაგება (1.5) და (1.6) მიმდევრობებში ზოგადად განსხვავებულია). აქედან გამომდინარეობს, რომ მოიძებნება ისეთი s', სადაც $1 \leq s' \leq p-1$, რომლისთვისაც $\mathrm{K}_{s's} = \mathrm{K}_1$ ან რაც იგივეა

$$\mathrm{K}_{s'}\,\mathrm{K}_s = \mathrm{K}_1\,.$$

ამრიგად, ნებისმიერი მარტივი p რიცხვისათვის $\mathbb{Z}_p$ არის ველი. □

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი მარტივი p და ნატურალური n რიცხვისათვის არსებობს სასრული ველი, რომელიც შეიცავს p^n

ელემენტს. ასეთ ველს ეწოდება გალუას ველი და აღინიშნება $\mathrm{G}\,\mathbb{F}(p^n)$ ან $\mathbb{F}_{p^n}$ სიმბოლოთი.

როცა $p = 2$ და $n = 1$, ვღებულობთ ორელემენტიან $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ ველს. ამ ველის ელემენტების შეკრება და გამრავლება ხორციელდება შემდეგნაირად:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1,$$
$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

ეს ყველაფერი შეიძლება აისახოს ცხრილების საშუალებით (ცხრილი 1.1 და 1.2).

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

ცხრილი 1.1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

ცხრილი 1.2

ამრიგად, $\mathbb{F}_2$ ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის

$$a + a = 0. \tag{1.7}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$a = -a, \tag{1.8}$$

ე.ი. a არის a ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტი.

$p = 2$ და $n = 2$ შემთხვევაში ვღებულობთ $\mathrm{G}\,\mathbb{F}(4) = \mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ ველს (იხ. ცხრილი 1.3 და 1.4):

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

ცხრილი 1.3

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

ცხრილი 1.4

1.3 და 1.4 ცხრილებიდან გამომდინარეობს, რომ მაგალითად, a ელემენტის მოპირდაპირეა ისევ a ელემენტი $(a+a=0)$, ხოლო a ელემენტის შებრუნებულია b ელემენტი $(ab=ba=1)$.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

რომლის a_{ij} კოეფიციენტები და b_i თავისუფალი წევრები $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ წარმოადგენენ რაიმე K ველის ელემენტებს, ამოიხსნება ისევე, როგორც ნამდვილკოეფიციენტებიან განტოლებათა სისტემები.

მაგალითი 1.3. ამოვხსნათ გალუას $\mathbb{F}_2$ ველში წრფივ ალგებრულ განტოლებათა შემდეგი სისტემა:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \quad\ \ y + z = 1, \\ x \quad + \quad z = 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

∇ სისტემის მეორე და მესამე განტოლებას მივუმატოთ პირველი:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y + 2z = 1, \\ 2x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

(შეთანხმების თანახმად, ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის ჩვენ ვწერთ $a + a = 2a$, $a + a + a = 3a$ და ა.შ.) რადგან $\mathbb{F}_2$ ველში

$2x = 2y = 2z = 0$ (იხ. 1.7), ამიტომ ვღებულობთ

$$\left\{\begin{array}{l} x+ y + z = 0 \\ x \qquad\quad = 1 \\ \quad y \qquad = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 + 1 + z = 0 \\ \quad x \qquad = 1 \\ \quad y \qquad = 1 \end{array}\right. \iff \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

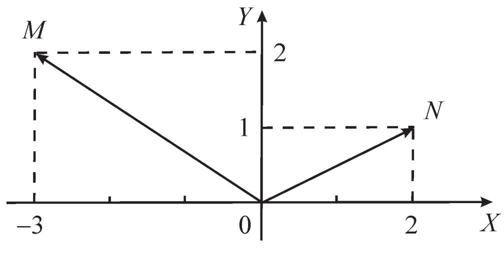
ამრიგად, (1.9) სისტემა თავსებადია და $(1,1,0)$ მისი ერთადერთი ამონახსნია. $\square$

§2. $\mathbb{R}^n$ სივრცე

$\mathbb{R}^2$-ით აღვნიშნოთ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული წყვილების სიმრავლე ანუ $\mathbb{R}$-ის დეკარტული კვადრატი

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

ეს სიმრავლე შეიძლება გავაიგივოთ სიბრტყის წერტილთა სიმრავლესთან. ამისათვის $\mathbb{R}^2$ სიმრავლის ყოველ (x,y) ელემენტს შევუსაბამოთ სიბრტყის ისეთი M წერტილი (ან ამ წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორი), რომლის კოორდინატები სიბრტყეზე მოცემულ მართკუთხა კოორდინატთა OXY სისტემაში არის x და y. ცხადია, რომ აღნიშნული შესაბამისობა $\mathbb{R}^2$ სიმრავლესა და სიბრტყის წერტილთა სიმრავლეს შორის ურთიერთცალსახაა. მაგალითად, $\mathbb{R}^2$ სიმრავლის $(-3,2)$ ელემენტს შეესაბამება სიბრტყის $M(-3,2)$ წერტილი, ხოლო $(2,1)$ ელემენტს – $N(2,1)$ წერტილი (ნახ. 2.1)



ნახ. 2.1

ანალოგიურად,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

სიმრავლის ყოველ (x, y, z) ელემენტს შეიძლება შევუსაბამოთ სივრცის ისეთი M წერტილი (ან ამ წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორი), რომლის კოორდინატები სივრცეში მოცემულ მართკუთხა კოორდინატთა $OXYZ$ სისტემაში არის x, y და z. ამრიგად, $\mathbb{R}^3$ სიმრავლე შეიძლება გავაიგივოთ ჩვეულებრივი სივრცის წერტილთა სიმრავლესთან (ან სივრცის ჩვეულებრივ ვექტორთა სიმრავლესთან).

$\mathbb{R}^2$ და $\mathbb{R}^3$ სიმრავლეებს ეწოდება შესაბამისად *ორგანზომილებიანი* და *სამგანზომილებიანი კოორდინატული* (ანუ *არითმეტიკული*) *სივრცე*.

ზოგადად, n *განზომილებიანი* (n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია) *კოორდინატული* $\mathbb{R}^n$ *სივრცე* განისაზღვრება როგორც $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული n-ეულების სიმრავლე

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} =$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)\}.$$

მაგალითად, $(-1, 1, 3, 5) \in \mathbb{R}^4$, ხოლო $(2, 5, -1, 0, 6) \in \mathbb{R}^5$.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ელემენტებს უწოდებენ აგრეთვე *წერტილებს* ან *ვექტორებს*. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ რიცხვებს $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *ვექტორის კოორდინატები* ეწოდება. $\mathbb{R}^n$ სივრცის $(0, 0, \ldots, 0)$ ვექტორს, რომლის ყველა კოორდინატი ნულის ტოლია, *ნულოვანი ვექტორი* ეწოდება და აღინიშნება θ სიმბოლოთი.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ელემენტებს ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი კოორდინატები

ტოლია, ე.ი.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow x_i = y_i \; (i=1, 2, \ldots, n).$$

$\mathbb{R}^n$ სივრცე წარმოადგენს ჩვეულებრივ (გეომეტრიულ) ვექტორთა სივრცის განზოგადებას და აქაც, როგორც გეომეტრიულ ვექტორთა სივრცეში, განისაზღვრება ვექტორთა შეკრების და ვექტორის ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები: თუ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ და $\alpha \in \mathbb{R}$, მაშინ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$
$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

მაგალითად, $\mathbb{R}^4$ სივრცის $x=(-1, 2, 3, 5)$ და $y=(0, -3, 2, 1)$ ელემენტისათვის

$$x + y = (-1, -1, 5, 6),$$

ხოლო

$$10x = (-10, 20, 30, 50).$$

$(-1)x$ ვექტორს ეწოდება x ვექტორის *მოპირდაპირე ვექტორი* და აღინიშნება $-x$ სიმბოლოთი. ცხადია, რომ თუ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, მაშინ $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

შენიშვნა. თუ $\mathbb{R}^n$ სივრცის განსაზღვრებაში ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ სიმრავლეს შევცვლით ნებისმიერი K ველით (იხ. §1), მივიღებთ n-განზომილებიან კოორდინატულ K^n სივრცეს. ამ სივრცის ორი ელემენტის ჯამი და ამავე სივრცის ელემენტის ნამრავლი K ველის α ელემენტზე განისაზღვრება ისევე, როგორც $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემთხვევაში. $\square$

$\mathbb{R}^n$ სივრცის არაცარიელ E ქვესიმრავლეს ეწოდება $\mathbb{R}^n$ სივრცის *ქვესივრცე*, თუ $\forall x, y \in E$ და $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\; x + y \in E$ და $\alpha x \in E$.

ერთი θ ელემენტისაგან შედგენილი $\mathbb{R}^n$ სივრცის $\{\theta\}$ ქვესიმრავლე წარმოადგენს $\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესივრცეს. ასეთ ქვესივრცეს ეწოდება $\mathbb{R}^n$ სივრცის *ნულოვანი ქვესივრცე*.

სავარჯიშო 2.1. ვთქვათ, E არის $\mathbb{R}^3$ სივრცის ყველა ისეთი ელემენტის სიმრავლე, რომლის მესამე კოორდინატი 0-ის ტოლია, ე.ი.

$$E = \{x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

დაამტკიცეთ, რომ E არის $\mathbb{R}^3$ სივრცის ქვესივრცე.

ცხადია, რომ $1 \times n$ განზომილების ნებისმიერი სტრიქონ-მატრიცა

$$a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

და $n \times 1$ განზომილების ნებისმიერი სვეტ-მატრიცა

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^\top$$

შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\mathbb{R}^n$ სივრცის ელემენტი (ვექტორი). სივრცის ელემენტად შეიძლება ჩავთვალოთ აგრეთვე წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 \; + \cdots + \; a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 \; + \; a_{22}x_2 \; + \cdots + \; a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი. თუ $x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ და $x^{(2)}=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})$ ამ სისტემის ორი ამონახსნია, მაშინ, როგორც ადვილი მისახვედრია, ამ ამონახსნების ჯამიც

$$x^{(1)}+x^{(2)}=(x_1^{(1)}+x_1^{(2)},x_2^{(1)}+x_2^{(2)},\ldots,x_n^{(1)}+x_n^{(2)})$$

და ნებისმიერ ნამდვილ α რიცხვზე ნამრავლიც იქნება ამ სისტემის ამონახსნი. ეს ნიშნავს, რომ n უცნობიან წრფივ ალგებრულ განტოლებათა *ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს $\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესივრცეს.*

სავარჯიშო 2.2. დაამტკიცეთ, რომ წრფივ არაერთგვაროვან n უცნობიან ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე (რომელიც $\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესიმრავლეა) არ არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესივრცე.

V_3-ით აღვნიშნოთ ჩვეულებრივ ვექტორთა (ორიენტირებულ მონაკვეთთა) სიმრავლე მასზე განსაზღვრულ შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებთან ერთად. ვუწოდოთ ასეთ სიმრავლეს გეომეტრიულ ვექტორთა V_3 სივრცე. დავუშვათ, რომ ფიქსირებულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $OXYZ$ სისტემა. V_3 სივრცის ყოველ

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

ვექტორს შევუსაბამოთ $\mathbb{R}^3$ სივრცის

$$a=(x,y,z)$$

ვექტორი. ცხადია, რომ ასეთი

$$\varphi:\mathrm{V}_3\to\mathbb{R}^3 \tag{2.1}$$

შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა. ამის გარდა, (2.1) შესაბამისობა ინარჩუნებს ამ სივრცეებში განსაზღვრულ ოპერაციებს, ე.ი.

$\forall\vec{a},\vec{b}\in \mathrm{V}_3$ და $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

$$\varphi(\vec{a}+\vec{b})=\varphi(\vec{a})+\varphi(\vec{b})$$

და

$$\varphi(\alpha\vec{a})=\alpha\varphi(\vec{a})$$

(იხ. თეორემა I.16.2). ეს იმას ნიშნავს, რომ ალგებრული თვალსაზრისით V_3 და $\mathbb{R}^3$ სივრცეებს შორის არავითარი განსხვავება არ არსებობს: ყოველი ალგებრული თვისება, რომელიც მართებულია V_3 სივრცის ელემენტებისათვის, მართებული იქნება აგრეთვე $\mathbb{R}^3$ სივრცის ელემენტებისათვის, და, პირიქით. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ ეს ორი სივრცე ერთმანეთის იზომორფულია და ამას ასე აღნიშნავენ:

$$\mathrm{V}_3\cong\mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

("იზო" ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს ტოლს, ერთნაირს, მსგავსს, ხოლო "მორფიზმი" ფორმას).

V_3 სივრცის ნულოვან $\vec{0}$ ვექტორს აღნიშნული იზომორფიზმის დროს შეესაბამება $\mathbb{R}^3$ სივრცის ნულოვანი $\theta=(0,0,0)$ ვექტორი.

სავარჯიშო 2.3. დაამტკიცეთ, რომ 2.1 სავარჯიშოში განსაზღვრული $\mathbb{R}^3$ სივრცის E ქვესივრცე $\mathbb{R}^2$ სივრცის იზომორფულია, ე.ი.

$$\{(x_1,x_2,0)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}\cong\mathbb{R}^2.$$

აღნიშნული შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ იზომორფიზმამდე სიზუსტით $\mathbb{R}^2$ არის $\mathbb{R}^3$ სივრცის ქვესივრცე, ე.ი. $\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^3$, და, ზოგადად, თუ $m\leq n$, მაშინ $\mathbb{R}^m$ არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესივრცე (იზომორფიზმამდე სიზუსტით): $\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^n$ $(m\leq n)$.

§3. წრფივი სივრცე. წრფივი სივრცის მაგალითები

ამოვწეროთ $\mathbb{R}^n$ სივრცეში განსაზღვრული ოპერაციების ძირითადი თვისებები: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
&1.\ x + y = y + x \quad (\text{კომუტაციურობა});\\
&2.\ (x + y) + z = x + (y + z) \quad (\text{ასოციაციურობა});\\
&3.\ x + \theta = x \quad (\text{ნულოვანი ელემენტის არსებობა});\\
&4.\ x + (-x) = \theta \quad (\text{მოპირდაპირე ელემენტის არსებობა});\\
&5.\ 1\,x = x;\\
&6.\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);\\
&7.\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;\\
&8.\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad (\text{დისტრიბუციულობა}).
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

როგორც აღნიშნული იყო (იხ. §I.6 და §I.15), ასეთივე პირობებს აკმაყოფილებს მატრიცთა $E(m, n)$ სიმრავლეში და ვექტორთა V_3 სივრცეში განსაზღვრული წრფივი ოპერაციები.

ზოგადად, თუ რაიმე არაცარიელ E სიმრავლეში განსაზღვრული შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაეციები აკმაყოფილებს (3.1) პირობებს (აქსიომებს), მაშინ ასეთ E სიმრავლეს მასზე განსაზღვრულ ოპერაციებთან ერთად *წრფივი სივრცე* ეწოდება.

წრფივი სივრცის ელემენტებს უწოდებენ აგრეთვე ვექტორებს.

E წრფივი სივრცის არაცარიელ F ქვესიმრავლეს ეწოდება ამ სივრცის *წრფივი ქვესივრცე*, თუ ის არის წრფივი სივრცე E-ში განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ.

შენიშვნა 1. წრფივი სივრცე შეიძლება განისაზღვროს როგორც აბელური ადიციური ჯგუფი (იხ. §1), რომლის ელემენტებისათვის დამატებით განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია. ეს ოპერაცია (ე.ი. $\varphi : \mathbb{R}\times E \to E$ ასახვა) უნდა აკმაყოფილებდეს 5–8 აქსიომებს (იხ. (3.1)). □

შენიშვნა 2. წრფივი სივრცის განსაზღვრებაში ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}$ ველი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი K ველით. ასეთ შემთხვევაში E-ს ეწოდება *წრფივი სივრცე მოცემულ* K *ველზე*. თუ $\mathrm{K} = \mathbb{R}$, მაშინ E-ს უწოდებენ *ნამდვილ წრფივ სივრცეს*, ხოლო თუ $\mathrm{K} = \mathbb{C}$ (კომპლექსურ რიცხვთა ველი), მაშინ – *კომპლექსურ წრფივ სივრცეს*. □

მოვიტანოთ წრფივი სივრცის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი (შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები ჩვეულებრივია):

1. $\mathbb{R}^n$ *სივრცე* $(n \in \mathbb{N})$;

2. *გეომეტრიულ ვექტორთა* V_3 *სივრცე*;

3. $m \times n$ *განზომილების მატრიცთა* $E(m, n)$ *სიმრავლე*;

4. *წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე*.

სავარჯიშო 3.1. დაამტკიცეთ, რომ ქვემოთ ჩამოთვლილი სიმრავლეები მათზე განსაზღვრულ ჩვეულებრივ ოპერაციებთან ერთად ქმნიან წრფივ სივრცეს:

1. მოცემულ $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა $C[a, b]$ სიმრავლე;

2. კრებადი რიცხვითი მიმდევრობების სიმრავლე;

3. ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრთა P_n სიმრავლე, რომელთა ხარისხი არ აღემატება მოცემულ ნატურალურ n რიცხვს (ნულოვანი $p(x) \equiv 0$ მრავალწევრი, რომლის ხარისხი განსაზღვრული არ არის, მიაკუთვნეთ P_n სიმრავლეს).

სავარჯიშო 3.2. დაამტკიცეთ, რომ n ხარისხის მრავალწევრთა სიმრავლე (n – ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია) არ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს.

სავარჯიშო 3.3. ვთქვათ, E წრფივი სივრცეა (ნამდვილ რიცხვთა ველზე) და $x, y, z \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. დაამტკიცეთ, რომ

1. $x + y = z \Longleftrightarrow x = z + (-y)$;
2. $\alpha x = \theta \Longleftrightarrow (\alpha = 0$ ან $x = \theta)$;
3. $(-1)x = -x$;
4. თუ $\alpha \neq 0$, მაშინ $\left(\alpha x = \beta y \Longleftrightarrow x = \dfrac{\beta}{\alpha}\, y\right)$;
5. თუ $x \neq \theta$, მაშინ $(\alpha x = \beta x \Longleftrightarrow \alpha = \beta)$.

∇ დავამტკიცოთ, მაგალითად, პუნქტი 3. რადგან

$$x + (-1)x = 1x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = \theta,$$

ამიტომ $(-1)x = -x$. $\square$

შენიშვნა 3. ამ სავარჯიშოდან და წრფივი სივრცის აქსიომებიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ წრფივ სივრცეში (ნამდვილ რიცხვთა ველზე) დასაშვებია ყველა ტრადიციული ალგებრული გარდაქმნის შესრულება (ფრჩხილებს გარეთ საერთო მამრავლის გატანა, ტოლობის შეკვეცა არანულოვან მამრავლზე, ტოლობის ერთი მხარიდან შესაკრების მეორე მხარეში გადატანა

მოპირდაპირე ნიშნით და ა.შ.), რითაც ჩვენ შემდეგში სპეციალური მითითების გარეშე ვისარგებლებთ. □

§4. სკალარული ნამრავლი წრფივ სივრცეში. ევკლიდეს სივრცე. მეტრიკული სივრცის ცნება

$\mathbb{R}^n$ სივრცის (და ზოგადად წრფივი სივრცის) ცნება შემოღებული იყო როგორც ჩვეულებრივ ვექტორთა V_3 სივრცის განზოგადება. ჩვეულებრივ ვექტორთა სივრცეში განსაზღვრულია ვექტორის სიგრძე და კუთხე ვექტორებს შორის. ამიტომ სასურველია ამ საკითხის განხილვა ზოგადი წრფივი სივრცის შემთხვევაში.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ვექტორისათვის მისი *სიგრძე* (ანუ *ნორმა*) შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\ . \tag{4.1}$$

თუ $x \neq \theta$, მაშინ, ცხადია, $|x| > 0$, ხოლო $|\theta| = 0$.

მანძილი $\mathbb{R}^n$ სივრცის $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ წერტილებს (ვექტორებს) შორის განისაზღვრება ტოლობით

$$\rho(x, y) = |y - x| = \\ = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}\ . \tag{4.2}$$

ორი $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ვექტორის *სკალარული ნამრავლი* $\mathbb{R}^n$ სივრცეში განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \tag{4.3}$$

(4.1) და (4.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$|x| = \sqrt{(x, x)}\ . \tag{4.4}$$

უშუალო შემოწმებით შეიძლება დადგინდეს სკალარული ნამრავლის შემდეგი თვისებები:

$$
\begin{aligned}
&1.\ (x, y) = (y, x);\\
&2.\ (x + y, z) = (x, z) + (y, z);\\
&3.\ (\alpha x, y) = \alpha(x, y);\\
&4,\ (x, x) \geq 0; \quad (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = \theta.
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

კუთხის ცნების შემოღება $\mathbb{R}^n$ სივრცეში სრულიად ბუნებრივად ხდება სკალარული ნამრავლის საშუალებით (იხ. ფორმულა (4.10)). ამავე დროს, ეს შეიძლება გაკეთდეს არა მხოლოდ $\mathbb{R}^n$ სივრცეში, არამედ ნებისმიერ წრფივ სივრცეში, რომელშიც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი.

ზოგადად, კომპლექსურ წრვიფ სივრცეში სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება აქსიომატიკურად როგორც $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ ასახვა (ე.ი. წესი, რომლის მიხედვით E სივრცის ნებისმიერ ორ x და y ელემენტს შეესაბამება კომპლექსური (x, y) რიცხვი), რომელიც აკმაყოფილებს 2–4 აქსიომებს (იხ. (4.5)), ხოლო პირველი აქსიომა იცვლება შემდეგი აქსიომით

$$(x, y) = \overline{(y, x)},$$

სადაც $\overline{(y, x)}$ არის (x, y) კომპლექსური რიცხვის შეუღლებული რიცხვი.

ცხადია, რომ ნებისმიერი λ კომპლექსური რიცხვისათვის

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y).$$

წრფივ სივრცეს, რომელშიც განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლი, *ევკლიდეს სივრცე* ეწოდება. კომპლექსურ ევკლიდეს სივრცეს უწოდებენ აგრეთვე *უნიტარულ* (ან *ერმიტულ*) სივრცეს.

თუ ევკლიდეს E სივრცე ნამდვილი წრფივი სივრცეა, და, ამავე დროს, $\forall x, y \in E$ მათი სკალარული ნამრავლი ნამდვილი რიცხვია – $(x, y) \in \mathbb{R}$, მაშინ E-ს ვუწოდოთ *ნამდვილი ევკლიდეს სივრცე*.

მოვიტანოთ ევკლიდეს სივრცის ზოგიერთი მნიშვნელოვანი მაგალითი:

1. *კოორდინატული* $\mathbb{R}^n$ *სივრცე*. სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება (4.3) ტოლობით;
2. *კოორდინატული* $\mathbb{C}^n = \{(z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *სივრცე*, სადაც $\mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეა. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n;$$

3. *გეომეტრიულ ვექტორთა* V_3 *სივრცე*. სკალარული ნამრავლი ჩვეულებრივია $(\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathrm{V}_3,\ (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi)$ (იხ. §I.18);
4. $[a, b]$ *მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ ნამდვილ ფუნქციათა* $C[a, b]$ *წრფივი სივრცე*: $\forall f, g \in C[a, b]$

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx;$$

5. $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ კომპლექსურ ფუნქციათა $\mathbb{C}[a, b]$ წრფივი სივრცე: $\forall f, g \in \mathbb{C}[a, b]$

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

ვთქვათ, E ევკლიდეს სივრცეა. ამ სივრცის ნებისმიერი x ელემენტისათვის (4.4) ტოლობით განსაზღვრულ $|x|$ რიცხვს ეწოდება x ელემენტის ნორმა (სიგრძე ან მოდული):

$$|x| = \sqrt{(x,x)}\ .$$

თეორემა 4.1. *ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი x და y ელემენტისათვის*

$$|(x,y)| \le |x|\,|y|. \tag{4.6}$$

∇ თუ $y = \theta$, მაშინ უტოლობა ცხადია. ვთქვათ, $y \neq \theta$. სკალარული ნამრავლის მე-4 თვისების თანახმად ნებისმიერი λ კომპლექსური რიცხვისათვის გვაქვს

$$\begin{gathered}(x-\lambda y, x-\lambda y) = \\ = (x,x) - \lambda(y,x) - \overline{\lambda}(x,y) + |\lambda|^2(y,y) \ge 0.\end{gathered} \tag{4.7}$$

ავიღოთ $\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$. მაშინ (4.7)-დან მივიღებთ

$$(x,x) - \frac{(x,y)}{(y,y)}\,(y,x) - \frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}\,(x,y) + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}\,(y,y) \ge 0.$$

რადგან $(x,y)(y,x) = |(x,y)|^2$ და $\overline{(x,y)} \cdot (x,y) = |(x,y)|^2$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \ge 0$$

ანუ

$$|(x,y)|^2 \le (x,x)\cdot(y,y). \tag{4.8}$$

ამოფესვის შემდეგ მივიღებთ დასამტკიცებელ (4.6) უტოლობას. $\square$

(4.6) უტოლობას ეწოდება კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა.

შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობა გამოიყენება (4.8) სახით. $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემთხვევაში აქედან მივიღებთ ცნობილ რიცხვით უტოლობას

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right), \tag{4.9}$$

რომელიც სრულდება ნებისმიერი $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ნამდვილი რიცხვისათვის.

ევკლიდეს სივრცის ორ არანულოვან x და y ვექტორს ეწოდება ორთოგონალური, თუ $(x, y) = 0$ და ამ ფაქტს ასე აღნიშნავენ: $x \perp y$.

ზოგადად, ნამდვილი ევკლიდური სივრცის ორ არანულოვან x და y ვექტორს შორის კუთხე განისაზღვრება ტოლობით

$$\varphi = \arccos \frac{(x, y)}{|x|\,|y|}\ . \tag{4.10}$$

კოში-ბუნიაკოვსკის უტოლობის თანახმად

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x|\,|y|} \leq 1,$$

ამიტომ კუთხის ასეთი განსაზღვრება კორექტულია.

შევნიშნოთ, რომ შესაძლებელია ელემენტარული გეომეტრიის ზოგიერთი თეორემის განზოგადება ნებისმიერი ნამდვილი ევკლიდეს სივრცისათვის. მაგალითად, კოსინუსების თეორემას აქვს შემდეგი სახე

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x|\,|y| \cos\varphi, \tag{4.11}$$

სადაც φ არის კუთხე x და y ვექტორებს შორის (დაამტკიცეთ).

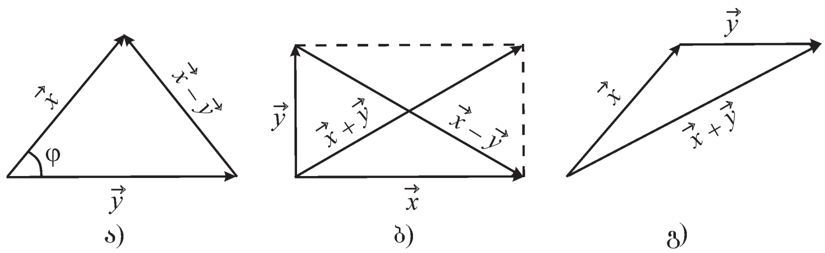
კერძო შემთხვევაში, როცა $\varphi = 90^\circ$ (ე.ი. $x \perp y$), აქედან მიიღება *პითაგორას თეორემა*

$$|x \pm y|^2 = |x|^2 + |y|^2. \tag{4.12}$$

ნებისმიერ ევკლიდეს სივრცეში მართებულია აგრეთვე ე.წ. *სამკუთხედის უტოლობა*

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|. \tag{4.13}$$

V_2 სივრცის შემთხვევაში ამ თვისებებს აქვთ კარგად ცნობილი გეომეტრიული შინაარსი (იხ. შესაბამისად, ნახ. 4.1 ა), 4.1 ბ) და 4.1 ა), გ)).



ნახ. 4.1

ისევე, როგორც $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემთხვევაში (იხ. (4.2)), *მანძილი* ევკლიდეს E სივრცის x და y ელემენტებს შორის განისაზღვრება ტოლობით

$$\rho(x,y) = |x - y|. \tag{4.14}$$

ადვილად მოწმდება, რომ $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} &1.\ \ \rho(x,y) = \rho(y,x); \\ &2.\ \ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z); \\ &3.\ \ \rho(x,y) > 0, \ \text{ თუ } \ x \neq y; \quad \rho(x,x) = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

ზოგადად, თუ მოცემულია წესი, რომლის თანახმად E სიმრავლის ნებისმიერ ორ x და y ელემენტს შეესაბამება გარკვეული

არაუარყოფითი $\rho(x, y)$ რიცხვი ისე, რომ შესრულებულია (4.15) პირობები, მაშინ ასეთ E სიმრავლეს ეწოდება *მეტრიკული სივრცე*, ხოლო არაუარყოფით $\rho(x, y)$ რიცხვს – *მანძილი* x *და* y *ელემენტებს შორის*. $\rho(x, y)$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნამდვილი რიცხვითი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (4.15) პირობებს. ასეთ ფუნქციას E *სიმრავლის მეტრიკა* ეწოდება.

ამრიგად, ყოველი ევკლიდეს სივრცე (და მაშასადამე, $\mathbb{R}^n$ სივრცეც) შეიძლება განვიხილოთ როგორც მეტრიკული სივრცე (4.14) ტოლობით განსაზღვრული მეტრიკით. აქვე შევნიშნოთ, რომ მეტრიკა შეიძლება იყოს შემოღებული ისეთი სიმრავლისათვისაც, რომელიც არ წარმოადგენს წრფივ სივრცეს. მაგალითად, ნებისმიერი ორელემენტიანი $M = \{x, y\}$ სიმრავლე, სადაც $\rho(x, y) = 1$, $\rho(x, x) = \rho(y, y) = 0$, არის მეტრიკული სივრცე.

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი ორი $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ელემენტისათვის $d(x, y)$-ით აღვნიშნოთ $x - y$ ვექტორის არანულოვანი კოორდინატების რიცხვი (ე.ი. x და y ვექტორების განსხვავებული კოორდინატების რაოდენობა). მაგალითად, თუ $x = (2, 3, 0)$, $y = (1, 3, 1)$, მაშინ $x - y = (1, 0, -1)$ და შესაბამისად $d(x, y) = 2$.

სავარჯიშო 4.2. დაამტკიცეთ, რომ $d(x, y)$ წარმოადგენს $\mathbb{R}^n$ სივრცის მეტრიკას.

შევნიშნოთ, რომ ასეთი მეტრიკა გამოიყენება კოდირების თეორიაში (იხ. §28).

§5. წრფივი სივრცის ვექტორთა წრფივად დამოკიდებულება და წრფივად დამოუკიდებლობა

ვთქვათ, E წრფივი სივრცეა და $a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$. გამოსახულებას

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n, \tag{5.1}$$

სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ნებისმიერი რიცხვებია, ეწოდება $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ვექტორების *წრფივი კომბინაცია*. (5.1) წრფივ კომბინაციას ეწოდება *ტრივიალური*, თუ $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, და ეწოდება *არატრივიალური*, თუ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვებს შორის ერთი მაინც არანულოვანია (ე.ი. $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| \neq 0$).

ცხადია, რომ ვექტორთა ყოველი ტრივიალური კომბინაცია ნულოვანი ვექტორის ტოლია, ე.ი. $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in E$ შესრულდება ტოლობა

$$0a_1 + 0a_2 + \cdots 0a_n = \theta.$$

წრფივი E სივრცის

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{5.2}$$

ვექტორთა სისტემას (ანუ, მოკლედ, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ვექტორებს) ეწოდება *წრფივად დამოკიდებული*, თუ არსებობს მათი არატრივიალური წრფივი კომბინაცია, რომელიც ნულოვანი θ ვექტორის ტოლია.

ამრიგად, ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია, თუ მოიძებნება ისეთი $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ რიცხვები, რომელთა შორის ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, რომ

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = \theta. \tag{5.3}$$

E სივრცის ვექტორთა(5.2) სისტემას ეწოდება *წრფივად დამოუკიდებელი*, თუ ის არ არის წრფივად დამოკიდებული, ანუ

სხვაგვარად, თუ (5.3) ტოლობა სრულდება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

თეორემა 5.1. *იმისათვის, რომ წრფივი E სივრცის ვექტორთა (5.2) სისტემა იყოს წრფივად დამოკიდებული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სისტემის ერთ-ერთი ვექტორი იყოს დანარჩენი ვექტორების წრფივი კომბინაციის ტოლი.*

∇ აუცილებლობა. ვთქვათ, (5.2) ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. მაშინ იარსებებს ამ ვექტორების ისეთი არატრივიალური $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$ წრფივი კომბინაცია, რომელიც ნულოვანი θ ვექტორის ტოლია. ვთქვათ, $\alpha_n \neq 0$. მესამე პარაგრაფის ბოლოს გაკეთებული შენიშვნის გათვალისწინებით (5.3)-დან მივიღებთ, რომ

$$a_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} a_2 - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} a_{n-1},$$

ე.ი. a_n ვექტორი არის დანარჩენი $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის ტოლი.

საკმარისობა. დავუშვათ, რომ (5.2) სისტემის ერთ-ერთი ვექტორი, მაგალითად, a_n არის დანარჩენი $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ ვექტორების წრფივი კომბინაცია:

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

გადავწეროთ ეს ტოლობა შემდეგი სახით:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1} + (-1) a_n = \theta.$$

რადგან a_n ვექტორთან მდგომი $\alpha_n = -1$ კოეფიციენტი არ უდრის 0-ს, ამიტომ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოკიდებულია. $\square$

შედეგი 5.2. *თუ* (5.2) *ვექტორთა სისტემისათვის სრულდება ერთ-ერთი შემდეგ სამი პირობიდან:*

1. *სისტემის ვექტორთა შორის არის ნულოვანი θ ვექტორი,*

2. *სისტემაში არის ტოლი ვექტორები,*

3. *სისტემის რომელიმე ქვესისტემა წრფივად დამოკიდებულია,*

მაშინ ეს სისტემა წრვიფად დამოკიდებულია.

შედეგი 5.3. *თუ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ წრფივად დამოუკიდებელია მისი ნებისმიერი ქვესისტემა* (*დაამტკიცეთ საწინააღმდეგოს დაშვებით*).

ვთქვათ, მოცემულია n-ური რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{5.4}$$

განვიხილოთ ამ დეტერმინანტის სტრიქონები (სვეტები) როგორც $\mathbb{R}^n$ სივრცის ელემენტები. ცხადია, რომ თუ დეტერმინანტის ერთ-ერთი სტრიქონი (სვეტი) წარმოადგენს დანარჩენი სტრიქონების (სვეტების) წრფივ კომბინაციას, მაშინ ეს დეტერმინანტი ნულის ტოლია (თუ ამ სტრიქონს (სვეტს) გამოვაკლებთ დანარჩენი სტრიქონების (სვეტების) აღნიშნულ წრფივ კომბინაციას, მივიღებთ ნულოვან სტრიქონს (სვეტს)). 5.1 თეორემის გათვალისწინებით ეს შედეგი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

თეორემა 5.4. *დეტერმინანტის ნულთან ტოლობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ დეტერმინანტის სტრიქონები* (*სვეტები*) *იყოს წრფივად დამოკიდებული.*

ამ თეორემის აუცილებლობა დამტკიცებული იქნება მოგვიანებით (იხ.თეორემა 7.7).

$\mathbb{R}^n$ სივრცის ტერმინებში აღნიშნული თეორემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

თეორემა 5.5. *იმისათვის, რომ* $\mathbb{R}^n$ *სივრცის* $e_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $e_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$,...,$e_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$ *ვექტორთა სისტემა იყოს წრფივად დამოუკიდებელი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი* (5.4) *დეტერმინანტი არ იყოს ნულის ტოლი.*

სავარჯიშო 5.6. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის $e_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $e_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$, ..., $e_m = (a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})$ ვექტორთა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი A მატრიცის რანგი არის m-ის ტოლია ($m \leq n$).

§6. წრფივი სივრცის ბაზისი და განზომილება

1. წრფივი სივრცის ბაზისი. ზოგადად, რაიმე სიმრავლის ბაზისი განისაზღვრება როგორც მისი მინიმალური ქვესიმრავლე, რომელიც გარკვეული აზრით წარმოქმნის მთელ სიმრავლეს. ბაზისი ბერძნული სიტყვაა და ნიშნავს ფუძეს, საფუძველს. წრფივი სივრცის შემთხვევაში ბაზისი არის ამ სივრცის ისეთ ვექტორთა მინიმალური სისტემა, რომელთა ყველა შესაძლო წრფივ კომბინაციათა სიმრავლე (ე.წ. წრფივი გარსი) ემთხვევა მთელ სივრცეს. სისტემის მინიმალურობა ნიშნავს, რომ ამ სისტემის არც ერთი ვექტორი არ წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას

(ე.ი. სისტემა არის წრფივად დამოუკიდებელი), ხოლო მეორე პირობა ნიშნავს, რომ ამ სივრცის ნებისმიერი ვექტორი წარმოიდგინება ბაზისში შემავალი ვექტორების წრფივი კომბინაციით.

ამრიგად, E *სივრცის ბაზისი* არის ამ სივრცის ვექტორთა ნებისმიერი დალაგებული $e_1, e_2, \dots, e_n$ სისტემა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1. $e_1, e_2, \dots, e_n$ სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია;

2. E სივრცის ნებისმიერი x ვექტორი წარმოადგენს $e_1, e_2,$ $\dots, e_n$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \tag{6.1}$$

$e_1, e_2, \dots, e_n$ წრფივად დამოუკიდებლობის გამო $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ კოეფიციენტები (6.1) ტოლობაში განისაზღვრება ცალსახად (დაამტკიცეთ) და მათ ეწოდებათ x *ვექტორის კოორდინატები მოცემულ ბაზისში*. იმ ფაქტს, რომ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ არის x ვექტორის კოორდინატები $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში, მოკლედ ასე აღვნიშნავთ

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_e.$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ თუ

$$a = (x_1, x_2, \dots, x_n)_e, \quad b = (y_1, y_2, \dots, y_n)_e, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

მაშინ

$$a + b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)_e,$$
$$\alpha a = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)_e.$$

თეორემა 6.1. *$\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი n წრფივად დამოუკიდებელი $e_1, e_2, \dots, e_n$ ვექტორი წარმოადგენს ამ სივრცის ბაზისს.*

∇ ვთქვათ, x არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ნებისმიერი ვექტორი. განვიხილოთ

$$x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = x \tag{6.2}$$

ვექტორული განტოლება $x_1, x_2, \ldots, x_n$ უცნობების მიმართ $(x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R})$. ჩავწეროთ ეს განტოლება კოორდინატებში. თუ

$$e_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \quad e_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots,$$
$$e_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}), \quad x = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

მაშინ (6.2) -დან მივიღებთ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{6.3}$$

რადგან $e_1, e_2, \ldots, e_n$ წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, ამიტომ (იხ. თეორემა 5.5) ამ სისტემის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

ეს ნიშნავს, რომ (6.3) სისტემა თავსებადია და მას აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ (თეორემა I.11.3). თუ შევიტანთ უცნობების ამ მნიშვნელობებს (6.2)-ში, მივიღებთ x ვექტორის წარმოდგენას $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ვექტორების წრფივი კომბინაციის სახით. $\square$

ჩვეულებრივ ვექტორთა V_3 სივრცეში, რომელიც $\mathbb{R}^3$ სივრცის იზომორფულია (იხ. §2),

$$\vec{i} = (1,0,0), \quad \vec{j} = (0,1,0), \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

ვექტორთა სისტემა ქმნის ამ სივრცის ერთ-ერთ ბაზისს, რომელსაც ეწოდება ბუნებრივი ბაზისი.

ამოცანა 6.2. ვაჩვენოთ, რომ

$$\vec{a} = (2,4,-1), \quad \vec{b} = (-1,3,4), \quad \vec{c} = (1,2,-3)$$

წარმოადგენს V_3 სივრცის ბაზისს და ვიპოვოთ $\vec{d} = (5,5,-11)$ ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში.

∇ რადგან ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ამიტომ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ვექტორები ქმნიან V_3 სივრცის ბაზისს. $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატების საპოვნელად ჩავწეროთ $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ტოლობა კოორდინატებში და ამოვხსნათ მიღებული სისტემა

$$\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ 4x + 3y + 2z = 5 \\ -x + 4y - 3z = -11. \end{cases}$$

აქედან მივიღებთ $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ და შესაბამისად

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}.$$

ამრიგად, $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატები მოცემულ ბაზისში არის $(1,-1,2)$. $\square$

თეორემა 6.3. *თუ წრფივი E სივრცის ბაზისი შედგება n ვექტორისაგან, მაშინ ამ სივრცის ნებისმიერი $n+1$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.*

∇ ვთქვათ, $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ წრფივი E სივრცის ნებისმიერი ვექტორებია. თუ (6.3)-ის მსგავსად, ვექტორულ

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_{n+1} b_{n+1} = \theta$$

განტოლებას $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ უცნობების მიმართ ჩავწერთ კოორდინატებში, მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას, რომელშიც განტოლებათა n რაოდენობა ნაკლებია $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ უცნობთა რაოდენობაზე. ასეთ ერთგვაროვან სისტემას კი, როგორც ცნობილია (იხ. შედეგი I.13.4), აქვს არანულოვანი $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2, \ldots, x_{n+1} = \alpha_{n+1}$ ამონახსნი. $\square$

2. წრფივი სივრცის განზომილება. ნებისმიერ წრფივ სივრცეში არსებობს ბაზისთა უსასრულო რაოდენობა. სივრცის ბაზისი ცალსახად განსაზღვრული არ არის, მაგრამ, როგორც 6.3 თეორემიდან გამომდინარეობს, ცალსახად განისაზღვრება ბაზისში შემავალ ვექტორთა რაოდენობა.

წრფივი E სივრცის ბაზისში შემავალ ვექტორთა რაოდენობას ეწოდება *E სივრცის განზომილება* და აღინიშნება $\dim E$ სიმბოლოთი ("dimension" ფრანგულად ნიშნავს განზომილებას).

6.3 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ *სივრცის განზომილება შეიძლება განისაზღვროს როგორც ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვი.*

სივრცის განზომილების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

1. $\dim \mathbb{R}^n = n$,
2. $\dim \mathrm{V}_2 = 2$,

3. $\dim \mathrm{V}_3 = 3$.

სავარჯიშო 6.4. დაამტკიცეთ, რომ მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა წრფივი სივრცე ოთხგანზომილებიანია, ხოლო

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

არის ამ სივრცის ერთ-ერთი ბაზისი.

თუ ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის E სივრცეში არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი, მაშინ E სივრცეს *უსასრულო განზომილებიანი* ეწოდება. მაგალითად, უსასრულო განზომილებიანია მოცემულ $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა წრფივი სივრცე (ნებისმიერი n რიცხვისათვის $1, x, x^2, \ldots, x^n$ ფუნქციათა სისტემა წრფივად დამოუკიდებელია).

შევნიშნოთ, რომ ნულოვანი $\{\theta\}$ სივრცის განზომილებად მიღებულია რიცხვი 0, ე.ი. $\dim\{\theta\} = 0$.

ვთქვათ, $\dim E = n$ და $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ამ სივრცის ბაზისია. E სივრცის ყოველ

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

ელემენტს შევუსაბამოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცის $x' = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ვექტორი. ცხადია, რომ ასეთი შესაბამისობა ურთიერთცალსახაა და ინარჩუნებს წრფივ ოპერაციებს, ე.ი. ნებისმიერი n-განზომილებიანი წრფივი სივრცე $\mathbb{R}^n$ სივრცის იზომორფულია

$$E \cong \mathbb{R}^n.$$

ამის გამო $\mathbb{R}^n$ სივრცე შეიძლება განვიხილოთ როგორც გარკვეული აზრით უნივერსალური n-განზომილებიანი წრფივი სივრცე.

სავარჯიშო 6.5. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\dim E = n$, მაშინ ნებისმიერი n წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი ქმნის ამ სივრცის ბაზისს.

შევნიშნოთ, რომ ამ სავარჯიშოში აღნიშნული პირობა შეიძლება მივიღოთ სივრცის ბაზისის განსაზღვრებად:

n-განზომილებიანი წრფივი სივრცის ბაზისი ეწოდება ამ სივრცის წრფივად დამოუკიდებელ n ვექტორთა დალაგებულ სისტემას.

ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ წრფივი E სივრცის ნებისმიერი ელემენტებია. ამ ელემენტების ყველა შესაძლო წრფივ $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$ კომბინაციათა $L(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ სიმრავლეს ეწოდება $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ვექტორების *წრფივი გარსი*. ცხადია, რომ $L(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ სიმრავლე არის წრფივი E სივრცის წრფივი ქვესივრცე. ამავე დროს, E სივრცის ნებისმიერი ქვესივრცე, რომელიც შეიცავს $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ელემენტებს, შეიცავს აგრეთვე მათ ყველა წრფივ კომბინაციას. ამრიგად, $L(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *წრფივი გარსი არის წრფივი E სივრცის მინიმალური ქვესივრცე, რომელიც შეიცავს $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ელემენტებს.* ამ ქვესივრცის განზომილება $x_1, x_2, \ldots, x_k$ სისტემის წრფივად დამოუკიდებელ ვექტორთა მაქსიმალური რიცხვის ტოლია.

მაგალითი 6.6. ვიპოვოთ $x_1 = (2, -1, 1, 3)$, $x_2 = (-1, 2, 1, 0)$, $x_3 = (0, 3, 3, 3)$ ვექტორების წრფივი $L(x_1, x_2, x_3)$ გარსის განზომილება და ერთ-ერთი ბაზისი.

∇ განვიხილოთ x_1, x_2, x_3 ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

მატრიცა. უშუალოდ მოწმდება, რომ ამ მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია და $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ არის A მატრიცის ბაზისური მინორი. აქედან გამომდინარეობს, რომ $L(x_1, x_2, x_3)$ ქვესივრცის განზომილება არის 2-ის ტოლი და x_1, x_2 წარმოადგენს მის ერთ-ერთ ბაზისს. $\square$

3. ორთონორმირებული ბაზისი. ევკლიდეს სივრცის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისს ეწოდება *ორთოგონალური*, თუ

$$(e_i, e_j) = 0, \quad \text{როცა} \quad i \neq j,$$

და ეწოდება *ორთონორმირებული*, თუ

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } i \neq j, \\ 1, & \text{თუ } i = j. \end{cases}$$

ამრიგად, ორთონორმირებული ბაზისი არის ისეთი ორთოგონალური ბაზისი, რომლის ყველა ვექტორის ნორმა ერთის ტოლია. ცხადია, რომ თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ არის ევკლიდეს სივრცის ნებისმიერი ორთოგონალური ბაზისი, მაშინ

$$\frac{1}{|e_1|}\, e_1, \ \frac{1}{|e_2|}\, e_2, \ldots, \ \frac{1}{|e_n|}\, e_n$$

იქნება ამ სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი.

მტკიცდება, რომ ნებისმიერ სასრულგანზომილებიან ევკლიდეს სივრცეში არსებობს ორთოგონალური (და მაშასადამე, ორთონორმირებული) ბაზისი. მაგალითად, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ერთ-ერთი ორთონორმირებული ბაზისი.

თეორემა 6.7. თუ $e_1, e_2, \dots, e_n$ არის ევკლიდეს სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი და

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)_e, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)_e,$$

მაშინ x და y ვექტორების სკალარული ნამრავლი გამოითვლება ფორმულით

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \tag{6.4}$$

შედეგი 6.8. ორთონორმირებული ბაზისის შემთხვევაში

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\,,$$

ხოლო φ კუთხე არანულოვან x და y ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\varphi = \arccos \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}}\,.$$

თეორემა 6.9. თუ $e_1, e_2, \dots, e_n$ არის ევკლიდეს E სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, მაშინ $\forall x \in E$

$$x = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + \dots + (x, e_n)e_n. \tag{6.5}$$

∇ ვთქვათ,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \tag{6.6}$$

და $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. გავამრავლოთ (6.6) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად e_i ვექტორზე:

$$(x, e_i) = x_1(e_1, e_i) + x_2(e_2, e_i) + \cdots + x_n(e_n, e_i). \qquad (6.7)$$

რადგან $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ორთონორმირებული ბაზისია, ამიტომ (6.7)-ის ყველა შესაკრები, გარდა ერთისა, ნულის ტოლია და

$$(x, e_i) = x_i(e_i, e_i) = x_i.$$

ამრიგად, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $x_i = (x, e_i)$, რაც ამტკიცებს (6.5) ტოლობას. $\square$

§7. ერთი ბაზისიდან მეორე ბაზისზე გადასვლა

ვთქვათ, წრფივ E სივრცეში ფიქსირებულია ორი ბაზისი:

$$e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \quad \text{და} \quad e' = \{e'_1 e'_2, \ldots, e'_n\}.$$

დავშალოთ e' ბაზისის ელემენტები e ბაზისის მიხედვით:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (7.1)$$

ან, გაშლილი სახით,

$$\left\{ \begin{array}{l} e'_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e'_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e'_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{array} \right. \qquad (7.2)$$

a_{ij} კოეფიციენტებისაგან შედგენილ შემდეგ

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7.3)$$

მატრიცას ეწოდება $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა.

თეორემა 7.1. *თუ* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ და $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ არის $x \in E$ ვექტორის კოორდინატები შესაბამისად $e_1, e_2, \ldots, e_n$ და $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისებში, მაშინ

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1n}x'_n \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + \cdots + a_{2n}x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \cdots + a_{nn}x'_n \end{cases} \tag{7.4}$$

ან, მატრიცული სახით,

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}', \tag{7.5}$$

სადაც A არის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის (7.3) მატრიცა,

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^\top \quad \text{და}$$

$$\mathrm{X}' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \cdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \end{bmatrix}^\top .$$

∇ (7.1)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x'_j a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ij} \right) e_i, \end{aligned}$$

ე.ი.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \right) e_i. \tag{7.6}$$

მეორე მხრივ,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i. \tag{7.7}$$

თუ შევადარებთ ერთმანეთს (7.6) და (7.7) ტოლობებს და გავითვალისწინებთ დაშლის ერთადერთობას, მივიღებთ, რომ

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

რაც ამტკიცებს თეორემას. $\square$

თეორემა 7.2. *თუ* A *არის* e *ბაზისიდან* e' *ბაზისზე გადასვლის მატრიცა, მაშინ* A *მატრიცის შებრუნებული* A^{-1} *მატრიცა იქნება* e' *ბაზისიდან* e *ბაზისზე გადასვლის მატრიცა.*

∇ წინა თეორემის აღნიშვნებში $\mathrm{X} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}'$. თუ B არის e' ბაზისიდან e ბაზისზე გადასვლის მატრიცა, მაშინ ანალოგიურად, $\mathrm{X}' = \mathrm{B}\,\mathrm{X}$. აქედან მივიღებთ

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}' = \mathrm{A}(\mathrm{B}\,\mathrm{X}) = (\mathrm{A}\,\mathrm{B})\,\mathrm{X}\,.$$

რადგან

$$\mathrm{X} = (\mathrm{A}\,\mathrm{B})\,\mathrm{X}$$

ტოლობა სრულდება ნებისმიერი X სვეტ-მატრიცისათვის, ამიტომ $\mathrm{A}\,\mathrm{B} = \mathrm{I}$, სადაც I ერთეულოვანი მატრიცაა. ანალოგიურად დამტკიცდება ტოლობა $\mathrm{B}\,\mathrm{A} = \mathrm{I}$. ამრიგად, $\mathrm{A}\,\mathrm{B} = \mathrm{B}\,\mathrm{A} = \mathrm{I}$ და მაშასადამე, $\mathrm{B} = \mathrm{A}^{-1}$. $\square$

შედეგი 7.3. *ერთი ბაზისიდან მეორე ბაზისზე გადასვლის მატრიცა არაგადაგვარებულია.*

შედეგი 7.4. *თუ* A *არის* e *ბაზისიდან* e' *ბაზისზე გადასვლის მატრიცა, მაშინ*

$$\mathrm{X}' = \mathrm{A}^{-1}\,\mathrm{X}\,. \tag{7.8}$$

მაგალითი 7.5. ცნობილია a ვექტორის კოორდინატები e_1', e_2', e_3' ბაზისში:

$$a = (6; -1; 3)_{e_i'}. \tag{7.9}$$

ვიპოვოთ ამ ვექტორის კოორდინატები e_1, e_2, e_3 ბაზისში, თუ e_1, e_2, e_3 ბაზისიდან e_1', e_2', e_3' ბაზისზე გადასვლის მატრიცაა

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

∇ (7.4)-დან ფორმულის თანახმად

$$\begin{cases} x = x' + 2y' - z' \\ y = x' - y' + z' \\ z = 2x' + z'. \end{cases}$$

რადგან $x' = 6$, $y' = -1$, $z' = 3$, ამიტომ

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 10 \\ z = 15. \end{cases}$$

ამრიგად, e_1, e_2, e_3 ბაზისში a ვექტორის კოორდინატებია

$$a = (1; 10; 15)_{e_i}. \quad \square$$

მაგალითი 7.6. წინა მაგალითის პირობებში ვიპოვოთ $a = (1; 10; 15)_{e_i}$ ვექტორის კოორდინატები e'_i ბაზისში.

∇ (7.8) ფორმულის თანახმად უნდა ვიპოვოთ A მატრიცის შებრუნებული A^{-1} მატრიცა. რადგან

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

ხოლო მიკავშირებული მატრიცაა

$$A^* = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

ამიტომ

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}} A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

აქედან

$$\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = -x - 3y + 2z \\ z' = -2x - 4y + 3z. \end{cases}$$

რადგან $x = 1$, $y = 10$, $z = 15$, ამიტომ $x' = 6$, $y' = -1$, $z' = 3$ (შეადარეთ (7.9)-ს). $\square$

მიღებული შედეგების გათვალისწინებით დავამტკიცოთ მეხუთე პარაგრაფში ანონსირებული შედეგი (იხ. თეორემა 5.4).

თეორემა 7.7. *თუ $\Delta = 0$, მაშინ ამ დეტერმინანტის სტრიქონები (სვეტები) წრფივად დამოკიდებულია.*

∇ დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, ამ დეტერმინანტის

$$e'_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad e'_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ e'_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

სვეტები წრფივად დამოუკიდებელია. მაშინ $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ვექტორები ქმნიან $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბაზისს. რადგან

$$e'_j = a_{1j} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + a_{2j} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

ამიტომ $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ მატრიცა არის

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა და, მაშასადამე, არაგადაგვარებულია, ე.ი. $\Delta = \det \mathrm{A} \neq 0$. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემას. $\square$

§8. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი და არაერთგვაროვანი სისტემების ზოგადი ამონახსნების სტრუქტურა

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

და A ამ სისტემის მატრიცაა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ (იხ. §2), ერთგვაროვანი (8.1) სისტემის ამონახსნთა E სიმრავლე წარმოადგენს $\mathbb{R}^n$ სივრცის ქვესივრცეს. თუ $\operatorname{rank}\mathrm{A} = n$, მაშინ ერთგვაროვან (8.1) სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი (იხ. შედეგი I.13.3) და მაშასადამე $\dim E = 0$. შეიძლება დამტკიცდეს, რომ ზოგადად (იხ. თეორემა I.13.2 და მაგალითი 8.2)

$$\dim E = n - r, \tag{8.2}$$

სადაც $r = \operatorname{rank}\mathrm{A}$. E სივრცის ბაზისს ეწოდება ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა *ფუნდამენტური სისტემა*. თუ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა, მაშინ $c_1, c_2, \ldots, c_k$ მუდმივების ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობისათვის

$$x = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k \quad (k = n - r) \tag{8.3}$$

გამოსახულება გვაძლევს (8.1) სისტემის კონკრეტულ (კერძო) ამონახსნს. ამავე დროს, (8.1) სისტემის ყოველი ამონახსნი მიიღება (8.3)-დან $c_1, c_2, \ldots, c_k$ მუდმივების შესაბამისი შერჩევით. ასეთ შემთხვევაში ამბობენ, რომ (8.3) არის (8.1) სისტემის ზოგადი ამონახსნი. ჩამოვაყალიბოთ აღნიშნული შედეგი თეორემის სახით.

თეორემა 8.1 (ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი სტრუქტურის შესახებ). *წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი წარმოადგენს ფუნდამენტური სისტემის ამონახსნთა წრფივ კომბინაციას.*

მაგალითი 8.2. ვიპოვოთ ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0 \\ -7x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა.

∇ მარტივად ვაჩვენებთ, რომ სისტემის მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია. დავტოვოთ ამ სისტემაში მხოლოდ პირველი ორი განტოლება (ამ განტოლებების კოეფიციენტები ადგენენ მატრიცის ბაზისურ მინორს) და გადავწეროთ მიღებული სისტემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3 + 4x_4 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

მივანიჭოთ x_3 და x_4 თავისუფალ უცნობებს $x_3 = \alpha_1$ და $x_4 = \alpha_2$ რიცხვითი მნიშვნელობები და ამოვხსნათ მიღებული სისტემა კრამერის ფორმულებით:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7\alpha_1 - 7\alpha_2}{-11} = \frac{7}{11}\,\alpha_1 + \frac{7}{11}\,\alpha_2,$$
$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\alpha_1 - 10\alpha_2}{-11} = -\frac{1}{11}\,\alpha_1 + \frac{10}{11}\,\alpha_2.$$

ამრიგად, სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე არის

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{11}\,\alpha_1 + \frac{7}{11}\,\alpha_2 \\ x_2 = -\frac{1}{11}\,\alpha_1 + \frac{10}{11}\,\alpha_2 \\ x_3 = \alpha_1 \\ x_4 = \alpha_2. \end{cases} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

ეს სიმრავლე შეიძლება ჩაიწეროს აგრეთვე შემდეგი სახით

$$\begin{cases} x_1 = 7c_1 + 7c_2 \\ x_2 = -c_1 + 10c_2 \\ x_3 = 11c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \tag{8.5}$$

(აქ $c_1 = \frac{1}{11}\,\alpha_1$, $c_2 = \frac{1}{11}\,\alpha_2$).

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

და ჩავწეროთ (8.5) ტოლობა მატრიცული ფორმით

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2. \tag{8.6}$$

(8.6) არის ერთგვაროვანი (8.4) სისტემის ზოგადი ამონახსნი, ხოლო

$$v_1 = (7; -1; 11; 0)^\top, \quad v_2 = (7; 10; 0; 11)^\top \tag{8.7}$$

ამ სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემაა. $\square$

ახლა განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \ + \ a_{12}x_2 \ + \cdots + \ a_{1n}x_n \ = \ b_1 \\ a_{21}x_1 \ + \ a_{22}x_2 \ + \cdots + \ a_{2n}x_n \ = \ b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \tag{8.8}$$

(8.1) სისტემას ეწოდება არაერთგვაროვანი (8.8) სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემა. ჩავწეროთ (8.8) სისტემა მატრიცული სახით

$$\mathrm{A\,X} = \mathrm{B}\,. \tag{8.9}$$

ვთქვათ, $\overline{\mathrm{A}}$ არის (8.8) სისტემის გაფართოებული მატრიცა და $\operatorname{rank}\mathrm{A} = \operatorname{rank}\overline{\mathrm{A}} = r$. ამასთან, ვთქვათ, X_0 არის (8.9) მატრიცული განტოლების ერთ-ერთი ამონახსნი. თუ (8.9) განტოლებას გამოვაკლებთ

$$\mathrm{A\,X}_0 = \mathrm{B}$$

მატრიცულ ტოლობას, მივიღებთ (8.9) განტოლების ტოლფასს განტოლებას

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} - \mathrm{X}_0) = 0.$$

ეს განტოლება წარმოადგენს ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის მატრიცულ ჩანაწერს, ამიტომ მისი ზოგადი ამონახსნი ფუნდამენტური სისტემის $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ამონახსნთა წრფივი კომბინაციის ტოლია, ე.ი.

$$x - x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k. \tag{8.10}$$

აქედან

$$x = x_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k.$$

მიღებული შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 8.3 (არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის სტრუქტურის შესახებ). *წრფივ ალგებრულ განტოლებათა არაერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნი მისი რომელიმე კერძო ამონახსნისა და ამ სისტემის შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის ჯამის ტოლია.*

მაგალითი 8.4. ჩავწეროთ

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 5 \\ -7x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 9x_4 = -7 \end{cases} \tag{8.11}$$

სისტემის ზოგადი ამონახსნი მისი რომელიმე კერძო ამონახსნისა და შესაბამისი ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის ჯამის სახით.

∇ (8.11)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი (8.4) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა შედგება $v_1 = (7; -1; 11; 0)^\top$ და $v_2 = (7; 10; 0; 11)^\top$ ვექტორებისაგან (იხ. 8.7). ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$x_0 = (1; 0; 0; 0)^\top$$

არის (8.11) არაერთგვაროვანი სისტემის კერძო ამონახსნი. ამიტომ (8.11) სისტემის ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 = \\ &= (1; 0; 0; 0)^\top + c_1 (7; -1; 11; 0)^\top + c_2 (7; 10; 0; 11)^\top. \end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ჩვენ შევასრულებთ აღნიშნულ მოქმედებებს, მივიღებთ (8.11) სისტემის ამონახსნებს ჩვეულებრივი სახით (შეადარეთ I. (13.1)-ს)

$$x = (7c_1 + 7c_2 + 1; -c_1 + 10c_2; 11c_1; 11c_2)^\top \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \quad \square$$

ამოცანები და სავარჯიშოები

I.1. იპოვეთ $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^3 და $A \times B \times C$, თუ

ა) $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 3\}$, $C = \{4\}$;

ბ) $A = \{-1, 1\}$, $B = \{1\}$, $C = \{0, 1\}$;

გ) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$;

დ) $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \{1, 2\}$.

I.2. $P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \equiv y \pmod 3\}$. არის თუ არა მთელი x რიცხვი P_3 მიმართებაში მთელ y რიცხვთან, თუ

ა) $x = -2$, $y = 3$; ბ) $x = 1$, $y = -5$; გ) $x = -5$, $y = 1$;

დ) $x = 0$, $y = 12$; ე) $x = 15$, $y = 125$; ვ) $x = -16$, $y = 20$?

I.3. ამოწერეთ P_3 მიმართების (იხ. სავარჯიშო I.2) შესაბამის K_m ეკვივალენტობის კლასში შემავალი რიცხვები, თუ

ა) $m = 0$; ბ) $m = 1$; გ) $m = 2$.

I.4. გამოარკვიეთ, რომელია მოცემული მიმართებებიდან ეკვივალენტობის და დალაგების მიმართებები:

ა) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\}$;

ბ) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x > y\}$;

გ) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 \leq y^2\}$;

დ) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = y^2\}$;

ე) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y \leq 0\}$;

ვ) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x = y\}$;

ზ) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x$ იყოფა y-ზე$\}$;

თ) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2$ იყოფა y-ზე$\}$;

ი) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2$ იყოფა y^2-ზე$\}$.

I.5. შეიძლება თუ არა $\mathbb{N}$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ბინარული $\dot{+}$ ოპერაცია ტოლობით:

ა) $x\dot{+}y = x + y$; ბ) $x\dot{+}y = xy$; გ) $x\dot{+}y = 2x + 3y$;
დ) $x\dot{+}y = x^y$; ე) $x\dot{+}y = x - y$; ვ) $x\dot{+}y = x : y$;
ზ) $x\dot{+}y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$?

I.6. ამოხსენით სავარჯიშო I.5 $\mathbb{Z}$ სიმრავლის შემთხვევაში (დ) და ვ) პუნქტებში განიხილეთ არანულოვან მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ სიმრავლე).

I.7. ამოხსენით სავარჯიშო I.5 $\mathbb{Q}$ სიმრავლის შემთხვევაში (დ) და ვ) პუნქტებში განიხილეთ $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ სიმრავლე).

I.8. ამოხსენით სავარჯიშო I.5 $\mathbb{R}$ სიმრავლის შემთხვევაში (დ) და ვ) პუნქტებში განიხილეთ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ სიმრავლე).

I.9. შეიძლება თუ არა გეომეტრიულ ვექტორთა (მიმართულ მონაკვეთთა) V_3 სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ბინარული $\dot{+}$ ოპერაცია ტოლობით:

ა) $\vec{a}\dot{+}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b}$, სადაც $\vec{a}\cdot\vec{b}$ არის ვექტორების სკალარული ნამრავლი;

ბ) $\vec{a}\dot{+}\vec{b} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, სადაც $+$ არის ვექტორების შეკრების ოპერაცია;

გ) $\vec{a}\dot{+}\vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$, სადაც $-$ არის ვექტორების გამოკლების ოპერაცია;

დ) $\vec{a}\dot{+}\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}$, სადაც $\vec{a}\times\vec{b}$ არის ვექტორების ვექტორული ნამრავლი?

გამოარკვიეთ, აქ მოყვანილი ბინარული ოპერაციებიდან რომელია კომუტაციური და რომელი ასოციაციური.

I.10. შეიძლება თუ არა მოცემულ $[a, b]$ მონაკვეთზე განსაზღვრულ უწყვეტ ფუნქციათა $C[a, b]$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ბინარული $\dot{+}$ ოპერაცია ტოლობით: $\forall x \in [a, b]$, $\forall f, \varphi \in C[a, b]$

ა) $(f\dot{+}\varphi)(x) = f(x) + \varphi(x)$;

ბ) $(f\dot{+}\varphi)(x) = f(x) - \varphi(x)$;

გ) $(f\dot{+}\varphi)(x) = f[\varphi(x)]$?

I.11. შეიძლება თუ არა n-ური რიგის ($n \in \mathbb{N}$) კვადრატულ მატრიცთა $E(n)$ სიმრავლეზე განვსაზღვროთ ბინარული $\dot{+}$ ოპერაცია ტოლობით:

ა) $A\dot{+}B = A + B$, სადაც $A + B$ არის A და B მატრიცების ჯამი;

ბ) $A\dot{+}B = A \cdot B$, სადაც $A \cdot B$ არის A და B მატრიცების ნამრავლი;

გ) $A\dot{+}B = [c_{ij}]$, სადაც $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$?

I.12. სამელემენტიან $E = \{a, b, c\}$ სიმრავლეზე განსაზღვრულია შეკრების $+$ ოპერაცია შემდეგი ცხრილის საშუალებით, სადაც ოპერაციის შედეგი მოცემულია შესაბამისი სტრიქონის და სვეტის გადაკვეთაზე (მაგალითად, $a + b = c$):

$+$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

გამოარკვიეთ, ა) არის თუ არა $+$ ოპერაცია კომუტაციური; ბ) არსებობს თუ არა E სიმრავლეში ნულოვანი ელემენტი; გ) აქვს თუ არა E სიმრავლის ყოველ ელემენტს მოპირდაპირე ელემენტი; დ) არის თუ არა ოპერაცია ასოციაციური?

I.13. გამოარკვიეთ, შემდეგი სიმრავლეებიდან მითითებული ოპერაციების მიმართ რომელი წარმოადგენს ჯგუფს (კომუტაციურ ჯგუფს):

ა) $\mathbb{Z}$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ბ) კენტ რიცხვთა $\mathbb{Z}'$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

გ) ლუწ რიცხვთა $\mathbb{Z}^{(2)}$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

დ) მოცემული ნატურალური n რიცხვის ჯერად მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}^{(n)}$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ე) $\mathbb{Z}$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

ვ) არაუარყოფით მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}^+$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ზ) $\mathbb{Q}$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

თ) $\mathbb{Q}$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

ი) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

კ) დადებით რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}^+$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

ლ) n-ური რიგის ($n \in \mathbb{N}$) კვადრატულ მატრიცთა $E(n)$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

მ) $E(n)$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

ნ) n-ური რიგის ($n \in \mathbb{N}$) დიაგონალურ მატრიცთა $D(n)$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ო) n-ური რიგის არაგადაგვარებულ კვადრატულ მატრიცთა $E^*(n)$ სიმრავლე გამრავლების ოპერაციის მიმართ;

პ)ერთი ცვლადის მრავალწევრთა P_n სიმრავლე (ნულოვანი მრავალწევრის ჩათვლით), რომელთა ხარისხი n-ს არ აღემატება (n მოცემული ნატურალური რიცხვია) შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ჟ) მოცემული n ხარისხის მრავალწევრთა P_n^* სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

რ) ერთი ცვლადის ყველა მრავალწევრთა P სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ს) მოცემულ $[a,b]$ მონაკვეთზე უწყვეტ ფუნქციათა $C[a,b]$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ;

ტ) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ?

I.14. წინა სავარჯიშოს პირობებში გამოარკვიეთ, არის თუ არა შეკრების (ბ) შემთხვევაში გამრავლების) ოპერაციის მიმართ G_1 ჯგუფი G_2 ჯგუფის ქვეჯგუფი, თუ

ა) $G_1 = \mathbb{Z}^{(2)}$, $G_2 = \mathbb{Z}^{(n)}$ $(n \geq 2)$;

ბ) $G_1 = \mathbb{Q}^{+}$, $G_2 = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;

გ) $G_1 = \mathbb{Z}^{(n)}$, $n \geq 2$, $G_2 = \mathbb{Q}$;

დ) $G_1 = P_n$, $G_2 = P$.

I.15. გამოარკვიეთ, შემდეგი სიმრავლეებიდან რომელია რგოლი (მაგრამ არა ველი) და რომელია ველი რიცხვების შეკრების და გამრავლების ჩვეულებრივი ოპერაციების მიმართ (I.13. სავარჯიშოს აღნიშვნებში):

ა) $\mathbb{Z}$; ბ) $\mathbb{Z}^{(2)}$; გ) $\mathbb{Z}^{(n)}$ $(n \geq 3)$; დ) $\mathbb{Q}$; ე) $\mathbb{R}$;

ვ) $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$; ზ) $\mathbb{C}_{\mathbb{Z}} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

თ) $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$; ი) $E(n)$;

კ) $C[-a, a]$ $(a > 0)$; ლ) P;

მ) $P_{\mathbb{Z}}$ – ერთი ცვლადის მრავალწევრთა სიმრავლე, რომელთა ყველა კოეფიციენტი მთელია;

ნ) $\mathbb{Z}_{\sqrt{5}} = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

ო) $\mathbb{Q}_{\sqrt{5}} = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$?

I.16. გამოარკვიეთ, $E = \{a, b, c\}$ სიმრავლე არის თუ არა ველი შემდეგი ცხრილებით განსაზღვრული $+$ და $\cdot$ ოპერაციების მიმართ და დადებითი პასუხის შემთხვევაში დაასახელეთ ამ ველის

ნულოვანი და ერთეულოვანი ელემენტები:

ა)

$+$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

ბ)

$+$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

$\cdot$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

გ)

$+$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	b	a

I.17. შეავსეთ გალუას $\mathbb{F}_q$ ველში $+$ და $\cdot$ ოპერაციების განმსაზღვრელი ცხრილები:

ა) $q = 3,\ \ \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$

$+$	0	1	2
0			
1			
2			

$\cdot$	0	1	2
0			
1			
2			

ბ) $q = 5,\ \ \mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$+$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

$\cdot$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

I.18. ამოხსენით გალუას $\mathbb{F}_2$ ველში წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

ა) $\begin{cases} x+y=1 \\ x \quad\; =0 \end{cases}$; ბ) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x \quad + \quad z=0 \\ \quad\; y+z=1 \end{cases}$;

გ) $\begin{cases} x+y \qquad =0 \\ x \quad + \quad z=1 \\ \quad\; y+z=0 \end{cases}$; დ) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 \qquad =0 \\ \qquad x_2 \quad + \quad x_4=1 \\ x_1 \quad + \quad x_3 \qquad =0 \end{cases}$;

ე) $\begin{cases} x_1 \quad + \quad x_3+x_4=1 \\ \qquad x_2 \quad + \quad x_4=0 \\ x_1+x_2 \qquad\qquad =1 \end{cases}$; ვ) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1 \quad + \quad x_3=1 \end{cases}$.

I.19. გამოიკვლიეთ, ქვემოთ მოყვანილი სიმრავლეებიდან რომელი არის წრფივი სივრცე (შეკრების და ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები ჩვეულებრივია):

ა) $\mathbb{R}^4$ სივრცის $(x_1, x_2, 0, 0)$ სახის ელემენტთა სიმრავლე;

ბ) $\mathbb{R}^4$ სივრცის $(x_1, x_2, 3, 3)$ სახის ელემენტთა სიმრავლე;

გ) $\mathbb{Z}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}\}$;

დ) $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$;

ე) მოცემული n ხარისხის მრავალწევრთა P_n^* სიმრავლე;

ვ) მრავალწევრთა P_n სიმრავლე, რომელთა ხარისხი n-ს არ აღემატება;

ზ) $[a, b]$ მონაკვეთზე უწყვეტ ფუნქციათა $C[a, b]$ სიმრავლე;

თ) $m \times n$ განზომილების მატრიცთა $E(m, n)$ სიმრავლე;

ი) გეომეტრიულ ვექტორთა V_3 სიმრავლე;

კ) კრებად მიმდევრობათა სიმრავლე;

ლ) განშლად მიმდევრობათა სიმრავლე;

მ) $[a, b]$ სიმრავლეზე ინტეგებად ფუნქციათა სიმრავლე.

I.20. შესაძლებელია თუ არა წრფივი სივრცე შედგებოდეს

ა) ერთი ვექტორისაგან, ბ) ორი ვექტორისაგან?

I.21. ვთქვათ, E წრფივი სივრცეა და $x \in E$. არის თუ არა $E \setminus \{x\}$ ქვესიმრავლე E სივრცის წრფივი ქვესივრცე?

I.22. ვთქვათ, E წრფივი სივრცეა და F ამ სივრცის უსასრულო ქვესიმრავლეა. შეიძლება თუ არა $E \setminus F$ იყოს E სივრცის წრფივი ქვესივრცე? დადებითი პასუხის შემთხვევაში მოიყვანეთ შესაბამისი მაგალითი.

I.23. დაამტკიცეთ, რომ წრფივი E სივრცის ნებისმიერი x ვექტორისათვის $x + x = 2x$.

I.24. დაამტკიცეთ, რომ წრფივი E სივრცის განსაზღვრებაში მოყვანილი რვა აქსიომიდან (იხ. (3.1)) პირველი, მესამე და მეოთხე აქსიომები შეძლება შეიცვალოს ერთი აქსიომით: $\forall x, y \in E$, $0x = 0y$.

I.25. დადებით ნამდვილ რიცხვთა $\mathbb{R}^+$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ $\dot{+}$ და $\circ$ ოპერაციები შემდეგნაირად: $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x \dot{+} y = xy$, $\alpha \circ x = x^\alpha$. დაამტკიცეთ, რომ ამ ოპერაციების მიმართ $\mathbb{R}^+$ სიმრავლე ქმნის წრფივ სივრცეს.

I.26. $\mathbb{R}^n$ სივრცის დადებითკოეფიციენტებიან ვექტორთა $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+\}$ ქვესიმრავლეში შემოვიღოთ $\dot{+}$ და $\circ$ ოპერაციები შემდეგნაირად:

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+, \ \ \forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$x \dot{+} y = (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n), \quad \alpha \circ x = (x_1^\alpha, x_2^\alpha, \ldots, x_n^\alpha).$$

არის თუ არა $\mathbb{R}^n_+$ სიმრავლე წრფივი სივრცე?

I.27. იპოვეთ ევკლიდეს $\mathbb{R}^n$ სივრცის x და y ვექტორების სიგრძე და კუთხე მათ შორის, თუ

ა) $n = 3, \ \ x = (0, 4, 3), \ \ y = (2, 0, 0)$;

ბ) $n = 3, \ \ x = (1, -1, 1), \ \ y = (2, 0, -2)$;

გ) $n=4,\ \ x=(1,-1,2,\sqrt{3}),\ \ y=(0,1,-2,2)$;

დ) $n=4,\ \ x=(3,-2,1,4),\ \ y=(-4,0,0,3)$.

I.28. ვთქვათ, x,y,z ევკლიდეს სივრცის ვექტორებია, $x+y+z=\theta$, $|x|=3$, $|y|=4$, $|z|=5$. იპოვეთ $(x,y)+(x,z)+(y,z)$.

I.29. ჩაწერეთ სამკუთხედის უტოლობა $|x+y|\le |x|+|y|$ კოორდინატებში ($x,y\in\mathbb{R}^n$).

I.30. შეიძლება თუ არა გეომეტრიულ ვექტორთა V_3 სივრცეში ორი არანულოვანი ვექტორის სკალარული ნამრავლი შემოვიღოთ ტოლობით (φ არის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის):

ა) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 2\varphi$;   ბ) $(\vec{a},\vec{b})=2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$;
გ) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$;   დ) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$;
ე) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|+|\vec{b}|$;   ვ) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cos\varphi$;
ზ) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos^2\varphi$;   თ) $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|-|\vec{b}|$?

I.31. შეძლება თუ არა $\mathbb{R}^2$ სივრცეში $x=(x_1,x_2)$ და $y=(y_1,y_2)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი შემოვიღოთ ტოლობით:

ა) $(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2$;   ბ) $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_2$;
გ) $(x,y)=x_1y_1-x_2y_2$;
დ) $(x,y)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$?

I.32. იპოვეთ კუთხე უწყვეტ ფუნქციათა ევკლიდეს $C[-a,a]$ სივრცის $x=2t^2-3t^4$ და $y=5t-t^7$ ვექტორებს შორის (სკალარული ნამრავლი განისაზღვრება ტოლობით $(x,y)=\int_{-a}^{a}x(t)y(t)\,dt$).

I.33. შეიძლება თუ არა წრფივ $\mathbb{R}^n_+$ სივრცეში (იხ. სავარჯიშო I.26) სკალარული ნამრავლი (x,y) შემოვიღოთ ტოლობით: $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $\forall y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n_+$,

$$(x,y)=\ln x_1\cdot\ln y_1+\ln x_2\cdot\ln y_2+\dots+\ln x_n\cdot\ln y_n?$$

I.34. შეიძლება თუ არა $\mathbb{R}^2$ სივრცეში $\rho(x,y)$ მეტრიკა შემოვიღოთ ტოლობით: $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\forall y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

ა) $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$;

ბ) $\rho(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\,|x_2-y_2|\}$?

I.35. ვთქვათ, M ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა და

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{თუ } x\neq y,\\ 0, & \text{თუ } x=y.\end{cases}$$

M არის თუ არა მეტრიკული სივრცე?

I.36. შეიძლება თუ არა $C[a,b]$ წრფივ სივრცეში მეტრიკა შემოვიღოთ ტოლობით: $\forall f,\varphi\in C[a,b]$,

$$\rho(f,\varphi)=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\varphi(x)|?$$

I.37. დაამტკიცეთ, რომ ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს ორი ვექტორი კოლინეარულია.

I.38. დაამტკიცეთ, რომ სამი $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ეს სამი ვექტორი კომპლანარულია.

I.39. დაამტკიცეთ, რომ V_3 სივრცის ნებისმიერი ოთხი $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ვექტორი წრფივად დამოკიდებულია.

I.40. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არის V_2 სივრცის ნებისმიერი ორი არაკოლინეარული ვექტორი, მაშინ V_2 სივრცის ნებისმიერი $\vec{c}$ ვექტორი წარმოადგენს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას და ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია.

I.41. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი სამი არაკომპლანარული ვექტორი წარმოადგენს V_3 სივრცის ბაზისს.

I.42. იპოვეთ $2a_1 + 3a_2 - 4a_3$, თუ $a_1 = (8, 1, 0, 3)$, $a_2 = (1, 2, -2, 3)$, $a_3 = (1, 0, -1, 0)$.

I.43. არის თუ არა $x = (-1, 4, 15, 17)$ ვექტორი

$$a_1 = (-1, 2, 3, 5), \quad a_2 = (-3, 4, 1, 3), \quad a_3 = (-2, 3, 3, 4)$$

ვექტორების წრფივი კომბინაციის ტოლი? იპოვეთ ეს კომბინაცია.

I.44. იპოვეთ $x \in \mathbb{R}^4$ ვექტორი განტოლებიდან

ა) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 - 2x = \theta$;

ბ) $2(a_1 + x) + 3(a_2 - x) = 5(a_3 + x)$,

სადაც $a_1 = (1, -1, 2, 0)$, $a_2 = (2, 3, 1, -1)$, $a_3 = (-1, 2, 1, 4)$.

I.45. წრფივად დამოუკიდებელია თუ არა $\mathbb{R}^n$ სივრცის $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ვექტორები:

ა) $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (0, 2)$;

ბ) $x_1 = (3, 1)$, $x_2 = (-1, 4)$;

გ) $x_1 = (1, -2)$, $x_2 = (2, -4)$;

დ) $x_1 = (-3, 2)$, $x_2 = (-2, 3)$;

ე) $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (3, -1, 4)$, $x_3 = (2, 4, 6)$;

ვ) $x_1 = (2, 3, 4)$, $x_2 = (5, -2, 1)$, $x_3 = (1, 2, 3)$;

ზ) $x_1 = (2, 1, 3)$, $x_2 = (4, 2, 5)$;

თ) $x_1 = (4, 2, -6)$, $x_2 = (6, 3, -9)$;

ი) $x_1 = (3, 2, -1, -3, -2)$, $x_2 = (2, -1, 3, 1, -3)$,
$x_3 = (4, 5, -5, -6, 1)$?

I.46. დაამტკიცეთ, რომ e_1 და e_2 ვექტორები ქმნიან $\mathbb{R}^2$ სივრცის ბაზისს და იპოვეთ x ვექტორის კოორდინატები ამ ბაზისში, თუ

ა) $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$, $x = (7, 12)$;

ბ) $e_1 = (2, 4)$, $e_2 = (3, 5)$, $x = (3, 7)$;

გ) $e_1 = (-1, 1)$, $e_2 = (1, 4)$, $x = (3, 7)$;

დ) $e_1 = (2, 3)$, $e_2 = (-4, 5)$, $x = (22, -22)$.

I.47. აჩვენეთ, რომ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ვექტორები ქმნიან V_3 სივრცის ბაზისს და იპოვეთ ამ ბაზისში $\vec{d}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ

ა) $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (1,-1,1)$, $\vec{c} = (-1,1,1)$, $\vec{d} = (0,2,5)$;

ბ) $\vec{a} = (2,7,7)$, $\vec{b} = (-4,3,9)$, $\vec{c} = (9,-6,-9)$, $\vec{d} = (28,-1,5)$;

გ) $\vec{a} = (1,3,2)$, $\vec{b} = (2,-5,7)$, $\vec{c} = (1,3,-1)$, $\vec{d} = (4,1,8)$;

დ) $\vec{a} = (2,1,0)$, $\vec{b} = (1,0,5)$, $\vec{c} = (0,3,-1)$, $\vec{d} = (5,16,10)$.

I.48. t პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს $\mathbb{R}^3$ სივრცის ბაზისს შემდეგი ვექტორები: $x_1 = (t,1,t)$, $x_2 = (0,t,-1)$, $x_3 = (1,t,1)$?

I.49. იპოვეთ მოცემულ ვექტორთა სისტემის (ამ ვექტორების წრფივი გარსის) ყველა ბაზისი, შედგენილი ამ სისტემის ვექტორებისაგან:

ა) $a_1 = (1,3,0,0)$, $a_2 = (1,3,4,5)$, $a_3 = (2,6,0,0)$;

ბ) $a_1 = (2,3,4,5)$, $a_2 = (3,4,5,6)$, $a_3 = (4,5,6,7)$, $a_4 = (5,6,7,8)$;

გ) $a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (1,2,3,4)$, $a_3 = (2,4,6,8)$, $a_4 = (3,6,9,12)$;

დ) $a_1 = (1,1,1)$, $a_2 = (3,2,1)$, $a_3 = (4,3,2)$, $a_4 = (4,3,4)$, $a_5 = (3,2,3)$.

I.50. იპოვეთ $a_1 = (1,1,-1,-2)$, $a_2 = (5,2,-3,1)$, $a_3 = (4,1,-2,3)$, $a_4 = (3,4,-1,2)$ ვექტორთა სისტემის რაიმე ბაზისი და გამოსახეთ სისტემის სხვა ვექტორები ამ ბაზისის საშუალებით.

I.51. დაამტკიცეთ, რომ $e_1, e_2, \dots, e_n$ ვექტორები ქმნიან $\mathbb{R}^n$ სივრცის ბაზისს:

ა) $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, $\dots$, $e_n = (0,0,\dots,1)$;

ბ) $e_1 = (1,1,1,\dots,1,1)$, $e_2 = (0,1,1,\dots,1,1)$, $e_3 = (0,0,1,\dots,1,1)$, $\dots$,

$e_{n-1} = (0, 0, 0, \ldots, 1, 1)$, $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$;

I.52. დაამტკიცეთ, რომ მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა $E(2)$ წრფივ სივრცეში

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

მატრიცები, სადაც $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$, წრფივად დამოუკიდებელია.

I.53. დაამტკითეთ, რომ მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა $E(2)$ წრფივი სივრცე ოთხგანზომილებიანია.

I.54. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფივი E სივრცის $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ვექტორები წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ვექტორები წრფივად დამოკიდებულია, მაშინ x_{n+1} ვექტორი $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ვექტორების წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს.

I.55. დაამტკიცეთ, რომ ნულოვანი θ ვექტორის ყველა კოორდინატი ნებისმიერ ბაზისში ნულის ტოლია.

I.56. გამოარკვიეთ, არის თუ არა ფუნქციათა შემდეგი სისტემა წრფივად დამოუკიდებელი მითითებულ შუალედში:

ა) $1, x, x^2, x^3 \quad (-\infty, +\infty)$;

ბ) $x^2, -2x^2, 5x^2 \quad (-\infty, +\infty)$;

გ) $\sin x,\ \cos x \quad (-\infty, +\infty)$;

დ) $\operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

ე) $2\cos 2x, 5\cos 2x, 10\cos 2x \quad (-\infty, +\infty)$;

ვ) $\arcsin x,\ \arccos x \quad [-1, 1]$;

ზ) $\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x \quad (-\infty, +\infty)$?

I.57. ცნობილია, რომ $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$ ფუნქციები ქმნიან წრფივი E სივრცის ბაზისს. რა ელემენტებისაგან შედგება ეს წრფივი სივრცე და რას უდრის მისი განზომილება?

I.58. იპოვეთ $2t^2 - 3t + 4$ მრავალწევრის კოორდინატები P_2 და P_3 სივრცეებში შესაბამისად $1, t, t^2$ და $1, t, t^2, t^3$ ბაზისებში.

I.59. დაამტკიცეთ, რომ $t^3+t^2+t+1,\ t^2+t+1,\ t+1,\ 1$ არის P_3 სივრცის ბაზისი.

I.60. დაამტკიცეთ, რომ $-t^2+2t, t^2-t, t^2+1$ არის P_2 სივრცის ბაზისი და იპოვეთ ამ ბაზისში $3t^2+2t+3$ მრავალწევრის კოორდინატები.

I.61. დაამტკიცეთ, რომ P_2 წრფივი სივრცის $2+3t-t^2, 1+3t$, $1-2t^2$ მრავალწევრები წრფივად დამოუკიდებელია.

I.62. დაამტკიცეთ, რომ $\forall t_0\in\mathbb{R}$ მრავალწევრთა $1,\ t-t_0$, $(t-t_0)^2,\dots,(t-t_0)^n$ სისტემა ქმნის P_n სივრცის ბაზისს.

I.63. იპოვეთ P_2 სივრცის $1,x,x^2$ ბაზისიდან $1,x+1,(x+1)^2$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა და დაშალეთ x^2-1 მრავალწევრი $(x+1)$-ის ხარისხებად.

I.64. იპოვეთ $\vec{x}$ ვექტორის კოორდინატები $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ბაზისში, თუ მოცემულია ამ ვექტორის კოორდინატები $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ბაზისში:

ა) $\vec{x}=(-3,1,2),\quad \vec{e_1}=\vec{i}+\vec{j},$
$\vec{e_2}=\vec{j}+\vec{k},\quad \vec{e_3}=\vec{i}+\vec{k};$

ბ) $\vec{x}=(0,1,-2),\quad \vec{e_1}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},$
$\vec{e_2}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k},\quad \vec{e_3}=-\vec{i}+\vec{k};$

გ) $\vec{x}=(1,4,0),\quad \vec{e_1}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k},$
$\vec{e_2}=-\vec{i}+2\vec{k},\quad \vec{e_3}=\vec{i}+3\vec{j};$

დ) $\vec{x}=(5,-1,-1),\quad \vec{e_1}=2\vec{i}+\vec{j},$
$\vec{e_2}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},\quad \vec{e_3}=-\vec{j}+\vec{k};$

ე) $\vec{x}=(2,1,-1),\quad \vec{i}=-\vec{e_1}-\vec{e_3},$
$\vec{j}=2\vec{e_1}+\vec{e_2},\quad \vec{k}=\vec{e_1}+2\vec{e_2}+\vec{e_3};$

ვ) $\vec{x}=(1,-1,1),\quad \vec{i}=2\vec{e_1}-\vec{e_2}+\vec{e_3},$
$\vec{j}=\vec{e_2}-\vec{e_3},\quad \vec{k}=\vec{e_1}+\vec{e_3};$

ზ) $\vec{x}=(1,0,1),\quad \vec{i}=3\vec{e_1}+\vec{e_2}-2\vec{e_3},$
$\vec{j}=\vec{e_1}+\vec{e_3},\quad \vec{k}=-\vec{e_1}+\vec{e_2};$

თ) $\vec{x}=(-1,0,1)$, $\vec{i}=\vec{e_1}+\vec{e_2}$,
$\vec{j}=-\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}$, $\vec{k}=2\vec{e_2}+2\vec{e_3}$.

I.65. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{e_1}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{e}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e_3}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ვექტორები ქმნიან V_3 სივრცის ბაზისს. დაწერეთ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ბაზისიდან $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა და იპოვეთ $\vec{x}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ ვექტორის კოორდინატები ახალ $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ ბაზისში.

I.66. იპოვეთ $B=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ბაზისიდან $B'=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა და $\vec{x}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ ვექტორის კოორდინატები $B'=(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ ბაზისში, თუ

ა) B' ბაზისის ვექტორები მიღებულია B ბაზისის ვექტორებისაგან მათი მიმართულების შეცვლით:

$$\vec{e_1}=-\vec{i},\quad \vec{e_2}=-\vec{j},\quad \vec{e_3}=-\vec{k};$$

ბ) B' მიღებულია B ბაზისის ვექტორების გადანაცვლებით:

$$\vec{e_1}=\vec{j},\quad \vec{e_2}=\vec{k},\quad \vec{e_3}=\vec{i};$$

გ) B' ბაზისის ვექტორები მიღებულია B ბაზისის ვექტორების φ კუთხით მობრუნებით $\vec{i}$ ვექტორის გარშემო.

I.67. დაამტკიცეთ, რომ $e_1,e_2,\dots,e_n$ და $e_1',e_2',\dots,e_n'$ ვექტორთა სისტემები ქმნიან $\mathbb{R}^n$ წრფივი სივრცის ბაზისს და იპოვეთ $e_1,e_2,\dots,e_n$ ბაზისიდან $e_1',e_2',\dots,e_n'$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა:

ა) $e_1=(3,4)$, $e_2=(1,2)$; $e_1'=(2,6)$, $e_2'=(4,8)$; $n=2$;
ბ) $e_1=(1,2,-2)$, $e_2=(3,0,1)$, $e_3=(4,3,-3)$;
$e_1'=(-9,-8,8)$, $e_2'=(7,3,-2)$, $e_3'=(15,7,-4)$; $n=3$.

I.68. როგორ არის დაკავშირებული ერთმანეთთან x ვექტორის კოორდინატები e_1,e_2,e_3,e_4 და e_1',e_2',e_3',e_4' ბაზისებში, თუ

$$e_1'=ae_2,\quad e_2'=be_3,\quad e_3'=ce_4,\quad e_4'=de_1?$$

I.69. შეიძლება თუ არა

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

იყოს ერთი ბაზისიდან მეორე ბაზისში გადასვლის მატრიცა?

I.70. იპოვეთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა რაიმე ფუნდამენტური სისტემა და ამის მიხედვით ჩაწერეთ მისი ზოგადი ამონახსნი:

$$\text{ა)}\quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ბ)}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{გ)}\quad \begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 16x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 12x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{დ)}\quad \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases} .$$

I.71. შეამოწმეთ, რომ $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ არის მოცემული არაერთგვაროვანი სისტემის ერთ-ერთი ამონახსნი და ჩაწერეთ ამ სისტემის ზოგადი ამონახსნი ამ კერძო ამონახსნისა და შესაბამისი

ერთგვაროვანი სისტემის ზოგადი ამონახსნის ჯამის სახით:

ა) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 13 \\ 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -6 \end{cases}$$

$x_1^0 = 1, \ \ x_2^0 = 2, \ \ x_3^0 = 0;$

ბ) $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$x_1^0 = 0, \ \ x_2^0 = 1, \ \ x_3^0 = -1, \ \ x_4^0 = 1;$

გ) $$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$x_1^0 = -1, \ \ x_2^0 = 1, \ \ x_3^0 = 0, \ \ x_4^0 = 0;$

დ) $$\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1^0 = 1, \ \ x_2^0 = 1, \ \ x_3^0 = 1, \ \ x_4^0 = -1.$

თავი II

წრფივი ოპერატორები და კვადრატული ფორმები

ასახვის ანუ ოპერატორის ცნება მათემატიკის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნებაა. ასახვა არის გარკვეული სახის შესაბამისობა ორ სიმრავლეს შორის. წრფივი სივრცის შემთხვევაში იხილავენ ე.წ. წრფივ ასახვებს (ანუ წრფივ ოპერატორებს). ასეთი ასახვის დროს, მაგალითად, ორი ვექტორის ჯამის სახე არის ამ ვექტორების სახეების ჯამის ტოლი. აღმოჩნდა აგრეთვე, რომ სასრული განზომილების შემთხვევაში წრფივი ოპერატორის მოცემა შესაძლებელია მატრიცის საშუალებით, რაც ძალზე მოსახერხებელია. ამით ხდება ასახვის საკმარისად აბსტრაქტული ცნების გარკვეული "მატერიალიზაცია".

წრფივ ოპერატორთა თეორია ფართო გამოყენებას პოულობს მრავალი საინჟინრო ამოცანის ამოხსნაში (მაგალითად, ელექტროწრედის დინამიკური პროცესების შესწავლაში, კოდირების თეორიაში, ავტომატთა თეორიაში და ა.შ.). არაერთი საინჟინრო და ფიზიკური ამოცანა აღიწერება ე.წ. წრფივი ოპერატორული განტოლებით, მათი ამოხსნა კი თავის მხრივ საჭიროებს ოპერატორების საკუთრივი მნიშვნელობებისა და საკუთრივი ვექტორების პოვნას. ამაზეა დაფუძნებული წრფივი წრედების ანალიზის სპექტრული და ოპერატორული მეთოდები.

§9. წრფივი ოპერატორი და მისი მატრიცა

ვთქვათ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{9.1}$$

ნებისმიერი კვადრატული მატრიცაა. $\mathbb{R}^n$ სივრცის ყოველ x ელემენტს შევუსაბამოთ ამავე სივრცის y ელემენტი, რომელიც მოიცემა შემდეგი მატრიცული თანაფარდობით

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}, \tag{9.2}$$

სადაც X და Y შესაბამისად $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ელემენტების კოორდინატებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცებია, ე.ი.

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

ამგვარად, n-ური რიგის ყოველ კვადრატულ A მატრიცას შეგვიძლია შევუსაბამოთ $\mathbb{R}^n$ სივრცის გარკვეული $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ასახვა.

ჩანაწერი

$$y = \mathbf{A}x$$

ნიშნავს, რომ y არის $\mathbb{R}^n$ სივრცის ის ელემენტი, რომელშიც $\mathbf{A}$ ასახვის დროს აისახება $\mathbb{R}^n$ სივრცის x ელემენტი.

(9.2)-დან გამომდინარეობს, რომ $\forall x', x'' \in \mathbb{R}^n$ და $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} \mathbf{A}(x' + x'') = \mathbf{A}x' + \mathbf{A}x'', \\ \mathbf{A}(\alpha x') = \alpha \mathbf{A}x'. \end{gathered} \tag{9.3}$$

ასახვას, რომელიც აკმაყოფილებს (9.3) პირობებს, ეწოდება *წრფივი ასახვა*. წრფივი ასახვა შეიძლება განისაზღვროს არა მხოლოდ $\mathbb{R}^n$ სივრცისათვის, არამედ ნებისმიერი წრფივი E სივრცისათვის.

ვთქვათ, E და F წრფივი სივრცეებია. $\mathbf{A} : E \to F$ ასახვას, რომელიც აკმაყოფილებს (9.3) პირობებს, ეწოდება *წრფივი ასახვა* ანუ *წრფივი ოპერატორი* E სივრციდან F სივრცეში. თუ $E = F$, მაშინ $\mathbf{A} : E \to F$ *წრფივ ასახვას* უწოდებენ E სივრცის *წრფივ გარდაქმნას*.

ამოცანა 9.1. $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ წრფივი გარდაქმნა მოიცემა

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

მატრიცით. ვიპოვოთ $x = (1, 0, 2)$ ვექტორის სახე ამ ასახვის დროს.

∇ ვთქვათ, $\mathbf{A}x = y$. მაშინ

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\,\mathrm{X} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+0+4 \\ 1+0+8 \\ 0+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ე.ი. $\mathbf{A}x = y = (3, 9, 2)$. $\square$

განვიხილოთ ანალოგიური ამოცანა n-განზომილებიანი $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემთხვევაში.

ამოცანა 9.2. ვიპოვოთ $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ ვექტორების სახეები (9.1) მატრიცით განსაზღვრული $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ წრფივი გარდაქმნის დროს.

∇ ვთქვათ, $\mathbf{A}e_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. მაშინ

$$
\mathrm{Y}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{bmatrix},
$$

$$
\mathrm{Y}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots,
$$

$$
\mathrm{Y}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{bmatrix}.
$$

y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ელემენტებისათვის მივიღებთ:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \mathbf{A}e_1 = \mathrm{Y}_1^\top = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}), \\
y_2 &= \mathbf{A}e_2 = \mathrm{Y}_2^\top = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2}), \ldots, \\
y_n &= \mathbf{A}e_n = \mathrm{Y}_n^\top = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}). \quad \square
\end{aligned} \tag{9.4}
$$

მიღებული შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა $\mathbb{R}^n$ სივრცის წრფივ გარდაქმნებსა და n-ური რიგის კვადრატულ მატრიცებს შორის: ყოველ $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ წრფივ გარდაქმნას შეესაბამება n-ური რიგის კვადრატული A მატრიცა, რომლის სვეტები მიიღება (9.4) ვექტორების ტრანსპონირებით (ე.ი. A მატრიცის i-ური სვეტი ემთხვევა Y_i სვეტ-მატრიცას) და პირიქით, ასეთი შესაბამისობის დროს n-ური რიგის ყოველი A მატრიცა შეესაბამება (9.2) ტოლობით განსაზღვრულ ერთ $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ წრფივ გარდაქმნას.

ასეთი შესაბამისობა ძალაშია ნებისმიერი სასრულგანზომილე-ბიანი წრფივი E სივრცის შემთხვევაშიც. ამ შესაბამისობის დასამ-ყარებლად E სივრცეში უნდა დავაფიქსიროთ ნებისმიერი $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი და ყოველ $\mathbf{A} : E \to E$ წრფივ გარდაქმნას შევუსაბამოთ (9.4) ვექტორების ტრანსპონირებით მიღებული სვე-ტებისგან შედგენილი კვადრატული $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ მატრიცა:

$$\begin{cases} \mathbf{A}e_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ \mathbf{A}e_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}e_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n. \end{cases} \tag{9.5}$$

ასეთი წესით აგებულ A მატრიცას ეწოდება წრფივი $\mathbf{A}$ *გარ-დაქმნის მატრიცა მოცემულ ბაზისში*. ასევე განისაზღვრება $\mathbf{A} : E \to F$ წრფივი ოპერატორის მატრიცა (E და F სივრცე-ების მოცემულ ბაზისებში).

ამრიგად,

$$y = \mathbf{A}x \tag{9.6}$$

სახის ყოველი ოპერატორული თანაფარდობა, სადაც $x, y \in E$, შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი სახის

$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}\,\mathrm{X} \tag{9.7}$$

მატრიცული თანაფარდობით, სადაც $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ არის $\mathbf{A}$ ოპე-რატორის მატრიცა მოცემულ ბაზისში (იხ. (9.5)), ხოლო $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ და $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix}$ არის შესაბამისად $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ და $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i$ ელემენტების კოორდინატებისაგან შედგენილი სვეტ-მატ-რიცები. აღნიშნული თანაფარდობა კოორდინატული ფორმით ასე

ჩაიწერება:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{9.8}$$

ამოცანა 9.3. ვიპოვოთ შემდეგი მატრიცების შესაბამისი წრფივი გარდაქმნები:

$$1.\ \ \mathrm{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad 2.\ \ \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad 3.\ \ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

$$4.\ \ \mathrm{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad 5.\ \ \mathrm{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

∇ ვთქვათ, $\vec{a} = (x, y) \in \mathrm{V}_2$ და $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ – შესაბამისი სვეტ-მატრიცაა. მაშინ

1. $\mathrm{O\,X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0,$

ე.ი. ნულოვანი O მატრიცის შესაბამისი **O** წრფივი ოპერატორი V_2 სივრცის ნებისმიერ $\vec{a}$ ვექტორს გადაიყვანს ნულოვან $\vec{0}$ ვექტორში: $\forall \vec{a} \in \mathrm{V}_2$

$$\mathbf{O}\vec{a} = \vec{0}.$$

ასეთ **O** წრფივ ოპერატორს ნულოვანი ოპერატორი ეწოდება;

2. $\mathrm{I\,X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathrm{X},$

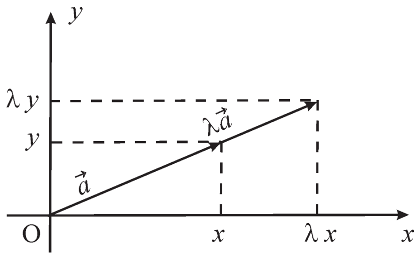
ე.ი. $\forall \vec{a} \in \mathrm{V}_2$

$$\mathbf{I}\vec{a} = \vec{a}.$$

ასეთ წრფივ ოპერატორს ერთეულოვანი ანუ იგივური ოპერატორი ეწოდება;

$$3.\ \mathrm{A\,X} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda\,\mathrm{X},$$

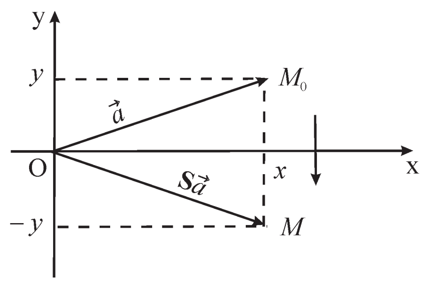
ე.ი. $\forall \vec{a} \in \mathrm{V}_2 \quad \mathbf{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$. ამრიგად, $\mathbf{A}$ ოპერატორს ყოველი $\vec{a}$ ვექტორი გადაჰყავს მის კოლინეარულ $\lambda\vec{a}$ ვექტორში (ნახ. 9.1).



ნახ 9.1

$$4.\ \mathrm{S\,X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

ეს ნიშნავს, რომ $\mathbf{S}$ ოპერატორის მოქმედებით $\vec{a} = (x, y)$ ვექტორი გადადის ისეთ $\vec{b} = (x, -y)$ ვექტორში, რომლის პირველი კოორდინატი ემთხვევა $\vec{a}$ ვექტორის პირველ კოორდინატს, ხოლო მეორე კოორდინატი იცვლება მოპირდაპირე რიცხვით. ასეთი გარდაქმნა წარმოადგენს სიმეტრიას Ox ღერძის მიმართ (ნახ. 9.2).



ნახ 9.2

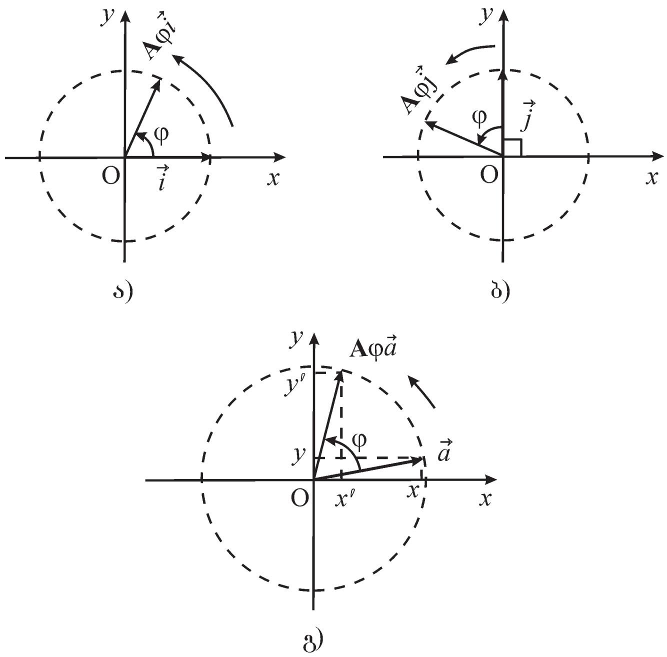
5. ვთქვათ, $\vec{a} = \vec{i} = (1, 0)$. მაშინ

$$\mathrm{A}_\varphi \, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix},$$

ე.ი.

$$\mathbf{A}_\varphi \vec{i} = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

ეს ნიშნავს, რომ $\mathbf{A}_\varphi \vec{i}$ ვექტორი მიიღება $\vec{i}$ ვექტორისაგან φ კუთხით მობრუნებით O სათავის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 9.3 ა).



ნახ 9.3

ანალოგიურად, $\vec{a} = \vec{j} = (0, 1)$ შემთხვევაში

$$\mathrm{A}_\varphi \, \mathrm{X} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + 90^\circ) \\ \sin(\varphi + 90^\circ) \end{bmatrix},$$

საიდანაც

$$\mathbf{A}_{\varphi}\vec{j} = (\cos(\varphi + 90°), \sin(\varphi + 90°)),$$

ე.ი. $\mathbf{A}_{\varphi}\vec{j}$ ვექტორიც მიიღება $\vec{j}$ ვექტორისაგან φ კუთხით მობრუნებით (ნახ. 9.3 ბ).

რადგან $\vec{i}, \vec{j}$ არის V_2 სივრცის ბაზისი, ამიტომ (იხ. ნახ. (9.3)) ნებისმიერი $\vec{a} \in \mathrm{V}_2$ ვექტორისათვის $\mathbf{A}_{\varphi}\vec{a}$ ვექტორი მიიღება $\vec{a}$ ვექტორის O სათავის გარშემო დადებითი მიმართულებით φ კუთხით მობრუნებით (ნახ. 9.3 გ). კავშირი $\vec{a}$ და $\mathbf{A}_{\varphi}\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატებს შორის მოიცემა ფორმულით (იხ. (9.8))

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \quad \square \end{cases}$$

წრფივი სივრცის ბაზისის შეცვლის შემთხვევაში იცვლება მოცემული წრფივი ოპერატორის მატრიცა. ქვემოთ მოყვანილი დებულება ამყარებს კავშირს ამ მატრიცებს შორის.

თეორემა 9.4. *თუ A არის $\mathbf{A} : E \to E$ წრფივი ოპერატორის მატრიცა $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში, A' – ამავე ოპერატორის მატრიცა $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისში, მაშინ*

$$\mathrm{A}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B},$$

სადაც B არის $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა.

∇ ვთქვათ, x არის წრფივი E სივრცის ნებისმიერი ვექტორი, ხოლო X და X' ამ ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცები შესაბამისად e და e' ბაზისებში. ვთქვათ, $\mathrm{A}\,\mathrm{X} = Y$, მაშინ (იხ. (7.5) და (7.8))

$$\mathrm{A}'\,\mathrm{X}' = \mathrm{Y}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{Y} = \mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A}\,\mathrm{X}) = (\mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A})\,\mathrm{X} =$$

$$= (\mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A})\,\mathrm{B}\,\mathrm{X}' = (\mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B})\,\mathrm{X}',$$

ე.ი.

$$\mathrm{A}'\,\mathrm{X}' = (\mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B})\,\mathrm{X}'\,. \tag{9.9}$$

რადგან (9.9) ტოლობა სრულდება ნებისმიერი X' სვეტ-მატრიცისათვის, ამიტომ $\mathrm{A}' = \mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}$. $\square$

შედეგი 9.3. *წრფივი გარდაქმნის მატრიცის დეტერმინანტი არ არის დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე.*

$$\nabla \quad |\,\mathrm{A}'\,| = |\,\mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}\,| = |\,\mathrm{B}^{-1}\,|\cdot|\,\mathrm{A}\,|\cdot|\,\mathrm{B}\,| = |\,\mathrm{A}\,|,$$

რადგან $|\,\mathrm{B}^{-1}\,|\,|\,\mathrm{B}\,| = 1$. $\square$

§10. მოქმედებანი წრფივ ოპერატორებზე. წრფივ ოპერატორთა სივრცე

ვთქვათ, $\mathbf{A} : E \to F$ და $\mathbf{B} : E \to F$ წრფივი ოპერატორებია. $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ოპერატორების ჯამი ეწოდება ისეთ $\mathbf{A}+\mathbf{B} : E \to F$ ოპერატორს, რომელიც განისაზღვრება პირობით:

$$\forall x \in E, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}x. \tag{10.1}$$

სავარჯიშო 10.1. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ოპერატორი წრფივია.

ვთქვათ, A და B არის შესაბამისად $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ოპერატორების მატრიცები მოცემულ ბაზისში, ხოლო C არის $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ ოპერატორის მატრიცა იმავე ბაზისში. ჩავწეროთ (10.1) ტოლობა მატრიცული სახით:

$$\mathrm{C}\,\mathrm{X} = \mathrm{A}\,\mathrm{X} + \mathrm{B}\,\mathrm{X}\,. \tag{10.2}$$

მატრიცული ოპერაციების თვისების თანახმად

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} + \mathrm{B}\,\mathrm{X} = (\mathrm{A} + \mathrm{B})\,\mathrm{X},$$

ამიტომ (10.2) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\mathrm{C}\,\mathrm{X} = (\mathrm{A} + \mathrm{B})\,\mathrm{X}\,. \tag{10.3}$$

რადგან (10.3) ტოლობა სრულდება ნებისმიერი X სვეტ-მატრიცისათვის, ამიტომ

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,.$$

ამრიგად, ნებისმიერ ბაზისში $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *ოპერატორის მატრიცა* $\mathbf{A}$ *და* $\mathbf{B}$ *ოპერატორების მატრიცების ჯამის ტოლია.*

ანალოგიურად განისაზღვრება წრფივი $\mathbf{A}$ ოპერატორის ნამრავლი ნებისმიერ ნამდვილ α რიცხვზე

$$\forall x \in E, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\alpha\mathbf{A})x = \alpha(\mathbf{A}x). \tag{10.4}$$

ასევე მარტივად მტკიცდება, რომ $\alpha\mathbf{A}$ ოპერატორის მატრიცა არის $\mathbf{A}$ ოპერატორის მატრიცის α რიცხვზე ნამრავლის ტოლი.

წრფივი ოპერატორების შეკრების და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები აკმაყოფილებენ წრფივი სივრცის აქსიომების პირობებს და, მაშასადამე, ამ ოპერაციების მიმართ წრფივი ოპერატორები ქმნიან წრფივ სივრცეს.

ვთქვათ, $\mathbf{B} : E \to F$ და $\mathbf{A} : F \to H$ წრფივი ოპერატორებია. $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ოპერატორების ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\mathbf{AB} : E \to H$ ოპერატორს, რომელიც განისაზღვრება პირობით:

$$\forall x \in E, \quad (\mathbf{AB})x = \mathbf{A}(\mathbf{B}x). \tag{10.5}$$

ამრიგად, $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ოპერატორების ნამრავლი წარმოადგენს $\mathbf{B}$ და $\mathbf{A}$ ოპერატორების კომპოზიციას.

სავარჯიშო 10.2. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{AB}$ წრფივი ოპერატორია.

ოპერატორების ჯამის შემთხვევის ანალოგიურად მტკიცდება (დაამტკიცეთ), რომ ნებისმიერი ბაზისის შემთხვევაში $\mathbf{AB}$ *ოპერატორის მატრიცა* $\mathbf{A}$ *და* $\mathbf{B}$ *ოპერატორების მატრიცების ნამრავლის ტოლია.*

შევნიშნოთ, რომ წრფივი ოპერატორების ნამრავლი არ არის კომუტაციური, ე.ი. ზოგადად $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

ოპერატორების გამრავლების სხვა თვისებებიდან აღსანიშნავია შემდეგი:

1. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
2. $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ ($\mathbf{A}$ წრფივი გარდაქმნაა, $\mathbf{I}$ – იგივური);
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$;
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

აღნიშნული თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ მოცემული წრფივი სივრცის გარდაქმნათა სიმრავლე ოპერატორთა შეკრების და გამრავლების ოპერაციების მიმართ რგოლს წარმოადგენს.

§11. შეუღლებული, თვითშეუღლებული და ორთოგონალური ოპერატორები

ამ პარაგრაფში ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ E ევკლიდეს ნამდვილი n-განზომილებიანი სივრცეა, ხოლო $\mathbf{A} : E \to E$ – ამ სივრცეში განსაზღვრული წრფივი გარდაქმნა.

ვთქვათ, A არის $\mathbf{A}$ გარდაქმნის მატრიცა ორთონორმირებულ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისში. $\mathbf{A}^*$-ით აღვნიშნოთ წრფივი გარდაქმნა, რომლის მატრიცა მოცემულ ბაზისში არის A მატრიცის ტრანსპონირებული $\mathrm{A}^\top$ მატრიცა. თუ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ და $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ არის E სივრცის ნებისმიერი ორი ვექტორი

$(x_1, x_2, \ldots, x_n$ და $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ამ ვექტორების კოორდინატებია მოცემულ ორთონორმირებულ ბაზისში), მაშინ (6.4) და (9.8)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}x, y) &= \sum_{i=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Bigg)y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_jy_i = \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_ix_j = \sum_{j=1}^{n}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i\Bigg)x_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \Bigg(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}y_i\Bigg). \qquad (11.1)\end{aligned}$$

რადგან $\mathrm{A}^{\top}$ არის $\mathbf{A}^*$ გარდაქმნის მატრიცა, ამიტომ (11.1)-დან მივიღებთ, რომ $\forall x, y \in E$ ელემენტებისთვის შესრულებულია ტოლობა

$$(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}^*y). \qquad (11.2)$$

ვაჩვენოთ, რომ არსებობს მხოლოდ ერთი ისეთი $\mathbf{A}^*$ ოპერატორი, რომელიც აკმაყოფილებს (11.2) პირობას. მართლაც, E სივრცის ნებისმიერი x ვექტორისათვის (იხ. ფორმულა (6.5))

$$\mathbf{A}^*x = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{A}^*x, e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}(x, \mathbf{A}e_i)e_i,$$

რაც ამტკიცებს ერთადერთობას.

$\mathbf{A}^*$ გარდაქმნას ეწოდება $\mathbf{A}$ გარდაქმნის შეუღლებული გარდაქმნა, თუ E სივრცის ნებისმიერი x და y ელემენტისათვის სრულდება (11.2) პირობა.

ამრიგად, ყოველი წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნისათვის არსებობს ერთადერთი შეუღლებული $\mathbf{A}^*$ გარდაქმნა და $\mathbf{A}^*$ გარდაქმნის მატრიცა ორთონორმირებულ ბაზისში არის $\mathbf{A}$ გარდაქმნის მატრიცის ტრანსპონირებული.

შევნიშნოთ, რომ თუ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ბაზისი არ არის ორთონორმირებული, მაშინ $\mathbf{A}^*$ გარდაქმნის A^* მატრიცა ამ ბაზისში შეიძლება ვიპოვოთ $\mathrm{A}^* = \Gamma^{-1}\,\mathrm{A}^\top\,\Gamma$ ფორმულის საშუალებით, სადაც Γ არის ე.წ. *გრამის მატრიცა*:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & \ldots & (e_1, e_n) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & \ldots & (e_2, e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (e_n, e_1) & (e_n, e_2) & \ldots & (e_n, e_n) \end{bmatrix}.$$

წრფივ გარდაქმნას ეწოდება *თვითშეუღლებული*, თუ $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, ე.ი. თუ $\forall x, y \in E$

$$(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}y).$$

ცხადია, რომ *თვითშეუღლებული* $\mathbf{A}$ *ოპერატორის მატრიცა ორთონორმირებულ ბაზისში სიმეტრიულია.*

მაგალითი 11.1. ვთქვათ, $\mathbf{A}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ არის O წერტილის გარშემო φ კუთხით მობრუნების ოპერატორი 9.3 მაგალითიდან. ვიპოვოთ $\mathbf{A}_\varphi$ გარდაქმნის შეუღლებული $\mathbf{A}_\varphi^*$ გარდაქმნა.

∇ როგორც ცნობილია (იხ. მაგალითი 9.3), $\vec{i}, \vec{j}$ ბაზისში $\mathbf{A}_\varphi$ ოპერატორის მატრიცაა

$$\mathrm{A}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

მაგრამ ორთონორმირებულ ბაზისში $\mathbf{A}_\varphi^*$ გარდაქმნის მატრიცა $\mathbf{A}_\varphi$ გარდაქმნის A_φ მატრიცის ტრანსპონირებულია. გადავწეროთ $\mathbf{A}_\varphi^*$ გარდაქმნის $\mathrm{A}_\varphi^\top$ მატრიცა შემდეგი სახით:

$$\mathrm{A}_\varphi^\top = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{bmatrix}.$$

A_φ და $\mathrm{A}_\varphi^\top$ მატრიცების შედარებით დავასკვნით, რომ $\mathbf{A}_\varphi^*$ გარდაქმნაც არის φ კუთხით მობრუნება O წერტილის გარშემო, ოღონდ საწინააღმდეგო მიმართულებით, ე.ი.

$$\mathbf{A}_\varphi^* = \mathbf{A}_{-\varphi} = \mathbf{A}_\varphi^{-1}. \qquad \square \tag{11.3}$$

თუ $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$, მაშინ $\mathbf{A}$ გარდაქმნას ეწოდება *ორთოგონალური გარდაქმნა (ოპერატორი)*.

ამრიგად, 11.1 მაგალითში განხილული მობრუნების $\mathbf{A}_\varphi$ ოპერატორი ორთოგონალურია.

რადგან ოპერატორულ $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{I}$ თანაფარდობას ორთონორმირებულ ბაზისში შეესაბამება მატრიცული $\mathrm{A}\,\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^\top A = I$ თანაფარდობა, ამიტომ ორთოგონალური ოპერატორის A მატრიცისათვის სრულდება ტოლობა

$$\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^{-1}\,. \tag{11.4}$$

ასეთ კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება *ორთოგონალური მატრიცა. ამრიგად, ორთოგონალური ოპერატორის მატრიცა ორთონორმირებულ ბაზისში ორთოგონალურია.*

სავარჯიშო 11.2. დაამტკიცეთ, რომ თუ A ორთოგონალური მატრიცაა, მაშინ $|\,\mathrm{A}\,| = \pm 1$.

თუ $\mathbf{A}$ ორთოგონალური გარადაქმნაა, მაშინ $\forall x, y \in E$

$$(\mathbf{A}x, \mathbf{A}y) = (x, \mathbf{A}^*\mathbf{A}y) = (x, \mathbf{I}y) = (x, y),$$

ე.ი. ორთოგონალური გარდაქმნა ინარჩუნებს ვექტორის სიგრძეს და კუთხეს ორ ვექტორს შორის. აქედან გამომდინარეობს, რომ ორთოგონალურ გარდაქმნას ორთონორმირებული ბაზისი გადაჰყავს ორთონორმირებულ ბაზისში.

მტკიცდება, რომ მართებულია უფრო ზოგადი დებულება:

თეორემა 11.3. *შემდეგი სამი პირობა ერთმანეთის ეკვივალენტურია:*

1. $\mathbf{A}$ *გარდაქმნა ორთოგონალურია;*

2. $\mathbf{A}$ *გარდაქმნის მატრიცა ორთონორმირებულ ბაზისში ორთოგონალურია;*

3. $\mathbf{A}$ *გარდაქმნას ორთონორმირებული ბაზისი გადაჰყავს ორთონორმირებულ ბაზისში.*

აღვნიშნოთ, რომ გარკვეული აზრით $\mathbf{A}_\varphi$ გარდაქმნა არის $\mathbb{R}^2$ (ან, რაც იგივეა, V_2) სივრცის ერთადერთი ორთოგონალური გარდაქმნა. უფრო ზუსტად, მართებულია შემდეგი

თეორემა 11.4. $\mathbb{R}^2$ *სივრცის ნებისმიერი ორთოგონალური გარდაქმნა არის ან მობრუნება კოორდინატთა სათავის მიმართ რაიმე* φ *კუთხით, ან ღერძული სიმეტრია* O *წერტილზე გამავალი გარკვეული წრფის მიმართ.*

§12. ოპერატორული განტოლება. წრფივი გარდაქმნის გული და მნიშვნელობათა სიმრავლე. ფრედჰოლმის ტიპის თეორემები

ვთქვათ, $\mathbf{A} : E \to E$ წრფივი ოპერატორია, ხოლო E ევკლიდეს ნამდვილი n-განზომილებიანი სივრცეა. როგორც აღვნიშნეთ (იხ. §9), ყოველ ოპერატორულ

$$\mathbf{A}x = b \tag{12.1}$$

განტოლებას შეესაბამება ასეთივე სახის $\mathrm{A\,X} = \mathrm{B}$ მატრიცული განტოლება, სადაც A ამ ოპერატორის მატრიცაა რომელიმე ბაზისში, ხოლო X და B სვეტ-მატრიცებია. ერთგვაროვან ოპერატორულ

$$\mathbf{A}x = \theta \tag{12.2}$$

განტოლებას შეესაბამება ერთგვაროვანი მატრიცული განტოლება

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\mathbf{A}$ გარდაქმნა არაგადაგვარებულია (ე.ი. $|\,\mathrm{A}\,| \neq 0$), მაშინ ერთგვაროვან ოპერატორულ (12.2) განტოლებას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი $x = \theta$. ზოგადად, ერთგვაროვანი ოპერატორული (12.2) განტოლების ამონახსნთა სიმრავლე წარმოადგენს წრფივი E სივრცის $(n - r)$-განზომილებიან წრფივ ქვესივრცეს, სადაც $n = \dim E$, ხოლო $r = \operatorname{rank} \mathrm{A}$ (იხ. (8.2)). ასეთ ქვესივრცეს ეწოდება $\mathbf{A}$ წრფივი *გარდაქმნის გული* (ან *ბირთვი*) და აღინიშნება $\ker \mathbf{A}$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\ker \mathbf{A} = \{x \in E \mid \mathbf{A}x = \theta\}$$

და

$$\dim(\ker \mathbf{A}) = n - r \quad (n = \dim E, \quad r = \operatorname{rank} \mathrm{A}). \qquad (12.3)$$

რადგან $\ker \mathbf{A}$ ქვესივრცის განზომილება არ არის დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე, აქედან გამომდინარეობს, რომ *წრფივი გარდაქმნის მატრიცის რანგი r არ არის დამოკიდებული ბაზისის შერჩევაზე.* ამ r რიცხვს ეწოდება $\mathbf{A}$ *წრფივი გარდაქმნის რანგი.*

$\mathbf{A}x$ $(x \in E)$ სახის ელემენტთა სიმრავლეს $\mathbf{A}$ წრფივი გარდაქმნის *მნიშვნელობათა სიმრავლე* ეწოდება და აღინიშნება $\operatorname{Im} \mathbf{A}$ სიმბოლოთი

$$\operatorname{Im} \mathbf{A} = \{\mathbf{A}x \mid x \in E\}.$$

ცხადია, რომ $\operatorname{Im} \mathbf{A}$ წარმოადგენს E წრფივი სივრცის წრფივ ქვესივრცეს. რადგან ამ ქვესივრცეში არსებობს r რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორი (რომლებიც შეესაბამება A

მატრიცის ბაზისურ სვეტებს), ხოლო ნებისმიერი სხვა $b = \mathbf{A}x$ ვექტორი (როგორც გაფართოებული $\overline{\mathrm{A}}$ მატრიცის სვეტის შესაბამისი ვექტორი) წარმოადგენს მათ წრფივ კომბინაციას, ამიტომ

$$\dim(\operatorname{Im}\mathbf{A}) = r. \tag{12.4}$$

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ (12.3) და (12.4) ტოლობებიდან გამომდინარეობს ტოლობა

$$\dim(\ker\mathbf{A}) + \dim(\operatorname{Im}\mathbf{A}) = \dim E.$$

ფრედჰოლმის ტიპის თეორემები ამყარებენ კავშირს

$$\mathbf{A}x = b \tag{12.5}$$

სახის არაერთგვაროვან და

$$\mathbf{A}^*x = \theta \tag{12.6}$$

სახის შეუღლებულ ერთგვაროვან ოპერატორულ განტოლებებს შორის. ფრედჰოლმის ტიპის თეორემების ფორმულირებებში დეტერმინანტის და ზოგადად, რანგის ცნება ცხადი სახით არ მონაწილეობს. ასეთი მიდგომის უპირატესობა ის არის, რომ ასეთივე სახით ფორმულირდება თეორემები მათემატიკის სხვა დარგებში (მაგალითად, ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიაში). ვინაიდან (12.5) და(12.6) ოპერატორული განტოლებების შესაბამისი არაერთგვაროვანი და ერთგვაროვანი სისტემების $|\,\mathrm{A}\,|$ და $|\,\mathrm{A}^\top\,|$ დეტერმინანტები ერთმანეთის ტოლია, აქედან მიიღება ე.წ. *ფრედჰოლმის ალტერნატივა.*

თეორემა 12.1. *ან (12.5) არაერთგვაროვან ოპერატორულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნებისმიერი $b \in E$ ელემენტისათვის, ან შეუღლებულ ერთგვაროვან (12.6) განტოლებას აქვს ერთი მაინც არანულოვანი ამონახსნი.*

ნაკლებად ცხადია ფრედჰოლმის შემდეგი

თეორემა 12.2. *იმისათვის, რომ არაერთგვაროვან* (12.5) *განტოლებას ჰქონდეს ამონახსნი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მარჯვენა მხარე b იყოს შეუღლებული ერთგვაროვანი* (12.6) *განტოლების ყველა ამონახსნის ორთოგონალური.*

შევნიშნოთ, რომ საკმარისობისგან განსხვავებით, აუცილებლობა ტრივიალურად მტკიცდება. მართლაც, ვთქვათ x_0 არის (12.5) განტოლების ამონახსნი, ე.ი.

$$\mathbf{A}x_0 = b.$$

მაშინ (12.6) განტოლების ნებისმიერი y ამონახსნისათვის

$$(b, y) = (\mathbf{A}x_0, y) = (x_0, \mathbf{A}^* y) = (x_0, \theta) = 0,$$

ე.ი. $b \perp y$. □

§13. წრფივი ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი და საკუთრივი მნიშვნელობა. მახასიათებელი განტოლება

ვთქვათ, $\mathbf{A} : E \to E$ წრფივი გარდაქმნაა და $x \in E$ – არანულოვანი ვექტორი. თუ

$$\mathbf{A}x = \lambda x, \tag{13.1}$$

სადაც λ ნამდვილი რიცხვია, მაშინ x ვექტორს ეწოდება $\mathbf{A}$ *წრფივი გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორი*, ხოლო λ *რიცხვს – საკუთრივი მნიშვნელობა.*

მაგალითი 13.1. ვიპოვოთ ნულოვანი $\mathbf{O} : E \to E$ და იგივური $\mathbf{I} : E \to E$ ოპერატორების საკუთრივი ვექტორი და საკუთრივი მნიშვნელობა.

∇ რადგან $\forall x \in E$

$$\mathbf{O}x = \theta = 0x \quad \text{და} \quad \mathbf{I}x = x = 1x,$$

ამიტომ E სივრცის ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორი არის ნულოვანი $\mathbf{O}$ და იგივური $\mathbf{I}$ ოპერატორების საკუთრივი ვექტორი. ამავე დროს, $\mathbf{O}$ ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობაა $\lambda = 0$, ხოლო იგივური $\mathbf{I}$ ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობაა $\lambda = 1$. $\square$

შევნიშნოთ, რომ წრფივ ოპერატორს შეიძლება საერთოდ არ ჰქონდეს არც ერთი საკუთრივი ვექტორი. ასეთ ოპერატორთა რიცხვს მიეკუთვნება, მაგალითად, მობრუნების $\mathbf{A}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ოპერატორი (იხ. §9), როცა $\varphi \neq \pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

ვთქვათ, x არის $\mathbf{A}$ ოპერატორის საკუთრივი ვექტორი, ხოლო λ – შესაბამისი საკუთრივი მნიშვნელობა. გადავწეროთ (13.1) ოპერატორული ტოლობა მატრიცული სახით:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \lambda\,\mathrm{X}. \tag{13.2}$$

მოვახდინოთ ამ მატრიცული ტოლობის გარდაქმნა:

$$\mathrm{A}\,\mathrm{X} = \lambda\,\mathrm{X} \Longleftrightarrow \mathrm{A}\,\mathrm{X} - \lambda\,\mathrm{I}\,\mathrm{X} = 0 \Longleftrightarrow (\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})\,\mathrm{X} = 0.$$

რადგან ერთგვაროვან მატრიცულ

$$(\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I})\,\mathrm{X} = 0 \tag{13.3}$$

განტოლებას აქვს არანულოვანი ამონახსნი (x არის საკუთრივი ვექტორი, ამიტომ $x \neq \theta$), ამიტომ $\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}$ მატრიცის $|\,\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}\,|$ დეტერმინანტი ნულის ტოლია (შედეგი I.13.5), ე.ი.

$$|\,\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}\,| = 0. \tag{13.4}$$

ცხადია, რომ პირიქითაც, თუ ნამდვილი λ რიცხვი არის (13.4) განტოლების ფესვი, მაშინ ეს რიცხვი იქნება $\mathbf{A}$ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა.

(13.4) განტოლებას ეწოდება A მატრიცის *მახასიათებელი განტოლება*, ხოლო ამ განტოლების λ ფესვს - *მატრიცის მახასიათებელი ფესვი*. მიღებული შედეგი შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 13.2. *იმისათვის, რომ ნამდვილი λ რიცხვი იყოს $\mathbf{A}$ წრფივი ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ეს რიცხვი იყოს $\mathbf{A}$ ოპერატორის მატრიცის (ნებისმიერ ბაზისში) მახასიათებელი (13.4) განტოლების ფესვი.*

რადგან

$$\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix},$$

ამიტომ $|\,\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{I}\,|$ დეტერმინანტი წარმოადგენს λ ცვლადის n-ური ხარისხის $p(\lambda)$ მრავალწევრს, რომელსაც ეწოდება A *მატრიცის მახასიათებელი მრავალწევრი*.

რადგან n ხარისხის $(n \geq 1)$ ყოველ მრავალწევრს აქვს ერთი ფესვი მაინც (კომპლექსური ან ნამდვილი), ამიტომ *კომპლექსურ წრფივ სივრცეში ყოველ წრფივ გარდაქმნას აქვს ერთი საკუთრივი ვექტორი მაინც*.

13.2 თეორემიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ სხვა ბაზისზე გადასვლისას მახასიათებელი განტოლების ფესვი არ იცვლება. ამ ფესვებს ეწოდება მოცემული **A** *გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები.*

მაგალითი 13.3. ვიპოვოთ

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

მატრიცით მოცემული $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები.

∇ ამოვწეროთ შესაბამისი მახასიათებელი $p(\lambda)$ მრავალწევრი

$$p(\lambda) = |\,\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{I}\,| = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10)$$

და მახასიათებელი განტოლება

$$\lambda(\lambda - 10) = 0.$$

ამ განტოლების $\lambda_1 = 0$ და $\lambda_2 = 10$ ფესვები წარმოადგენენ **A** გარდაქმნის საკუთრივ მნიშვნელობებს. შესაბამისი საკუთრივი ვექტორები ვიპოვოთ (13.3) მატრიცული განტოლებიდან, რომელიც ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$\begin{cases} (8-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} \tag{13.5}$$

რადგან λ-ს აღნიშნული მნიშვნელობებისათვის ამ სისტემის $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 10)$ დეტერმინანტი ნულის ტოლია, ამიტომ ეს სისტემა ერთ-ერთი განტოლების ტოლფასია. კერძოდ, ავიღოთ პირველი განტოლება

$$(8-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0. \tag{13.6}$$

$\lambda = 0$ შემთხვევაში (13.6)-დან ვღებულობთ

$$8x_1 + 4x_2 = 0,$$

საიდანაც $x_2 = -2x_1$ და, მაშასადამე, $\lambda = 0$ შემთხვევაში (13.5) სისტემის ზოგადი ამონახსნია:

$$x_1 = t, \quad x_2 = -2t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

ამრიგად, $\lambda = 0$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებია

$$x = (t, -2t), \quad \text{სადაც} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

ანალოგიურად, $\lambda = 10$ შემთხვევაში (13.6)-დან მივიღებთ განტოლებას

$$-2x_1 + 4x_2 = 0,$$

საიდანაც $x_1 = 2t$, $x_2 = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

ამრიგად, $\lambda = 10$ საკუთრივი მნიშვნელობის შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებია

$$x = (2t, t), \quad \text{სადაც} \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \square$$

13.3 მაგალითში განხილული A მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია. ეს შედეგი არ არის შემთხვევითი.

სავარჯიშო 13.4. დაამტკიცეთ, რომ მეორე რიგის სიმეტრიული

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია.

შევნიშნოთ, რომ ეს წინადადება ძალაში რჩება ნებისმიერი რიგის სიმეტრიული მატრიცისათვის.

თეორემა 13.5. *თვითშეუღლებული წრფივი გარდაქმნის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია.*

∇ თვითშეუღლებული ოპერატორის მატრიცა ორთონორმირებულ ბაზისში სიმეტრიულია (იხ. §11), ხოლო სიმეტრიული მატრიცის ყველა მახასიათებელი ფესვი ნამდვილია. $\square$

შედეგი 13.6. *ნებისმიერ თვითშეუღლებულ გარდაქმნას აქვს ერთი მაინც საკუთრივი ვექტორი.*

ადგილი აქვს უფრო ზოგად თეორემას:

თეორემა 13.7. *ნებისმიერი თვითშეუღლებული წრფივი* $\mathbf{A}$ *გარდაქმნისათვის არსებობს სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, შედგენილი* $\mathbf{A}$ *გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან.*

ცხადია, რომ თუ სივრცის ბაზისი შედგება წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან, მაშინ $\mathbf{A}$ გარდაქმნის მატრიცა ამ ბაზისში დიაგონალურია. ამის გათვალისწინებით თეორემა 13.7 შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

შედეგი 13.8. *ნებისმიერი თვითშეუღლებული* $\mathbf{A}$ *გარდაქმნისათვის არსებობს სივრცის ორთონორმირებული ბაზისი, რომელშიც ამ გარდაქმნის მატრიცა დიაგონალურია (მატრიცის დიაგონალური ელემენტები წარმოადგენენ გარდაქმნის საკუთრივ მნიშვნელობებს).*

თეორემა 13.9. *ნებისმიერი სიმეტრიული* A *მატრიცისათვის არსებობს ისეთი ორთოგონალური* B *მატრიცა, რომ* $\mathrm{B}^\top \mathrm{A}\,\mathrm{B}$ *დიაგონალური მატრიცაა.*

∇ ვთქვათ, $e_1, e_2, \dots, e_n$ ორთონორმირებული ბაზისია, ხოლო $\mathbf{A}$ მოცემული სიმეტრიული A მატრიცის შესაბამისი თვითშეუღლებული გარდაქმნაა. 13.8 შედეგის ძალით არსებობს სივრცის ორთონორმირებული $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისი, რომელშიც ამ გარდაქმნის A' მატრიცა დიაგონალურია. თუ B არის $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისიდან $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა, მაშინ (იხ. თეორემა 9.4)

$$\mathrm{B}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B} = \mathrm{A}'$$

და A' დიაგონალური მატრიცაა. რადგან ერთი ორთონორმირებული ბაზისიდან მეორე ორთონორმირებულ ბაზისზე გადასვლის მატრიცა ორთოგონალურია (იხ. თეორემა 11.3), ამიტომ $\mathrm{B}^{-1} = B^{\top}$ და საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $\mathrm{B}^{\top}\,\mathrm{A}\,\mathrm{B}$ მატრიცა დიაგონალურია. $\square$

§14. კვადრატული ფორმები. კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე

განსაზღვრება. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ცვლადების

$$F = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{14.1}$$

მრავალწევრს, სადაც $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, კვადრატული ფორმა ეწოდება. a_{ij} კოეფიციენტისაგან შედგენილ სიმეტრიულ

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება კვადრატული ფორმის მატრიცა.

როცა $n = 2$, კვადრატული ფორმა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$F = F(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_i x_j =$$
$$= a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2.$$

$a_{12} = a_{21}$ ტოლობის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

$$F = F(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2.$$

თუ კვადრატული ფორმის მატრიცა დიაგონალურია, ე.ი.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & \mathrm{O} & \\ & \mathrm{O} & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

მაშინ (14.1)-დან მივიღებთ

$$F = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

კვადრატული ფორმის ასეთ სახეს ეწოდება კანონიკური სახე.

ვთქვათ, E ევკლიდეს n-განზომილებიანი სივრცეა, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ამ სივრცის ორთონორმირებული ბაზისია, ხოლო $\mathbf{A}$ ამ სივრცეში მოქმედი თვითშეუღლებული ოპერატორია, რომლის მატრიცა აღნიშნულ ბაზისში არის (14.1) კვადრატული ფორმის სიმეტრიული მატრიცა. თუ

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E,$$
$$y = \mathbf{A}x = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E,$$

მაშინ (იხ. (9.8))

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

აქედან

$$(\mathbf{A}x, x) = (y, x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

ამრიგად, ყოველი კვადრატული ფორმა შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$F = (\mathbf{A}x, x) \tag{14.2}$$

სახით, სადაც $\mathbf{A}$ გარკვეული თვითშეუღლებული ოპერატორია.

კვადრატულ ფორმებთან დაკავშირებული ძირითადი ამოცანა ის არის, რომ ცვლადთა გარკვეული გარდაქმნით ეს ფორმა დავიყვანოთ მაქსიმალურად მარტივ (ე.ი. კანონიკურ) სახეზე.

გავარკვიოთ, როგორ იცვლება კვადრატული ფორმა ცვლადთა წრფივი გარდაქმნის შემთხვევაში. ვთქვათ, მოვახდინეთ ცვლადთა გარდაქმნა

$$\begin{cases} x_1 = p_{11} y_1 + p_{12} y_2 + \cdots + p_{1n} y_n, \\ x_2 = p_{21} y_1 + p_{22} y_2 + \cdots + p_{2n} y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = p_{n1} y_1 + p_{n2} y_2 + \cdots + p_{nn} y_n. \end{cases} \tag{14.3}$$

თუ გარდაქმნის

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{14.4}$$

მატრიცა ორთოგონალურია, მაშინ ცვლადთა (14.3) გარდაქმნას ეწოდება ორთოგონალური.

ვთქვათ, $\mathbf{P}$ ის წრფივი გარდაქმნაა, რომლის მატრიცა მოცემულ ორთონორმირებულ ბაზისში არის P მატრიცა. მაშინ $x = \mathbf{P}y$ და

$$F = (\mathbf{A}x, x) = (\mathbf{AP}y, \mathbf{P}y) = (\mathbf{P}^*\mathbf{AP}y, y),$$

ე.ი. ცვლადთა (14.3) გარდაქმნით (14.2) კვადრატული ფორმა დაიყვანება

$$F = (\mathbf{P}^*\mathbf{AP}y, y) \tag{14.5}$$

სახეზე. რადგან თვითშეუღლებული $\mathbf{P}^*$ ოპერატორის მატრიცა ორთონორმირებულ ბაზისში P მატრიცის ტრანსპონირებულია, ამიტომ (14.5) კვადრატული ფორმის B მატრიცა მოცემულ (14.2) კვადრატული ფორმის A მატრიცასთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^\top \mathrm{A}\,\mathrm{P}\,.$$

მაგრამ ყოველი სიმეტრიული A მატრიცისათვის არსებობს ისეთი ორთოგონალური P მატრიცა, რომ $\mathrm{P}^\top \mathrm{A}\,\mathrm{P}$ მატრიცა დიაგონალურია (თეორემა 13.9). აქედან გამომდინარეობს შემდეგი მნიშვნელოვანი დებულება.

თეორემა 14.1. *ყოველი კვადრატული ფორმა ცვლადთა გარკვეული ორთოგონალური გარდაქმნით დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.*

ამრიგად, ნებისმიერი კვადრატული ფორმა

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

ცვლადთა ორთოგონალური გარდაქმნით დაიყვანება

$$\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

სახეზე, სადაც λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ რიცხვები წარმოადგენს კვადრატული ფორმის მატრიცის მახასიათებელი განტოლების ფესვებს.

შენიშვნა. კვადრატული ფორმის კანონიკური სახე ცალსახად განსაზღვრული არ არის. ცალსახად განსაზღვრულია მხოლოდ დადებითი და უარყოფითი (და შესაბამისად არანულოვანი) λ_i კოეფიციენტების რიცხვი (ე.წ. *ინერციის კანონი*). არანულოვანი λ_i კოეფიციენტების რაოდენობას ეწოდება *კვადრატული ფორმის რანგი*. კვადრატული ფორმის რანგი ამ ფორმის მატრიცის რანგის ტოლია. □

მაგალითი 14.2. დავიყვანოთ

$$F(x, y) = 8x^2 + 8xy + 2y^2 \tag{14.6}$$

კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე.

∇ აქ $a_{11} = 8$, $2a_{12} = 8$, $a_{22} = 2$, ამიტომ $a_{12} = a_{21} = 4$ და კვადრატული ფორმის მატრიცაა

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

რადგან

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10),$$

ამიტომ მახასიათებელი განტოლების ფესვებია $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 10$. ამრიგად, ცვლადთა ორთოგონალური გარდაქმნით (14.6) კვადრატული ფორმა დაიყვანება

$$\Phi(x', y') = 0(x')^2 + 10(y')^2 = 10(y')^2$$

კანონიკურ სახეზე. ვიპოვოთ აღნიშნული ორთოგონალური $\mathbf{P}$ გარდაქმნა. 13.9 თეორემის დამტკიცებიდან (იხ. აგრეთვე თეორემა

13.7 და შედეგი 13.8) გამომდინარეობს, რომ ამ გარდაქმნის P მატრიცა არის სივრცის მოცემული ორთონორმირებული e_1, e_2 ბაზისიდან **A** გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორებისაგან შედგენილ ორთონორმირებულ e_1', e_2' ბაზისზე გადასვლის მატრიცა. $\lambda_1 = 0$ და $\lambda_2 = 10$ მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთრივი ვექტორებია $e_1' = (t, -2t)$ და $e_2' = (2t, t)$, $t \neq 0$ (იხ. მაგალითი 13.3). რადგან

$$|e_1'| = |e_2'| = \sqrt{t^2 + 4t^2} = t\sqrt{5}\,,$$

ამიტომ ორთონორმირებული ბაზისის მისაღებად უნდა ავიღოთ $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (ან $t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$), ე.ი. $e_1' = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$, $e_2' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ და, შესაბამისად,

$$\begin{cases} e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}\, e_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\, e_2 \\ e_2' = \frac{2}{\sqrt{5}}\, e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\, e_2. \end{cases}$$

ამრიგად,

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

და ცვლადთა საძიებელი ორთოგონალური გარდაქმნაა

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}\, x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y' \\ y = -\frac{2}{\sqrt{5}}\, x' + \frac{1}{\sqrt{5}}\, y'. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ (14.6) კვადრატული ფორმის დაყვანა კანონიკურ სახეზე შეიძლებოდა აგრეთვე სრული კვადრატის გამოყოფით:

$$F(x, y) = 8x^2 + 8xy + 2y^2 = 2(4x^2 + 4xy + y^2) = 2(2x + y)^2.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = y, \end{cases} \tag{14.7}$$

მივიღებთ კვადრატული ფორმის კანონიკურ სახეს

$$\Phi(x', y') = 2(x')^2.$$

(14.7) სისტემაში მეორე ტოლობა აღებულია ნებისმიერად მხოლოდ იმის გათვალისწინებით, რომ ცვლადთა გარდაქმნის მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული. $\square$

შევნიშნოთ, რომ მეორე რიგის წირის

$$\begin{gathered} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \end{gathered} \tag{14.8}$$

ზოგადი განტოლების (იხ. ნაწ. I, (22.1)) პირველი სამი შესაკრების ჯამი $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას. აქედან გამომდინარე, 14.1 თეორემის საფუძველზე დავასკვნით, რომ (14.8) სახის ყოველი განტოლება ცვლადთა გარკვეული ორთოგონალური გარდაქმნით, რომელიც კოორდინატთა სისტემის მობრუნების ტოლფასია (იხ. თეორემა 11.4), შეიძლება დავიყვანოთ

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{14.9}$$

სახის განტოლებაზე, რომელიც არ შეიცავს ცვლადების ნამრავლს $(B' = 0)$. თავის მხრივ, მიღებული (14.9) განტოლება ცვლადთა $x' = x_0 + x''$, $y' = y_0 + y''$ სახის გარდაქმნით (რომელიც კოორდინატთა სისტემის პარალელური გადატანის ტოლფასია) შეიძლება დავიყვანოთ კანონიკურ სახეზე (იხ. §I.22).

ანალოგიურად, მეორე რიგის ზედაპირის

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Exz + Fxy + \\ + Kx + Ly + Mz + N = 0 \end{aligned} \tag{14.10}$$

განტოლების (იხ. ნაწ. I, (22.10)) პირველი ექვსი შესაკრების ჯამი

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Exz + Fxy$$

წარმოადგენს კვადრატულ ფორმას. ამიტომ ცვლადთა ორთოგონალური გარდაქმნით (კოორდინატთა სისტემის მობრუნებით) და პარალელური გადატანით (14.10) განტოლებაც დაიყვანება კანონიკურ სახეზე.

ამოცანები და სავარჯიშოები

II.1. წრფივი $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ გარდაქმნა მოიცემა A მატრიცით. იპოვეთ $x \in \mathbb{R}^3$ ვექტორის $\mathbf{A}x$ სახე ამ გარდაქმნის დროს, თუ

ა) $x = (3, -1, 1)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

ბ) $x = (1, -1, 2)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$;

გ) $x = (2, -1, 0)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$;

დ) $x = (-3, 2, 4)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

II.2. წრფივი $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ გარდაქმნა მოიცემა A მატრიცით. იპოვეთ $\mathbb{R}^3$ სივრცის ის x ვექტორი, რომელიც ამ ასახვის დროს აისახება $y \in \mathbb{R}^3$ ვექტორზე (ე.ი. ისეთი $x \in \mathbb{R}^3$, რომ $\mathbf{A}x = y$), თუ

ა) $y = (1, 14, -7)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$;

ბ) $y = (-1, -7, 2)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{bmatrix}$;

გ) $y = (4, -1, 1)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

დ) $y = (15, 15, 36)$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{bmatrix}$.

II.3. გამოარკვიეთ, არის თუ არა შემდეგი ტოლობებით მოცემული წრფივი E სივრცის $\mathbf{A}$ გარდაქმნა წრფივი და დადებითი პასუხის შემთხვევაში იპოვეთ შესაბამისი წრფივი გარდაქმნის მატრიცა იმავე ბაზისში, რომელშიც მოცემულია $x = (x_1, x_2, x_3)$ ვექტორის კოორდინატები:

ა) $\mathbf{A}x = (2x_1 - x_2 + 2x_3,\, 5x_1 - 3x_2 + 3x_3,\, -x_1 - 2x_3)$;

ბ) $\mathbf{A}x = (x_2,\, -4x_1 + 4x_2,\, -2x_1 + x_2 + 2x_3)$;

გ) $\mathbf{A}x = (2x_1 + x_2,\, x_2^2,\, x_3 - x_2)$;

დ) $\mathbf{A}x = (x_1,\, x_2 + 1,\, x_3 + 2)$;

ე) $\mathbf{A}x = (x_1,\, x_1 + x_2,\, -x_1 + x_3)$.

II.4. e_1, e_2, e_3, e_4 არის წრფივი E სივრცის ბაზისი, $\mathbf{A} : E \to E$ არის წრფივი გარდაქმნა, $\mathbf{A}e_1 = e_2 + e_3$, $\mathbf{A}e_2 = e_1 + e_4$, $\mathbf{A}e_3 = e_2 + e_4$, $\mathbf{A}e_4 = e_1 + e_3$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. იპოვეთ $\mathbf{A}x$ ვექტორის კოორდინატები.

II.5. ვთქვათ,

$$\mathrm{B}_1 = \begin{bmatrix} 8 & -16 & 9 \\ -6 & 7 & -3 \\ 7 & -13 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad \mathrm{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

არის წრფივი E სივრცის e_1, e_2, e_3 ბაზისიდან შესაბამისად e'_1, e'_2, e'_3 და e''_1, e'_2, e''_3 ბაზისებზე გადასვლის მატრიცები, ხოლო

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$$

არის წრფივი $\mathbf{A} : E \to E$ გარდაქმნის მატრიცა e'_1, e'_2, e'_3 ბაზისში. იპოვეთ A გარდაქმნის მატრიცა e''_1, e''_2, e''_3 ბაზისში.

II.6. ცნობილია წრფივი $\mathbf{A} : E \to E$ გარდაქმნის მატრიცა $e_1, e_2, \dots, e_n$ ბაზისში. იპოვეთ ამ გარდაქმნის მატრიცა $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ ბაზისში, თუ

$$ა)\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_3 \\ e'_3 &= e_2 \\ e'_4 &= e_4 \end{aligned} ;$$

$$ბ)\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_1 + e_2 \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_4 &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \end{aligned} ;$$

$$გ)\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= e_1 + e_2 \\ e'_2 &= -e_2 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_2 + e_3 \end{aligned} ;$$

$$დ)\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} e'_1 &= -e_1 + 2e_2 \\ e'_2 &= e_2 + e_3 \\ e'_3 &= e_1 + e_3 \end{aligned} .$$

II.7. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს ერთადერთი წრფივი $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ გარდაქმნა, რომელსაც $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (1, 0, 0)$ ვექტორები გადაჰყავს შესაბამისად $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -1)$, $b_3 = (2, 1, 2)$ ვექტორებში, და იპოვეთ ამ გარდაქმნის მატრიცა.

II.8. იპოვეთ დიფერენცირების წრფივი $\mathbf{D} = \frac{d}{dt}$ ოპერატორის მატრიცა P_n სივრცის $1, t, t^2, \dots, t^n$ ბაზისში.

II.9. აჩვენეთ, რომ მეორე რიგის კვადრატული მატრიცის გამრავლება ა) მარცხნიდან და ბ) მარჯვნიდან მოცემულ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ მატრიცაზე წარმოადგენს წრფივ გარდაქმნას მეორე რიგის კვადრატულ მატრიცთა $E(2)$ წრფივ სივრცეში და იპოვეთ ამ გარდაქმნების მატრიცები ამ სივრცის

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ბაზისში.

II.10. $\mathbf{A} : E \to E$ გარდაქმნა განისაზღვრება ტოლობით $\mathbf{A}x = x + x_0$, სადაც x_0 წრფივი E სივრცის არანულოვანი ვექტორია. არის თუ არა $\mathbf{A}$ გარდაქმნა წრფივი?

II.11. $\mathbf{A} : E \to E$ გარდაქმნა განისაზღვრება ტოლობით $\mathbf{A}x = x_0$, სადაც x_0 წრფივი E სივრცის ფიქსირებული ელემენტია. რა შემთხვევაში იქნება გარდაქმნა წრფივი?

II.12. შეიძლება თუ არა V_3 სივრცეში წრფივი $\mathbf{A}$ ასახვა განისაზღვროს ტოლობით:

ა) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{a_0} \times \vec{x}$, სადაც $\vec{a_0} \in \mathrm{V}_3$ ფიქსირებული ვექტორია;

ბ) $\mathbf{A}\vec{x} = (\vec{a_0} \cdot \vec{x})\vec{x}$, სადაც $\vec{a_0} \in \mathrm{V}_3$ ფიქსირებული ვექტორია;

გ) $\mathbf{A}\vec{x} = |\vec{x}|\vec{x}$?

II.13. ამოწერეთ $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{a}_0 \times \vec{x}$ ტოლობით განსაზღვრული წრფივი $\mathbf{A} : \mathrm{V}_3 \to \mathrm{V}_3$ გარდაქმნის (იხ. სავარჯიშო II. 12) მატრიცა $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ბაზისში, თუ $\vec{a}_0 = (1, 1, 1)$.

II.14. იპოვეთ $\mathbf{A}x$ ვექტორის კოორდინატები, სადაც $x = (x_1, x_2)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\frac{\pi}{4}} + \mathbf{I}$ ($\mathbf{A}_{\frac{\pi}{4}}$ არის $\frac{\pi}{4}$ კუთხით მობრუნების ოპერატორი, ხოლო $\mathbf{I}$ – იგივური ოპერატორი).

II.15. ვთქვათ, $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ და $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ წრფივი გარდაქმნებია, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{A}x = (y_1, y_2, y_3), \qquad \mathbf{B}x = (z_1, z_2, z_3),$$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ y_2 = 4x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1 = x_1 + 3x_2 - x_3 \\ z_2 = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ z_3 = 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{cases},$$

იპოვეთ $(2\mathbf{A} + 3\mathbf{B})x$.

II.16. წინა სავარჯიშოს პირობებში

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1 = x_1 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

იპოვეთ $(\mathbf{AB})x$ და $(\mathbf{BA})x$.

II.17. იპოვეთ $\mathbf{A}_\varphi^2 x$ ვექტორის კოორდინატები, სადაც $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ხოლო $\mathbf{A}_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ არის φ კუთხით მობრუნების ოპერატორი.

II.18. A და B არის $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ და $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ წრფივი ოპერატორების მატრიცები შესაბამისად $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ და $e_1' = (3, 1)$, $e_2' = (4, 2)$ ბაზისებში. იპოვეთ $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ოპერატორის მატრიცა e_1', e_2' ბაზისში, თუ

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

II.19. $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ არის წრფივი $\mathbf{A}$ ოპერატორის მატრიცა. იპოვეთ $2\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 4\mathbf{I}$ ოპერატორის მატრიცა, სადაც $\mathbf{I}$ იგივური ოპერატორია.

II.20. შეამოწმეთ $\mathbf{DA}-\mathbf{AD}=\lambda\mathbf{A}$ ტოლობა, სადაც $\mathbf{D}$ და $\mathbf{A}$ არის ფუნქციის შესაბამისად გაწარმოების და $e^{\lambda t}$-ზე გამრავლების წრფივი გარდაქმნები ყველგან წარმოებად ფუნქციათა წრფივ სივრცეში.

II.21. აჩვენეთ, რომ მრავალწევრთა P_n სივრცეში $\mathbf{D}^{n+1}=\mathbf{O}$, სადაც $\mathbf{D}$ არის გაწარმოების ოპერატორი.

II.22. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის წრფივ გარდაქმნათა სიმრავლე შეკრებისა და რიცხვზე გამრავლების ოპერაციების მიმართ ქმნის წრფივ სივრცეს და იპოვეთ ამ სივრცის განზომილება.

II.23. წრფივ სივრცეში, რომლის ბაზისია e_1, e_2, მოცემულია წრფივი $\mathbf{A}$ ოპერატორი. იპოვეთ შებრუნებული $\mathbf{A}^{-1}$ ოპერატორის მატრიცა, თუ

$$\mathbf{A}e_1=e_2, \quad \mathbf{A}e_2=e_1.$$

II.24. წრფივი $\mathbf{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ოპერატორი მოცემულია ტოლობით: $\forall(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{A}(x_1,x_2)=(x_1+x_2, 2(x_1+x_2)).$$

არსებობს თუ არა შებრუნებული $\mathbf{A}^{-1}$ ოპერატორი?

II.25. გამოარკვიეთ, არის თუ არა ორთონორმირებულ ბაზისში A მატრიცით მოცემული წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნა თვითშეუღლებული ან ორთოგონალური:

ა) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$; ბ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$;

გ) $\mathrm{A}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; დ) $\mathrm{A}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$;

ე) $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{bmatrix}$; ვ) $A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 1 & -\sqrt{6}\\ 1 & 3 & \sqrt{6}\\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2\end{bmatrix}$;

ზ) $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2} & -1\\ 1 & \sqrt{2} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$.

II.26. A არის $\mathbf{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ გარდაქმნის მატრიცა $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$, $e_3=(0,0,1)$ ბაზისში. იპოვეთ $\mathbf{A}^*x$, სადაც $x=(x_1,x_2,x_3)$, თუ

ა) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$; ბ) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$;

გ) $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$; დ) $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}$.

II.27. A არის წრფივი $\mathbf{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ გარდაქმნის მატრიცა $e_1,e_2,\dots,e_n$ ბაზისში. იპოვეთ შეუღლებული $\mathbf{A}^*$ ოპერატორის მატრიცა იმავე ბაზისში, თუ

ა) $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$, $e_1=(1,0)$, $e_2=(1,1)$, $n=2$;

ბ) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -1\\ 2 & 7 & -3\end{bmatrix}$, $e_1=(1,2,1)$, $e_2=(1,1,2)$, $e_3=(1,1,0)$, $n=3$.

II.28. მრავალწევრთა P_2 წრფივ სივრცეში სკალარული ნამრავლი მოცემულია ტოლობით $(f,g)=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$, სადაც $f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, $g(t)=b_0+b_1t+b_2t^2$. იპოვეთ გაწარმოების

$\mathbf{D} = \frac{d}{dt}$ ოპერატორის შეუღლებული $\mathbf{D}^*$ ოპერატორის მატრიცა შემდეგ ბაზისში:

ა) $1,\ t,\ t^2$; ბ) $1,\ t,\ \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$.

II.29. დაამტკიცეთ, რომ

ა) $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$; ბ) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$; გ) $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

II.30. დაამტკიცეთ, რომ $\mathbf{AA}^*$ და $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ თვითშეუღლებული ოპერატორებია.

II.31. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ თვითშეუღლებული წრფივი ოპერატორებია, მაშინ $\mathbf{AB} + \mathbf{BA}$ ოპერატორიც თვითშეუღლებული იქნება.

II.32. დაამტკიცეთ, რომ ორი თვითშეუღლებული $\mathbf{A}$ და $\mathbf{B}$ ოპერატორების ნამრავლი თვითშეუღლებულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

II.33. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფივ $\mathbf{A} : \mathrm{V}_3 \to \mathrm{V}_3$ ოპერატორს თითოეული $\vec{a}$ ვექტორი გადაჰყავს რაიმე ფიქსირებული სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულ $\vec{b}$ ვექტორში, მაშინ ეს ოპერატორი ორთოგონალურია.

II.34. α-ს რა მნიშვნელობისათვის იქნება $\mathbf{A}x = \alpha x$ ტოლობით განსაზღვრული ოპერატორი ორთოგონალური?

II.35. იქნება თუ არა წრფივი $\mathbf{A}x = -x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ გარდაქმნა ორთოგონალური, სადაც $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$ და e_1, e_2, e_3, e_4 ორთონორმირებული ბაზისია?

II.36. იპოვეთ A მატრიცის მოცემული წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნის რანგი, გარდაქმნის გული და მისი განზომილება:

$$\text{ა)}\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{ბ)}\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix};$$

გ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$; დ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$;

ე) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$; ვ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & 9 \end{bmatrix}$.

II.37. ამოხსენით ოპერატორული განტოლება $\mathbf{A}x = b$, სადაც $b \in \mathbb{R}^3$, ხოლო $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ არის A მატრიცით მოცემული წრფივი გარდაქმნა:

ა) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = (5, -5, 10);$

ბ) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \\ 9 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = (-2, 8, 0);$

გ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = (1, -1, -2);$

დ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = (-4, 1, 6).$

II.38. შეამოწმეთ ფრედჰოლმის თეორემა II.37 სავარჯიშოში განხილული ოპერატორული $\mathbf{A}x = b$ განტოლებისათვის, ე.ი. აჩვენეთ, რომ $b \in \mathbb{R}^3$ ვექტორი არის შეუღლებული ერთგვაროვანი $\mathbf{A}^*x = \theta$ განტოლების ყველა ამონახსნის ორთოგონალური.

II.39. იპოვეთ A მატრიცით მოცემული წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები:

ა) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}6 & -4\\ 4 & -2\end{bmatrix}$; ბ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$;

გ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 6 & 17\end{bmatrix}$; დ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$;

ე) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$; ვ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{bmatrix}$;

ზ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$; თ) $\mathrm{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

II.40. ვთქვათ, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$. იპოვეთ $\mathbf{A}x=(5x_1+4x_2,8x_1+9x_2)$ ტოლობით განსაზღვრული წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები.

II.41. იპოვეთ ვექტორის OZ ღერძის გარშემო $\frac{\pi}{3}$ კუთხით მობრუნების წრფივი $\mathbf{A}:\mathrm{V}_3\to\mathrm{V}_3$ გარდაქმნის საკუთრივი ვექტორები და საკუთრივი მნიშვნელობები.

II.42. გამოსახეთ წრფივი $\mathbf{A}^{-1}$ გარდაქმნის მახასიათებელი ფესვები წრფივი $\mathbf{A}$ გარდაქმნის მახასიათებელი λ ფესვების საშუალებით.

II.43. იპოვეთ შემდეგი პირობებით განსაზღვრული წრფივი $\mathbf{A}:\mathrm{V}_3\to\mathrm{V}_3$ გარდაქმნის საკუთრივი $\vec{a}$ ვექტორები და საკუთრივი λ მნიშვნელობები:

ა) $\mathbf{A}\vec{x}=\alpha\vec{x}$, სადაც α ფიქსირებული ნამდვილი რიცხვია;

ბ) $\mathbf{A}\vec{x}=(\vec{x}\cdot\vec{i})\vec{i}$; გ) $\mathbf{A}\vec{x}=\vec{i}\times\vec{x}$.

II.44. დაიყვანეთ მოცემული კვადრატული ფორმა კანონიკურ სახეზე და იპოვეთ ცვლადთა ის ორთოგონალური გარდაქმნა, რომელსაც ეს ფორმა დაჰყავს კანონიკურ სახეზე:

ა) $2x^2 - 4xy + 5y^2$;   ბ) $2x^2 + 8xy + 8y^2$;

გ) $2x^2 + 2xy + 2y^2$;   დ) $15x^2 + 26xy + 15y^2$;

ე) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz$;

ვ) $6x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 4xy + 4xz - 8yz$.

თავი III

ბულის ალგებრები

ბულის ალგებრისა და წრფივი სივრცის ცნებებს შორის არსებობს გარკვეული ანალოგია იმ თვალსაზრისით, რომ ორივე შემთხვევაში საქმე გვაქვს სიმრავლეებზე განსაზღვრულ გარკვეული სახის ოპერაციებთან, რომლებიც აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს. ბულის ალგებრის ცნება, ისევე როგორც წრფივი სივრცის ცნება, მიღებულია იმ საერთო თვისებების გამოყოფით და განზოგადებით, რომელსაც აკმაყოფილებს განსახილველი ოპერაციები. ბულის ალგებრის კლასიკურ მაგალითს წარმოადგენს მოცემული (არაცარიელი) სიმრავლის ქვესიმრავლეთა სიმრავლე გაერთიანების, თანაკვეთის და დამატების ოპერაციების მიმართ. ბულის ალგებრებს დიდი გამოყენება აქვს ტექნიკის ისეთ დარგებში, რომლებიც დაკავშირებულია გამოთვლით ტექნიკასთან და სხვა ციფრულ მოწყობილობებთან.

§15. გადამრთველები და უმარტივესი საკონტაქტო სქემები

საკონტაქტო სქემის ქვეშ ვიგულისხმებთ მოწყობილობას, რომელიც შედგება გარკვეული სახით შეერთებული გადამრთველებისაგან. ეს გადამრთველები შეიძლება იყოს მექანიკურად მოქმედი

(ამომრთველები, მექანიკური რელეები) ან ელექტრონული მოწყობილობები (ელექტრონმილაკები, ტრანზისტორები, ტირისტორები).

საკონტაქტო სქემაში მხედველობაში მიიღება გადამრთველის მხოლოდ ორი მდგომარეობა – “ჩართული” (დენი გადის) და “გამორთული” (დენი არ გადის). სქემის ყოველ p გადამრთველს შევუსაბამოთ მნიშვნელობა 1, თუ ის ჩართულია (დენი გადის), და მნიშვნელობა 0, თუ ის გამორთულია (დენი არ გადის) (შესაბამისად, ნახ. 15.1 ა) და ნახ. 15.1 ბ)).

ა) ბ)

ნახ. 15.1

ორი p და q გადამრთველის მიმდევრობით შეერთების შემთხვევაში სქემის შესაბამისი მონაკვეთი დენს გაატარებს მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე გადამრთველი იქნება ჩართული (ნახ. 15.2).

ნახ. 15.2

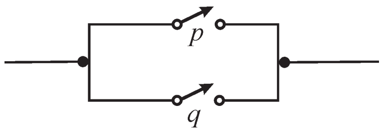
ორი p და q გადამრთველის მიმდევრობით შეერთება აღინიშნება $p\wedge q$ სიმბოლოთი (მიღებულია აგრეთვე აღნიშვნა $p\cdot q$). ზემოთ ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ $p \wedge q$-ს შებამისი მნიშვნელობა იქნება 1-ის ტოლი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $p = 1$ და $q = 1$, ხოლო დანარჩენ შემთხვევაში $p \wedge q$-ს მნიშვნელობა იქნება 0-ის ტოლი. ეს ყველაფერი შეიძლება ავსახოთ შემდეგი ცხრილით (იხ. ცხრილი 15.3)

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ცხრილი 15.3

ასეთ ცხრილს ეწოდება *ჭეშმარიტობის ცხრილი* (იხ. აგრეთვე §19).

ორი p და q გადამრთველის პარალელური შეერთების შემთხვევაში სქემის შესაბამისი მონაკვეთი დენს არ გაატარებს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ორივე გადამრთველი გამორთულია (ნახ. 15.4).



ნახ. 15.4

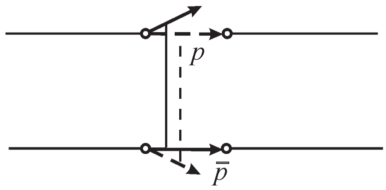
p და q გადამრთველების ასეთი შეერთება აღინიშნება $p \vee q$ სიმბოლოთი (მიღებულია აგრეთვე აღნიშვნა $p + q$).

ამრიგად, $p \vee q$-ს მნიშვნელობა იქნება 0-ის ტოლი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $p = 0$ და $q = 0$, ხოლო დანარჩენ შემთხვევაში $p \vee q$-ს მნიშვნელობა იქნება 1-ის ტოლი (იხ. ცხრილი 15.5).

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ცხრილი 15.5

ორი გადამრთველი ისეთნაირად შეიძლება იყოს შეერთებული ერთმანეთთან (მექანიკურად ან ელექტრონულად), რომ ერთ-ერთი გადამრთველის ჩართვის შემთხვევაში მეორე გადამრთველი გამოირთოს და პირიქით, ერთ-ერთი გადამრთველის გამორთვის შემთხვევაში მეორე გადამრთველი ჩაირთოს. თუ p არის ასეთი ორი გადამრთველიდან ერთ-ერთი, მაშინ მეორე გადამრთველი აღინიშნება $\overline{p}$-თი (ნახ. 15.6).



ნახ. 15.6

აღნიშნული შესაბამისობა p და $\overline{p}$ გადამრთველებს შორის ასახულია 15.7 ცხრილში.

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

ცხრილი 15.7

ვთქვათ, $L = \{0, 1\}$ და n ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. $f : L^n \to L$ სახის ფუნქციას, სადაც L^n არის L სიმრავლის დეკარტული n-ური ხარისხი (იხ. §1), ეწოდება ბულის ფუნქცია. ამრიგად, ბულის ფუნქცია არის

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

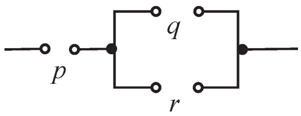
სახის ფუნქცია, სადაც $x_1, x_2, \ldots, x_n, z \in \{0, 1\}$.

აქედან გამომდინარე, შეიძლება ითქვას, რომ გადამრთველების ყველა შეერთება ხასიათდება შესაბამისი ბულის ფუნქციით

(იგივე ჭეშმარიტობის ცხრილით). $p \wedge q$ და $p \vee q$ სქემების შემთხვევაში $n = 2$ (ცხრილი 15.3 და 15.5), ხოლო $\overline{p}$ სქემის შემთხვევაში $n = 1$ (ცხრილი 15.7).

$p \wedge q$, $p \vee q$ და $\overline{p}$ სახის გამოსახულებებს ეწოდება ბულის *ფორმულები* ანუ *ბულის მრავალწევრები*.

ახლა განვიხილოთ 15.8 ნახაზზე მოყვანილი სქემა.



ნახ. 15.8

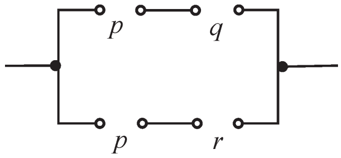
p	q	r	p	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

ცხრილი 15.9

ადვილი მისახვედრია, რომ გადამრთველების ასეთ შეერთებას შეესაბამება

$$p \wedge (q \vee r)$$

ბულის ფორმულა. ავაგოთ ამ სქემის ჭეშმარიტობის ცხრილი ან, რაც იგივეა, ვიპოვოთ $f : L^3 \to L$ ბულის ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა ($n = 3$, რადგან გვაქვს სამი გადამრთველი). ამისათვის თანმიმდევრობით ვიპოვოთ ჯერ $q \vee r$-ის მნიშვნელობა, შემდეგ კი $p \wedge (q \vee r)$-ის. ეს ყველაფერი ავსახოთ ცხრილში (ცხრილი 15.9).



ნახ. 15.10

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

ცხრილი 15.11

15.9 ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ 15.8 ნახაზზე მოყვანილი სქემა დენს გაატარებს მხოლოდ ორ შემთხვევაში:

1. ერთდროულად ჩართულია p და r გადამრთველი (15.9 ცხრილის მე-6 და მე-8 სტრიქონი);

2. ერთდროულად ჩართულია p და q გადამრთველი (15.9 ცხრილის მე-7 და მე-8 სტრიქონი).

ახლა განვიხილოთ

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

ბულის ფორმულის შესაბამისი სქემა ანუ, მოკლედ, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ სქემა (ნახ. 15.10). თუ შევადგენთ ამ სქემის შესაბამის ჭეშმარიტობის ცხრილს (ცხრილი 15.11), დავინახავთ, რომ ამ ცხრილის ბოლო სვეტი ემთხვევა $p \wedge (q \vee r)$ სქემის ჭეშმარიტობის 15.9 ცხრილის ბოლო სვეტს. ეს ნიშნავს, რომ ეს ორი სქემა მუშაობს

ერთნაირად და არის ერთმანეთის ეკვივალენტური. ამის შესაბამისად $p \wedge (q \vee r)$ და $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ბულის ფორმულებს ეწოდება ეკვივალენტური ფორმულები.

ზოგადად, *ბულის ორ ფორმულას ეწოდება ეკვივალენტური*, თუ მათი შესაბამისი ბულის ფუნქციები ერთმანეთის ტოლია.

სავარჯიშო 15.1. დაამტკიცეთ, რომ აღნიშნული ბინარული მიმართება წარმოადგენს ეკვივალენტობის მიმართებას (იხ. §1) ბულის ფორმულების სიმრავლეზე.

იმ ფაქტს, რომ u და v ეკვივალენტური ფორმულებია, აღნიშნავენ ასე

$$u \equiv v.$$

ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ

$$u_1 \equiv v_1 \quad \text{და} \quad u_2 \equiv v_2,$$

მაშინ

$$\overline{u}_1 \equiv \overline{v}_1, \quad u_1 \wedge u_2 \equiv v_1 \wedge v_2, \quad u_1 \vee u_2 \equiv v_1 \vee v_2.$$

ამის შესაბამისად შემდეგში $u \equiv v$ ეკვივალენტობის შემთხვევაში სიმარტივისათვის დავწერთ $u = v$ (თუ ბულის u ან v ფორმულის რომელიმე შემადგენელ ნაწილს შევცვლით მისი ეკვივალენტური ნაწილით, ამით ასეთი პირობითი ტოლობა არ დაირღვევა).

ამ შეთანხმების საფუძველზე შეიძლება ითქვას, რომ ბულის ყველა ფორმულა, რომლის შესაბამისი ბულის ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ 0-ის ტოლ მნიშვნელობას, ერთმანეთის ტოლია. ყველა ასეთი ფორმულა აღვნიშნოთ f ასოთი (false ინგლისურად ნიშნავს მცდარს).

ანალოგიურად, t-თი აღვნიშნოთ ყველა ის ფორმულა, რომლის შესაბამისი ბულის ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ 1-ის ტოლ მნიშვნელობას (truth ინგლისურად ნიშნავს ჭეშმარიტს).

მაგალითად, ნებისმიერი p-თვის

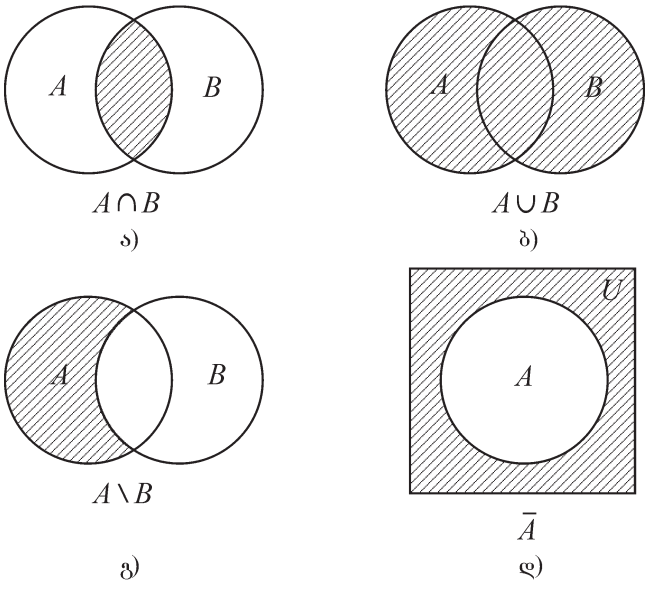
$$p \wedge \overline{p} = f, \quad p \vee \overline{p} = t.$$

§16. კავშირი სიმრავლეთა ალგებრასთან

გავიხსენოთ სიმრავლეთა გაერთიანების, თანაკვეთის, სხვაობის და დამატების ოპერაციები.

A და B *სიმრავლეების თანაკვეთა* ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც ერთდროულად ეკუთვნის როგორც A ისე B სიმრავლეს (ნახ. 16. 1 ა))

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ და } x \in B\}.$$



$A \cap B$ ა) $A \cup B$ ბ) $A \setminus B$ გ) $\bar{A}$ დ)

ნახ. 16.1

A და B *სიმრავლეების გაერთიანება* ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც ეკუთვნის A და B სიმრავლეებიდან ერთ-ერთს მაინც (ნახ. 16.1 ბ))

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ან } x \in B\}.$$

A და B *სიმრავლეების სხვაობა* ეწოდება A სიმრავლის ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელიც B სიმრავლეს არ ეკუთვნის (ნახ. 16.1 გ))

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ და } x \notin B\}.$$

ზოგიერთი კონკრეტული საკითხის შესწავლისას მიზანშეწონილია ისეთი U სიმრავლის შემოღება, რომელიც ქვესიმრავლეების სახით შეიცავს ამ საკითხთან დაკავშირებულ ყველა სიმრავლეს. ასეთ U სიმრავლეს ეწოდება *უნივერსალური სიმრავლე*. მაგალითად, პლანიმეტრიაში ასეთ უნივერსალურ სიმრავლედ შეგვიძლია მივიჩნიოთ სიბრტყის ყველა წერტილთა სიმრავლე.

ვთქვათ, U უნივერსალური სიმრავლეა. $U \setminus A$ სხვაობას ეწოდება A *სიმრავლის დამატება* U *სიმრავლეში* და აღინიშნება $\overline{A}$ ან A' სიმბოლოთი (ნახ. 16.1 დ))

$$\overline{A} = U \setminus A \quad (A \subset U).$$

აქ განხილული ოპერაციები (ისევე, როგორც სხვა ალგებრული ოპერაციები რიცხვების, მატრიცების და ვექტორების შემთხვევაში) აკმაყოფილებენ გარკვეულ პირობებს. მოვიტანოთ ზოგიერთი ასეთი მნიშვნელოვანი თანაფარდობა:

1. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ (იდემპოტურობა);
2. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ (კომუტაციურობა);
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ასოციაციურობა);

4. $A \cap (A \cup B) = A$,

$A \cup (A \cap B) = A$ (შთანთქმის კანონები)

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (დისტრიბუციულობა);

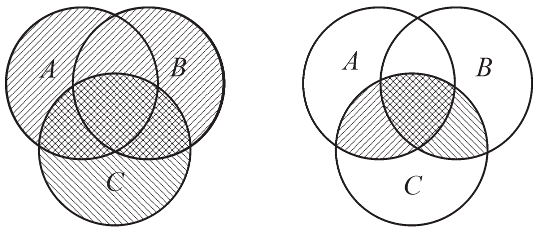
6. $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup U = U, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap U = A$;

7. $A \cup \overline{A} = U, \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$;

8. $\overline{(\overline{A})} = A$;

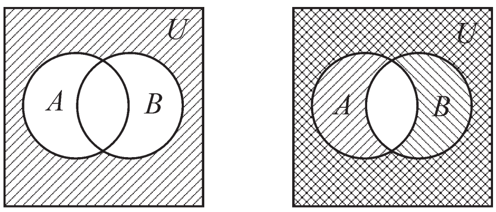
9. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (დე მორგანის წესები).

აქ მოტანილი ზოგიერთი ტოლობის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოყვანილია 16.2 და 16. 3 ნახაზებზე.



$(A \cup B) \cap C$ $\qquad$ $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

ნახ. 16.2



$\overline{A \cup B}$ $\qquad$ $\bar{A} \cap \bar{B}$

ნახ. 16.3

ვთქვათ, U ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. $S(U)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ამ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის სიმრავლე, ე.ი.

$$A \in S(U) \Longleftrightarrow A \subset U.$$

ცხადია, რომ

$$\varnothing \in S(U)$$

და

$$U \in S(U).$$

სიმრავლეთა თანაკვეთის, გაერთიანების და დამატების ოპერაციები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $S(U)$ სიმრავლეზე განსაზღვრული ოპერაციები.

წინა პარაგაფში ჩვენ დავამტკიცეთ ტოლობა (უფრო ზუსტად, ეკვივალენტობა)

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

მაგრამ მსგავსი თანაფარდობა, როგორც უკვე აღვნიშნეთ, სამართლიანია სიმრავლეებისთვისაც: ნებისმიერი A, B და C სიმრავლისათვის

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

აღმოჩნდა, რომ ყველა თანაფარდობა, რომელიც დაკავშირებულია სიმრავლეების თანაკვეთის ($\cap$), გაერთიანების ($\cup$) და დამატების ($\overline{}$) ოპერაციებთან, აგრეთვე ჭეშმარიტი იქნება ბულის ფორმულებისათვისაც, თუ $\cap$, $\cup$ და $\overline{}$ ოპერაციების სიმბოლოებს შევცვლით შესაბამისად $\wedge$, $\vee$ და $\overline{}$ სიმბოლოებით, ცარიელ $\varnothing$ სიმრავლეს – f ფორმულით, ხოლო უნივერსალურ U სიმრავლეს – t ფორმულით.

ამოვწეროთ ასეთი სახის თანაფარდობანი (შეადარეთ სიმრავლეთა ალგებრის ოპერაციების თვისებებს):

1. $p \vee p = p$, $\quad p \wedge p = p$;
2. $p \vee q = q \vee p$, $\quad p \wedge q = q \wedge p$;
3. $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$, $\quad (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$;
4. $p \wedge (p \vee q) = p$, $\quad p \vee (p \wedge q) = p$;
5. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
   $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
6. $p \vee f = p, \ \ p \vee t = t$, $\quad p \wedge f = f, \ \ p \wedge t = p$;
7. $p \vee \overline{p} = t$, $\quad p \wedge \overline{p} = f$;
8. $\overline{(\overline{p})} = p$;
9. $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$, $\quad \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$.

აღვნიშნოთ, რომ *ბულის ერთი ფორმულიდან მის ეკვივალენტურ ფორმულაზე გადასვლისათვის საკმარისია მოცემული ფორმულის გარდაქმნა აღნიშნული ტოლობების გამოყენებით.*

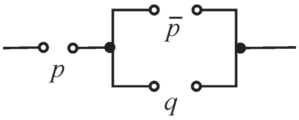
მაგალითად, რადგან

$$p \wedge (\overline{p} \vee q) = (p \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge q) = f \vee (p \wedge q) = p \wedge q$$

(აქ თანმიმდევრობით ვისარგებლეთ მე-5, მე-7 და მე-6 ტოლობებით), ამიტომ $p \wedge (\overline{p} \vee q)$ ფორმულა $p \wedge q$ ფორმულის ეკვივალენტურია, ე.ი.

$$p \wedge (\overline{p} \vee q) = p \wedge q.$$

პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით ეს ნიშნავს, რომ 16.4 ნახაზზე წარმოდგენილი სქემა შეიძლება შეიცვალოს 16.5 ნახაზზე მოყვანილი სქემით:



ნახ. 16.4

ნახ. 16.5

ამრიგად, სქემის ანალიზის საშუალებით მოცემული სქემა ჩვენ დავიყვანეთ მის ეკვივალენტურ უფრო მარტივ და შესაბამისად უფრო საიმედო სქემაზე.

§17. ბულის ალგებრა. ბულის ალგებრის მაგალითები

წინა პარაგრაფში ჩვენ აღვნიშნეთ, რომ ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $S(U)$ სიმრავლეზე და ბულის ფორმულათა სიმრავლეზე (სადაც ფორმულათა ტოლობა ნიშნავს მათ ეკვივალენტობას) განსაზღვრულ ოპერაციებს აქვთ ერთნაირი თვისებები. შეიძლება მოვიყვანოთ ასეთი სიმრავლეების სხვა მაგალითებიც. აქ შევისწავლით ამ სახის სიმრავლეებს ზოგადად, იმისდა მიუხედავად, თუ რას წარმოადგენენ ამ სიმრავლის ელემენტები – ქვესიმრავლეებს, ფორმულებს, რიცხვებს თუ სხვა ბუნების ობიექტებს.

არაცარიელ M სიმრავლეს ეწოდება ბულის ალგებრა,* თუ M სიმრავლეზე განსაზღვრულია ორი ბინარული $\wedge$ და $\vee$ და ერთი უნარული $\bar{\ }$ ოპერაცია, რომლებიც შემდეგ შვიდ პირობას (აქსიომას) აკმაყოფილებს:

1. $a \vee a = a, \quad a \wedge a = a$ (იდემპოტურობა);
2. $a \vee b = b \vee a, \quad a \wedge b = b \wedge a$ (კომუტაციურობა);
3. $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c),$

---

*ჯორჯ ბული (George Boole) – ინგლისელი მათემატიკოსი (1815–1864.)

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (ასოციაციურობა);

4. $a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a$ (შთანთქმის კანონი);

5. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ (დისტრიბუციულობა);

6. M სიმრავლეში არსებობს ისეთი ორი 0 და 1 ელემენტი,

რომ $\forall a \in M$

$a \vee 0 = a, \quad a \vee 1 = 1$,

$a \wedge 0 = 0, \quad a \wedge 1 = a$ (ნეიტრალურობის კანონი);

7. $a \vee \overline{a} = 1, \quad a \wedge \overline{a} = 0$ (დამატების კანონი).

ბინარულ $\vee$ ოპერაციას ეწოდება *დიზიუნქცია* (ჯამი, გაერთიანება) და იკითხება როგორც "ან", ბინარულ $\wedge$ ოპერაციას ეწოდება *კონიუნქცია* (ნამრავლი, თანაკვეთა) და იკითხება როგორც "და", ხოლო უნარულ $^{-}$ ოპერაციას, რომელსაც აღნიშნავენ აგრეთვე $'$ სიმბოლოთი, – *უარყოფა* (დამატება) და იკითხება როგორც "არა".

შენიშვნა 1. ყველა აქსიომა არ არის დამოუკიდებელი (მაგალითად, პირველი აქსიომა წარმოადგენს დანარჩენი აქსიომების შედეგს). □

შენიშვნა 2. დასაშვებია სხვა აქსიომატიკაც. □

აღსანიშნავია, რომ მოყვანილი აქსიომებიდან გამომდინარეობს მნიშვნელოვანი თანაფარდობები:

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}, \quad \overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}.$$

არაცარიელ M სიმრავლეს, რომლისთვისაც შესრულებულია პირველი ოთხი აქსიომა, *მესერი* ეწოდება. მესერს ეწოდება *დისტრიბუციული*, თუ შესრულებულია მე-5 აქსიომაც.

ვთქვათ, M ბულის ალგებრაა (ან მესერი) და $a, b \in M$. ვიტყვით, რომ $a \leq b$, თუ $a \vee b = b$, ე.ი.

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \vee b = b. \tag{17.1}$$

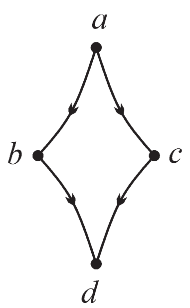
სავარჯიშო 17.1. დაამტკიცეთ, რომ (17.1) წესით შემოღებული ბინარული "$\leq$" მიმართება რეფლექსური, ტრანზიტული და ანტისიმეტრიულია (იხ. §1).

აქედან გამომდინარე, *ყოველი ბულის ალგებრა და მესერი შეიძლება განვიხილოთ როგორც ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე*. რადგან $0 \vee 1 = 1$ (აქსიომა 6), ამიტომ $0 \leq 1$. ასევე ადვილად დამტკიცდება, რომ $\forall a, b \in M$

$$0 \leq a \leq 1, \quad a \leq a \vee b, \quad a \wedge b \leq a.$$

ამის შესაბამისად $a \vee b$ ელემენტი აღინიშნება $\sup\{a, b\}$ სიმბოლოთი, ხოლო $a \wedge b$ ელემენტი – $\inf\{a, b\}$ სიმბოლოთი.

ყოველი სასრული ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლე შეიძლება გამოისახოს ორიენტირებული გრაფის საშუალებით (იხ. §22). მაგალითად, ნაწილობრივ დალაგებული $M = \{a, b, c, d\}$ სიმრავლე, სადაც $a \leq b \leq d$, $a \leq c \leq d$, გამოისახება შემდეგი გრაფით (ნახ. 17.1):



ნახ. 17.1

მოვიტანოთ ბულის ალგებრის მაგალითები.

1. *არაცარიელი* U *სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის* $S(U)$ *სიმრავლე.* კონიუნქცია განვმარტოთ როგორც სიმრავლეთა თანაკვეთა, დიზიუნქცია – როგორც გაერთიანება, ხოლო უარყოფა – როგორც დამატება. ამ პარაგრაფის დასაწყისში ამოწერილი შვიდივე აქსიომა იქნება შესრულებული (იხ. §16). $S(U)$ ბულის ალგებრის 0 ელემენტი არის ცარიელი $\varnothing$ სიმრავლე, ხოლო 1 – თვით U სიმრავლე.

2. *ბულის ფორმულათა სიმრავლე* $\wedge$, $\vee$ *და* $\overline{}$ *ოპერაციებთან ერთად* (ორი ფორმულის ტოლობა ნიშნავს მათ ეკვივალენტობას). ამ შემთხვევაშიც შვიდივე აქსიომა შესრულებულია (იხ. §16). ამ ბულის ალგებრის 0 ელემენტი არის f ფორმულა, ხოლო 1 არის t ფორმულა (იხ. §15).

3. *ორელემენტიანი* $L = \{0, 1\}$ *სიმრავლე.* თუ დავუშვებთ, რომ

$$0 \vee 0 = 0, \quad 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1,$$
$$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1,$$
$$\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0,$$

მაშინ შვიდივე აქსიომა შესრულებული იქნება (შეამოწმეთ).

შევნიშნოთ, რომ $\wedge$, $\vee$ და $\overline{}$ – ოპერაციის შედეგები ემთხვევა გადამრთველებთან დაკავშირებულ ბულის ფუნქციების მნიშვნელობებს.

4. *ნაწილობრივ დალაგებული* $M = \{a, b, c, d\}$ *სიმრავლე, სადაც* $a \leq b \leq d$, $a \leq c \leq d$ (ნახ. 17.1). დავუშვათ, რომ $a = 0$, $d = 1$, $b \wedge c = a$, $b \vee c = d$. ამ შემთხვევაში შვიდივე აქსიომა შესრულებულია.

5. $[0,1]$ *მონაკვეთის წერტილთა სიმრავლე.* $\wedge$, $\vee$ და $^{-}$ ოპერაციები შემოღებულია შემდეგნაირად: $\forall x, y \in [0,1]$

$$x \vee y = \max\{x, y\} \qquad \Big(\text{მაგალითად } \frac{1}{2} \vee \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\Big);$$

$$x \wedge y = \min\{x, y\} \qquad \Big(\text{მაგალითად } \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\Big);$$

$$\overline{x} = 1 - x \qquad \Big(\text{მაგალითად } \overline{\Big(\frac{1}{3}\Big)} = \frac{2}{3}\Big).$$

მარტივად შევამოწმებთ, რომ შვიდივე აქსიომა შესრულებულია. ამ ბულის ალგებრის ნული არის რიცხვი 0, ხოლო ერთიანი – რიცხვი 1.

§18. საკონტაქტო სქემის სინთეზი

ვთქვათ, დასაპროექტებელია კონკრეტული დანიშნულების საკონტაქტო სქემა. ეს დანიშნულება ის არის, რომ გადამრთველების გარკვეული მდგომარეობის შემთხვევაში სქემამ დენი გაატაროს ან, შესაბამისად, არ გაატაროს. ეს შემთხვევები კი, როგორც ცნობილია, აღიწერება ჭეშმარიტობის ცხრილების ან, რაც იგივეა, ბულის ფუნქციების საშუალებით.

დასმული ამოცანა მათემატიკურად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად: *ცნობილი ბულის ფუნქციის მიხედვით ავაგოთ ბულის შესაბამისი ფორმულა.*

შევნიშნოთ, რომ ბულის ნებისმიერი ფუნქციისათვის შეიძლება ავაგოთ ბულის შესაბამისი ფორმულა, მაგრამ ასეთი ფორმულა ცალსახად განსაზღვრული არ არის (ყველა ასეთი ფორმულა იქნება ერთმანეთის ეკვივალენტური).

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ბულის ფუნქცია ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთ წერტილში (დანარჩენ წერტილებში ის 0-ის ტოლია).

მაგალითი 18.1. ვთქვათ, ბულის $f:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$ ფუნქცია მოცემულია შემდეგნაირად:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}1, & \text{თუ } (x_1,x_2,x_3)=(0,1,0),\\ 0, & \text{თუ } (x_1,x_2,x_3)\neq(0,1,0).\end{cases}$$

ავაგოთ ამ ფუნქციის შესაბამისი ბულის ფორმულა.

∇ ბულის ალგებრაში (იხ. §17)

$$x_1\wedge x_2\wedge x_3=1\Longleftrightarrow x_1=x_2=x_3=1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\overline{p}\wedge q\wedge\overline{r} \tag{18.1}$$

ფორმულის მნიშვნელობა იქნება 1-ის ტოლი მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $p=0$, $q=1$, $r=0$. ამრიგად, $\overline{p}\wedge q\wedge\overline{r}$ არის საძიებელი (ერთ-ერთი) ბულის ფორმულა. $\square$

ზოგად შემთხვევაში მოცემული ბულის ფუნქციის შესაბამისი ბულის ფორმულა შეიძლება აიგოს როგორც (18.1) სახის ფორმულების დიზიუნქცია. ამასთან დაკავშირებით განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითი.

მაგალითი 18.2. ბულის ფუნქცია მოცემულია 18.1 ცხრილით

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

ცხრილი 18.1

ავაგოთ ამ ფუნქციის შესაბამისი ბულის ფორმულა.

∇ გამოვყოთ ამ ცხრილის ის სტრიქონები, სადაც f ფუნქციის მნიშვნელობა არის 1-ის ტოლი. ეს არის ცხრილის მეორე და მეექვსე სტრიქონი. ისევე, როგორც 18.1 მაგალითის შემთხვევაში, ავაგოთ ამ სტრიქონების შესაბამისი ბულის $\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r$ და $p \wedge \overline{q} \wedge r$ მრავალწევრები. საძიებელი ბულის ფორმულა წარმოადგენს ამ მრავალწევრების დიზიუნქციას:

$$F(p,q,r) = (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r). \quad \Box$$

შევნიშნოთ, რომ ბულის ფორმულის აღნიშნულ ფორმას ეწოდება *დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა.*

ამოცანა 18.3. დერეფანში ერთი ნათურაა და ორი p და q გადამრთველი, ერთი დერეფნის ერთ ბოლოში, მეორე – მეორე ბოლოში. ავაგოთ საკონტაქტო სქემა, რომელიც უზრუნველყოფს შემდეგი პირობების შესრულებას:

1. თუ ნათურა ჩამქრალია, მაშინ ნებისმიერი გადამრთველის მდგომარეობის შეცვლის შემთხვევაში (ე.ი. მისი ჩართვისას, თუ ის იყო გამორთული, და გამორთვისას, თუ ის იყო ჩართული) ნათურა აინთება;

2. თუ ნათურა ანთებულია, მაშინ ნებისმიერი გადამრთველის მდგომარეობის შეცვლის შემთხვევაში ნათურა ჩაქრება.

∇ ავაგოთ შესაბამისი $f(x_1, x_2)$ ბულის ფუნქცია. საწყის მდგომარეობად ავიღოთ, მაგალითად $x_1 = x_2 = 0$ და $f(0,0) = 0$. ამოცანის პირობების გათვალისწინებით გვექნება შემდეგი ცხრილი

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
1	0	1
1	1	0
0	1	1

ცხრილი 18.2

ამ ცხრილის სტრიქონები გამოსახავენ შემდეგ შემთხვევებს:

1. p გადამრთველი გამორთულია, q გადამრთველი გამორთულია, ნათურა ჩამქრალია;

2. p ჩართულია, q გამორთულია, ნათურა ანთებულია;

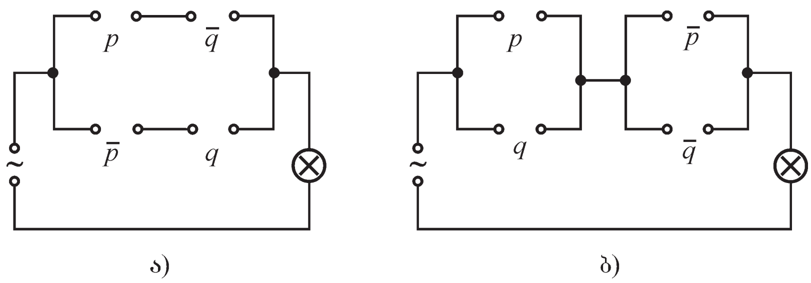
3. p ჩართულია, q ჩართულია, ნათურა ჩამქრალია;

4. p გამორთულია, q ჩართულია, ნათურა ანთებულია.

ისევე, როგორც 18.2 მაგალითის შემთხვევაში, 18.2 ცხრილის მიხედვით ავაგოთ ბულის საძიებელი ფორმულა

$$(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q).$$

შესაბამის საკონტაქტო სქემას აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 18.3 ა).



ნახ. 18.3

რადგან

$$(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) = (p \vee \overline{p}) \wedge (p \vee q) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p}) \wedge (\overline{q} \vee q) =$$
$$= 1 \wedge (p \vee q) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p}) \wedge 1 = (p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}),$$

ამიტომ დასმულ ამოცანას წყვეტს აგრეთვე $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})$ ფორმულის შესაბამისი საკონტაქტო სქემა (ნახ. 18.3 ბ). $\square$

§19. გამონათქვამთა ალგებრა და მისი კავშირი ბულის ალგებრასთან

გამონათქვამი არის ისეთი თხრობითი წინადადება, რომლის მიმართ შეიძლება დაისვას საკითხი მისი ჭეშმარიტობის ან მცდარობის შესახებ. გამონათქვამი არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტიც და მცდარიც.

განვიხილოთ რამდენიმე წინადადება:

1. "სამკუთხედის კუთხეების ჯამი $180°$-ის ტოლია";
2. "$5 + 3 = 8$";
3. "$4 + 5 = 10$";
4. "საქართველო ესაზღვრება ინგლისს";
5. "ხვალ წავიდეთ კინოში";
6. "$x + 2 = 5$".

ცხადია, რომ პირველი ორი წინადადება წარმოადგენს ჭეშმარიტ გამონათქვამს, მომდევნო ორი წინადადება – მცდარ გამონათქვამს, მეხუთე წინადადება საერთოდ არ არის გამონათქვამი, გამონათქვამი არ არის მეექვსე წინადადებაც, მაგრამ თუ დავასახელებთ x ცვლადის მნიშვნელობას, ის გადაიქცევა გამონათქვამად. ასეთი სახის წინადადებას *პრედიკატი* ეწოდება.

თუ p ჭეშმარიტი გამონათქვამია, მას შევუსაბამოთ რიცხვი 1, ხოლო თუ ის მცდარია – რიცხვი 0. პირველ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ p გამონათქვამის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა არის 1-ის ტოლი, ხოლო მეორე შემთხვევაში – 0-ის ტოლი.

მათემატიკური ლოგიკის უმნიშვნელოვანეს ცნებებს წარმოადგენენ ე.წ. *ლოგიკური ოპერატორები* (*კავშირები*): $\neg$ უარყოფა, $\wedge$

კონიუნქცია, $\vee$ დიზიუნქცია, $\rightarrow$ იმპლიკაცია, $\leftrightarrow$ ეკვივალენცია. ისევე, როგორც გრამატიკაში მარტივი წინადადებებიდან დგება რთული წინადადება, მათემატიკურ ლოგიკაში მოცემული გამონათქვამებიდან ლოგიკური კავშირების საშუალებით შეიძლება შევადგინოთ ახალი გამონათქვამი.

ქვემოთ მოკლედ დავახასიათებთ ხსენებულ ლოგიკურ კავშირებს.

$\neg$ უარყოფა. p გამონათქვამის უარყოფა აღინიშნება $\neg p$ ან $\overline{p}$ სიმბოლოთი და იკითხება როგორც "არა p".

$\wedge$ კონიუნქცია. გამოიყენება აგრეთვე & აღნიშვნა. $p \wedge q$ იკითხება როგორც "p და q".

$\vee$ დიზიუნქცია. $p \vee q$ იკითხება როგორც "p ან q".

$\rightarrow$ იმპლიკაცია. გამოიყენება აგრეთვე აღნიშვნა $\Rightarrow$ ან $\supset$. $p \rightarrow q$ იკითხება როგორც "p-დან გამომდინარეობს q", ანუ "თუ p, მაშინ q", "q არის p-ს აუცილებელი პირობა", "p არის q-ს საკმარისი პირობა".

$\leftrightarrow$ ეკვივალენცია. გამოიყენება აგრეთვე $\Leftrightarrow$ და $\sim$ აღნიშვნა. $p \leftrightarrow q$ იკითხება როგორც "p მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა q", "p არის q-ს აუცილებელი და საკმარისი პირობა", "p ეკვივალენტურია q-სი".

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

ცხრილი 19.1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

ცხრილი 19.2

ჭეშმარიტობის ცხრილებიდან (იხ. ცხრილი 19.1 და 19.2) გამომდინარეობს, რომ

1. $\overline{p}$ უარყოფა ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p მცდარია;
2. $p \wedge q$ კონიუნქცია ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p და q ჭეშმარიტია ერთდროულად;
3. $p \vee q$ დიზიუნქცია მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p და q მცდარია ერთდროულად;
4. $p \rightarrow q$ იმპლიკაცია მცდარია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p ჭეშმარიტია და q მცდარი;
5. $p \leftrightarrow q$ ეკვივალენცია ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა p და q ერთდროულად ან ჭეშმარიტია ან მცდარი.

შევნიშნოთ, რომ $p \rightarrow q$ იმპლიკაცია თავისი შინაარსით რამდენადმე განსხვავდება სასაუბრო ენის გამონათქვამისგან "p-დან გამომდინარეობს q", რომელიც კარგავს აზრს იმ შემთხვევაში, როცა p მცდარია.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, $p \rightarrow q$ იმპლიკაცია ნიშნავს, რომ "q არის p-ს აუცილებელი პირობა" ანუ "p არის q-ს საკმარისი პირობა", ხოლო $p \leftrightarrow q$ ეკვივალენცია ნიშნავს, რომ "p არის q-ს აუცილებელი და საკმარისი პირობა და პირიქით". ბევრი თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს $p \rightarrow q$ იმპლიკაციის ან $p \leftrightarrow q$ ეკვივალენციის სახით.

მაგალითად, თუ p არის წინადადება "მოცემული ოთხკუთხედი პარალელოგრამია", ხოლო q – "მოცემული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია", მაშინ $p \rightarrow q$ იმპლიკაცია აღნიშნავს თეორემას: "თუ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია, მაშინ

მისი მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია". თუ ამავე დროს, r აღნიშნავს წინადადებას "ოთხკუთხედის ორი გვერდი პარალელურია და ტოლი", მაშინ $p \leftrightarrow r$ ეკვივალენცია წარმოადგენს თეორემას: "იმისათვის, რომ ოთხკუთხედი იყოს პარალელოგრამი, აუცილებელია და საკმარისი, მისი ორი გვერდი იყოს პარალელური და ტოლი".

იმ შემთხვევაში, როცა $p, q, r, \ldots$ სიმბოლოები აღნიშნავენ არა კონკრეტულ წინადადებებს, არამედ გამოიყენებიან ზოგადად წინადადებების აღსანიშნავად, მათ *პროპოზიციული ცვლადები* ეწოდებათ (propositio ლათინურად ნიშნავს წინადადებას, გამონათქვამს). პროპოზიციული ცვლადებისაგან ლოგიკური ოპერაციების საშუალებით აიგება *პროპოზიციული ფორმულები*: 1) ყოველი პროპოზიციული ცვლადი არის ფორმულა; 2) თუ u და v ფორმულებია, მაშინ $u \vee v$, $u \wedge v$, $u \to v$, $u \leftrightarrow v$, $\overline{u}$ აგრეთვე ფორმულებია.

გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულის ბულის ფორმულისაგან განსხვავება იმაში გამოიხატება, რომ აქ $\vee$, $\wedge$ და $\neg$ (ანუ რაც იგივეა $\overline{}$) ოპერაციების გარდა გამოიყენება კიდევ ორი ოპერაცია $\to$ და $\leftrightarrow$.

$u(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ფორმულის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა განისაზღვრება მასში შემავალი $p_1, p_2, \ldots, p_n$ პროპოზიციული ცვლადების მნიშვნელობებით, ე.ი. ისევე, როგორც ბულის ფორმულის შემთხვევაში, გამონათქვამთა ალგებრის ყოველ $u(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ფორმულას შეესაბამება ბულის $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ფუნქცია, რომლის მოცემა შესაძლებელია ჭეშმარიტობის ცხრილის საშუალებით.

მაგალითის სახით ავაგოთ $u(p, q) = p \to (q \to p)$ ფორმულის ჭეშმარიტობის ცხრილი.

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

ცხრილი 19.3

გამონათქვამთა ალგებრის $u(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ფორმულას ეწოდება *იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულა*, თუ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის u ფორმულის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა არის 1-ის ტოლი. იგივურად ჭეშმარიტ ფორმულას ეწოდება აგრეთვე *ტავტოლოგია*.

იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულის მაგალითია

$$p \vee \overline{p}$$

ფორმულა, რომელიც გამოსახავს ე.წ. *მესამის გამორიცხვის კანონს*. იგივურად ჭეშმარიტია აგრეთვე

$$p \to (q \to p)$$

ფორმულა (იხ. ცხრილი 19.3).

ანალოგიურად განისაზღვრება *იგივურად მცდარი ფორმულა*: $u(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ფორმულას ეწოდება *იგივურად მცდარი ფორმულა*, თუ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ცვლადების ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის u ფორმულის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა არის 0-ის ტოლი.

იგივურად მცდარი ფორმულის მაგალითს წარმოადგენს ფორმულა

$$p \wedge \overline{p}.$$

გამონათქვამთა ალგებრის ორ u და v ფორმულას ეწოდება *ეკვივალენტური* (ტოლფასი), თუ

$$u \leftrightarrow v$$

არის იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულა, ან რაც იგივეა, თუ u და v ფორმულების ჭეშმარიტობის ცხრილები (ბულის ფუნქციები) ემთხვევა ერთმანეთს.

იმ ფაქტს, რომ u და v ეკვივალენტური ფორმულებია, ჩვენ აღვნიშნავთ ასე

$$u \equiv v.$$

სავარჯიშო 19.1. დაამტკიცეთ, რომ $\equiv$ მიმართება არის ეკვივალენტობის მიმართება.

ისევე როგორც ბულის ფორმულის შემთხვევაში, $u \equiv v$ ეკვივალენტობის შემთხვევაშიც, სიმარტივისათვის დავწერთ $u = v$. ასეთი შეთანხმების თანახმად ყველა იგივურად ჭეშმარიტი ფორმულა იქნება ერთმანეთის ტოლი და ყველა ასეთ ფორმულას აღვნიშნავთ t სიმბოლოთი. ერთმანეთის ტოლი იქნება აგრეთვე ყველა იგივურად მცდარი ფორმულა (აღინიშნება f სიმბოლოთი).

შენიშვნა. ორი ეკვივალენტური ფორმულის პროპოზიციულ ცვლადთა სიმრავლე შეიძლება არ დაემთხვეს ერთმანეთს. მაგალითად, როგორც ადვილი შესამოწმებელია,

$$(p \wedge \overline{p}) \vee q = q.$$

ასეთ შემთხვევაში ეკვივალენტობის დასადგენად ორივე ცხრილში უნდა შევიტანოთ ყველა ის ცვლადი, რომელიც მონაწილეობს ერთ-ერთ ფორმულაში მაინც. $\square$

მაგალითი 19.2. დავადგინოთ, ეკვივალენტურია თუ არა $p \to q$ და $\overline{p} \vee q$ ფორმულები.

∇ შევადგინოთ ჭეშმარიტობის ცხრილები:

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ცხრილი 19.4

p	q	$\overline{p}$	$\overline{p} \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

ცხრილი 19.5

რადგან ცხრილების ბოლო სვეტები ემთხვევა ერთმანეთს, ამიტომ

$$p \to q = \overline{p} \vee q. \quad \square \tag{19.1}$$

(19.1)-ის მსგავსად დამტკიცდება ეკვივალენტობა

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p). \tag{19.2}$$

მოვიყვანოთ ეკვივალენტობის სხვა მნიშვნელოვანი მაგალითები:

$$\begin{aligned}
&1.\ p \vee p = p, && p \wedge p = p;\\
&2.\ p \vee q = q \vee p, && p \wedge q = q \wedge q;\\
&3.\ (p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r), && (p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r);\\
&4.\ p \wedge (p \vee q) = p, && p \vee (p \wedge q) = p;\\
&5.\ p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r), &&\\
&\quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r); &&\\
&6.\ \overline{(\overline{p})} = p; &&\\
&7.\ \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}, && \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}.
\end{aligned} \tag{19.3}$$

რადგან ნებისმიერი u ფორმულისათვის

$$u \vee f = u, \quad u \vee t = t, \quad u \wedge f = f,$$
$$u \wedge t = u, \quad u \vee \overline{u} = t, \quad u \wedge \overline{u} = f,$$

ამიტომ 1–5 თანაფარდობების გათვალისწინებით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ გამონათქვამთა ალგებრის ფორმულები $\vee$, $\wedge$ და

$^{-}$ *ოპერაციების მიმართ ქმნის ბულის ალგებრას, სადაც ელემენტი* 1 *არის იგივურად ჭეშმარიტი* t *ფორმულა, ხოლო* 0 – *იგივურად მცდარი* f *ფორმულა.*

ამავე დროს, (19.1)-დან და (19.2)-დან გამომდინარეობს, რომ *გამონათქვამთა ალგებრის ყოველი ფორმულა შეიძლება შეიცვალოს მისი ეკვივალენტური ფორმულით, რომელიც არ შეიცავს* $\rightarrow$ *იმპლიკაციის და* $\leftrightarrow$ *ეკვივალენციის ნიშნებს. ასეთ ფორმულებს,* როგორც ვიცით (იხ. §16), ბულის ფორმულები ეწოდება. ამდენად გამონათქვამთა ალგებრა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ბულის ალგებრის კონკრეტული რეალიზაცია.

§20. გამონათქვამთა ალგებრის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ

რადგან გამონათქვამთა ალგებრა წარმოადგენს ბულის ალგებრის კოკნრეტულ ინტერპრეტაციას, ამიტომ ზემოთ მოტანილი პრაქტიკული ამოცანები (იხ. §16, §17, §18) შეიძლება დავსვათ და ამოვხსნათ გამონათქვამთა ალგებრის აპარატის გამოყენებით. ჩვენ აქ განვიხილავთ კიდევ ორ ამოცანას, რომელიც კარგად მიესადაგება წინადადებათა ალგებრის ენას.

ამოცანა 20.1. ააგეთ სქემა, რომელიც უზრუნველყოფს ლიფტის დაშვებას მეორე სართულიდან პირველ სართულზე.

∇ ჩამოვაყალიბოთ ის პირობები, რომლებიც განსაზღვრავენ ლიფტის მუშაობას:

p_1 – ლიფტის კარი პირველ სართულზე დაკეტილია;

p_2 – ლიფტის კარი მეორე სართულზე დაკეტილია;

p – ლიფტის კაბინის კარი დაკეტილია;

q – მგზავრი ლიფტის კაბინაშია;

r – დაშვების ღილაკი ლიფტის კაბინაში ჩართულია;

s – გამოძახების ღილაკი პირველ სართულზე ჩართულია.

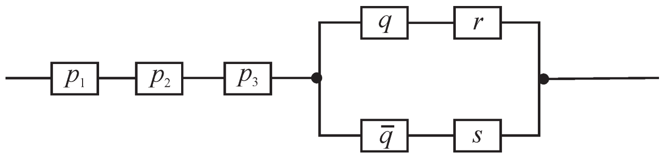
პირობა, რომელიც განსაზღვრავს ლიფტის დაშვებას მეორე სართულიდან პირველზე, აღიწერება ფორმულით

$$u = (p_1 \wedge p_2 \wedge p \wedge q \wedge r) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p \wedge \overline{q} \wedge s).$$

თუ ვისარგებლებთ დისტრიბუციულობის თვისებით (იხ. (19.3), პუნქტი 5), მივიღებთ

$$u = \big((p_1 \wedge p_2 \wedge p) \wedge (q \wedge r)\big) \vee \big((p_1 \wedge p_2 \wedge p) \wedge (\overline{q} \wedge s)\big) =$$
$$= (p_1 \wedge p_2 \wedge p) \wedge \big((q \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge s)\big).$$

ამ ფორმულის შესაბამისი სქემა წარმოდგენილია 20.1 ნახაზზე.



ნახ. 20.1

სქემის თითოეული ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც გადამრთველი, რომელიც გარკვეული ტექნიკური საშუალებით დაკავშირებულია შესაბამის მექანიზმთან. აღნიშნული სქემა უზრუნველყოფს ლიფტის დაშვების მართვას. □

ამოცანა 20.2. ვთქვათ, კენჭისყრაში მონაწილეობს სამი ადამიანი. ააგეთ სქემა, რომელიც უზრუნველყოფს ფარული კენჭისყრის დროს ნათურის ანთებას მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა კენჭისყრაში მონაწილე წევრთა უმრავლესობა დააჭერს შესაბამის ღილაკს.

∇ შემოვიღოთ აღნიშვნები:

p_1 – პირველმა ადამიანმა დააჭირა ღილაკს;

p_2 – მეორე ადამიანმა დააჭირა ღილაკს;

p_3 – მესამე ადამიანმა დააჭირა ღილაკს.

პირობა, რომელიც გამოიწვევს ნათურის ანთებას, გამოისახება ფორმულით:

$$u = (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\overline{p}_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \overline{p}_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p}_3).$$

(19.3)-ის პირველი პუნქტის თანახმად ფორმულის ნებისმიერი შესაკრები შეიძლება გავიმეოროთ მრავალჯერ. ამის შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{aligned} u = \big((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\overline{p}_1 \wedge p_2 \wedge p_3)\big) \vee \\ \vee \big((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \overline{p}_2 \wedge p_3)\big) \vee \\ \vee \big((p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p}_3)\big). \end{aligned} \tag{20.1}$$

(19.3)-ის სხვა პუნქტების გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned} (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (\overline{p}_1 \wedge p_2 \wedge p_3) = \\ = (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)) \vee (\overline{p}_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)) = \\ = (p_1 \vee \overline{p}_1) \wedge (p_2 \wedge p_3) = t \wedge (p_2 \wedge p_3) = p_2 \wedge p_3. \end{aligned} \tag{20.2}$$

ანალოგიურად,

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \overline{p}_2 \wedge p_3) = p_1 \wedge p_3 \tag{20.3}$$

და

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p}_3) = p_1 \wedge p_2. \tag{20.4}$$

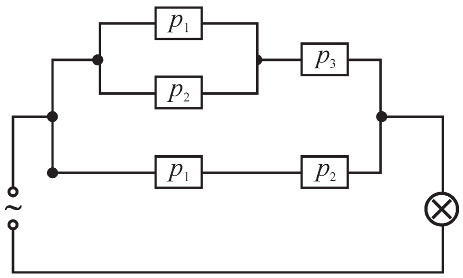
(20.2), (20.3) და (20.4) ტოლობების გათვალისწინებით (20.1)-დან მივიღებთ

$$u = (p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2).$$

დისტრიბუციულობის გამოყენება გვაძლევს:

$$u = \big((p_1 \vee p_2) \wedge p_3\big) \vee (p_1 \wedge p_2).$$

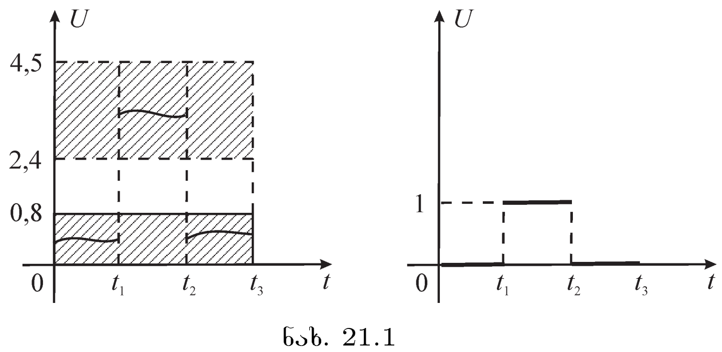
ამ ფორმულის შესაბამისი სქემა (ნახ. 20.2) უზრუნველყოფს ამოცანაში დასმული პირობების შესრულებას. □



ნახ. 20.2

§21. ლოგიკური სქემები (ციფრული ტექნიკის მათემატიკური საფუძვლები)

ციფრული მოწყობილობა შედგება ელემენტებისაგან, რომელთაც გააჩნიათ ორი მდგრადი მდგომარეობა. ყოველი კონკრეტული სიგნალი აქ იდენტიფიცირდება ან 0-თან (ლოგიკური ნული), ან 1-თან (ლოგიკური ერთიანი). 0 შეესაბამება დაბალ ძაბვას (მაგალითად, 0,8 ვოლტზე ნაკლებს), ხოლო 1 – შედარებით მაღალ ძაბვას (მაგალითად, 2,4-დან 4,5 ვოლტამდე) (იხ. ნახ. 21.1).



ნახ. 21.1

ციფრული მოწყობილობის აღნიშნულ ელემენტებს ეწოდება *ლოგიკური ელემენტები*. ციფრული ტექნიკის მაღალი მახასიათებლები და საიმედოობა განპირობებულია იმით, რომ ძაბვის მცირე გადახრაზე ლოგიკური ელემენტები არ რეაგირებს.

ყოველი ლოგიკური ელემენტი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც მოწყობილობა, რომელსაც აქვს რამდენიმე $x_1, x_2, \ldots, x_n$ შესასვლელი და რამდენიმე $y_1, y_2, \ldots, y_m$ გამოსასვლელი (ნახ. 21.2).

ნახ. 21.2

ასეთი მოწყობილობის თითოეულ x_i შესასვლელში ($i = 1, 2, \ldots, n$) მიეწოდება ან 0 ან 1. ამის შესაბამისად თითოეულ y_j გამოსასვლელზე ($j = 1, 2, \ldots, m$) მიიღება გარკვეული მნიშვნელობა 0 ან 1. ყოველი y_j-ს მნიშვნელობა დამოკიდებულია $x_1, x_2, \ldots, x_n$-ის მნიშვნელობებზე. ეს ნიშნავს, რომ *ყოველი ლოგიკური ელემენტი მათემატიკურად აღიწერება*

$$f_j : \{0,1\}^n \to \{0,1\} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

ბულის ფუნქციათა ერთობლიობით.

განვიხილოთ ზოგიერთი უმარტივესი ლოგიკური ელემენტი ერთი გამოსასვლელით ($m = 1$). ასეთი ელემენტების ფუნქციონირება აღიწერება ერთი $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ბულის ფუნქციით.

1. *ლოგიკური ელემენტი* NOT ან $\overline{\ \ }$ (უწოდებენ აგრეთვე ინვერტორს და იკითხება როგორც "არა"). თუ ამ ელემენტის ერთადერთ შესასვლელზე მივაწოდებთ 0-ს, გამოსასვლელზე მივიღებთ 1-ს. თუ შესასვლელზე მივაწოდებთ 1-ს, მაშინ გამოსასვლელზე მივიღებთ 0-ს.

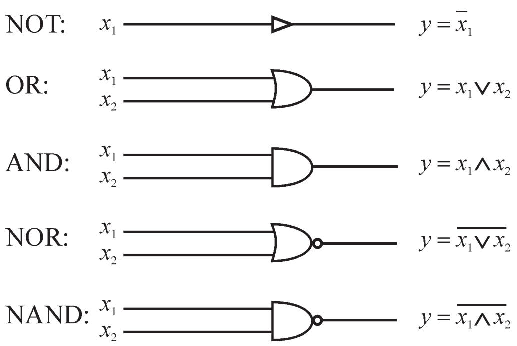
2. *ლოგიკური ელემენტი* OR ან $\vee$ (იკითხება "ან"). ამ ელემენტის გამოსასვლელზე მიიღება 0 მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყველა შესასვლელზე მიეწოდება 0.

3. *ლოგიკური ელემენტი* AND ან $\wedge$ (იკითხება "და"). ამ ელემენტის გამოსასვლელზე მიიღება 1 მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყველა შესასვლელზე მიეწოდება 1.

4. *ლოგიკური ელემენტი* NOR (იგივე NOT OR) ან $\overline{\vee}$ (იკითხება "არა ან"). ამ ელემენტის გამოსასვლელზე მიიღება 1 მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყველა შესასვლელზე მიეწოდება 0.

5. *ლოგიკური ელემენტი* NAND (იგივე NOT AND) ან $\overline{\wedge}$ (იკითხება როგორც "არა და"). ამ ელემენტის გამოსასვლელზე მიიღება 0 მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ყველა შესასვლელზე მიეწოდება 1.

ჩამოთვლილი ლოგიკური ელემენტების ტრადიციული გრაფიკული გამოსახულება (გამოიყენება სხვა გამოსახულებებიც) და შესაბამისი ბულის ფორმულები მოყვანილია 21.3 ნახაზზე.



ნახ. 21.3

მოყვანილი ლოგიკური ელემენტების გარდა დიდი გამოყენება აქვს სხვა ლოგიკურ ელემენტებსაც, რომელთა შორის აღსანიშნავია ლოგიკური ელემენტი

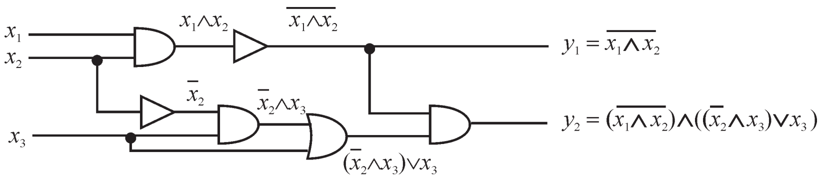
exclusive OR – "გამომრიცხავი ან",

რომლის მოქმედება ახსნილია 21.4 ნახაზზე.

ნახ. 21.4

ამ ლოგიკური ელემენტის გამოსასვლელზე მიიღება 1 მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ერთ-ერთ შესასვლელზე მიეწოდება 1, ხოლო მეორეზე – 0.

ციფრულ მოწყობილობებში ლოგიკური ელემენტები შეერთებულია ერთმანეთთან გარკვეული წესით. განვიხილოთ 21.5 ნახაზზე წარმოდგენილი სქემა.



ნახ. 21.5

მთლიანობაში ეს სქემა შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ერთი ლოგიკური ელემენტი, რომელსაც აქვს სამი შესასვლელი x_1, x_2, x_3 და ორი გამოსასვლელი y_1 და y_2. როგორც ნახაზიდან ჩანს,

$$y_1 = \overline{x_1 \wedge x_2},$$

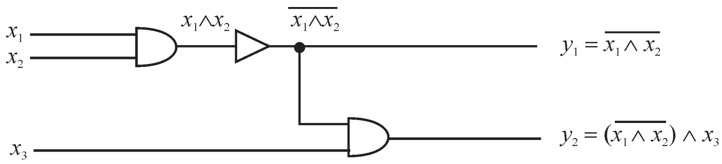
ხოლო

$$y_2 = (\overline{x_1 \wedge x_2}) \wedge ((\overline{x}_2 \wedge x_3) \vee x_3). \qquad (21.1)$$

ბულის ალგებრის მეოთხე აქსიომის თანახმად (იხ. §17 ან (19.3)) $x_3 \vee (x_3 \wedge \overline{x}_2) = x_3$, ამიტომ (21.1)-დან მივიღებთ

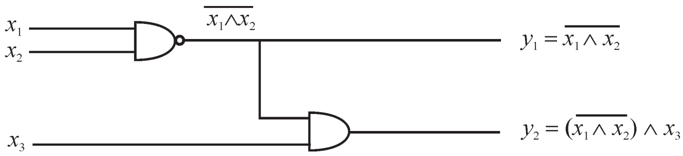
$$y_2 = (\overline{x_1 \wedge x_2}) \wedge x_3.$$

აქედან გამომდინარე, აღნიშნული სქემა შეიძლება შეიცვალოს უფრო მარტივი (და შესაბამისად, უფრო საიმედო) სქემით, რომელიც წარმოდგენილია 21.6 ნახაზზე.



ნახ. 21.6

NAND ლოგიკური ელემენტის გამოყენებით ეს სქემა დაიყვანება 21.7 ნახაზზე წარმოდგენილ სქემაზე.

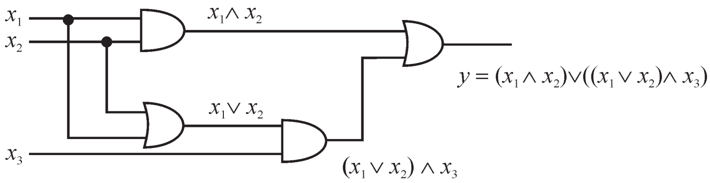


ნახ. 21.7

ცხადია, რომ ყოველ ბულის ფორმულას შეესაბამება გარკვეული ლოგიკური სქემა. მაგალითად,

$$y = (x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \vee x_2) \wedge x_3)$$

ბულის ფორმულის შესაბამის ლოგიკურ სქემას აქვს 21.8 ნახაზზე მოცემული სახე.



ნახ. 21.8

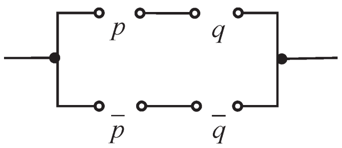
20.2 ამოცანის შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ ამ სქემის y გამოსასვლელზე მიიღება 1 მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა x_1, x_2, x_3 შესასვლელებიდან არანაკლებ ორზე მიეწოდება 1.

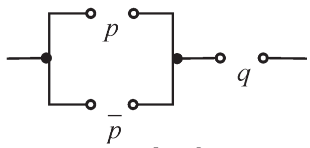
ამოცანები და სავარჯიშოები

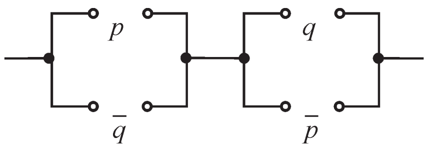
III.1. შეადგინეთ მოცემული ბულის f_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ ფორმულის შესაბამისი ჭეშმარიტობის ცხრილი:

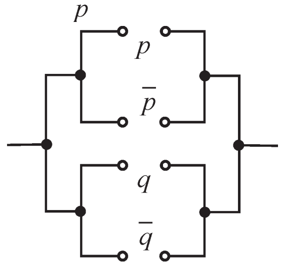
$$f_1 = p \wedge (q \wedge p); \qquad f_2 = p \vee (q \vee p);$$
$$f_3 = (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q); \qquad f_4 = (p \vee q) \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q});$$
$$f_5 = p \wedge q \wedge (\overline{p} \vee \overline{q}); \qquad f_6 = (p \wedge q) \vee (\overline{p} \vee \overline{q});$$
$$f_7 = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r});$$
$$f_8 = (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}).$$

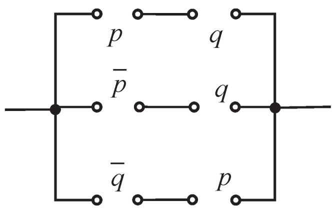
III.2. ააგეთ III.1. ნახაზზე მოყვანილი საკონტაქტო სქემების შესაბამისი ბულის მრავალწევრები:

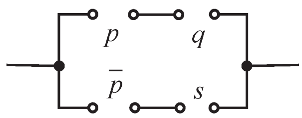
ა) 

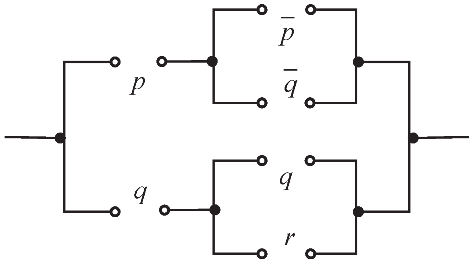
ბ) 

გ) 

დ) 

ე) 

ვ) 

ზ) 

ნახ. III.1

III.3. დახაზეთ მოცემული ბულის ფორმულის შესაბამისი საკონტაქტო სქემა:

ა) $[p \wedge (q \vee r) \vee (s \vee t)$; ბ) $(p \wedge q) \vee (r \wedge \overline{p})$;

გ) $(p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee q)$; დ) $[p \vee (q \wedge \overline{p})] \vee [(q \wedge r) \vee \overline{p}]$.

III.4. გამოსახეთ შემდეგი სიმრავლეები ვენის დიაგრამებით:
ა) $\overline{A} \cup \overline{B}$; ბ) $\overline{A} \cap \overline{B}$; გ) $\overline{A \cup B}$; გ) $\overline{A \cap B}$.

III.5. მოცემულია უნივერსალური სიმრავლე $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 4\}$. ჩაწერეთ სიმრავლეები:
ა) $\overline{A}$; ბ) $\overline{B}$; გ) $\overline{A} \cup \overline{B}$; დ) $\overline{A} \cap \overline{B}$; ე) $\overline{A \cup B}$; ვ) $\overline{A \cap B}$, სადაც $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-1)(x+2)(x-3) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 1\}$.

III.6. აჩვენეთ, რომ

ა) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

ბ) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

გ) $C \cap (A \setminus B) = (C \cap A) \setminus (C \cap B)$;

დ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

ე) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

ვ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

III.7. სიმრავლეთა თეორიის კანონების გამოყენებით გაამარტივეთ შემდეგი გამოსახულებები:

ა) $A \cap (\overline{A} \cup B)$; ბ) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cap B)$;

გ) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; დ) $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cup B)$;

ე) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup (B \cap C))$;

ვ) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \overline{C}) \cap (A \cup \overline{B})$;

ზ) $(A \cap B \cap C) \cap (A \cup B \cup \overline{C}) \cap (A \cup \overline{B}$.

III.8. დაამტკიცეთ შთანთქმის კანონები:

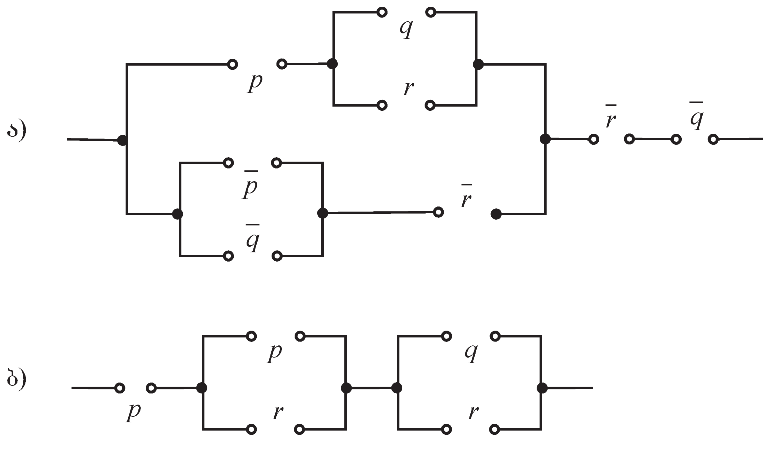
ა) $A \cup (A \cap B) = A$; ბ) $A \cap (A \cup B) = A$.

III.9. ბულის ალგებრის აქსიომების გამოყენებით გაამარტივეთ ბულის ფორმულები:

ა) $((p \wedge q) \vee \overline{q}) \wedge q$; ბ) $\overline{p \vee (\overline{q} \wedge \overline{r})} \wedge q$;

გ) $\overline{(p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \vee q)}$; დ) $p \vee q \vee r \vee (p \wedge \overline{q})$;

ე) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee q \vee r$.



ნახ. III.2

III.10. გამოიყენეთ ბულის ალგებრის ოპერაციების თვისებები და დახაზეთ III.2. ნახაზზე მოყვანილი სქემების ეკვივალენტური გამარტივებული სქემები.

III.11. $M = \{0, a, b, 1\}$ სიმრავლეზე $\wedge$, $\vee$ და $^{-}$ ოპერაციები მოცემულია შემდეგი ცხრილების საშუალებით:

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

x	$\overline{x}$
0	1
a	b
b	a
1	0

არის თუ არა M ბულის ალგებრა?

III.12. ბულის ფუნქციათა $F = \{f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}\}$ სიმრავლეზე შემოვიღოთ $\vee$, $\wedge$ და $^{-}$ ოპერაციები შემდეგნაირად: $\forall f, \varphi \in F$, $\forall x \in \{0,1\}^2$

$$(f \vee \varphi)(x) = \max\{f(x),\, \varphi(x)\},$$
$$(f \wedge \varphi)(x) = \min\{f(x),\, \varphi(x)\},$$
$$\overline{f}(x) = 0, \text{ თუ } f(x) = 1, \text{ და } \overline{f}(x) = 1, \text{ თუ } f(x) = 0.$$

ასეთი F სიმრავლე არის თუ არა ბულის ალგებრა?

III.13. ელექტრომოწყობილობას აქვს სამი დნობადი p, q და r დამცველი. საჭიროა მათი ისეთი შეერთება, რომ თუ p დაიწვება, მოწყობილობა გამოირთოს, მაგრამ თუ p არ დაიწვება, მოწყობილობა გამოირთოს მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა დაიწვება ორივე q და r დამცველი. დახაზეთ სქემა, რომელიც წარმოადგენს სამი დამცველის შეერთების საუკეთესო ვარიანტს.

III.14. ხუთი A, B, C, D და E ინჟინერი ამოწმებს გამოსაცდელ აპარატს. თითოეულ ინჟინერს აქვს გადამრთველი, რომელსაც ჩართავს იმ შემთხვევაში, თუ აღმოაჩენს დაზიანებას. როგორ უნდა შეერთდნენ გადამრთველები სასიგნალო ნათურასთან, რომ ნათურა აინთოს მხოლოდ შემდეგ პირობებში:

ა) A აღმოაჩენს დაზიანებას;

ბ) ნებისმიერი ორი B, C და D ინჟინრებიდან ერთდროულად აღმოაჩენს დაზიანებას;

გ) E აღმოაჩენს დაზიანებას.

III.15. დაადგინეთ რომელია გამონათქვამი და რომელი არა? განსაზღვრეთ ჭეშმარიტობის მნიშვნელობები გამონათქვამებისთვის:

ა) ის სტუდენტი გენიოსია; ბ) $5 > 0$; გ) $\sqrt{2}$ რაციონალური რიცხვია; დ) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x + y > 0$; ე) $x + y > 0$; ვ) მომდევნო წელს უკეთ ვისწავლით.

III.16. უარყავით გამონათქვამები: ა) 13 კენტი რიცხვია; ბ) $\forall x \in \mathbb{N}$, $x \leq 0$; გ) $a^2 = 4$ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $a = \pm 2$; დ) ორი მსროლელიდან ერთი მაინც მოახვედრებს სამიზნეს.

III.17. ვთქვათ, p, q და r შემდეგი წინადადებებია:

p – სტუდენტი მეცადინეობს;

q – სტუდენტი სწავლობს მათემატიკას;

r – სტუდენტი ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას.

ჩაწერეთ ლოგიკური აღნიშვნების გამოყენებით შემდეგი წინადადებები:

ა) სტუდენტი მეცადინეობს და სწავლობს მათემატიკას;

ბ) თუ სტუდენტი სწავლობს მათემატიკას, მაშინ სტუდენტი მეცადინეობს;

გ) თუ სტუდენტი არ მეცადინეობს, მაშინ ის არ სწავლობს მათემატიკას და ვერ ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას;

დ) თუ სტუდენტი არ მეცადინეობს და არ სწავლობს მათემატიკას, მაშინ ის ვერ ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას.

III.18. წინა სავარჯიშოს პირობებში ჩაწერეთ სიტყვიერად შემდეგი გამონათქვამები:

ა) $p \wedge \overline{q}$; ბ) $p \to q \vee \overline{q}$;

გ) $r \leftrightarrow (p \wedge q)$; დ) $\overline{q} \to \overline{r}$.

III.19. პრედიკატი $x > 0$ აქციეთ: ა) ჭეშმარიტ გამონათქვამად; ბ) მცდარ გამონათქვამად.

III.20. ჰიპოთეზის გასაბათილებლად ერთ-ერთი ძირითადი საშუალება არის კონტრმაგალითის აგება. მოძებნეთ შემდეგი დებულებისათვის შესაბამისი კონტრმაგალითები:

ა) $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n + 1 > 7$;

ბ) $x^2 + a = 0$ სახის ყველა განტოლებას აქვს ნამდვილი ფესვი.

III.21. ააგეთ გამონათქვამთა ალგებრის მოცემული ფორმულის შესაბამისი ჭეშმარიტობის ცხრილი:

ა) $p \wedge \overline{p}$; ბ) $p \vee \overline{p}$; გ) $p \wedge q \to r$; დ) $(p \vee q) \wedge r$;

ე) $p \wedge (q \to r)$; ვ) $p \to (p \wedge q)$; ზ) $p \vee q \to (p \leftrightarrow q)$;

თ) $p \vee q \leftrightarrow p \wedge \overline{q}$; ი) $p \to (q \to p)$.

III.22. არის თუ არა მოცემული ფორმულა იგივურად ჭეშმარიტი ან იგივურად მცდარი?

ა) $(p \wedge (p \to q)) \to q$; ბ) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$;

გ) $(q \to p) \leftrightarrow (p \wedge q)$; დ) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

ე) $((p \to q) \to q) \to q$; ვ) $(p \to q) \vee (q \to p)$;

ზ) $(p \to q) \vee (p \to \overline{q})$; თ) $p \to (q \to p \wedge q)$;

ი) $(\overline{q} \to \overline{p}) \to ((\overline{q} \to p) \to q)$.

III.23. გაამარტივეთ ბულის მოცემული ფორმულა და დახაზეთ მისი შესაბამისი როგორც საწყისი, ასევე გამარტივებული ლოგიკური სქემა:

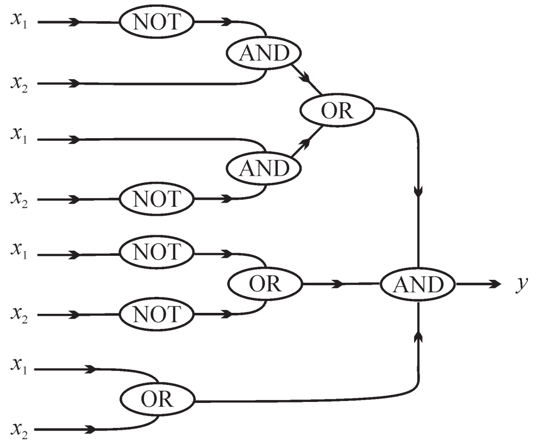
ა) $(x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \vee (x_1 \vee (\overline{x}_3 \wedge x_2))$;

ბ) $(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3)$;

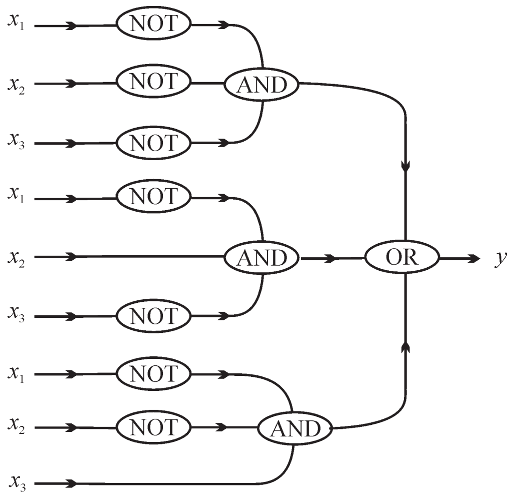
გ) $(\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4) \vee (\overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4)$;

დ) $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$.

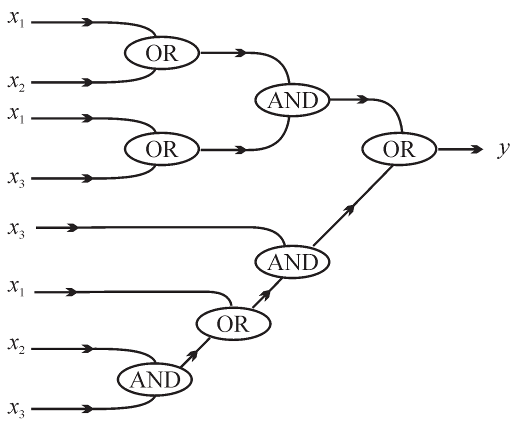
III.24. ააგეთ III.3 ნახაზზე მოცემული ლოგიკური სქემის შესაბამისი ბულის მრავალწევრი, გაამარტივეთ იგი და დახაზეთ მოცემული სქემის ეკვივალენტური გამარტივებული ლოგიკური სქემა:



ა)



ბ)



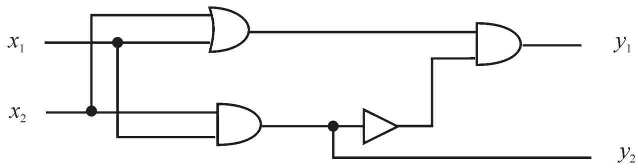
გ)

ნახ. III.3

III.25. დახაზეთ ბულის მოცემული ფორმულის შესაბამისი ლოგიკური სქემა:

ა) $(x_1 \wedge \overline{x}_2) \vee x_3$; ბ) $\overline{(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee (x_2 \wedge \overline{x}_4))}$.

III.26. ააგეთ III.4 ნახაზზე მოყვანილი ლოგიკური სქემის შესაბამისი ბულის მრავალწევრი და გამოსახეთ გამოსასვლელზე მიღებული y_1 და y_2 მნიშვნელობები ცხრილის სახით შესასვლელის x_1 და x_2 მნიშვნელობების საშუალებით



ნახ. III.4

III.27. დახაზეთ ბულის $x_1 \vee x_2$, $x_1 \wedge x_2$ და $\overline{x}_1$ ფორმულების შესაბამისი ლოგიკური სქემები მხოლოდ

ა) NAND ელემენტის გამოყენებით;

ბ) NOR ელემენტის გამოყენებით.

III.28. დახაზეთ ბულის $(\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2)$ ფორმულის შესაბამისი ლოგიკური სქემა მხოლოდ

ა) NAND ელემენტის გამოყენებით;

ბ) NOR ელემენტის გამოყენებით.

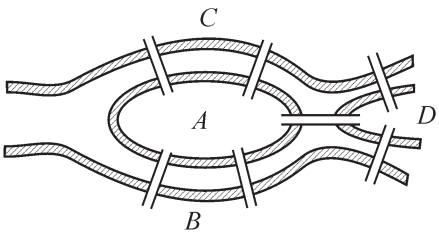
III.29. ამოხსენით 18.3 ამოცანა სამი გადამრთველის შემთხვევაში.

თავი IV

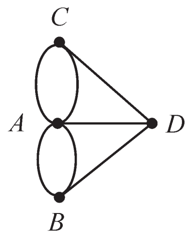
გრაფები

გრაფი გეომეტრიულად შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც წერტილებისაგან და ამ წერტილების შემაერთებელი წირებისაგან შედგენილი კონფიგურაცია (იხ., მაგალითად, ნახ. 22.1). წირების ფორმას და წერტილების განლაგებას ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა არა აქვს. არსებითია მხოლოდ ის, თუ რომელი წერტილებია შეერთებული ამ წირებით. გრაფთა თეორიის ენა მოსახერხებელი აღმოჩნდა მეცნიერებისა და ტექნიკის სხვადასხვა დარგისათვის. აქ შეიძლება ჩამოვთვალოთ ისეთი დარგები, როგორიცაა ფიზიკა, ქიმია, ბიოლოგია, კავშირგაბმულობა, ენერგეტიკა, მანქანათმშენებლობა, არქიტექტურა, გენეტიკა, ფსიქოლოგია, სოციოლოგია, ეკონომიკა, ლინგვისტიკა და ბევრი სხვა.

გრაფთა თეორია სათავეს იღებს გამოჩენილი მათემატიკოსის ლ. ეილერის შრომებში. 1736 წ. მან ამოხსნა კენიგსბერგის (ახლანდელი კალინინგრადი) ხიდებთან დაკავშირებული გახმაურებული ამოცანა. კენიგსბერგის ორი კუნძული შეერთებულია ერთმანეთთან და მდინარის სანაპიროებთან შვიდი ხიდის საშუალებით (იხ. ნახ. K). დასადგენია, არსებობს თუ არა ისეთი მარშრუტი, რომელიც იწყება ხმელეთის ნებისმიერი ნაწილიდან (ნახაზზე ეს ნაწილებია A, B, C და D), გაივლის ხმელეთის დანარჩენ ნაწილებზე და ზუსტად ერთხელ გაივლის თითოეულ ხიდზე.



ნახ. K



ნახ. K*

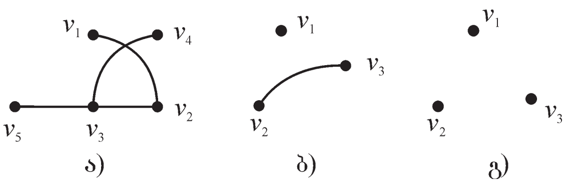
იმისათვის, რომ ეს ამოცანა ამოეხსნა, ეილერმა ხმელეთის თითოეული ნაწილი აღნიშნა წერტილით, ხოლო თითოეული ხიდი – წირით, რომელიც აერთებს შესაბამის წერტილებს. ამის შემდეგ მან მიიღო K* ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფი. ასეთი წარმოდგენიდან გამომდინარე ეილერმა დაამტკიცა, რომ არ არსებობს მარშრუტი, რომელიც დააკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობებს.

ამ თავში ჩვენ გავეცნობით გრაფთა თეორიის ელემენტებს და მათს ზოგიერთ პრაქტიკულ საინჟინრო გამოყენებას.

§22. გრაფის ცნება

გრაფი არის რაიმე არაცარიელი V სიმრავლის და (v, w) სახის $(v, w \in V,\ v \neq w)$ არადალაგებულ წყვილთა E სიმრავლის $G(V, E)$ ერთობლიობა. V სიმრავლის ელემენტებს $G(V, E)$ გრაფის *წვეროები* ეწოდება, ხოლო E სიმრავლეში შემავალ წყვილებს – გრაფის *წიბოები*.

გეომეტრიულად წვეროებს აღნიშნავენ წერტილების საშუალებით, ხოლო წიბოებს – ამ წერტილების შემაერთებელი წირების საშუალებით (ნახ. 22.1).



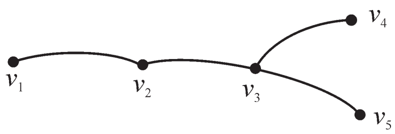
ნახ. 22.1

22.1 ა) ნახაზზე წარმოდგენილი $G(V,E)$ გრაფისათვის წვეროების სიმრავლეა $V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, ხოლო წიბოებისა $E = \{(v_1, v_2),\ (v_2, v_3),\ (v_3, v_4),\ (v_3, v_5)\}$;

22.1 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილი $G(V,E)$ გრაფისათვის წვეროების სიმრავლეა $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, ხოლო წიბოებისა $E = \{(v_2, v_3)\}$;

22.1 გ) ნახაზზე წარმოდგენილი $G(V,E)$ გრაფისათვის წვეროების სიმრავლეა $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, ხოლო წიბოებისა – $E = \varnothing$.

შევნიშნოთ, რომ 22.1 ა) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფის (v_1, v_2) და (v_3, v_4) წიბოების გადაკვეთის წერტილი არ წარმოადგენს გრაფის წვეროს. გრაფის გეომეტრიული წარმოდგენისას მნიშვნელობა არა აქვს წვეროების (წერტილების) ურთიერთგანლაგებას და ამ წვეროების შემაერთებელი წიბოების (წირების) ფორმას. მაგალითად, 22.1 ა) ნახაზზე გამოსახული გრაფი იგივეა, რაც 22.2 ნახაზზე გამოსახული გრაფი.

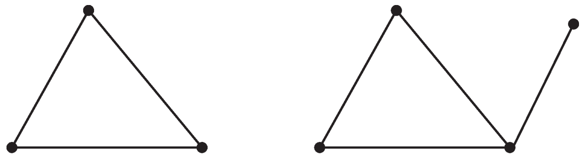


ნახ. 22.2

$G(V,E)$ გრაფს ეწოდება სასრული, თუ მისი წვეროების V სიმრავლე სასრულია. როცა $E = \varnothing$, მაშინ $G(V,E)$ გრაფს ნულ-გრაფი ეწოდება ნახ. 22.1 გ).

გეომეტრიული წარმოდგენის შესაბამისად, თუ $(v_1, v_2) \in E$, მაშინ ამბობენ, რომ (v_1, v_2) წიბო აერთებს v_1 და v_2 წვეროებს.

$G(V, E)$ გრაფს ეწოდება *სრული გრაფი*, თუ მისი ნებისმიერი ორი წვერო შეერთებულია წიბოთი. სრული გრაფი, რომელსაც აქვს n წვერო, აღინიშნება K_n სიმბოლოთი. მაგალითად, K_3 გრაფი გეომეტრიულად წარმოიდგინება სამკუთხედის სახით (ნახ. 22. 3 ა))

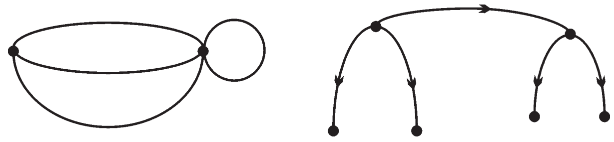


ა) ბ)

ნახ. 22.3

$G(V', E')$ გრაფს ეწოდება $G(V, E)$ გრაფის *ქვეგრაფი*, თუ $V' \subset V$ და $E' \subset E$. მაგალითად, 22.3 ა) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფი არის 22.3 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფის ქვეგრაფი.

ჩვეულებრივი გრაფების გარდა გამოყენებებში ხშირად იხილავენ განზოგადებულ გრაფებს, რომლებსაც აქვთ მარყუჟი, ე.ი. (v, v) სახის წიბოები, და გრაფებს, რომლებშიც ორი წვერო შეერთებულია რამდენიმე წიბოთი (ნახ. 22.4 ა)). ასეთ წიბოებს ჯერადი წიბოები ეწოდება. თუ E განიხილება როგორც დალაგებულ წყვილთა სიმრავლე (ე.ი. თუ (v_1, v_2) და (v_2, v_1) წყვილები, $v_1 \neq v_2$ შემთხვევაში, განიხილება როგორც E სიმრავლის განსხვავებული ელემენტები), მაშინ $G(V, E)$ გრაფს *ორიენტირებული გრაფი* ეწოდება (ნახ. 22.4 ბ)). ორიენტირებული გრაფის ყველა წიბო ორიენტირებულია. ორიენტირებული გრაფის წიბოებს *რკალებს* უწოდებენ.

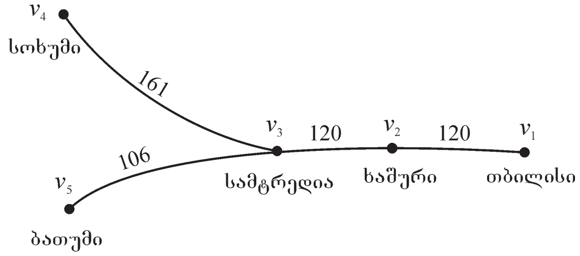


ა) ბ)

ნახ. 22.4

ზოგიერთ შემთხვევაში იხილავენ შერეულ გრაფებს, ე.ი. გრაფებს, რომელთაც აქვთ როგორც ორიენტირებული, ისე არაორიენტირებული წიბოები. მაგალითად, ქალაქის გეგმა შეიძლება განვიხილოთ როგორც გრაფი, რომელშიც წიბოები წარმოადგენს ქუჩებს, ხოლო წვეროები – გზაჯვარედინებს. მაშინ ქუჩები, რომლებზედაც მოძრაობა ცალმხრივია, გამოისახება ორიენტირებული წიბოებით, ხოლო ქუჩები, რომლებზედაც მოძრაობა ორმხრივია – არაორიენტირებული წიბოებით.

აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ ხშირად საჭიროა დამატებითი ინფორმაციის მითითება $G(V, E)$ გრაფის V და E სიმრავლეების შესახებ. მაგალითად, თუ წვეროები აღნიშნავენ შესაბამისად ქალაქებს თბილისს, ხაშურს, სამტრედიას, ბათუმს და სოხუმს, ხოლო წიბოები მათ დამაკავშირებელ რკინიგზას, მაშინ შესაბამისი გრაფი შეიძლება იყოს წარმოდგენილი 22.5 ნახაზის სახით, სადაც თითოეულ წიბოზე აღნიშნულია შესაბამისი გზის სიგრძე კილომეტრებში.



ნახ. 22.5

§23. გრაფის წვეროს ხარისხი. ჯაჭვი, ციკლი, ხე

გრაფის წიბოს, რომელიც აერთებს გრაფის წვეროებს, ამ წვეროების *ინცინდენტური წიბო* ეწოდება. შესაბამისად, ამ წვეროებს მოცემული წიბოს *ინცინდენტური წვეროები* ეწოდება. ამრიგად, (v_1, v_2) წიბო ინციდენტურია როგორც v_1, ისე v_2 წვეროსი, ხოლო v_1 (ასევე v_2) წვერო ინციდენტურია (v_1, v_2) წიბოსი (იხ., მაგალითად, ნახ. 22.2).

გრაფის წვეროს, რომელიც არც ერთი წიბოს ინცინდენტური არ არის, *იზოლირებული წვერო* ეწოდება (წვერო v_1 22.1 ბ) ნახაზზე).

ორ წიბოს, რომელიც ერთი და იმავე წვეროს ინცინდენტურია, *მოსაზღვრე წიბოები* ეწოდება. მაგალითად, 22.2 ნახაზზე (v_1, v_2) და (v_2, v_3) მოსაზღვრე წიბოებია, ხოლო (v_1, v_2) და (v_3, v_4) – არამოსაზღვრე წიბოები. შესაბამისად განისაზღვრება გრაფის მოსაზღვრე წვეროები: ორ წვეროს ეწოდება *მოსაზღვრე*, თუ ისინი ერთი და იმავე წიბოს ინცინდენტურია (მაგალითად, 22.2 ნახაზზე v_1 და v_2, v_3 და v_4 მოსაზღვრე წვეროებია).

ვთქვათ, v არაორიენტირებული სასრული გრაფის წვეროა. v წვეროს ინცინდენტურ წიბოთა რაოდენობას ეწოდება v წვეროს *ხარისხი* და აღინიშნება $\deg v$ სიმბოლოთი (degree ინგლისურად ნიშნავს ხარისხს). თუ გრაფში არ არის მარყუჟი და ჯერადი წიბოები, მაშინ ყოველი წიბო იქნება ორი წვეროს ინციდენტური და, მაშასადამე, გრაფის წვეროების ხარისხების ჯამში ის შევა ორჯერ. ჩატარებული მსჯელობის შედეგი ჩამოვაყალიბოთ თეორემის სახით.

თეორემა 23.1. *სასრული $G(V, E)$ გრაფის წვეროების ხარისხების ჯამი ორჯერ აღემატება მისი წიბოების $|E|$ რაოდენობას,*

ე.ი. თუ $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, *მაშინ*

$$\sum_{i=1}^{n} \deg v_i = 2|E|. \tag{23.1}$$

აღნიშნული თანაფარდობა დამტკიცებული იყო ეილერის მიერ და წარმოადგენს გრაფთა თეორიის ისტორიულად პირველ თეორემას. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ სასრულ გრაფში კენტხარისხიან წვეროთა რაოდენობა ლუწია.

მაგალითი 23.2. შევამოწმოთ (23.1) თანაფარდობა 22.2 ნახაზზე მოყვანილი გრაფისათვის.

$$\nabla \deg v_1 = \deg v_4 = \deg v_5 = 1, \quad \deg v_2 = 2, \quad \deg v_3 = 3,$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} &\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \deg v_4 + \deg v_5 = \\ &= 1 + 2 + 3 + 1 + 1 = 8. \end{aligned}$$

რადგან

$$E = \{(v_1, v_2),\ (v_2, v_3),\ (v_3, v_4),\ (v_3, v_5)\},$$

ამიტომ

$$|E| = 4.$$

ამრიგად,

$$\deg v_1 + \deg v_2 + \deg v_3 + \deg v_4 + \deg v_5 = 2|E|. \quad \square$$

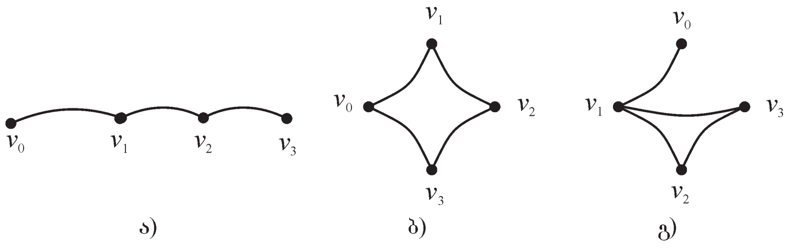
გრაფს ეწოდება *ერთგვაროვანი*, თუ მისი ყველა წვეროს ხარისხი ერთი და იგივეა. ერთგვაროვანი გრაფის მაგალითებს წარმოადგენენ წესიერი მრავალწახნაგების – ტეტრაედრის, კუბის,

ოქტაედრის, დოდეკაედრის და იკოსაედრის წვეროებით და წიბოებით შექმნილი გრაფები.

გრაფის განსხვავებულ წიბოთა

$$(v_0, v_1),\ (v_1, v_2),\ (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n) \qquad (23.2)$$

მიმდევრობას *ჯაჭვი* ეწოდება (იხ. ნახ. 23.1, სადაც $n = 3$).

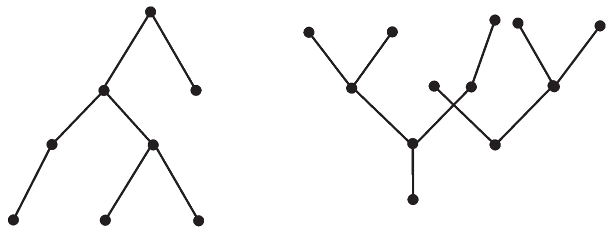


ნახ. 23.1

თუ $v_0 = v_n$, მაშინ ჯაჭვს *ციკლი* ეწოდება (ნახ. 23.1 ბ). არაციკლურ ჯაჭვს *მარტივი ჯაჭვი* ეწოდება (ორიენტირებული გრაფის შემთხვევაში – *გზა*), თუ მასში მონაწილე ყველა წვერო განსხვავებულია (ე.ი. $v_i \neq v_j$, როცა $i \neq j$) (ნახ. 23.1 ა)). შესაბამისად განისაზღვრება *მარტივი ციკლი* (ორიენტირებულ შემთხვევაში – *კონტური*) (ნახ. 23.1 ბ)).

გრაფს *ბმული გრაფი* ეწოდება, თუ ნებისმიერი ორი წვეროსათვის არსებობს ამ წვეროების შემაერთებელი ჯაჭვი (22.1 ა) ნახაზზე გამოსახული გრაფი ბმულია, ხოლო 22.1 ბ) და 22.1 გ) ნახაზზე – არაბმული). ყოველი არაბმული გრაფი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ბმულ გრაფთა გაერთიანება.

გრაფებს შორის განსაკუთრებული ადგილი უჭირავს სასრულ ბმულ გრაფებს, რომლებიც ციკლს არ შეიცავს (ნახ. 23.2 ა)). ასეთ გრაფებს *ხეები* ეწოდება.



ა) ბ)

ნახ. 23.2

სასრულ გრაფს, რომელიც ციკლს არ შეიცავს, *ტყე* ეწოდება (ნახ. 23.2 ბ)). ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ტყის კომპონენტებს წარმოადგენს ხეები.

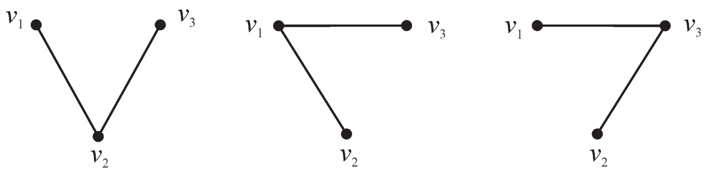
მოვიტანოთ ხეებთან დაკავშირებული ერთი მნიშვნელოვანი თანაფარდობა.

თეორემა 23.3. *მოცემული* n $(n \geq 2)$ *წვეროსაგან შეიძლება აიგოს*

$$t_n = n^{n-2} \tag{23.3}$$

სხვადასხვა ხე.

შევნიშნოთ, რომ აქ აღნიშნულ t_n ხეებს შორის ზოგიერთი გამოსახავს გარკვეული გაგებით ერთნაირ (უფრო ზუსტად იზომორფულ) გრაფებს. $G(V, E)$ და $G(V', E')$ გრაფებს ეწოდება *იზომორფული გრაფები*, თუ არსებობს ისეთი ურთიერთცალსახა შესაბამისობა V და V'-ის წვეროებს შორის, რომ იმ წიბოების რიცხვი, რომლებიც აერთებს V-ს რომელიმე ორ წვეროს, ტოლია იმ წიბოების რიცხვისა, რომლებიც აერთებს V'-ის შესაბამის წვეროებს. მაგალითად, $n = 3$ შემთხვევაში ყველა შესაძლო ხეთა რაოდენობა $t_3 = 3^{3-2} = 3$, მაგრამ ყველა ეს ხე ერთმანეთის იზომორფულია (ნახ. 23.3).



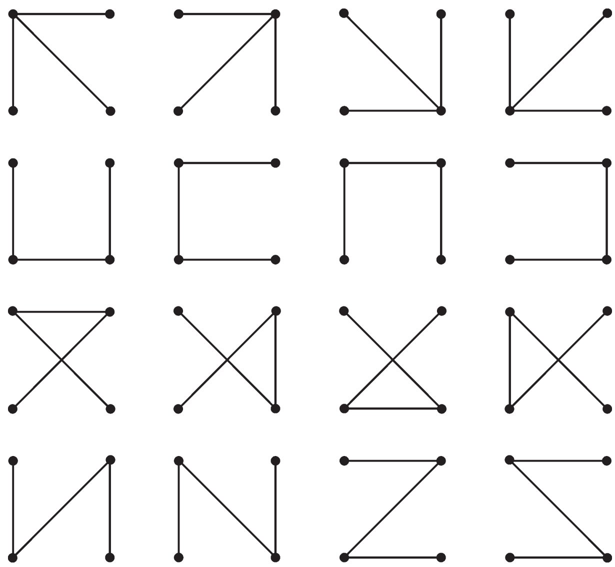
ნახ. 23.3

მაგალითი 23.4. მოცემული ოთხი წერტილისათვის ავაგოთ ყველა შესაძლო ხე, რომლის წვეროები მოთავსებულია აღნიშნულ წერტილებში.

∇ (23.3) ფორმულის თანახმად $n = 4$ შემთხვევაში ასეთი ხეების რაოდენობაა

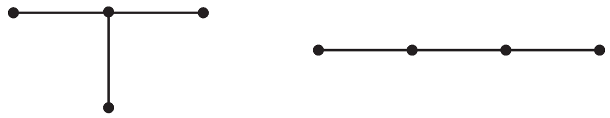
$$t_n = 4^{4-2} = 16.$$

ავაგოთ შესაბამისი გრაფები (იხ. ნახ. 23.4).



ნახ. 23.4

შევნიშნოთ, რომ პირველი ოთხი გრაფი ერთმანეთის იზომორფულია. ერთმანეთის იზომორფულია აგრეთვე დანარჩენი თორმეტი გრაფი. ამრიგად, $n = 4$ შემთხვევაში არსებობს არაიზომორფულ ხეთა მხოლოდ ორი კლასი. ამ კლასთა წარმომადგენლები ასახულია 23.5 ა) და 23.5 ბ) ნახაზებზე. $\square$



ა) ბ)

ნახ. 23.5

ვთქვათ, n რაოდენობის ქალაქი უნდა დაუკავშირდეს ერთმანეთს რკინიგზით ისე, რომ ნებისმიერ ორ ქალაქს შორის არსებობდეს ერთადერთი გზა (შესაძლებელია სხვა ქალაქების გავლით). ცხადია, რომ ყველა შესაძლო ვარიანტთა რაოდენობა გამოითვლება (23.3) ფორმულით. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ გრაფთა თეორიის მეთოდები საშუალებას გვაძლევს ამოვხსნათ უფრო ზოგადი ამოცანაც: აღნიშნულ ვარიანტებს შორის შევარჩიოთ ისეთი ვარიანტი, რომლის პრაქტიკული განხორციელება დაკავშირებული იქნება მინიმალურ ხარჯებთან. ასეთივე სახის ამოცანებს ვხვდებით, მაგალითად, ელექტროქსელების დაპროექტებისას და სხვა საინჟინრო გამოყენებებში.

§24. ორიენტირებული გრაფები და კრიტიკული გზის ანალიზი

ორიენტირებული გრაფები გამოიყენება წარმოების დაგეგმარებასა და განრიგების შედგენაში. ორიენტირებულ გრაფებთან

დაკავშირებულია ე.წ. *კრიტიკული გზის მეთოდი*, რომელიც წარმოადგენს მენეჯმენტის საფუძველს. ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი პრაქტიკული ამოცანა.

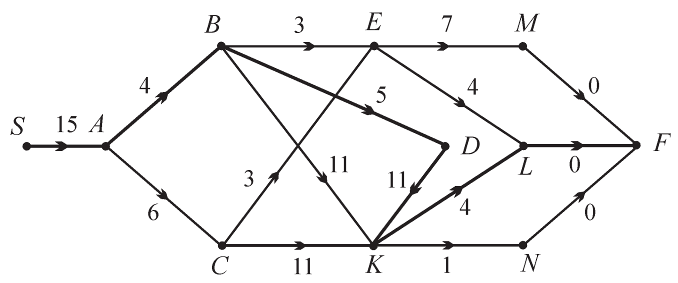
ვთქვათ, რომელიღაც ფირმა ამზადებს მსუბუქი ავტომობილებისათვის ტვირთის გადასაზიდ მისაბმელებს, რისთვისაც მას სჭირდება ქვემოთ ჩამოთვლილი ოპერაციების შესრულება გარკვეული თანამიმდევრობის დაცვით (იხ.ცხრილი 24. 1).

ოპერაციის დასახელება	ოპერაციის შესრულების დრო (წთ)	შენიშვნა
A – საბაზისო ჩარჩოს აგება	15	პირველი ოპერაცია
B – ღერძის დამაგრება	4	შესრულდეს A-ს შემდეგ
C – ძარის დამაგრება	6	"——" A-ს "——"
D – მისაბმელი კვანძის დამონტაჟება	5	"——" B-ს "——"
E – ბორბლების დამონტაჟება	3	"——" A, B, C-ს "——"
K – მაშუქი მოწყობილობის დამონტაჟება	11	"——" A, B, C, D-ს "——"
L – ამორტიზატორის დაყენება	4	"——" E, K-ს "——"
M – ელ. გაყვანილობის დამონტაჟება	7	"——" E-ს "——"
N – ფირმის ემბლების გაკეთება	1	"——" K-ს "——"

ცხრილი 24.1

ამოცანა ის არის, რომ განვსაზღვროთ ერთი მისაბმელის დასამზადებლად საჭირო მინიმალური დრო და შევადგინოთ სამუშაოს შესრულების შესაბამისი განრიგი.

მოცემული ცხრილის მიხედვით ავაგოთ ორიენტირებული გრაფი, რომლის წვეროები ასახავენ შესაბამის ოპერაციებს, ხოლო წიბოები (რკალები) – ოპერაციებს შორის კავშირს (ნახ. 24.2).



ნახ. 24.2

აგებული გრაფის ყოველ XY რკალს შევუსაბამოთ რიცხვი, რომელიც უდრის Y ოპერაციის შესრულებისათვის საჭირო დროის დანახარჯს (წუთებში). ასეთ რიცხვს ვუწოდოთ XY რკალის სიგრძე და აღვნიშნოთ ℓ_{XY} სიმბოლოთი. მაგალითად, $\ell_{BE}=\ell_{CE}=3$, რადგან E ოპერაციის შესრულებისათვის საჭიროა 3 წუთი (იხ. ცხრილი), ხოლო $\ell_{MF} = \ell_{LF} = \ell_{NF} = 0$, რადგან F არის სიმბოლური ოპერაცია (მიგვითითებს მხოლოდ დასასრულზე) და მას არავითარი დრო არ სჭირდება. გრაფის ნებისმიერი გზის სიგრძე განისაზღვრება როგორც ამ გზის შემადგენელი რკალების სიგრძეების ჯამი. მაგალითად,

$$\begin{aligned}\ell_{SABDKLF} &= \ell_{SA} + \ell_{AB} + \ell_{BD} + \ell_{DK} + \ell_{KL} + \ell_{LF} = \\ &= 15 + 4 + 5 + 11 + 4 + 0 = 39. \qquad (24.1)\end{aligned}$$

ავხსნათ, როგორ შეიძლება აგებული გრაფის გამოყენებით ოპტიმალური გეგმის შედგენა. 24.2 ნახაზიდან ჩანს, რომ A ოპერაციის შესრულების შემდეგ თანმიმდევრობით შეიძლება შევასრულოთ, მაგალითად, B და D ოპერაციები და იმავდროულად ვაწარმოოთ C ოპერაციაც. სამუშაოს დაწყებიდან 21 წუთის შემდეგ C ოპერაციის დასრულების მომენტისათვის ($\ell_{SAC} = 21$) K ოპერაციის შესრულებამდე დროის მარაგი 3 წუთი გვექნება, რადგან K ოპერაციის შესრულება პირობის ძალით შესაძლებელია

მხოლოდ D ოპერაციის შესრულების შემდეგ, რასაც ჯამში სჭირდება 24 წუთი ($\ell_{SABD} = 15+4+5 = 24$). თუ მსგავს მსჯელობას გავაგრძელებთ, მივალთ იმ დასკვნამდე, რომ ოპტიმალური გეგმა (ე.ი. გეგმა, რომელიც მოითხოვს დროის მინიმალურ დანახარჯს) განისაზღვრება ისეთი გზით (საწყისი S წვერტილითა და ბოლო F წვერტილით), რომლის სიგრძე მაქსიმალურია ყველა ასეთ შესაძლო გზათა შორის. ასეთნაირად შერჩეულ გზას ეწოდება *კრიტიკული გზა*.

კრიტიკული გზის შესაბამისი რომელიმე ოპერაციის ხანგრძლივობის გაზრდა რამდენიმე წუთით გამოიწვევს მთელი სამუშაოს შესრულების დროის გაზრდას იმდენივე წუთით, ხოლო სხვა არაკრიტიკული გზის რომელიმე ოპერაციის შესრულების დროის გაზრდა, მაგალითად, 1 წუთით, არ გამოიწვევს სამუშაოს შესრულების დროის ცვლილებას. ამრიგად, ბორბლების დამონტაჟებას (E) შეიძლება დაეთმოს მეტი დრო, რაც არ იმოქმედებს მთელი სამუშაოს შესრულების დროზე, მაშინ როცა მაშუქი მოწყობილობის დამონტაჟების (K) დროის გაზრდა მთელი სამუშაოს შესრულების დროს გაზრდის. სწორედ ამიტომ უწოდებენ ასე შერჩეულ გზას კრიტიკულს.

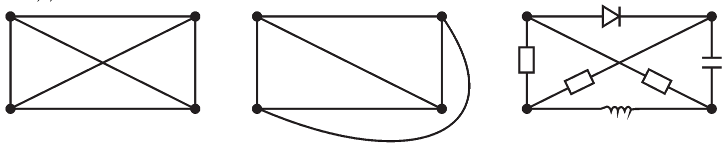
არსებობს კრიტიკული გზის პოვნის ზოგადი ალგორითმი. ჩვენს კერძო შემთხვევაში უშუალო შემოწმებით დავრწმუნდებით, რომ კრიტიკულია $SABDKLF$ გზა (24.2 ნახაზზე ეს ტეხილი გამუქებულია)და ამ გზის სიგრძე $\ell_{SABDKLF} = 39$ (იხ. (24.1)). ეს ნიშნავს, რომ აღნიშნულ პირობებში ერთი მისაბმელის დასამზადებლად საჭირო მინიმალური დრო 39 წუთია. $\square$

§25. პლანარული გრაფები. ეილერის ფორმულა

პლანარული გრაფები გამოიყენება კომუნიკაციებისა და ბრტყელი ნაბეჭდი სქემების დაპროექტებაში, რუკების შეღებვასა და მრავალ სხვა საინჟინრო ამოცანაში.

გრაფს ეწოდება *პლანარული*, თუ შესაძლებელია სიბრტყეზე მისი ისეთი გამოსახვა, რომ წიბოთა ყველა თანაკვეთა წარმოადგენდეს ამ გრაფის წვეროებს. აღნიშნული ფორმით წარმოდგენილ გრაფს ვუწოდოთ მოცემული პლანარული გრაფის *ბრტყელი წარმოდგენა*.

მაგალითად, რადგან 25.1 ა) ნახაზზე მოყვანილი გრაფისათვის არსებობს მისი ბრტყელი წარმოდგენა (ნახ. 25.1 ბ)), ამიტომ ეს გრაფი პლანარულია. პრაქტიკული თვალსაზრისით ეს ნიშნავს, რომ შესაძლებელია ამ გრაფის შესაბამისი ელექტროსქემის ფრაგმენტის რეალიზაცია ბრტყელი ნაბეჭდი სქემის საშუალებით (ნახ. 25 1 გ)).



ა) ბ) გ)

ნახ. 25.1

ბრტყელი ბმული გრაფი მთელ სიბრტყეს ჰყოფს ნაწილებად, რომელთაც გრაფის *წახნაგები* ეწოდება. 25.1 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფისათვის ასეთი ნაწილების (წახნაგების) რაოდენობა $r = 4$. ეილერმა დაამტკიცა ფორმულა, რომელიც ამყარებს

კავშირს ბრტყელი ბმული $G(V, E)$ გრაფის წახნაგების, წვეროების და წიბოების რაოდენობებს შორის. ამ ფორმულას, რომელსაც *ეილერის ფორმულა* ეწოდება, აქვს შემდეგი სახე:

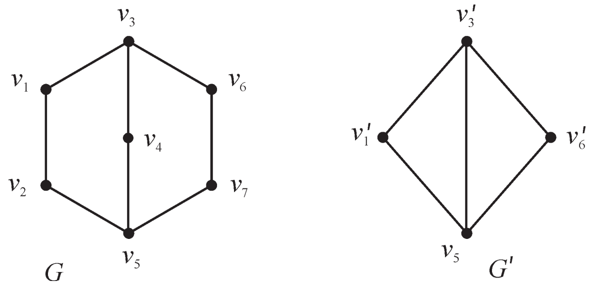
$$n - m + r = 2 \quad (|V| - |E| + |F| = 2), \tag{25.1}$$

სადაც $n = |V|$ წვეროების რიცხვია, $m = |E|$ – წიბოების, ხოლო $r = |F|$ – წახნაგების.

მაგალითად, 25.1 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფისათვის $n = 4$, $m = 6$, $r = 4$ და, შესაბამისად,

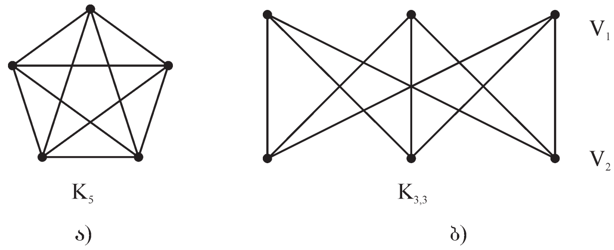
$$n - m + r = 4 - 6 + 4 = 2.$$

ვიტყვით, რომ G *გრაფი მოჭიმვადია* G' *გრაფზე*, თუ G' გრაფი მიიღება G გრაფისაგან მისი ზოგიერთი (v_i, v_j) წიბოს ამოგდებით და შესაბამისი v_i და v_j წვეროების გაიგივებით. მაგალითად, 25.2 ნახაზზე გამოსახულია G და G' გრაფები, სადაც G მოჭიმვადია G'-ზე: G გრაფიდან ამოგდებულია (v_1, v_2) წიბო (v_1 და v_2 წვერო შეიცვალა ერთი v_1' წვეროთი), (v_3, v_4) წიბო (დარჩა v_3' წვერო) და (v_6, v_7) წიბო (დარჩა v_6' წვერო).



ნახ. 25.2

როგორც უკვე ითქვა (იხ. §22), K_n-ით აღვნიშნავთ სრულ გრაფს, რომელსაც აქვს n წვერო. K_5 გრაფის გეომეტრიული წარმოდგენა მოყვანილია 25.3 ა) ნახაზზე.



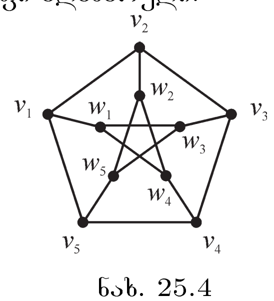
ნახ. 25.3

$K_{m,n}$-თი აღინიშნება *სრული ორმხრივი* (*ანუ ორწილიანი*) გრაფი. ამ გრაფის წვეროების V სიმრავლე დაყოფილია ორ V_1 და V_2 ქვესიმრავლედ ($|V_1| = m$, $|V_2| = n$) ისე, რომ V_1 სიმრავლის წვეროები შეერთებულია მხოლოდ V_2 სიმრავლის თითოეულ წვეროსთან და პირიქით. 25.3 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილია სრული ორმხრივი $K_{3,3}$ გრაფი.

ეილერის ფორმულის გამოყენებით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ K_5 და $K_{3,3}$ არაპლანარული გრაფებია. ამ გრაფებს განსაკუთრებული ადგილი უჭირავთ არაპლანარულ გრაფებს შორის.

თეორემა 25.1. *გრაფი პლანარულია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არ შეიცავს* K_5 *და* $K_{3,3}$ *გრაფებზე მოჭიმვად ქვეგრაფებს.*

მაგალითი 25.2. გამოვიკვლიოთ, არის თუ არა 25.4 ნახაზზე გამოსახული გრაფი პლანარული.

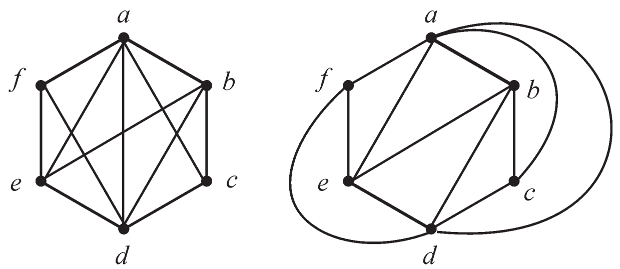


ნახ. 25.4

∇ ამოვშალოთ მოცემული გრაფის $(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3), (v_4, w_4), (v_5, w_5)$ წიბოები და დავამთხვიოთ ერთმანეთს v_i და w_i წვეროები $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. რადგან აღნიშნული გარდაქმნის შედეგად მიიღება K_5 გრაფი, ამიტომ მოცემული გრაფი არაპლანარულია. $\square$

შევნიშნოთ, რომ 25.1 თეორემის პირობების შემოწმება კონკრეტული გრაფისათვის ხშირ შემთხვევაში საკმაოდ რთულია. პრაქტიკული თვალსაზრისით უფრო მოსახერხებელია სხვა ალგორითმის გამოყენება, რომლის არსი ის არის, რომ გარკვეული გარდაქმნების შესრულებით მოცემული გრაფი დაიყვანება მის ბრტყელ წარმოდგენამდე (იმ შემთხვევაში, თუ ის პლანარულია). შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული ალგორითმი გულისხმობს გრაფში ისეთი ციკლის არსებობას, რომელსაც არც ერთი წიბო არ ჰკვეთს. გავარჩიოთ ეს ალგორითმი კონკრეტულ მაგალითზე.

მაგალითი 25.3. გამოვარკვიოთ არის თუ არა 25.5 ა) ნახაზზე გამოსახული გრაფი პლანარული.



ა) ბ)

ნახ. 25.5

∇ $a - b - c - d - e - f - a$ არის ამ გრაფის ციკლი, რომელსაც არც ერთი წიბო არ ჰკვეთს. შევარჩიოთ გრაფის ნებისმიერი წიბო, რომელიც არ შედის ამ ციკლში, მაგალითად, (a, c).

ეს წიბო გავატაროთ $a-b-c-d-e-f$ ექვსკუთხედის (ციკლის) "გარეთ" (იხ. ნახ. 25.5 ბ)). (a,c) წიბოს გადამკვეთი (b,d) და (b,e) წიბოები დავტოვოთ ექვსკუთხედის "შიგნით" (ნახ. 25.5 ბ)). (b,d) წიბო ჰკვეთს მხოლოდ (a,c) წიბოს, ხოლო (b,e) წიბოს ჰკვეთს აგრეთვე (a,d) და (f,d) წიბოები (ნახ. 25.5 ა)), ამიტომ ეს წიბოები დავხაზოთ ექვსკუთხედის "გარეთ" (ნახ. 25. 5 ბ)). თავის მხრივ, (f,d) წიბოს ჰკვეთს (გარდა (b,e) წიბოსი) (a,e) წიბო (ნახ. 25.5 ა)), ამიტომ (a,e) წიბოს ვტოვებთ ექვსკუთხედის "შიგნით" (ნახ. 25.5 ბ)). საბოლოოდ ვღებულობთ მოცემული გრაფის ბრტყელ წარმოდგენას, რაც იმის მაუწყებელია, რომ გრაფი პლანარულია. $\square$

§26. გრაფის წარმოდგენა მატრიცების საშუალებით

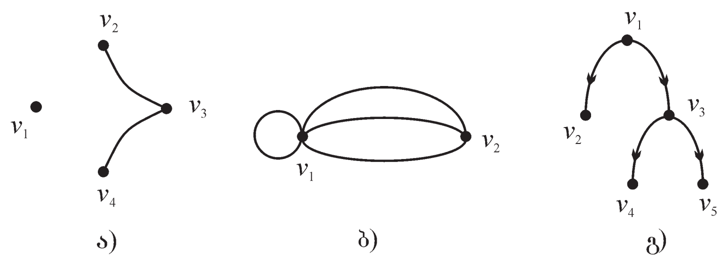
წინა პარაგრაფებში, გრაფის განხილვისას, თვალსაჩინოებისათვის ხშირად ვიყენებდით გრაფის გეომეტრიულ წარმოდგენას. პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით მოსახერხებელია აგრეთვე გრაფის მატრიცული წარმოდგენა. არსებობს ასეთ წარმოდგენათა რამდენიმე ვარიანტი. ჩვენ აქ მოვიყვანთ ზოგიერთ მათგანს.

1. მომიჯნავეობის მატრიცა. ვთქვათ, $G(V,E)$ არის სასრული გრაფი, სადაც $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$. a_{ij}-თი აღვნიშნოთ (v_i,v_j) წიბოთა რაოდენობა $(i,j=1,2,\ldots,n)$. ასეთი a_{ij} რიცხვებისათვის შედგენილ კვადრატულ

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება $G(V, E)$ გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცა. ორიენტირებული გრაფის შემთხვევაში მომიჯნავეობის A მატრიცის a_{ij} ელემენტი გამოსახავს იმ (v_i, v_j) რკალთა რაოდენობას, რომლებიც გადიან v_i წვეროდან და უერთდებიან v_j წვეროს. ცხადია, რომ არაორიენტირებული გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცა სიმეტრიულია.

მაგალითი 26.1. ავაგოთ 26.1 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების მომიჯნავეობის მატრიცები.



ნახ. 26.1

∇ 26.1 ა) ნახაზზე წარმოდგენილ გრაფს აქვს მხოლოდ ორი წიბო (v_2, v_3) და (v_3, v_4), ამიტომ ამ გრაფის მომიჯნავეობის მატრიცაში $a_{23} = a_{32} = a_{34} = a_{43} = 1$, ხოლო ყველა სხვა a_{ij} ელემენტი ნულის ტოლია, ე.ი.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ანალოგიურად აიგება 26.1 ბ) და 26.1 გ) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების მომიჯნავეობის მატრიცები:

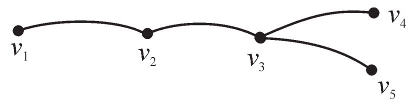
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

აღვნიშნოთ, რომ გრაფი ცალსახად (იზომორფიზმამდე სიზუსტით) განისაზღვრება თავისი მომიჯნავეობის მატრიცით.

მაგალითი 26.2. ავაგოთ $G(V, E)$ გრაფი, რომლის მომიჯნავეობის მატრიცაა

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

∇ A მატრიცის პირველი სტრიქონის სტრუქტურიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ $G(V, E)$ გრაფის v_1 წვერო შეერთებულია მხოლოდ v_2 წვეროსთან. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ გრაფის v_2 წვერო, გარდა v_1 წვეროსი, შეერთებულია აგრეთვე v_3 წვეროსთან (იხ. მატრიცის მეორე სტრიქონი), რომელიც თავის მხრივ შეერთებულია v_4 და v_5 წვეროებთან (იხ. მატრიცის მესამე სტრიქონი), ხოლო v_4 და v_5 წვერო შეერთებულია მხოლოდ v_3 წვეროსთან (იხ. მატრიცის მეოთხე და მეხუთე სტრიქონები). ამის გათვალისწინებით შეგვიძლია ავაგოთ საძიებელი გრაფი (იხ. ნახ. 26.2). $\square$



ნახ. 26.2

შევნიშნოთ, რომ გამოყენებებში ყოველ (v_i, v_j) წიბოს ხშირად შეესაბამება გარკვეული არაუარყოფითი $\rho(v_i, v_j)$ რიცხვი (მაგალითად, 22.5 ნახაზზე გამოსახული გრაფისათვის $\rho(v_i, v_j)$ უდრის მანძილს შესაბამის ქალაქებს შორის). ასეთ გრაფს შეიძლება შევუსაბამოთ კვადრატული $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ მატრიცა, სადაც $a_{ij} = \rho(v_i, v_j)$. 22.5 ნახაზზე მოყვანილი გრაფისათვის ასეთ მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 120 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 0 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 161 & 106 \\ 0 & 0 & 161 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 106 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. ინციდენციის მატრიცა. ვთქვათ, $G(V, E)$ არის სასრული არაორიენტირებული გრაფი და

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \quad E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

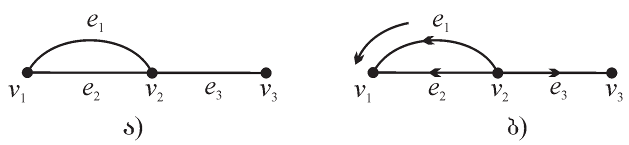
$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } v_i \text{ და } e_j \text{ ერთმანეთის ინციდენტურია;} \\ 0, & \text{თუ } v_i \text{ და } e_j \text{ არ არის ერთმანეთის ინციდენტური.} \end{cases}$$

ასეთი b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ რიცხვისაგან შედგენილ $n \times m$ რიგის

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება მოცემული $G(V, E)$ გრაფის ინციდენციის მატრიცა. ორიენტირებული გრაფის შემთხვევაში $b_{ij} = 1$, თუ v_i არის e_j წიბოს საწყისი წერტილი, და $b_{ij} = -1$, თუ v_i არის e_j წიბოს ბოლო წერტილი.

მაგალითი 26.3. ავაგოთ 26.3 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების ინციდენციის მატრიცები.



ნახ. 26.3

∇ რადგან v_1 და e_1, v_1 და e_2, v_2 და e_1, v_2 და e_2, v_2 და e_3, v_3 და e_3 ინციდენტური წვეროები და წიბოებია, ამიტომ არაორიენტირებული გრაფის შემთხვევაში (ნახ. 26.3 ა))

$$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = b_{23} = b_{33} = 1, \quad b_{13} = b_{31} = b_{32} = 0,$$

ხოლო ორიენტირებული გრაფის შემთხვევაში (ნახ. 26.3 ბ))

$$b_{21} = b_{22} = b_{23} = 1, \quad b_{11} = b_{12} = b_{33} = -1,$$
$$b_{13} = b_{31} = b_{32} = 0.$$

ამის შესაბამისად ავაგოთ აღნიშნული გრაფების ინციდენციის მატრიცები:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad \square$$

შევნიშნოთ, რომ ისევე, როგორც მომიჯნავეობის მატრიცის შემთხვევაში, ინციდენციის მატრიცის საშუალებით შესაძლებელია გრაფის აღდგენა იზომორფიზმამდე სიზუსტით.

3. ციკლების (კონტურების) მატრიცა. ვთქვათ, $G(V,E)$ სასრული არაორიენტირებული გრაფია, სადაც $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. გამოვყოთ ამ გრაფის ყველა მარტივი ციკლი. ვთქვათ, ეს ციკლებია $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{თუ } Z_i \text{ ციკლი მოიცავს } e_j \text{ წიბოს}, \\ 0, & \text{თუ } Z_i \text{ ციკლი არ მოიცავს } e_j \text{ წიბოს}. \end{cases}$$

ასეთი c_{ij} $(i = 1, 2, \dots, k;\ j = 1, 2, \dots, m)$ ელემენტებისაგან შედგენილ

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{km} \end{bmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება $G(V,E)$ გრაფის *ციკლების მატრიცა*. ორიენტირებული გრაფის შემთხვევაში ციკლების მატრიცას ეწოდება *კონტურების მატრიცა*. ორიენტირებული გრაფის ყოველი ციკლისათვის (კონტურისათვის) ფიქსირდება შემოვლის გარკვეული მიმართულება და ამის მიხედვით განისაზღვრება ამ გრაფის კონტურების C მატრიცის არანულოვანი ელემენტების ნიშანი: იმ შემთხვევაში, როცა მოცემულ კონტურში შემავალი წიბოს მიმართულება

ემთხვევა კონტურის შემოვლის მიმართულებას, მაშინ C მატრიცის შესაბამისი ელემენტის ადგილზე იწერება $+1$, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში – რიცხვი -1.

შევნიშნოთ, რომ მომიჯნავეობის და ინციდენციის მატრიცებისაგან განსხვავებით გრაფის ციკლების და კონტურების მატრიცა გრაფს ცალსახად არ განსაზღვრავს. მაგალითად, თუ გრაფის რომელიმე წიბო არ ეკუთვნის არც ერთ ციკლს, მაშინ ამ გრაფის ციკლების მატრიცის მიხედვით ვერ დავადგენთ ამ წიბოს არსებობას.

მაგალითი 26.4. ავაგოთ 26.3 ნახაზზე გამოსახული გრაფების შესაბამისი ციკლების და კონტურების მატრიცები.

∇ 26.3 ა) ნახაზზე წარმოდგენილ გრაფს აქვს ერთი ციკლი

$$Z = (e_1, e_2).$$

ამიტომ ამ გრაფის ციკლების მატრიცა შეიცავს მხოლოდ ერთ სტრიქონს, ე.ი. არის სტრიქონ-მატრიცა. რადგან ეს ციკლი მოიცავს e_1 და e_2 წიბოებს და არ მოიცავს e_3 წიბოს, ამიტომ ამ გრაფის ციკლების მატრიცა იქნება

$$C_1 = [1\ 1\ 0].$$

ცხადია, რომ 26.3 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილი ორიენტირებული გრაფის კონტურების მატრიცაც არის სტრიქონ-მატრიცა. თუ ამ გრაფის ერთადერთი

$$K = (e_1, e_2)$$

კონტურის შემოვლის მიმართულებად მივიღებთ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმრათულებას, მაშინ გრაფის კონტურების მატრიცას ექნება შემდეგი სახე

$$C_2 = [1 \ -1 \ 0]. \quad \square$$

§27. კირხჰოფის წესები გრაფთა თეორიის ენაზე

კირხჰოფმა 1847 წელს განიხილა და ზოგად შემთხვევაში ამოხსნა ამოცანა განშტოებულ ელექტროწრედში დენის განაწილების შესახებ. მიღებული შედეგები ფიზიკის კურსში შევიდა კირხჰოფის წესების (კანონების) სახელით.

კირხჰოფის პირველი წესის თანახმად განშტოებული ელექტროწრედის ნებისმიერი კვანძისათვის დენთა ალგებრული ჯამი ნულის ტოლია, რაც მოკლედ შეიძლება ჩაიწეროს $\sum \mathrm{I} = 0$ სახით. ამ ტოლობაში ერთნაირი ნიშანი უნდა ავიღოთ ისეთი I-სათვის, რომელთაც აქვთ ერთნაირი მიმართულება აღებული კვანძის მიმართ (ე.ი. კვანძისაკენ თუ კვანძიდან).

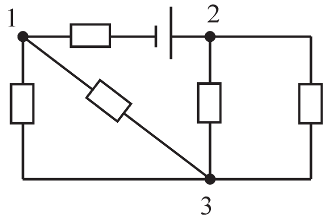
კირხჰოფის მეორე წესის თანახმად ელექტროწრედის ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურისათვის ამ კონტურის ყველა ელემენტზე და ყველა უბანზე ძაბვათა ალგებრული ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი. $\sum U = 0$. ელექტროწრედის თოთოეული კონტურისათვის ფიქსირდება ამ კონტურის შემოვლის გარკვეული მიმართულება და ამის შესაბამისად აიღება მოცემული ჯამის შესაკრებთა ნიშნები: თუ დენის მიმართულება ემთხვევა კონტურის შემოვლის შერჩეულ მიმართულებას, მაშინ ძაბვის მნიშვნელობა აიღება დადებითი ნიშნით, ხოლო თუ დენის მიმართულება კონტურის შემოვლის მიმართულების საწინააღდმდეგოა, მაშინ ის აიღება საწინააღმდეგო ნიშნით. კირხჰოფის მეორე წესიდან გამომდინარეობს, რომ ელექტროწრედის ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურისათვის ამ კონტურის

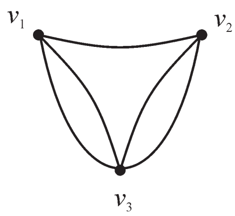
წინაღობების შემცველ ყველა უბანზე ძაბვის ვარდნათა ალგებრული ჯამი ამ კონტურის წყაროთა ელექტრომამოძრავებელ ძალთა ალგებრული ჯამის ტოლია, ე.ი.

$$\sum \mathrm{R\,I} = \sum \mathrm{E}\,.$$

კირხჰოფის წესების მიხედვით შედგენილი განტოლებების სახე დამოკიდებულია ელექტროწრედის გეომეტრიულ სტრუქტურაზე. ელექტროწრედის ყოველი სქემა შეიძლება განვიხილოთ როგორც გრაფი, რომლის წიბოები აღნიშნავს ელექტროწრედის შტოებს, ხოლო წვეროები – კვანძებს.

მაგალითად, 27.1 ა) ნახაზზე მოტანილი სქემა შეიძლება გამოვსახოთ 27.1 ბ) ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფით.





ნახ. 27.1

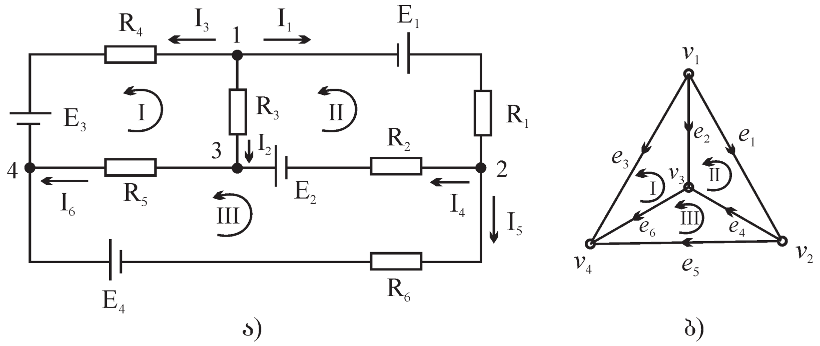
კირხჰოფის წესები გრაფთა თეორიის ენაზე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ასეთი ფორმით:

კირხჰოფის პირველი წესი: $BI = 0$,

კირხჰოფის მეორე წესი: $CU = 0$,

სადაც B და C ელექტროწრედის გრაფის შესაბამისი ინციდენციის და კონტურების მატრიცებია, ხოლო I და U შესაბამისად დენის ძალის და ძაბვის მნიშვნელობებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცებია (იხ. §I.14).

მაგალითი 27.1. ჩავწეროთ კირხჰოფის წესები 27.2 ა) ნახაზზე მოყვანილი ელექტროწრედისათვის.



ნახ. 27.2

∇ დავხაზოთ მოცემული ელექტროწრედის შესაბამისი გრაფი (იხ. ნახ. 27.2 ბ)). ამ გრაფის ინციდენციის მატრიცაა

$$BI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

აქედან

$$BI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + I_3 \\ -I_1 + I_4 + I_5 \\ -I_2 - I_4 + I_6 \\ -I_3 - I_5 - I_6 \end{bmatrix}.$$

კირხჰოფის პირველი წესის თანახმად $BI=0$, ამიტომ

$$\begin{cases} I_1+I_2+I_3=0 \\ -I_1+I_4+I_5=0 \\ -I_2-I_4+I_6=0 \\ -I_3-I_5-I_6=0. \end{cases}$$

(შევნიშნოთ, რომ მიღებული სისტემა ემთხვევა ადრე მიღებულ სისტემას; იხ. I.(14.1)).

რადგან მოცემული გრაფის კონტურების მატრიცაა

$$C=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

ამიტომ

$$CU=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -u_2+u_3-u_6 \\ -u_1+u_2-u_4 \\ u_4-u_5+u_6 \end{bmatrix}.$$

კირხჰოფის მეორე წესის თანახმად $CU=0$, ე.ი.

$$\begin{cases} -u_2+u_3-u_6=0 \\ -u_1+u_2-u_4=0 \\ u_4-u_5+u_6=0. \end{cases}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\begin{aligned} &u_1=E_1+R_1I_1, \quad && u_2=R_3I_2, \quad && u_3=R_4I_3-E_3, \\ &u_4=R_2I_4+E_2, \quad && u_5=R_6I_5+E_4, \quad && u_6=R_5I_6, \end{aligned}$$

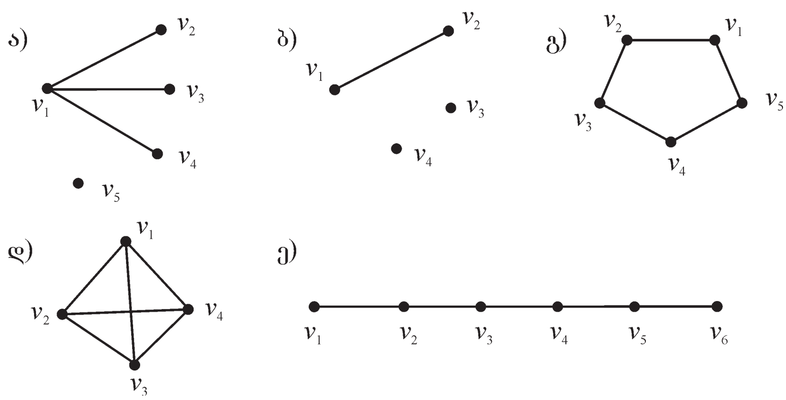
აქედან მივიღებთ

$$\begin{cases} -R_3I_2 + R_4I_3 - R_5I_6 = E_3 \\ -R_1I_1 + R_3I_2 - R_2I_4 = E_1 + E_2 \\ R_2I_4 - R_6I_5 + R_5I_6 = E_4 - E_2. \end{cases}$$

უკანასკნელი სისტემა ემთხვევა (I.14.3) სისტემას. $\square$

ამოცანები და სავარჯიშოები

IV.1. ჩამონათვალის სახით დაწერეთ IV.1 ნახაზზე წარმოდგენილი $G(V,E)$ გრაფის წვეროების V და წიბოების E სიმრავლეები:



ნახ. IV.1

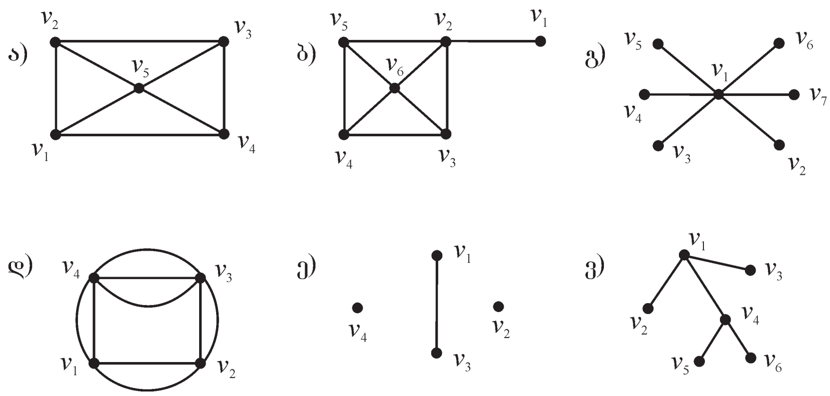
IV.2. დახაზეთ სასრული გრაფები: ა) K_3; ბ) K_4; გ) K_5; დ) K_6.

IV.3. ამოწერეთ IV.1 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფის v_1 წვეროს ინციდენტური წიბოები.

IV.4. აქვს თუ არა IV.1 ნახაზზე წარმოდგენილ გრაფებს იზოლირებული წვეროები? ამოწერეთ ეს წვეროები.

IV.5. ამოწერეთ IV.1 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების (v_1, v_2) წიბოს მოსაზღვრე წიბოები.

IV.6. განსაზღვრეთ IV.2 წარმოდგენილი გრაფების ყველა წვეროს ხარისხი და მიღებული შედეგის სისწორე შეამოწმეთ (23.1) ტოლობის საშუალებით.



ნახ. IV.2

IV.7. რომელია IV.1 და IV.2 ნახაზებზე წარმოდგენილი გრა-ფებიდან ა) ერთგვაროვანი გრაფი; ბ) ჯაჭვი (მარტივი ჯაჭვი); გ) ციკლი; დ) ბმული გრაფი; ე) ხე; ვ) ტყე (და არა ხე)?

IV.8. რამდენი ხე შეიძლება აიგოს 5 წვეროსაგან? დახაზეთ სამი ასეთი არაიზომორფული ხე.

IV.9. ქვემოთ მოცემულია სახლის მშენებლობისათვის საჭირო ქმედებათა ჩამონათვალი:

ქმედება	საჭირო დრო (დღეები)	
A – მიწის ნაკვეთის გასუფთავება	1	პირველი ოპერაცია
B – საძირკვლის მომზადება	4	A-ს შემდეგ
C – ზედა კონსტრუქციის აგება	16	B-ს "—"
D – წყლის მოსამარაგებელი ქსელის დამონტაჟება	7	C-ს "—"
E – ელექტრული სამუშაოები	8	C-ს "—"
K – მოსაპირკეთებელი სამუშაო	5	D და E-ს "—"
G – გარე სამუშაოს დასრულება	13	C-ს "—"
H – შიგა სამუშაოს დასრულება	8	K-ს "—"
L – ლანდშაფტი	6	G-ს "—"

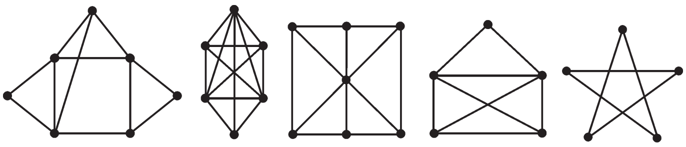
დახაზეთ შესაბამისი ორიენტირებული გრაფი, დაადგინეთ კრიტიკული გზა და იპოვეთ სახლის ასაშენებლად საჭირო უმცირესი დრო.

IV.10. რომელია ბრტყელი გრაფი IV.1 და IV.2 ნახაზებზე წარმოდგენილი გრაფებიდან? იპოვეთ აქ წარმოდგენილი ბრტყელი ბმული გრაფების წახნაგების რაოდენობა და შეამოწმეთ მათთვის ეილერის თეორემის მართებულობა.

IV.11. დახაზეთ სრული ორმხრივი (ორწილიანი) გრაფი:

ა) $K_{2,2}$; ბ) $K_{3,3}$; გ) $K_{3,2}$; დ) $K_{3,4}$; ე) $K_{4,4}$.

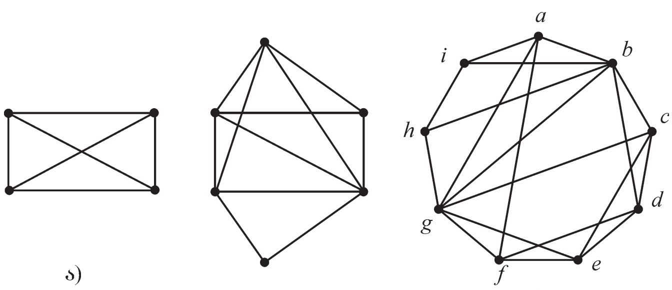
IV.12. პლანარობის ალგორითმის გამოყენებით გაარკვიეთ, არის თუ არა IV.3 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფები პლანარული?



ა) ბ) გ) დ) ე)

ნახ. IV.3

IV.13. პლანარობის ალგორითმის გამოყენებით ააგეთ IV.4 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების ეკვივალენტური ბრტყელი გრაფები

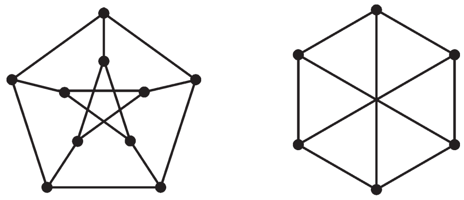


ა) ბ) გ)

ნახ. IV.4

IV.14. ეილერის თეორემის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ სრული K_5 გრაფი არაპლანარულია.

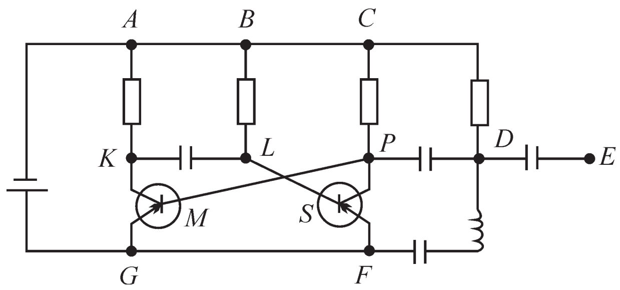
IV.15. აჩვენეთ, რომ IV.5 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფები არაპლანარულია, დაადგინეთ მათი სისქე (ფენების რაოდენობა) და დახაზეთ ფენებად:



ა) ბ)

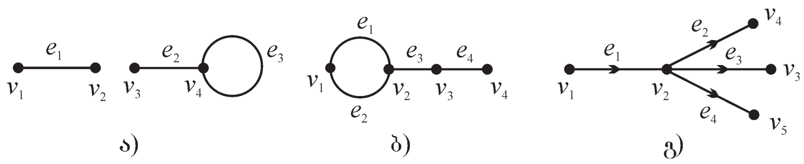
ნახ. IV.5

IV.16. განსაზღვრეთ IV.6 ნახაზზე მოყვანილი სქემის სისქე (ფენების რაოდენობა) და წარმოადგინეთ ის ბრტყელი გრაფების სახით.



ნახ. IV.6

IV.17. ააგეთ IV.7. ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების მომიჯნავეობის მატრიცა.



ნახ. IV.7

IV.18. ააგეთ გრაფი (გ) და დ) შემთხვევაში ორიენტირებული), რომლის მომიჯნავეობის მატრიცაა:

$$\text{ა)}\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{ბ)}\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{გ)}\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{დ)}\quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

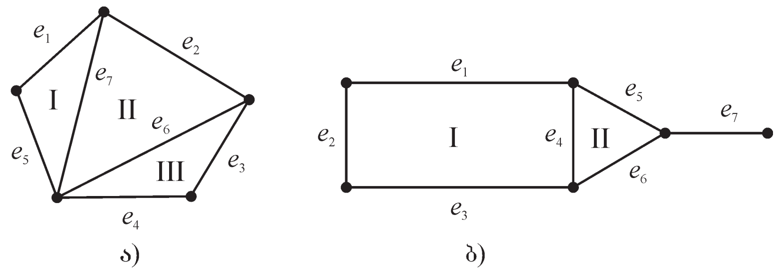
IV.19. ააგეთ IV.7 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების ინციდენციის მატრიცები.

IV.20. ააგეთ გრაფი (ზოგად შემთხვევაში ორიენტირებული), რომლის ინციდენციის მატრიცაა:

$$\text{ა)}\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{ბ)}\quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

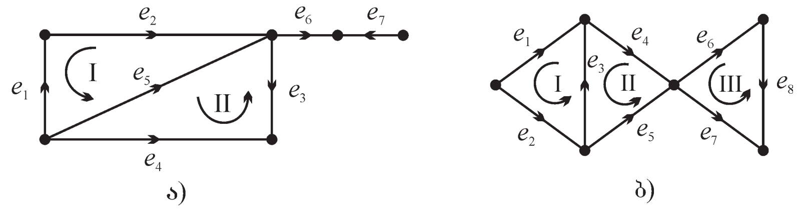
$$\text{გ)}\ B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{დ)}\quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

IV.21. ააგეთ IV.8 ნახაზზე წარმოდგენილი გრაფების ციკლების მატრიცები (რომაული ციფრები აღნიშნავენ ციკლების ნომრებს):



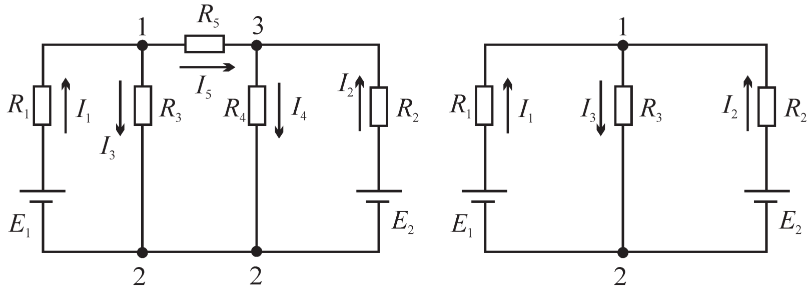
ნახ. IV.8

IV.22. ააგეთ IV.9 ნახაზზე წარმოდგენილი ორიენტირებული გრაფების კონტურების მატრიცები (რომაული ციფრები აღნიშნავენ კონტურების ნომრებს).



ნახ. IV.9

IV.23. დახაზეთ IV.10 ნახაზზე გამოსახული ელექტროსქემის შესაბამისი გრაფი. იპოვეთ ამ გრაფის ინციდენციის და კონტურების მატრიცები და ამ მატრიცების გამოყენებით დაწერეთ განტოლებები, რომლებიც გამოსახავენ კირხჰოფის წესებს მოცემული სქემისათვის. იპოვეთ დენის ძალა და მიმართულება სქემის ყველა ნაწილში.



ა) ბ)

$E_1 = 120\text{v},\ E_2 = 110\text{v},$

$R_1 = 1\Omega,\ R_2 = 1\Omega,\ R_3 = 10\Omega,$

$R_4 = 2\Omega,\ R_5 = 2\Omega.$

$E_1 = 24\text{v},\ E_2 = 18\text{v},$

$R_1 = 4\Omega,\ R_2 = 6\Omega,$

$R_3 = 4\Omega.$

ნახ. IV.10

თავი V

სასრული ველის ზოგიერთი გამოყენება

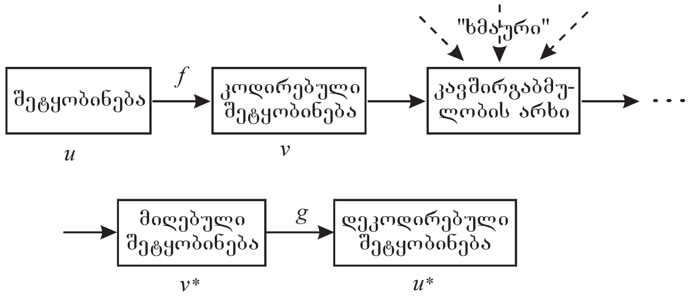
სასრული ველის გამოყენების ერთ-ერთ ძირითად სფეროს წარმოადგენს კოდირების თეორია. კოდირების თეორია შეისწავლის საკითხებს, რომლებიც დაკავშირებულია ინფორმაციის განსაზღვრული სტანდარტული ფორმის წარმოდგენასთან. კავშირგაბმულობის ყოველი არხი გაანგარიშებულია მხოლოდ გარკვეული სახის სიგნალების გადასაცემად, ამიტომ გადასაცემი ინფორმაციის ყოველი შემადგენელი ნაწილი (ასო, სიტყვა და ა.შ.) უნდა შეიცვალოს სიგნალების გარკვეული კომბინაციით. კოდის ტიპური მაგალითია მორზეს კოდი, რომელშიც ყოველ ასოს და ციფრს შეესაბამება დენის მოკლე (წერტილი) ან გრძელი (ტირე) იმპულსების გარკვეული მიმდევრობა. ამ კოდის სახეობად შეიძლება ჩაითვალოს კოდი, რომელშიც ამ მიზნისათვის გამოიყენება იმპულსი (დენი არის) და პაუზა (დენი არ არის). ამასთან, თუ იმპულსს შევუსაბამებთ სიმბოლოს "1"-ს, ხოლო პაუზას - "0"-ს, მაშინ ნებისმიერი შეტყობინება შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ნულების და ერთიანების მიმდევრობა, მაგალითად, ასეთი: (01101). 0 და 1 შეიძლება ჩავთვალოთ სასრული $\mathbb{F}_2$ ველის ელემენტებად, ხოლო თვით შეტყობინება – $\mathbb{F}_2^n$ ვექტორული სივრცის ელემენტად.

სასრულ ველებს დიდი გამოყენება აქვთ წრფივი მოდულარული სისტემების (იგივე წრფივი სასრული ავტომატების) თეორიაში. ასეთი სისტემა შეიძლება გავიაზროთ, როგორც მოწყობილობა, რომელშიც დროის გარკვეულ მომენტში რაღაცა შედის (ინფორმაცია და ა.შ.) და რომელიც დროის გარკვეულ მომენტებში რაღაცას გასცემს. ასეთ მოწყობილობათა რიცხვს მიეკუთვნება როგორც სხვადასხვა ტექნიკური საშუალებანი (სიგარეტის გასაყიდი ავტომატები, მობილური ტელეფონები, კომპიუტერები და ა.შ.), ისე ცოცხალი ორგანიზმები.

§28. კოდირების თეორიის ალგებრული ასპექტები

1. კოდირება და დეკოდირება ლუწობის შემამოწმებელი კოდი. კავშირგაბმულობის არხებით შეტყობინების გადაცემისას ყოველთვის ხდება სიგნალების გარკვეული დამახინჯება. ამიტომ სასურველია გადაცემის ისეთი მეთოდების შემუშავება, რომ ამ დამახინჯებით გამოწვეული შეცდომის ალბათობა იყოს მინიმალური. კოდირების თეორიის ძირითადი იდეა ის არის, რომ გადაიცემა ჭარბი ინფორმაცია, რომელიც თავის თავში გარკვეული სახით შეიცავს როგორც გადასაცემ ინფორმაციას (შეტყობინებას), ისე დამატებით (დამხმარე) ინფორმაციას, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელი ხდება მიღებული ინფორმაციის "გაწმენდა" გარეშე "ხმაურისაგან".

მთლიანობაში კოდირების პროცესი შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი სქემის საშუალებით (იხ. ნახ. 28.1):



ნახ. 28.1

აქ u გადასაცემი სიტყვაა, რომელიც წარმოადგენს სიგნალების (სიმბოლოების) გარკვეულ მიმდევრობას: $u=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$. შეტყობინების ყოველი α_i კომპონენტი წარმოადგენს რაიმე სასრული $\mathbb{F}_q$ ველის (იხ. §1) ელემენტს, ხოლო თვით u შეტყობინება შეიძლება განვიხილოთ როგორც k-განზომილებიანი $\mathbb{F}_q^k$ ვექტორული სივრცის $u=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ ელემენტი (ვექტორი). f ასახვის საშუალებით ხდება ამ შეტყობინების კოდირება, ე.ი. u სიტყვა გარდაიქმნება დამატებითი ინფორმაციის შემცველ სხვა v სიტყვად. ასეთ v სიტყვას ეწოდება *კოდური სიტყვა* და ისიც ვექტორული სივრცის ელემენტია: $v=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{F}_q^n$ $(n>k)$.

$f:\mathbb{F}_q^k\to\mathbb{F}_q^n$ ასახვა *წრფივი კოდის* შემთხვევაში (აქ ვიხილავთ მხოლოდ წრფივ კოდებს) არის წრფივი ასახვა და მას ეწოდება *კოდირების სქემა*. ამის შესაბამისად $g:\mathbb{F}_q^n\to\mathbb{F}_q^k$ წრფივ ასახვას, რომლის საშუალებით მიღებული v^* სიტყვიდან (რომელშიც, შესაძლებელია, დაშვებული იყოს შეცდომა) გამოიყოფა პირვანდელი u^* სიტყვა, ეწოდება *დეკოდირების სქემა*.

მარტივი კოდის შემთხვევაში $f:\mathbb{F}_q^k\to\mathbb{F}_q^n$ კოდირების სქემა ყოველ $u=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$ შეტყობინებას შეუსაბამებს ისეთ

$v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n)$ კოდურ სიტყვას, რომლის პირველი k სიმბოლო (კოორდინატი) ემთხვევა შეტყობინების სიმბოლოებს (ამ სიმბოლოებს ეწოდება *საინფორმაციო სიმბოლოები*), ხოლო დანარჩენი $n-k$ სიმბოლო (ე.წ. *შემამოწმებელი სიმბოლოები*) გარკვეული წესით მიიღება საინფორმაციო სიმბოლოებისაგან. ასეთი კოდის მაგალითს წარმოადგენს *ლუწობის შემამოწმებელი კოდი*.

ვთქვათ, გადასაცემია $u = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ შეტყობინება, სადაც $\alpha_i \in \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. კოდირების სქემა ავაგოთ შემდეგნაირად:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}), \tag{28.1}$$

სადაც

$$\alpha_{k+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k. \tag{28.2}$$

შეგახსენებთ, რომ (28.2)-ში შეკრება ხდება გალუას $\mathbb{F}_2$ ველში, სადაც

$$0+0 = 1+1 = 0, \quad 1+0 = 0+1 = 1. \tag{28.3}$$

(28.1)-ში $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ საინფორმაციო სიმბოლოებია, ხოლო α_{k+1} – შემამოწმებელი სიმბოლო. (28.2) და (28.3)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\alpha_{k+1} = \begin{cases} 0, & \text{თუ } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ მიმდევრობაში} \\ & \qquad \text{ერთიანების რიცხვი ლუწია,} \\ 1, & \text{თუ } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ მიმდევრობაში} \\ & \qquad \text{ერთიანების რიცხვი კენტია.} \end{cases}$$

ვთქვათ, $u = (0111)$. რადგან ამ სიტყვაში სამი ერთიანია, ამიტომ $\alpha_5 = 1$ და $v = (01111)$. თუ $u = (0101)$, მაშინ $\alpha_5 = 0$ და, შესაბამისად, $v = (01010)$.

გადავწეროთ (28.2) ტოლობა შემდეგი სახით

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k - \alpha_{k+1} = 0.$$

რადგან გალუას $\mathbb{F}_2$ ველში $\alpha_{k+1} = -\alpha_{k+1}$ (იხ. (28.3)), ამიტომ

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} = 0. \tag{28.4}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ მიღებული v^* სიტყვის კოორდინატების ჯამი არ იქნება 0-ის ტოლი (ე.ი. v^* სიტყვაში ერთიანების რიცხვი არ იქნება ლუწი), ეს იმის მანიშნებელი იქნება, რომ სიტყვა მიღებულია შეცდომით. ამის გამო აღნიშნულ კოდს ეწოდება *ლუწობის შემამოწმებელი კოდი.*

(28.4)-დან გამომდინარეობს, რომ მოცემული კოდის ყველა კოდურ სიტყვათა V სიმრავლე ემთხვევა წრფივი ერთგვაროვანი

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1} = 0 \tag{28.5}$$

განტოლების ამონახსნთა სიმრავლეს $\mathbb{F}_2$ ველში, და ეს სიმრავლე, როგორც ცნობილია (იხ. §2), წარმოადგენს $\mathbb{F}_2^{k+1}$ ვექტორული სივრცის წრფივ ქვესივრცეს.

2. წრფივი კოდი. კოდის სიგრძე და განზომილება. წინა პუნქტში განხილული კოდი შორსაა სრულყოფისაგან, რადგან ორი და, საერთოდ, ლუწი რაოდენობის შეცდომის შემთხვევაში შემამოწმებელი (28.4) ტოლობა მაინც სრულდება. ამის გარდა, შეცდომის აღმოჩენის შემთხვევაშიც ვერ დადგინდება, რომელ სიმბოლოშია დაშვებული შეცდომა. ამით არის განპირობებული უფრო რთული კოდების შემოღების აუცილებლობა, რომლებშიც მონაწილეობს არა ერთი, არამედ რამდენიმე შემამოწმებელი სიმბოლო. ამის შესაბამისად, წრფივი ერთგვაროვანი (28.5) განტოლება

იცვლება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{28.6}$$

სისტემით, სადაც $m = n-k$ $(n > k)$, $a_{ij} \in \mathbb{F}_q$ $(i=1,2,\dots,n-k;$ $j=1,2,\dots,n)$.

ამ სისტემის $(n-k)\times n$ განზომილების

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება კოდის შემამოწმებელი მატრიცა. პირობის ძალით $\operatorname{rank} H = n-k$, ე.ი. სისტემის ყველა განტოლება დამოუკიდებელია. შესაბამისი კოდის კოდურ სიტყვათა V სიმრავლე (ან, რაც იგივეა, (28.6) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე) არის $\mathbb{F}_q^n$ ვექტორული სივრცის k-განზომილებიანი ქვესივრცე (იხ. (8.2)). V სიმრავლეს ეწოდება *წრფივი* $(n;k)$ *კოდი* $\mathbb{F}_q$ *ველზე*. n-ს ეწოდება კოდის *სიგრძე*, ხოლო k რიცხვს – კოდის განზომილება. თუ $q=2$, კოდს ეწოდება ბინარული (ორობითი).

მაგალითად, ლუწობის შემამოწმებელი კოდი არის ბინარული $(n; n-1)$ კოდი, რომლის შემამოწმებელი მატრიცა არის $1\times n$ განზომილების

$$H = [1\ 1\ \dots\ 1\ 1]$$

მატრიცა ელემენტებით $\mathbb{F}_2$ ველში.

კოდს, რომლის შემამოწმებელი მატრიცაა

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

ეწოდება *სისტემური კოდი*. ცხადია, რომ ლუწობის შემამოწმებელი კოდი არის სისტემური კოდი.

განვიხილოთ სისტემური კოდის კიდევ ერთი მაგალითი, რომელიც შეიცავს მხოლოდ ერთ საინფორმაციო α_1 სიმბოლოს და $n-1$ შემამოწმებელ $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ სიმბოლოს (ე.ი. არის $(n;1)$ კოდი), სადაც $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_n = \alpha_1$. ამრიგად, საინფორმაციო α_1 სიმბოლო მეორდება კიდევ $(n-1)$-ჯერ, რის გამოც ასეთ კოდს ეწოდება *კოდი გამეორებით*. ამ კოდის შემამოწმებელი მატრიცაა

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

3. კოდის წარმომქმნელი მატრიცა. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, წრფივი $(n;k)$ კოდის კოდურ სიტყვათა V სიმრავლე წარმოადგენს $\mathbb{F}_q^n$ ვექტორული სივრცის k-განზომილებიან ქვესივრცეს. ვთქვათ,

$$\begin{array}{l} e_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1n}) \\ e_2 = (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2n}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_k = (\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \dots, \gamma_{kn}) \end{array} \tag{28.7}$$

V სივრცის ერთ-ერთი ბაზისია ((28.6) ერთგვაროვანი სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა). განვიხილოთ ამ ბაზისის ვექტორების კოორდინატებისაგან შედგენილი მატრიცა

$$G = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \cdots & \gamma_{kn} \end{bmatrix}. \tag{28.8}$$

ერთგვაროვანი (28.6) სისტემის ნებისმიერი ამონახსნი (ე.ი. კოდური v სიტყვა) წარმოადგენს (28.7) ვექტორების წრფივ კომბინაციას, ე.ი.

$$v = \alpha_1(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1n}) + \alpha_2(\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2n}) + \cdots + \\ + \alpha_k(\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{kn}). \tag{28.9}$$

ჩავწეროთ (28.9) ტოლობა მატრიცული სახით

$$v = uG, \tag{28.10}$$

სადაც $v = [\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n]$, $u = [\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k]$.

(28.10) ფორმულის საშუალებით ხდება შეტყობინების კოდირება, ე.ი. გადასაცემი $u = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ სიტყვა იცვლება კოდური $v = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ სიტყვით. ამის გამო (28.8) ტოლობით განსაზღვრულ G მატრიცას ეწოდება კოდის *წარმომქმნელი მატრიცა*.

სავარჯიშო 28.1. ვთქვათ,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{28.11}$$

არის წრფივი ბინარული $(7;4)$ კოდის შემამოწმებელი მატრიცა. ვიპოვოთ ამ კოდის წარმომქმნელი მატრიცა.

∇ შემამოწმებელი H მატრიცის საშუალებით (28.6)-ის მიხედვით შევადგინოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემა

$$\begin{cases} \qquad\qquad\quad x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 \qquad + \qquad x_6 + x_7 = 0 \\ x_1 \quad + \quad x_3 \quad + \quad x_5 \quad + \quad x_7 = 0. \end{cases} \tag{28.12}$$

H მატრიცის ბოლო სამი სვეტისაგან შედგენილი მინორი წარმოადგენს ამ მატრიცის ბაზისურ მინორს. ამის შესაბამისად გვექნება

$$\begin{cases} x_5 + x_6 + x_7 = -x_4 \\ \qquad x_6 + x_7 = -x_2 - x_3 \\ x_5 \quad + \quad x_7 = -x_1 - x_3. \end{cases} \tag{28.13}$$

$\mathbb{F}_2$ ველის ნებისმიერი a ელემენტისათვის (იხ. (1.7) და (1.8))

$$-a = a, \quad 2a = a + a = 0, \quad 3a = 2a + a = a, \tag{28.14}$$

ამიტომ (28.13) სისტემიდან მივიღებთ

$$\begin{cases} x_5 + x_6 + x_7 = x_4 \\ \qquad x_6 + x_7 = x_2 + x_3 \\ x_5 \quad + \quad x_7 = x_1 + x_3. \end{cases} \tag{28.15}$$

აქ x_1, x_2, x_3, x_4 თავისუფალი უცნობებია. (28.15) სისტემის მეორე და მესამე განტოლებებს მივუმატოთ პირველი

$$\begin{cases} x_5 \ + \ x_6 \ + \ x_7 \ = x_4 \\ x_5 + 2x_6 + 2x_7 = x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_5 + x_6 + 2x_7 = x_1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

(28.14)-ის გათვალისწინებით აქედან მივიღებთ

$$\begin{cases} x_5 + x_6 + x_7 = x_4 \\ x_5 \qquad\qquad\quad = x_2 + x_3 + x_4 \\ \qquad x_6 \qquad\; = x_1 + x_3 + x_4. \end{cases} \tag{28.16}$$

(28.16) სისტემის პირველ განტოლებას დავუმატოთ მეორე და მესამე განტოლებების ჯამი

$$\begin{cases} \qquad\qquad x_7 = x_1 + x_2 + x_4 \\ x_5 \qquad\qquad = x_2 + x_3 + x_4 \\ \qquad x_6 \qquad = x_1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

თუ თავისუფალ x_1, x_2, x_3, x_4 უცნობებს მივანიჭებთ ნებისმიერ $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $x_3 = \alpha_3$, $x_4 = \alpha_4$ მნიშვნელობებს $\mathbb{F}_2$ ველიდან, მივიღებთ (28.12) სისტემის ამონახსნს

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \qquad \alpha_2 \\ x_3 = \qquad\qquad \alpha_3 \\ x_4 = \qquad\qquad\qquad \alpha_4 \\ x_5 = \qquad \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \\ x_6 = \alpha_1 \quad + \quad \alpha_3 + \alpha_4 \\ x_7 = \alpha_1 + \alpha_2 \quad + \quad \alpha_4. \end{cases} \tag{28.17}$$

ამრიგად, V სივრცის ბაზისი (ე.ი. (28.12) სისტემის ამონახსნთა ფუნდამენტური სისტემა) შედგება

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,0,1,1) \\ e_2 &= (0,1,0,0,1,0,1) \\ e_3 &= (0,0,1,0,1,1,0) \\ e_4 &= (0,0,0,1,1,1,1) \end{aligned}$$

ვექტორებისაგან (იხ. მაგალითი 8.2). ამის მიხედვით აიგება კოდის წარმომქმნელი

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28.18}$$

მატრიცა. $\square$

სავარჯიშო 28.2. იპოვეთ $u = (1000)$ სიტყვის შესაბამისი კოდური v სიტყვა წინა სავარჯიშოში მოცემული ბინარული $(7;4)$ კოდის შემთხვევაში.

∇ (28.10) ფორმულის თანახმად

$$v = uG = [1\ 0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1],$$

ე.ი. $v = (1000011)$. ამ კოდურ სიტყვაში პირველი ოთხი სიმბოლო საინფორმაციოა, ხოლო დანარჩენი სამი – შემამოწმებელი. $\square$

4. ჰემინგის მანძილი და ჰემინგის კოდი. ვთქვათ, x და y არის $\mathbb{F}_q^n$ ვექტორული სივრცის ორი ვექტორი. $d(x,y)$-ით აღვნიშნოთ $x - y$ ვექტორის არანულოვანი კოორდინატების რიცხვი (ე.ი. x და y ვექტორების განსხვავებული კოორდინატების რაოდენობა). ამ $d(x,y)$ რიცხვს ეწოდება *ჰემინგის მანძილი* x და y ვექტორებს შორის. ისევე, როგორც $\mathbb{R}^n$ სივრცის შემთხვევაში (იხ. §4). $d(\cdot,\cdot)$ არის მეტრიკა $\mathbb{F}_q^n$ სივრცეში.

ვთქვათ, ℓ ნებისმიერი ნატურალური რიცხვია. ვიტყვით, რომ $V \subset \mathbb{F}_q^n$ *წრფივი კოდი ასწორებს* ℓ *შეცდომას*, თუ $\mathbb{F}_q^n$ სივრცის ნებისმიერი y ვექტორისათვის მოიძებნება არა უმეტეს ერთი

კოდური $v \in V$ სიტყვისა, რომლისთვისაც

$$d(y, v) \leq \ell. \tag{28.19}$$

ვთქვათ, კოდური v სიტყვის გადაცემისას მივიღეთ v^* სიტყვა, რომელშიც დაშვებულია ℓ ან ნაკლები შეცდომა, ე.ი.

$$v^* \neq v, \quad d(v, v^*) \leq \ell.$$

თუ კოდი ასწორებს ℓ შეცდომას, ასეთი v^* სიტყვა არ უნდა ეკუთვნოდეს კოდურ სიტყვათა V სიმრავლეს, რასაც უზრუნველყოფს ზემოთ აღნიშნული პირობა: $v^* \in V$ შემთხვევაში $y = v^*$ სიტყვისათვის ($\mathbb{F}_q^n$ სივრცის ელემენტისათვის) იარსებებს ორი კოდური სიტყვა v და v^*, რომლისთვისაც სრულდება (28.19) უტოლობა. ამავე დროს, ნებისმიერი კოდური $w \neq v$ სიტყვისათვის $d(v^*, w) > \ell$, ამიტომ v არის v^*-თან ყველაზე ახლოს მდგომი კოდური სიტყვა, ე.ი. v^*-ის დეკოდირება უახლოეს სიტყვამდე იძლევა სწორ შედეგს.

ამრიგად, კოდირების თეორიის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ისეთი კოდების აგება, რომლებისთვისაც კოდური სიტყვები განლაგებულია ერთმანეთისაგან რაც შეიძლება მეტ მანძილზე.

$$d_V = \min_{\substack{x, y \in V \\ x \neq y}} d(x, y)$$

რიცხვს ეწოდება V კოდის *ჰემინგის მინიმალური მანძილი* (ანუ, უბრალოდ, *მანძილი*). აღვნიშნოთ, რომ ნებისმიერი წრფივი V კოდისათვის სრულდება

$$d_V \geq 2\ell + 1. \tag{28.20}$$

უტოლობა. მაგალითად, თუ კოდის მინიმალური მანძილი $d_V = 3$, მაშინ $\ell = 1$, ე.ი. კოდი ასწორებს ერთ შეცდომას.

სასარგებლოა აგრეთვე თანაფარდობა, რომელიც აკავშირებს ერთმანეთთან კოდის მინიმალურ d_V მანძილს კოდის შემამოწმებელი H მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების რაოდენობასთან: თუ H მატრიცის ნებისმიერი s სვეტი წრფივად დამოუკიდებელია, მაშინ

$$d_V \geq s+1. \tag{28.21}$$

ვთქვათ, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$. განვიხილოთ x ვექტორი როგორც სტრიქონ-მატრიცა და ჩავწეროთ (28.6) სისტემა მატრიცული ფორმით

$$Hx^\top = 0, \tag{28.22}$$

სადაც

$$x^\top = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$Hx^\top$ სვეტ-მატრიცას ეწოდება x *ვექტორის სინდრომი* და აღინიშნება $S(x)$ სიმბოლოთი

$$S(x) = Hx^\top.$$

(28.22)-დან გამომდინარეობს, რომ კოდური სიტყვის სინდრომი ნულის ტოლია (ანუ, თუ $S(x) \neq 0$, მაშინ x არ არის კოდური სიტყვა).

$Hv^\top = 0$ და $v = uG$ ტოლობებიდან (იხ. (28.10)) გამომდინარეობს, რომ კოდის შემამოწმებელი და წარმომქმნელი მატრიცები დაკავშირებულია ერთმანეთთან ტოლობით

$$GH^\top = 0.$$

ვთქვათ, გადაიცა კოდური სიტყვა $v = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, ხოლო მიღებულია სიტყვა $v^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_n^*)$.

$$\delta = v^* - v = (\beta_1^* - \beta_1,\ \beta_2^* - \beta_2, \dots, \beta_n^* - \beta_n)$$

ვექტორს ეწოდება შეცდომის ვექტორი. რადგან $v \in V$ კოდური სიტყვაა, ამიტომ $S(v) = 0$ და შესაბამისად

$$S(\delta) = S(v^* - v) = S(v^*) - S(v) = S(v^*) - 0 = S(v^*),$$

ე.ი. შეცდომის ვექტორის სინდრომი მიღებული v^* სიტყვის სინდრომის ტოლია.

ვთქვათ, V ბინარული $(n; k)$ კოდია, რომლის შემამოწმებელი მატრიცაა

$$H = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (m = n - k, \quad a_{ij} \in \mathbb{F}_x).$$

შეცდომის ვექტორის $S(\delta)$ სინდრომი გადავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned} S(\delta) = H\delta^\top = &\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \\ &= \delta_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \delta_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + \delta_n \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \\ &= \delta_1 h_1 + \delta_2 h_2 + \dots + \delta_n h_n, \end{aligned} \tag{28.23}$$

სადაც h_i არის H მატრიცის i-ური სვეტი $(i = 1, 2, \ldots, n)$. რადგან $\delta_i \in \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, ამიტომ (28.23)-დან გამომდინარეობს, რომ შეცდომის ვექტორის (და, მაშასადამე, მიღებული v^* სიტყვის) სინდრომი H მატრიცის იმ h_i სვეტების ჯამის ტოლია, რომელთა ინდექსები ემთხვევა შეცდომით მიღებული სიმბოლოების ნომრებს. მაგალითად, თუ შეცდომით მიღებულია პირველი, მეორე და მეოთხე სიმბოლო, მაშინ $\delta_1 = \delta_2 = \delta_4 = 1$, ხოლო დანარჩენი $\delta_i = 0$, ამიტომ

$$S(v^*) = S(\delta) = h_1 + h_2 + h_4.$$

აღნიშნული ფაქტიდან გამომდინარეობს, რომ თუ H მატრიცის ყველა სვეტი ერთმანეთისაგან განსხვავებულია, მაშინ *ერთი შეცდომის შემთხვევაში მიღებული სიტყვის სინდრომი ემთხვევა შემამოწმებელი მატრიცის იმ სვეტს, რომლის ინდექსი უდრის შეცდომით მიღებული სიმბოლოს ნომერს*:

$$S(v^*) = h_i \Longrightarrow \text{შეცდომით მიღებულია } i\text{-ური სიმბოლო } \beta_i.$$

განვიხილოთ ასეთი კოდის მაგალითი. ვთქვათ, $m \geq 2$ ნატურალური რიცხვია. ავიღოთ $m \times (2^m - 1)$ განზომილების H მატრიცა, რომლის თითოეული h_i სვეტი წარმოადგენს i რიცხვის ჩაწერას ორობით სისტემაში $(i = 1, 2, \ldots, 2^m - 1)$. მაგალითად, $m = 3$ შემთხვევაში

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$h_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_7 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

და, ამის შესაბამისად, H არის 3×7 განზომილების შემდეგი მატ-რიცა

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ბინარულ კოდს, რომლის შემამოწმებელ მატრიცას აქვს ზემოთ აღნიშნული სახე, ეწოდება *ჰემინგის კოდი*. ჰემინგის კოდი არის $2^m - m - 1$ განზომილების კოდი, რომელიც ასწორებს ერთ შეცდომას.

28.1 სავარჯიშოდან გამომდინარეობს, რომ $m = 3$ შემთხვევაში ჰემინგის კოდის წარმომქმნელი მატრიცაა

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

სავარჯიშო 28.3. ვთქვათ, ჰემინგის კოდში $m = 3$ და მიღებულია სიტყვა $v^* = (1100011)$. დავამტკიცოთ, რომ მიღებულ სიტყვაში არის შეცდომა და შევასწოროთ იგი.

∇ ვიპოვოთ v^* სიტყვის სინდრომი

$$S(v^*) = H(v^*)^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1+1+1 \\ 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

რადგან $S(v^*) \neq 0$, ამიტომ v^* სიტყვაში არის შეცდომა. ჩავთვალოთ, რომ v^* სიტყვაში ერთი შეცდომაა. რადგან ამ სიტყვის $S(v^*)$ სინდრომი ემთხვევა H მატრიცის მეორე სვეტს, შეცდომით არის მიღებული $v^* = (1100011)$ სიტყვის მეორე ადგილზე მდგომი რიცხვი 1. ამ შეცდომის შესწორების შემდეგ მივიღებთ კოდურ სიტყვას $v = (1000011)$. $\square$

§29. წრფივი მოდულარული სისტემები

სრული დეტერმინირებული სისტემა (ანუ *სასრული ავტომატი*) შეიძლება დავახასიათოთ როგორც მოწყობილობა, რომელსაც აქვს შემავალი და გამომავალი არხები და რომელიც დროის ყოველ დისკრეტულ მომენტში იმყოფება ერთ-ერთ ფიქსირებულ მდგომარეობაში. შემავალი არხით დროის ყოველ ასეთ მომენტში მოწყობილობაში შედის გარკვეული სიგნალი, რის მიხედვითაც იცვლება მოწყობილობის მდგომარეობა და გამომავალ არხზე წარმოიშობა გარკვეული სიგნალი.

ვთქვათ, U, S, V სასრული არაცარიელი სიმრავლეებია, ხოლო

$$\omega_1 : S \times U \to S, \quad \omega_2 : S \times U \to V$$

ნებისმიერი ფუნქციებია. ასეთ სიმრავლეთა და ფუნქციათა

$$M = \{U, S, V, \omega_1, \omega_2\}$$

ერთობლიობას *სრული დეტერმინირებული სისტემა მდგომარეობათა სასრული რაოდენობით* ანუ *სასრული ავტომატი* ეწოდება. U-ს ეწოდება *შემავალ სიმბოლოთა სიმრავლე*, V-ს – *გამომავალ*

სიმბოლოთა სიმრავლე, S-ს – *მდგომარეობის სიმბოლოთა სიმრავლე*, ხოლო ω_1 და ω_2 ფუნქციებს – შესაბამისად *გადასვლის* და *გამოსასვლელის ფუნქციები*. თუ ცნობილია სისტემის $s(t) \in S$ მდგომარეობა და $u(t) \in U$ შემავალი სიმბოლო დროის t მომენტში (t – მთელი რიცხვია), მაშინ მისი $s(t+1) \in S$ მდგომარეობა დროის მომდევნო $t+1$ მომენტში და $v(t) \in V$ გამომავალი სიმბოლო დროის t მომენტში განისაზღვრება ω_1 და ω_2 ფუნქციების საშუალებით:

$$s(t+1) = \omega_1(s(t), u(t)), \tag{29.1}$$

$$v(t) = \omega_2(s(t), u(t)). \tag{29.2}$$

მაგალითი 29.1. ვთქვათ, $U = V = \{0, 1\}$, $S = \{s_0, s_1\}$, ხოლო ω_1 და ω_2 ფუნქციები მოიცემა 29.1 ცხრილით. გაარჩიეთ, როგორ იმუშავებს $M = \{U, S, V, \omega_1, \omega_2\}$ ავტომატი, რომელიც იმყოფება s_0 საწყის მდგომარეობაში, თუ მის შესასვლელზე მივაწოდებთ $(0, 1, 1)$ მიმდევრობას.

$S \times U$	ω_1	ω_2
$(s_0, 0)$	s_0	1
$(s_0, 1)$	s_1	0
$(s_1, 0)$	s_1	0
$(s_1, 1)$	s_0	0

ცხრილი 29.1

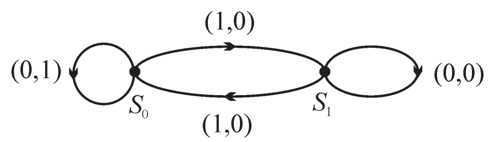
∇ ავტომატი ჯერ ამოიკითხავს მოცემული (0,1,1) მიმდევრობის პირველ სიმბოლოს 0-ს, გამოსასვლელზე ამობეჭდავს 1-ს (რადგან $\omega_2(s_0, 0) = 1$) და დარჩება ისევ s_0 მდგომარეობაში (რადგან $\omega_1(s_0, 0) = s_0$). შემდეგ ავტომატი ამოიკითხავს მოცემული მიმდევრობის მეორე სიმბოლოს 1-ს, გამოსასვლელზე ამობეჭდავს 0-ს ($\omega_2(s_0, 1) = s_1$) და გადავა s_1 მდგომარეობაში

$(\omega_1(s_0,1) = s_1)$. საბოლოოდ, როცა ავტომატი ამოიკითხავს (0,1,1) მიმდევრობის უკანასკნელ სიმბოლოს 1-ს, ის გამოსასვლელზე ამობეჭდავს 0-ს $(\omega_2(s_1,1) = 0)$ და დაბრუნდება s_0 მდგომარეობაში $(\omega_1(s_1,1) = s_0)$. ამრიგად, ამტომატი (0,1,1) მიმდევრობას გარდაქმნის (1,0,0) მიმდევრობაში და დარჩება s_0 მდგომარეობაში. $\square$

სავარჯიშო 29.2. აჩვენეთ, რომ თუ წინა სავარჯიშოში მოცემული M ავტომატის საწყისი მდგომარეობა არის s_1, მაშინ (0,1,1) მიმდევრობას ეს ავტომატი გარდაქმნის (0,0,0) მიმდევრობაში და დარჩება s_1 მდგომარეობაში.

ავტომატი შეიძლება აღიწეროს ორიენტირებული გრაფის საშუალებით (ე.წ. *მურის დიაგრამებით*). ამ გრაფის წვეროები აღინიშნება ავტომატის $s_0, s_1, \ldots, s_n$ მდგომარეობათა სიმბოლოებით. ყოველი რკალი, რომელიც გამოდის s_i წვეროდან და უერთდება s_j წვეროს, აღინიშნება (u, v) წყვილით, სადაც $u \in U$ არის ის შესასვლელი სიმბოლო, რომელიც იწვევს s_i მდგომარეობიდან s_j მდგომარეობაში გადასვლას (ე.ი. $\omega_1(s_i, u) = s_j$), ხოლო $v \in V$ შესაბამისი გამოსასვლელი სიმბოლოა (ე.ი. $\omega_2(s_i, u) = v$).

მაგალითად, ზემოთ განხილული ავტომატის გრაფს აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 29.2):



ნახ. 29.2

იმ შემთხვევაში, როცა U, S, V ვექტორული სივრცეებია სასრულ $\mathbb{F}_q$ველზე, ხოლო ω_1 და ω_2 – წრფივი ასახვებია, $M =$

$\{U, S, V, \omega_1, \omega_2\}$ ავტომატს ეწოდება *წრფივი ავტომატი* ანუ *წრფივი მოდულარული სისტემა*. ω_1 და ω_2 წრფივი ასახვების მოცემა შესაძლებელია მატრიცების საშუალებით. თუ

$$\dim S = n, \quad \dim U = k, \quad \dim V = m,$$

ხოლო

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times k}, \quad C = [c_{ij}]_{m \times n}, \quad D = [d_{ij}]_{m \times k}$$

ნებისმიერი მატრიცებია $\mathbb{F}_q$ ველზე $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{F}_q)$, მაშინ ω_1 და ω_2 ფუნქციების მნიშვნელობები (იხ. (29.1) და (29.2)) განისაზღვრება მატრიცული ტოლობებით

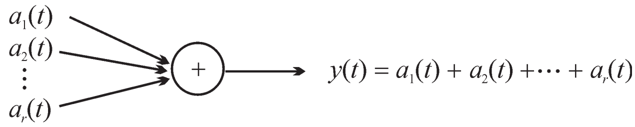
$$s(t+1) = A \cdot s(t) + B \cdot u(t), \tag{29.3}$$

$$v(t) = C \cdot s(t) + D \cdot u(t), \tag{29.4}$$

სადაც $s(t) \in \mathbb{F}_q^n$, $u(t) \in \mathbb{F}_q^k$, $v(t) \in \mathbb{F}_q^m$ ვექტორები ჩაწერილია სვეტ-მატრიცების სახით. A, B, C და D მატრიცებს ეწოდება *წრფივი მოდულარული სისტემის მახასიათებელი მატრიცები*.

წრფივი მოდულარული სისტემის პრაქტიკული რეალიზაცია შესაძლებელია ელექტრონული სქემის საშუალებით, რომელშიც შედის სუმატორი, მაძლიერებელი და დაყოვნების ელემენტი.

სუმატორს აქვს რამდენიმე შესასვლელი $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_r(t) \in \mathbb{F}_q$ და ერთადერთი გამოსასვლელი $y(t) = a_1(t) + a_2(t) + \cdots + a_r(t)$ (ნახ. 29.3).



ნახ. 29.3

მაძლიერებელს, რომელიც შეესაბამება $\alpha \in \mathbb{F}_q$ ელემენტს, აქვს ერთი შესასვლელი $a(t) \in \mathbb{F}_q$ და ერთი გამოსასვლელი $y(t) = \alpha a(t)$ (ნახ. 29.4).

ნახ. 29.4

დაყოვნების ელემენტს აქვს ერთი შესასვლელი $a(t) \in \mathbb{F}_q$ და ერთი გამოსასვლელი $y(t) = a(t-1)$ (ნახ. 29.5).

ნახ. 29.5

სავარჯიშო 29.3. ვთქვათ, წრფივი მოდულარული $M = \{U, S, V, \omega_1, \omega_2\}$ სისტემის მახასიათებელი მატრიცებია ($\mathbb{F}_3$ ველზე)

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{29.5}$$

წარმოვადგინოთ მოდულარული სისტემის რეალიზაცია სქემის სახით.

∇ (29.5)-ის შესაბამისად $n = 3$, $k = m = 2$. ვთქვათ, დროის t მომენტში სისტემა იმყოფებოდა

$$s(t) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_3^3$$

მდგომარეობაში და შესასვლელზე მივაწოდეთ

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_3^2$$

სიგნალი. მაშინ (29.4)-ის თანახმად, გამოსასვლელზე მიიღება

$$v(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 + s_3 + 2u_2 \\ 2s_2 + u_1 \end{bmatrix},$$

ხოლო დროის მომდევნო მომენტში, როგორც ეს გამომდინარეობს (29.3)-დან, სისტემა გადავა

$$s(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 + 2s_3 + 2u_2 \\ 2s_2 + u_2 \\ s_1 + 2s_3 + 2u_1 \end{bmatrix}$$

მდგომარეობაში.

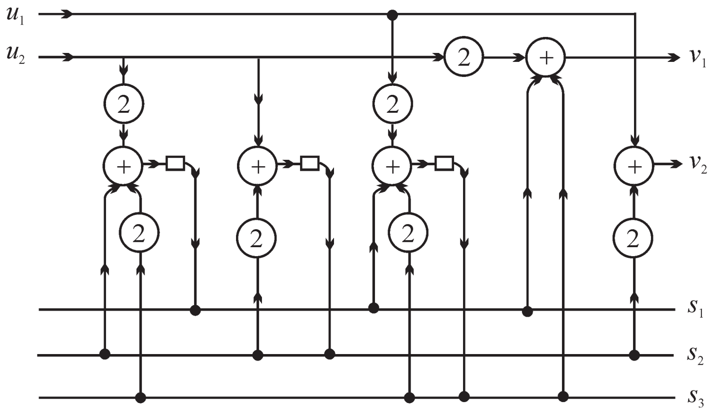
ამრიგად, თუ მოცემული წრფივი მოდულარული სისტემა დროის მოცემულ მომენტში იმყოფება $s(t) = (s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{F}_3^3$ მდგომარეობაში, მაშინ ის $u(t) = (u_1, u_2) \in \mathbb{F}_3^2$ ვექტორს გარდაქმნის $v(t) = (v_1, v_2) \in \mathbb{F}_3^2$ ვექტორში, სადაც

$$v_1 = s_1 + s_3 + 2u_2, \quad v_2 = 2s_2 + u_1.$$

დროის მომდევნო მომენტში იგი გადავა $s(t+1) = (s_1', s_2', s_3')$ მდგომარეობაში, სადაც

$$s_1' = s_2 + 2s_3 + 2u_2, \quad s_2' = 2s_2 + u_2, \quad s_3' = s_1 + 2s_3 + 2u_1.$$

შესაბამისი სქემა მოცემულია 29.6 ნახაზზე. $\square$



ნახ. 29.6

შევნიშნოთ, რომ სუმატორების, მაძლიერებლების და დაყოვნების ელემენტების შემცველი ყოველი სქემა შეიძლება წარმოვადგინოთ წრფივი მოდულარული სისტემის სახით (იმ პირობით, რომ ყოველი შეკრული კონტური შეიცავს დაყოვნების ელემენტს).

ამოცანები და სავარჯიშოები

V.1. დაწერეთ u სიტყვის შესაბამისი კოდური v სიტყვა ლუწობის შემამოწმებელი კოდის შემთხვევაში:

ა) $u = (00101)$; ბ) $u = (01010)$;

გ) $u = (01110)$; დ) $u = (11011)$.

V.2. ლუწობის შემამოწმებელი კოდის შემთხვევაში მიღებული v^* სიტყვის მიხედვით გამოარკვიეთ, რომელ მათგანში არის დაშვებული შეცდომა:

ა) $v^* = (010011)$; ბ) $v^* = (100111)$;

გ) $v^* = (001110)$; დ) $v^* = (010101)$.

V.3. დაწერეთ u სიტყვის შესაბამისი კოდური v სიტყვა, თუ V არის კოდი განმეორებით ($n = 5$): ა) $u = (1)$; ბ) $u = (0)$.

V.4. იპოვეთ u სიტყვის შესაბამისი კოდური v სიტყვა ჰემინგის კოდის შემთხვევაში:

ა) $u = (1001)$; ბ) $u = (1101)$; გ) $u = (0101)$; დ) $u = (0111)$.

V.5. იპოვეთ შეცდომის δ ვექტორი, თუ

ა) $v = (1000110)$, $v^* = (1001001)$;

ბ) $v = (1110001)$, $v^* = (1110001)$;

გ) $v = (0111100)$, $v^* = (0101100)$;

დ) $v = (1110000)$, $v^* = (1010101)$.

V.6. მიღებული v^* სიტყვის მიხედვით გამოარკვიეთ, რომელ მათგანში არის დაშვებული შეცდომა და შეასწორეთ იგი:

ა) $v^* = (1001110)$; ბ) $v^* = (1111001)$;

გ) $v^* = (0001110)$; დ) $v^* = (0101011)$.

V.7. $U = V = \{0, 1\}$, $S = \{s_0, s_1\}$ და ω_1, ω_2 ფუნქციები მოიცემა ქვემოთ მოყვანილი ცხრილებით. რაში გადაიყვანს $M = \{U, S, V, \omega_1, \omega_2\}$ ავტომატი u მიმდევრობას, თუ დროის საწყის

მომენტში ის იმყოფება s_0 მდგომარეობაში:

$S\times U$	ω_1	ω_2
$(s_0,0)$	s_0	0
$(s_0,1)$	s_0	1
$(s_1,0)$	s_1	0
$(s_1,1)$	s_0	0

$u=(0,1);$

ა)

$S\times U$	ω_1	ω_2
$(s_0,0)$	s_1	0
$(s_0,1)$	s_0	0
$(s_1,0)$	s_0	1
$(s_1,1)$	s_1	1

$u=(1,0);$

ბ)

$S\times U$	ω_1	ω_2
$(s_0,0)$	s_0	0
$(s_0,1)$	s_1	1
$(s_1,0)$	s_0	0
$(s_1,1)$	s_1	1

$u=(1,1,1);$

გ)

$S\times U$	ω_1	ω_2
$(s_0,0)$	s_0	1
$(s_0,1)$	s_0	0
$(s_1,0)$	s_0	0
$(s_1,1)$	s_1	1

$u=(0,0,1,0).$

დ)

V.8. A, B, C, D მატრიცები წარმოადგენს წრფივი მოდულარული $M=\{U,S,V,\omega_1,\omega_2\}$ სისტემების მახასიათებელ მატრიცებს ($\mathbb{F}_2$ ველში). მოიყვანეთ ამ წრფივი მოდულარული სისტემის რეალიზაცია სქემის სახით:

ა) $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};$

ბ) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad D=[\,1\,].$

პასუხები

თავი I

I.1. ა) $A \times B = \{(0,0),(0,3),(1,0),(1,3)\}$,
$B \times A = \{(0,0),(0,1),(3,0),(3,1)\}$,
$A^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,
$B^3 = \{(0,0,0),(0,0,3),(0,3,0),(0,3,3),(3,0,0),(3,0,3),(3,3,0),(3,3,3)\}$,
$A \times B \times C = \{(0,0,4),(0,3,4),(1,0,4),(1,3,4)\}$.
ბ) $A \times B = \{(-1,1),(1,1)\}$, $B \times A = \{(1,1),(1,-1)\}$,
$A^2 = \{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}$,
$B^3 = \{(1,1,1)\}$,
$A \times B \times C = \{(-1,1,0),(-1,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$.
გ) $A \times B = \{(1,1),(2,1)\}$, $B \times A = \{(1,1),(1,2)\}$,
$A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, $B^3 = \{(1,1,1)\}$,
$A \times B \times C = \{(1,1,2),(2,1,2)\}$.
დ) $A \times B = \{(0,1)\}$, $B \times A = \{(1,0)\}$, $A^2 = \{(0,0)\}$,
$B^3 = \{(1,1,1)\}$, $A \times B \times C = \{(0,1,1),(0,1,2)\}$.

I.2. ა) არა; ბ) კი; გ) კი; დ) კი; ე) არა; ვ) კი.

I.3. ა) $K_0 = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$; ბ) $K_1 = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$;
გ) $K_2 = \{3n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

I.4. ეკვივალენტობის მიმართებაა დ); დალაგების მიმართებაა ა), ზ) და ი).

I.5. ა) კი; ბ) კი; გ) კი; დ) კი; ე) არა; ვ) არა; ზ) არა.

I.6. ა) კი; ბ) კი; გ) კი; დ) კი; ე) კი; ვ) არა; ზ) არა.

I.7. ა) კი; ბ) კი; გ) კი; დ) არა; ე) კი; ვ) კი; ზ) არა.

I.8. შეიძლება ყველა შემთხვევაში, გარდა დ) შემთხვევისა.

I.9. ა) არა; ბ) კი; გ) კი; დ) კი; არც ერთი ოპერაცია არ არის არც კომუტაციური, არც ასოციაციური.

I.10. ა) კი; ბ) კი; გ) არა.

I.11. ა) კი; ბ) კი; გ) კი.

I.12. ა) კი; ბ) კი; გ) კი; დ) კი.

I.13. კომუტაციური ჯგუფებია ა), გ), დ), ზ), ი), კ), ლ), ნ), პ), რ), ს), ტ); არაკომუტაციური ჯგუფია ო).

I.14. ა) არის, თუ $n = 2$; ბ) კი; გ) კი; დ) კი.

I.15. რგოლია (და არა ველი) ა), ბ), გ), ზ), ი), კ), ლ), მ), ნ); ველია დ), ე), ვ), თ), ო).

I.16. ა) კი, $a = 0$, $b = 1$; ბ) კი, $c = 0$, $b = 1$; გ) კი, $b = 0$, $a = 1$.

I.17.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

ა)

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ბ)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

გ)

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

დ)

I.18. ა) $(0,1)$; ბ) $(0,1,0)$; გ) $\varnothing$; დ) $(1,0,1,1)$, $(0,0,0,1)$; ე) $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,1)$; ვ) $\varnothing$.

I.19. წრფივი სივრცეა: ა), დ), ვ), ზ), თ), ი), კ), მ).

I.20. ა) კი; ბ) არა.

I.21. არა.

I.22. კი; $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.

I.26. კი.

I.27. ა) $|x| = 5$, $|y| = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;
ბ) $|x| = \sqrt{3}$, $|y| = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;
გ) $|x| = |y| = 3$, $\varphi = \arccos \frac{2\sqrt{3}-5}{9}$;
დ) $|x| = \sqrt{30}$, $|y| = 5$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

I.28. -25.

I.29. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}, \ \ x_i, y_i \in \mathbb{R}$.

I.30. ა) არა; ბ) კი; გ) არა; დ) არა; ე) არა; ვ) არა; ზ) არა; თ) არა.

I.31. ა) კი; ბ) არა; გ) არა; დ) კი.

I.32. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

I.33. კი.

I.34. ა) კი; ბ) კი.

I.35. კი.

I.36. კი.

I.42. $(15, 8, -2, 15)$.

I.43. კი, $x = 2a_1 - 3a_2 + 4a_3$.

I.44. ა) $(1, \frac{11}{2}, \frac{7}{2}, 5)$; ბ) $(\frac{13}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

I.45. ა) არა; ბ) კი; გ) არა; დ) კი; ე) არა; ვ) კი; ზ) კი; თ) არა; ი) კი.

I.46. ა) $x = 3e_1 + 2e_2$; ბ) $x = 3e_1 - e_2$; გ) $x = -e_1 + 2e_2$; დ) $x = e_1 - 5e_2$.

I.47. ა) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$; ბ) $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$;
გ) $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; დ) $\vec{d} = \vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

I.48. $t \neq \pm 1$.

I.49. ა) $\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$; ბ) ნებისმიერი ორი ვექტორი;

გ) $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$; დ) ნებისმიერი სამი ვექტორი, გარდა $\{a_1, a_2, a_3\}$ და $\{a_1, a_4, a_5\}$.

I.50. $\{a_2, a_3, a_4\}$, $a_1 = a_2 - a_3$.

I.56. ა) კი; ბ) არა; გ) კი; დ) კი; ე) არა; ვ) არა; ზ) არა.

I.57. P_n სივრცე; $\dim P_n = n + 1$.

I.58. $P_2 : (4, -3, 2)$; $P_3 : (4, -3, 2, 0)$.

I.60. $(2, 2, 3)$.

I.63. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x^2 - 1 = (x+1)^2 - 2(x+1)$.

I.64. ა) $(-2, 3, -1)$; ბ) $(1, -1, 2)$; გ) $(2, 1, 0)$; დ) $(1, -1, 1)$; ე) $(-1, -1, -3)$; ვ) $(3, -2, 3)$; ზ) $(2, 2, -2)$; თ) $(-1, 1, 2)$.

I.65. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{3}{2}\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$.

I.66. ა) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $(-1, 2, -1)$;

ბ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $(-2, 1, 1)$;

გ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$,

$(1, -2\cos\varphi + \sin\varphi, 2\sin\varphi + \cos\varphi)$.

I.67. ა) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

I.68. $x_1 = dx'_4$, $x_2 = ax'_1$, $x_3 = bx'_2$, $x_4 = cx'_3$.

I.69. არა, რადგან $|A| = 0$.

I.70. ა) $v_1 = (1,1,1)$; $cv_1 = (c,c,c)$, $c \in \mathbb{R}$;
ბ) $v_1 = (0,1,1,0)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$; $c_1v_1 + c_2v_2 = (c_2, c_1 - c_2, c_1, 0)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
გ) $v_1 = (-2,1,0,0)$, $v_2 = (-3,0,1,0)$, $v_3 = (-4,0,0,1)$, $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = (-2c_1 - 3c_2 - 4c_3, c_1, c_2, c_3)$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$;
დ) $v_1 = (11,7,-5)$, $cv_1 = (11c, 7c, -5c)$, $c \in \mathbb{R}$.

I.71. ა) $(1,2,0) + (13c, 2c, 7c)$, $c \in \mathbb{R}$;
ბ) $(0,0,-\frac{2}{11},\frac{10}{11}) + (c_1, c_2, \frac{1}{11}c_1 - \frac{9}{11}c_2, -\frac{5}{11}c_1 + \frac{1}{11}c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
გ) $(0,0,-11,8) + (c_1, c_2, -33c_1 + 22c_2, 24c_1 - 16c_2)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;
დ) $(0,0,6,-7) + (c_1, c_2, 10c_1 - 15c_2, -12c_1 + 18c_2)$.

თავი II

II.1. ა) $\mathbf{A}x = (4,3,15)$; ბ) $\mathbf{A}x = (-7,1,7)$;
გ) $\mathbf{A}x = (5,-2,-1)$; დ) $\mathbf{A}x = (-13,8,-3)$.

II.1. ა) $x = (1,-1,2)$; ბ) $x = (-1,2,1)$;
გ) $x = (2,0,-1)$; დ) $x = (2,-1,1)$.

II.3. ა) კი, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; ბ) კი, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;
გ) არა; დ) არა; ე) კი, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

II.4. $(x_2 + x_4, x_1 + x_3, x_1 + x_4, x_2 + x_3)$.

II.5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

II.6. ა) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -8 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$;

გ) $\begin{bmatrix} -4 & 3 & -5 \\ -3 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$; დ) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

II.7. $\begin{bmatrix} 2 & -11 & 6 \\ 1 & -7 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

II.8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

II.9. ა) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ b & 0 & d & 0 \\ 0 & b & 0 & d \end{bmatrix}$.

II.10. არა.

II.11. როცა $x_0 = \theta$.

II.12. ა) კი; ბ) არა; გ) არა.

II.13. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

II.14. $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2,\ \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)x_2\right)$.

II.15. $(5x_1+5x_2+3x_3, 14x_1-14x_2+25x_3, 15x_1-10x_2+11x_3)$.

II.16. ა) $(x_1+x_2+2x_3, x_1+2x_2+x_3, 2x_1+x_2+x_3)$;

ბ) $(2x_1+x_2+x_3, x_1+x_2+2x_3, x_1+2x_2+x_3)$.

II.17. $(x_1\cos 2\varphi - x_2\sin 2\varphi, x_1\sin 2\varphi + x_2\cos 2\varphi)$.

II.18. $\begin{bmatrix} 44 & 44 \\ -29,5 & -25 \end{bmatrix}$.

II.19. $\begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -18 & 40 \end{bmatrix}$.

II.22. n^2.

II.23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

II.24. არა.

II.25. ა) თვითშეუღლებული; ბ) თვითშეუღლებული; გ) თვითშეუღლებული და ორთოგონალური; დ) ორთოგონალური; ე) ორთოგონალური; ვ) ორთოგონალური; ზ) ორთოგონალური.

II.26. ა) $\mathbf{A}^*x = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)$;

ბ) $\mathbf{A}^*x = (3x_1+4x_2-x_3, 2x_1+x_2+3x_3, -x_1+2x_2+x_3)$;

გ) $\mathbf{A}^*x = (-x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 + x_3)$;

დ) $\mathbf{A}^*x = (x_1-3x_2+x_3, -2x_1+2x_2+3x_3, 3x_1-x_2+2x_3)$.

II.27. ა) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$; ბ) $\begin{bmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{bmatrix}$.

II.28. ა) $D^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; ბ) $D^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

II.34. $\alpha = \pm 1$.

II.35. კი.

II.36. ა) $r_{\mathbf{A}} = 3$, $\ker \mathbf{A} = \{(0,0,0)\}$, $m = 0$;

ბ) $r_{\mathbf{A}} = 2$, $\ker \mathbf{A} = \{(2t, -3t, 5t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $m = 1$;

გ) $r_{\mathbf{A}} = 3$, $\ker \mathbf{A} = \{(31t, -9t, 5t, 16t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $m = 1$;

დ) $r_{\mathbf{A}} = 1$, $\ker \mathbf{A} = \{(-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $m = 1$;

ე) $r_{\mathbf{A}} = 2$, $\ker \mathbf{A} = \{(0,0)\}$, $m = 0$;

გ) $r_{\mathbf{A}} = 1$, $\ker \mathbf{A} = \{(-2t_1 + 3t_2, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$, $m = 2$.

II.37. ა) $x = (1,5,2)$; ბ) $x \in \varnothing$; გ) $\{(2t-1, t+1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$;
დ) $\{(14+t, -9-2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

II.39. ა) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $x = (t,t)$ $(t \neq 0)$;
ბ) $\lambda_1 = 1$, $x = (0,t)$ $(t \neq 0)$;
$\lambda_2 = 3$, $x = (2t,t)$ $(t \neq 0)$;
გ) $\lambda_1 = 5$, $x = (-2t,t)$ $(t \neq 0)$;
$\lambda_2 = 20$, $x = (t,2t)$ $(t \neq 0)$;
დ) $\lambda = 1$, $x = (t,0)$ $(t \neq 0)$;
ე) $\lambda = 3$, $x = (t_1,t_2)$ $(t_1^2 + t_2^2 \neq 0)$;
ვ) $\lambda = -1$, $x = (t,t,-t)$ $(t \neq 0)$;
ზ) $\lambda = 2$, $x = (t_1, 2t_1, t_2)$ $(t_1^2 + t_2^2 \neq 0)$;
თ) $\lambda = 1$, $x = (t,t,0)$ $(t \neq 0)$;
$\lambda = 3$, $x = (t,-t,0)$ $(t \neq 0)$;
ი) $\lambda_1 = 1$, $x = (t,t,0)$ $(t \neq 0)$;
$\lambda_2 = 3$, $x = (t,-t,0)$ $(t \neq 0)$.

II.40. $\lambda_1 = 1$, $x = (-t,t)$ $(t \neq 0)$;
$\lambda_2 = 13$, $x = (t,2t)$ $(t \neq 0)$.

II.41. $\lambda = 1$, $\vec{x} = c\vec{k}$ $(c \neq 0)$.

II.42. $\frac{1}{\lambda}$.

II.43. ა) $\lambda = \alpha$, $\vec{a}$ – ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორია;
ბ) $\lambda_1 = 1$, $\vec{a} = \alpha\vec{\imath}$, სადაც $\alpha \neq 0$; $\lambda_2 = 0$, $\vec{a} = \alpha\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$, სადაც $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$;
გ) $\lambda = 0$, $\vec{a} = \alpha\vec{\imath}$, სადაც $\alpha \neq 0$.

II.44. ა) $x'^2 + 6y'^2$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'); \end{cases}$

ბ) $10x'^2$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'); \end{cases}$

გ) $x'^2 + 3y'^2$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'); \end{cases}$

დ) $x'^2 + 14y'^2$, $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x' + y'), \\ y = \frac{1}{2}(-x' + y'); \end{cases}$

ე) $3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2$, $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(2x' - y' + 2z'), \\ y = \frac{1}{3}(2x' + 2y' - z'), \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2y' + 2z'); \end{cases}$

ვ) $7x'^2 + 7y'^2 - 2z'^2$.

თავი III

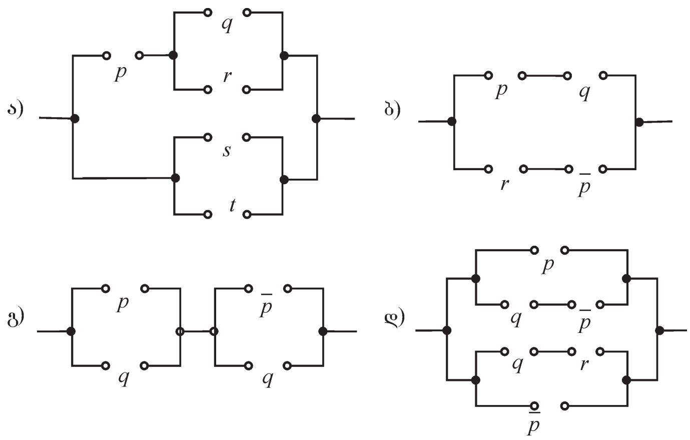
III.1.

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1

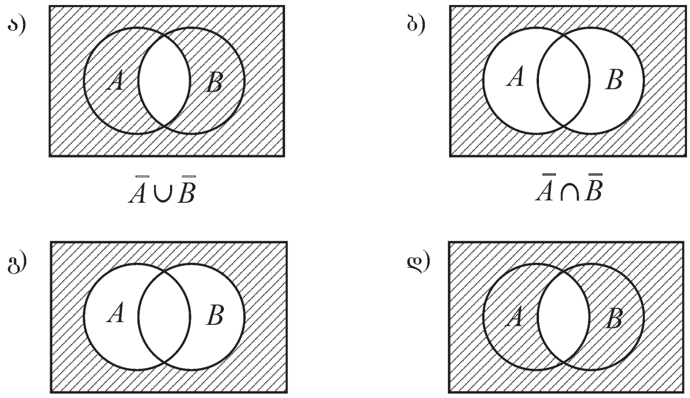
p	q	r	f_7	f_8
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

II.2. ა) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$; ბ) $(p \vee \overline{p}) \wedge q$; გ) $(p \vee \overline{q}) \wedge (q \vee \overline{p})$;
დ) $(p \vee \overline{p}) \vee (q \vee \overline{q})$; ე) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{q} \wedge p)$;
ვ) $(p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge s)$; ზ) $(p \wedge (\overline{p} \vee \overline{q})) \vee (q \wedge (q \vee r))$.

III.3.



III.4.



ა) $\overline{A} \cup \overline{B}$ ბ) $\overline{A} \cap \overline{B}$

გ) $\overline{A \cup B}$ დ) $\overline{A \cap B}$

III.5. ა) $\{-3, -1, 0, 2, 4\}$; ბ) $\{-3, 1, 2, 3, 4\}$;
გ) $\{-3, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; დ) $\{-3, 2, 4\}$;
ე) $\{-3, 2, 4\}$; ვ) $\{-3, -1, 0, 2, 3, 4\}$.

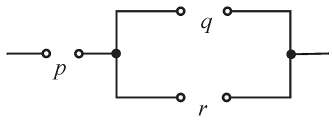
III.7. ა) $A \cup B$; ბ) $\varnothing$; გ) A; დ) U; ე) $A \cup (B \cap C)$;
ვ) A; ზ) $A \cap (B \cap C)$.

III.9. ა) $p \wedge q$; ბ) $\overline{p} \wedge q$; გ) $(\overline{p} \vee q) \wedge (p \vee \overline{q})$;

დ) $p \vee q \vee r$;   ე) $q \vee r$.

III.10.

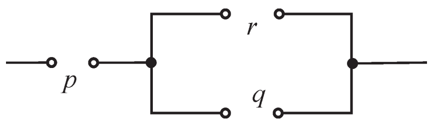
ა) 

ბ) 

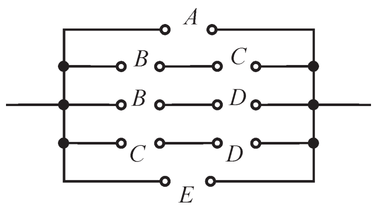
III.11. კი.

III.12. კი.

III.13.



III.14.



III.15. ა) არა; ბ) ჭეშმარიტი; გ) მცდარი; დ) ჭეშმარიტი; ე) არა; ვ) არა.

III.16. ა) 13 არაა კენტი რიცხვი; ბ) $\exists x \in N$, $x > 0$; გ) $a^2 = 4$ ტოლობიდან არ გამომდინარეობს, რომ $a = \pm 2$; დ) ვერც ერთი ვერ მოახვედრებს სამიზნეს.

III.17. ა) $p \wedge q$;   ბ) $q \to p$;   გ) $\overline{p} \to (\overline{q} \wedge \overline{r})$;   დ) $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \to r$.

III.18. ა) სტუდენტი მეცადინეობს, მაგრამ არ სწავლობს მათემატიკას; ბ) თუ სტუდენტი მეცადინეობს, მაშინ ის ან სწავლობს მათემატიკას ან არა; გ) სტუდენტი მაშინ და მხოლოდ

მაშინ ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას, როცა ის იმეცადინებს და ისწავლის მათემატიკას; დ) თუ სტუდენტი მათემატიკას არ სწავლობს, მაშინ ის ვერ ჩააბარებს მათემატიკის გამოცდას.

III.19. ა) $\forall x \in \mathbb{N},\ x > 0$; ბ) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x > 0$.

III.20. ა) როცა $n = 1$, მაშინ $2n + 1 < 7$;

ბ) $x^2 + 1 = 0$ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვი.

III.21. ა)

p	$p \vee \overline{p}$
0	0
1	0

ბ)

p	$p \wedge \overline{p}$
0	1
1	1

გ)

p	q	r	$p \wedge q \to r$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

დ)

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ე)

p	q	r	$p \wedge (q \to r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

ვ)

p	q	$p \to (p \wedge q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

ზ)

p	q	$p \vee q \to (p \leftrightarrow q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

თ)

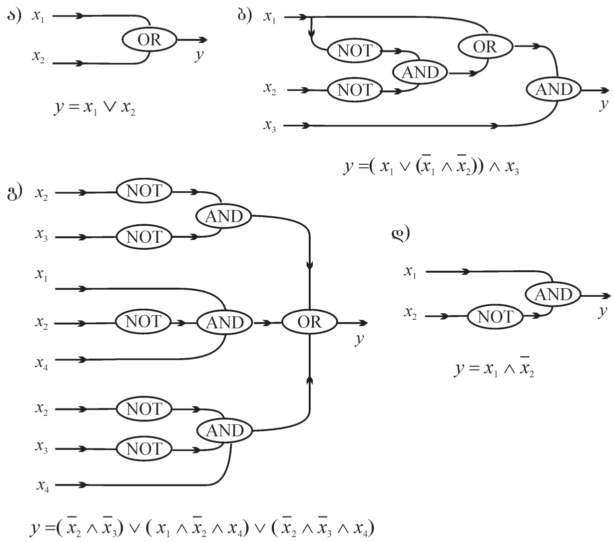
p	q	$p \vee q \to p \wedge \overline{q}$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

ი)

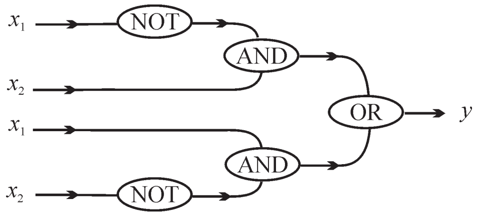
p	q	$p \to (q \to p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

III.22. ა) იგივურად ჭეშმარიტი; ბ) იგივურად ჭეშმარიტი; გ) არა;
დ) იგივურად ჭეშმარიტი; ე) არა; ვ) იგივურად ჭეშმარიტი;
ზ) იგივურად ჭეშმარიტი; თ) იგივურად ჭეშმარიტი;
ი) იგივურად ჭეშმარიტი.

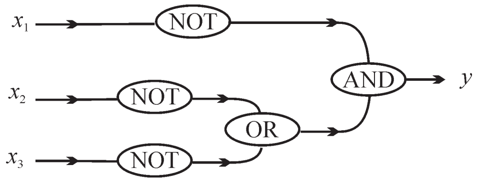
III.23.



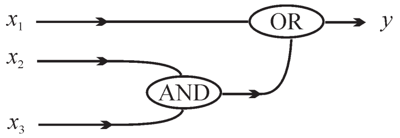
III.24. ა) $y = ((\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2)) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2) =$
$= (\overline{x}_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \overline{x}_2).$



ბ) $y = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3) =$
$= \overline{x}_1 \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3).$

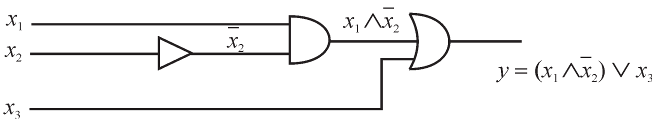


გ) $y = ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)) \vee (x_3 \wedge (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3))) =$
$= x_1 \vee (x_2 \wedge x_3).$

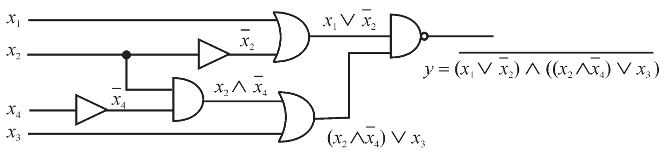


III.25.

ა)



ბ)



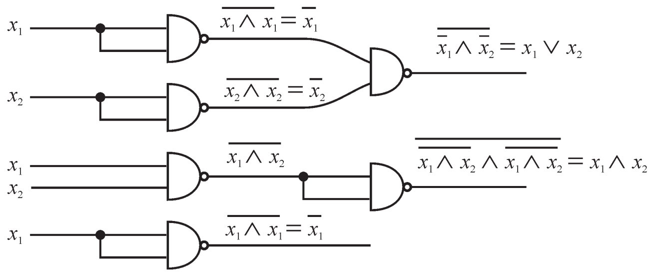
III.26. $y_1 = (x_1 \vee x_2) \wedge \overline{(x_1 \wedge x_2)}, \quad y_2 = x_1 \wedge x_2.$

x_1	x_1	y_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

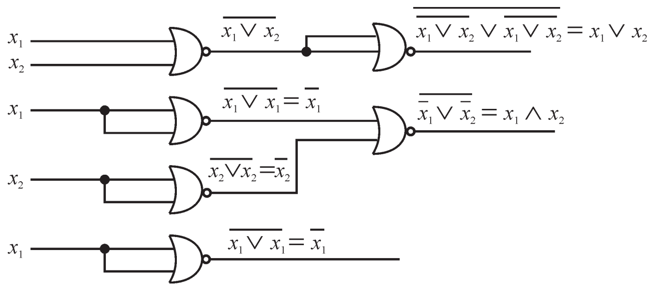
x_1	x_1	y_2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

III.27.

ა)

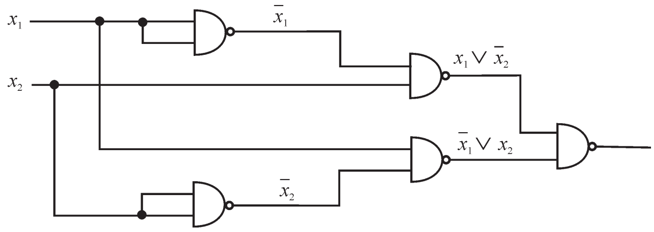


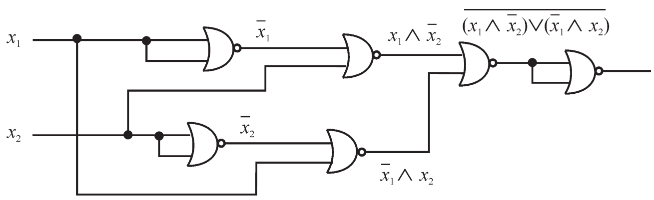
ბ)



III.28.

ა)



ბ) 

თავი IV

IV.1. ა) $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E=\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$;

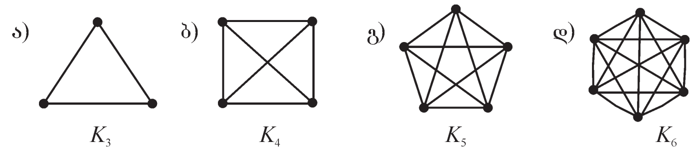
ბ) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{(v_1, v_2)\}$;

გ) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)\}$;

დ) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4\}$;

ე) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$.

IV.2.



IV.3. ა) $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)$; ბ) (v_1, v_2); გ) $(v_1, v_2), (v_1, v_5)$;
დ) (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4); ე) (v_1, v_2).

IV.4. ა) v_5; ბ) v_3, v_4.

IV.5. ა) (v_1, v_3), (v_1, v_4); ბ) (v_1, v_5), (v_2, v_3);
დ) (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4); ე) (v_2, v_3).

IV.6. ა) $\deg v_1 = 3$, $\deg v_2 = 3$, $\deg v_3 = 3$, $\deg v_4 = 3$,
$\deg v_5 = 4$;

ბ) $\deg v_1 = 3$, $\deg v_2 = 4$, $\deg v_3 = 2$, $\deg v_4 = 3$,
$\deg v_5 = 2$, $\deg v_6 = 2$;

გ) $\deg v_1 = 6$, $\deg v_2 = \deg v_3 = \deg v_4 = \deg v_5 = \deg v_6 = \deg v_7 = 1$;

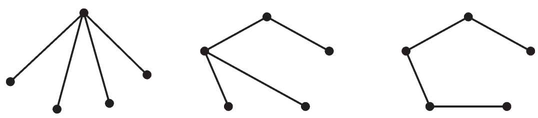
დ) $\deg v_1 = \deg v_2 = 4$, $\deg v_3 = \deg v_4 = 5$;

ე) $\deg v_1 = \deg v_3 = 1$, $\deg v_2 = \deg v_4 = 0$;

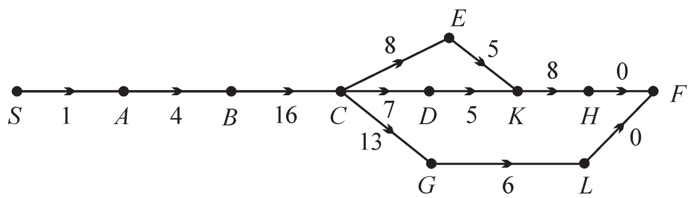
ვ) $\deg v_1 = 3$, $\deg v_2 = \deg v_3 = \deg v_5 = \deg v_6 = 1$, $\deg v_4 = 3$.

IV.7. არაერთგვაროვანი გრაფებია: ნახ. IV.1 გ), დ); მარტივი y ჯაჭვი – ნახ. IV.1 ე) ჯაჭვი – ნახ. IV.2 ბ); ციკლი – ნახ. IV.1 გ), დ), ე); ბმული გრაფი – ნახ. IV.1 გ), ნახ. IV.2 ა), ბ), გ), დ), ვ); ხე– ნახ. IV.1 ე), ნახ. IV.2 გ), ვ); ტყე (არა ხე) – ნახ. IV.1 ა), ბ), ნახ. IV.2 ე).

IV.8. $t_5 = 5^3 = 125$.

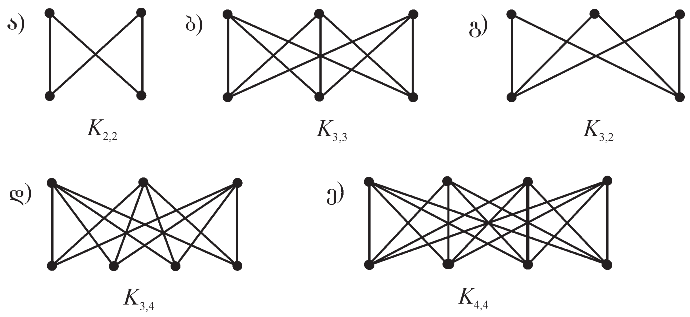


IV.9.



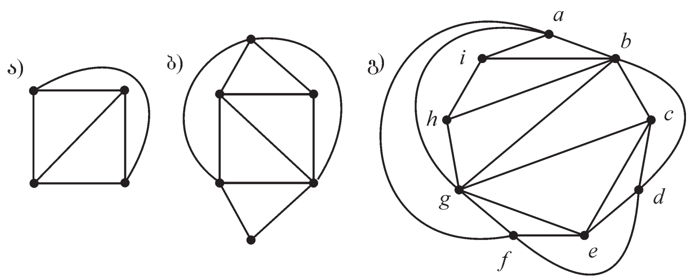
IV.10. ბრტყელი ბმული გრაფებია: ნახ. IV.1 გ), $|E| = 2$; ე), $|E| = 1$; ნახ. IV.2 ა), $|E| = 5$; ბ), $|E| = 3$, გ), $|E| = 1$, დ), $|E| = 7$, ვ), $|E| = 1$.

IV.11.

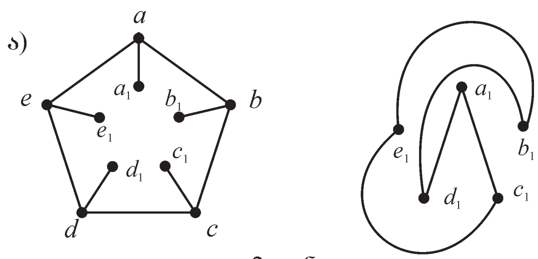


IV.12. ა) კი; ბ) არა; გ) არა; დ) კი; ე) კი.

IV.13.

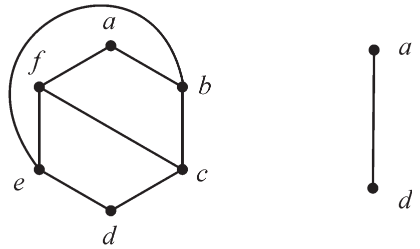


IV.15.



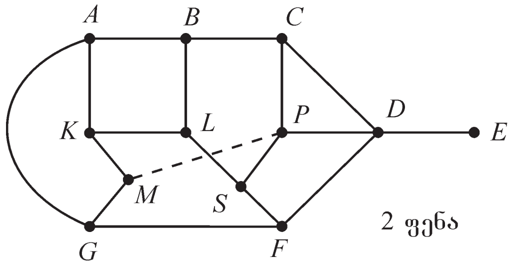
2 ფენა

ბ)



2 ფენა

IV.16.



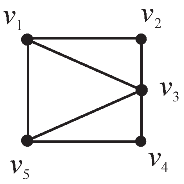
2 ფენა

IV.17. ა) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; ბ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

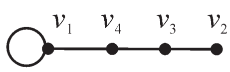
გ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

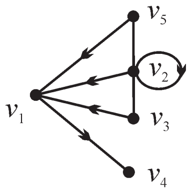
IV.18.

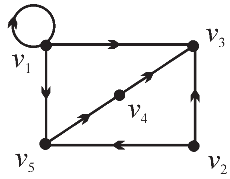
ა)



ბ)



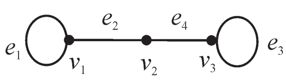
გ) 

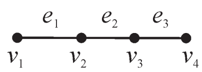
დ) 

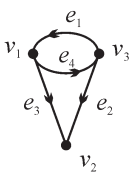
IV.19. ა) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; ბ) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

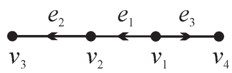
გ) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

IV.20.

ა) 

ბ) 

გ) 

დ) 

IV.21. ა) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

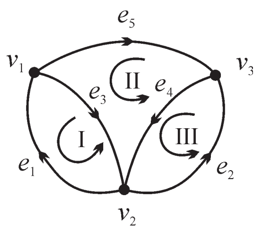
ბ) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

IV.22. ა) $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$$\text{ბ)}\ C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

IV.23.

ა)



$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

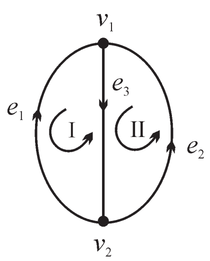
$$BI = 0 \iff \begin{cases} -I_1 + I_3 + I_5 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \\ -I_2 + I_4 - I_5 = 0, \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$CU = 0 \iff \begin{cases} -u_1 - u_3 = 0 \\ u_3 - u_4 - u_5 = 0 \\ u_2 + u_4 = 0, \end{cases}$$

$I_1 = 20A,\ I_2 = 30A,\ I_3 = 10A,\ I_4 = 40A,\ I_5 = 10A;$

ა)



$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad BI = 0 \iff \begin{cases} -I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0, \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad CU = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -u_1 - u_3 = 0 \\ u_2 + u_3 = 0, \end{cases}$$

$$I_1 = 2,625A, \ \ I_2 = 0,75A, \ \ I_3 = 3,375A.$$

თავი V

V.1. ა) $v = (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$; ბ) $v = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0)$; გ) $v = (0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1)$; დ) $v = (1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$.

V.2. შეცდომით მიღებულია ა), გ), დ).

V.3. ა) $v = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)$; ბ) $v = (0\ 0\ 0\ 0\ 0)$.

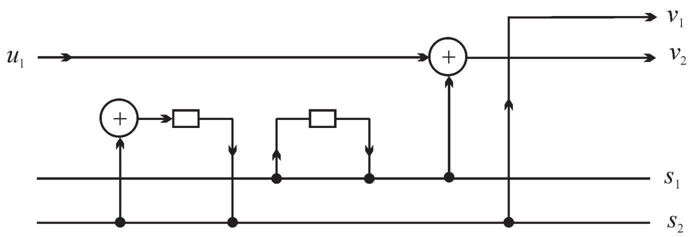
V.4. ა) $v = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$; ბ) $v = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$; გ) $v = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$; დ) $v = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$.

V.5. ა) $\delta = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$; ბ) $\delta = 0$; გ) $\delta = (0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$; დ) $\delta = (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$.

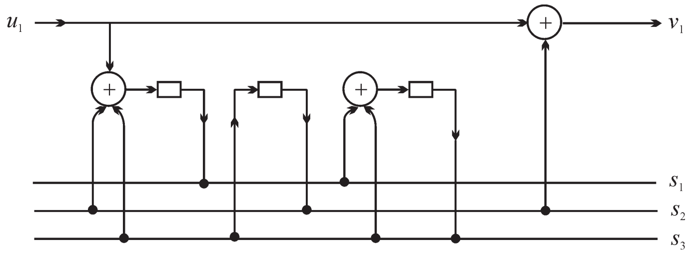
V.6. ა) არის შეცდომა, უნდა იყოს: $v = (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$;
ბ) არის შეცდომა, უნდა იყოს: $v = (1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$;
გ) არის შეცდომა, უნდა იყოს: $v = (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$;
დ) არის შეცდომა, უნდა იყოს: $v = (0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$.

V.7. ა) $v = (0\ 1)$; ბ) $v = (0\ 0)$; გ) $v = (1\ 1)$; დ) $v = (1\ 0\ 1)$.

V.8. ა) $v_1 = s_1,\ \ v_2 = s_1 + u_1;\ \ s_1' = s_1,\ \ s_2' = s_2 + u_1.$



V.8. ծ) $v_1 = s_2 + u_1;\ \ s_1' = s_2 + s_3 + u_1,\ \ s_2' = s_3,\ s_3' = s_1 + s_3.$



ლიტერატურა

1. დურგლიშვილი ნ., ბუაძე ა., იოსავა მ., მელაძე ო., სიგუა ლ. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. I ნაწილი, თბილისი, განათლება, 1989.
2. თოფურია ს., ხოჭოლავა ვ., მაჭარაშვილი ნ., გიორგაძე დ., კვალიაშვილი ა. წრფივი ალგებრის და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი, განათლება, 1988.
3. ნატროშვილი დ., სადუნიშვილი გ., შუბლაძე მ., ალიაშვილი თ. მათემატიკა, თბილისი, 2000.
4. ნაცვლიშვილი ზ., ტაბიძე გ., დანელია რ., გიორგობიანი ჯ., კუბლაშვილი მ. დისკრეტული მათემატიკის საფუძვლები. განათლება, თბილისი, 1990.
5. სამსონაძე გ., მშვენიერაძე ა. წრფივი ალგებრის საწყისები მაგალითებსა და ამოცანებში. თბილისი, 1989.
6. Bajpai A.C., Calus I.M., Fairley J.A.,. Mathematics for Engineers and Scientists, John Wiley & Sons, London–New York–Sydney–Toronto, 1973.
7. Birkhoff G., Bartee T., Modern Applied Algebra, Mc Graw-Hill Book Company, New York–San Francisko–Sydney–Toronto, 1970. (რუსული თარგმანი: Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра, Мир, Москва, 1976).
8. Cooke D., Bez H., Computer Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge-London-New-York-New-Rochelle-Melburne–Sydney, 1982 (რუსული თარგმანი: Кук Д., Вейс Г., Барти Г. Компьютерная математика, Наука, Москва, 1990).
9. Croft A., Davison R., Hargreaves M., Engineering Mathemastics. A Modern Foundation for Electronic,

Electrical and system Engineers. Addison-Wesley, Harlov-New York-Tokyo, 1996.

10. Fujisawa, T. Kasami T., Mathematics for Elekrtonics and Communications Engineers. Theory of Discrete Structures, Osaka University, Osaka 1977 (რუსული თარგმანი: Фудзисава Т., Касами Т., Математика для радиоинженеров. Теория дискретных структур. Радио и связь, Москва, 1984).
11. James G., Burley D., Clements D., Dyke P., Searl J., Wright J. Modern Engineering Mathematics. Addison-Wesley, Woringham-New York-Tokyo, 1992 (ქართული თარგმანი: მათემატიკა ინჟინრებისათვის, გამომცემლობა “გლობალ პრინტი”, თბილისი, 2001).
12. Lidl R., Niederreiter H. Finite Fields, Addison–Wesley, Ontario–Sydney–Tokio, 1983 (რუსული თარგმანი: Лидл Р., Нидеррайтер Г., Конечные поля, т. 1, т. 2, Мир, Москва, 1988).

საგნობრივი საძიებელი

სარჩევი

წრფივი ალგებრა (II ნაწილი)
(შემჩნეული უზუსტობანი)

გვერდი	არის	უნდა იყოს
56	არაერთგვაროვანი (8.1) სისტემის	ერთგვაროვანი (8.1) სისტემის
58	$\begin{cases} -- \\ x_4 = c_2 \end{cases}$	$\begin{cases} -- \\ x_4 = 11c_2 \end{cases}$
61	I.4. ზ), თ) და ი) $\{(x,y)\in Z\times Z\ldots\ \}$	$\{(x,y)\in N\times N\ldots\ \}$
65	$G_1 = Z^{(2)}, G_2 = Z^{(n)}$	$G_1 = Z^{(n)}, G_2 = Z^{(2)}$
73	I.56. ვ)arcsinx, arccosx $[-1,1]$	arcsinx, arccosx, 1 $[-1,1]$
	ზ)arctgx, arcctgx $[-\infty,+\infty]$	arctgx, arcctgx, 1 $[-\infty,+\infty]$
83	ყველგან სისტემაში საჭიროა ინდექსების გადანაცვლება, ე.ი. მაგალითად, a_{21} უნდა შეიცვალოს a_{12}-ით და პირიქით	
98	A- λI = … - $\lambda\begin{bmatrix} 10\ldots1 \\ 01\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots1 \end{bmatrix}$	A- λI = … - $\lambda\begin{bmatrix} 10\ldots0 \\ 01\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots1 \end{bmatrix}$
158	III.3 $[\ p\ \wedge(q\vee r)\vee(s\vee t)$	$(p\wedge(q\vee r))\vee(s\vee t)$
159	III.9 $\overline{(p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\vee q)}$	$\overline{(p\wedge\overline{q})\vee(\overline{p}\wedge q)}$
178	24. 2 -ე ნახაზზე დაემატოს AE და AK მონაკვეთები	
193	BI =	B =
196	IV.2. დახაზეთ სასრული გრაფები	IV.2. დახაზეთ სრული გრაფები
216	H = … (m=n-k, $a_{ij}\in F_x$)	H = … (m=n-k, $a_{ij}\in F_2$)
228	I.7 დ) კი	I.7 დ) არა
228	I.8 შეიძლება ყველა შემთხვევაში	შეიძლება ყველა შემთხვევაში (გარდა დ) შემთხვევისა)
229	I.14 ა) ...n=2	ა) ...n - ლუწი რიცხვია
229	I.18 ვ) Ø	ვ) (1,1,0), (0,1,1)
235	II.39 თ)… x=(t,t,0)	თ)… x=(t_1-t_2, t_1, t_2)
236	II.44.დ) $x'^2+14y'^2, \begin{cases} x=\frac{1}{2}(x'+y') \\ y=\frac{1}{2}(-x'+y') \end{cases}$	II.44.დ) $2x'^2+28y'^2, \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x'+y') \end{cases}$
237	III.7 ა) $A\cup B$	$A\cap B$

240 III.21 თ)

pq	
00	1
01	0
10	1
11	1

Pq	
00	1
01	0
10	1
11	0

240 III.23 დახაზულია სქემები

ა) $x_1 \vee x_2$

ბ) $(\overline{x_1} \vee x_2) \wedge x_3$

გ) $((x_1 \vee x_4) \vee \overline{x_3}) \wedge \overline{x_2})$

დ) $x_1 \wedge \overline{x_2}$

244 IV.7. არაერთგვაროვანი გრაფებია
ჯაჭვი - ნახ. IV.2ზ),
ბმული გრაფი - ნახ. IV.1გ),

ერთგვაროვანი გრაფებია
ჯაჭვი - ნახ. IV.1გ),ე)
ბმული გრაფი - ნახ. IV.1გ),დ),ე)

245 IV.12. გ) არა

IV.12. გ) კი

247 C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

C= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

249 V.7. გ) v=(1 1); დ) v=(1 0 1)

V.7. გ) v=(1 1 1); დ) v=(1 1 0 1)

260 §28. კოდირების თეორემების ...

§28. კოდირების თეორიის ...