დ. ნატროშვილი, გ. სამსონაძე,
მ. შუბლაძე

წრფივი ალგებრა

გამოყენებითი ალგებრის ელემენტები

I ნაწილი

დამტკიცებულია სტუ-ს
სასწავლო-მეთოდური საბჭოს მიერ

თბილისი
2002

I ნაწილი ოთხი თავისგან შედგება. მათემატიკის ტრადიციული სახელმძღვანელოებისგან განსხვავებით, განხილულ საკითხებთან ერთად (კომპლექსური რიცხვები, მატრიცები, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები, ვექტორები, წირები და ზედაპირები) მოყვანილია მათი გამოყენება სხვადასხვა სახის საინჟინრო ამოცანების გადაწყვეტისას. განკუთვნილია უმაღლესი ტექნიკური სასწავლებლების კავშირგაბმულობის, ელექტროტექნიკის, გამოთვლითი ტექნიკის, ავტომატიკისა და ენერგეტიკის სპეციალობის ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტებისთვის.

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

პროფ. **ლ. გიორგაშვილი**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

გ. ლომაძე

ISBN 99928 - 901 – 9 – 3

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

ციფრული ტექნიკის განვითარებასთან დაკავშირებით განსაკუთრებულ მნიშვნელობას იძენს გამოყენებითი ალგებრის ისეთი მიმართულებები, როგორიცაა კოდირების თეორია, გრაფთა თეორია, ბულის ალგებრები, სასრულ ავტომატთა თეორია. ამ საკითხებისადმი მიძღვნილი სპეციალური მათემატიკური ლიტერატურის გაცნობა, მისი საფუძვლიანი დამუშავება და გამოყენება პრაქტიკული საინჟინრო ამოცანების შესწავლაში გარკვეულ მათემატიკურ მომზადებას მოითხოვს.

შემოთავაზებული სახელმძღვანელოს ძირითადი მიზანია, ერთი მხრივ, ბაკალავრიატისა და მაგისტრატურის სტუდენტთა მომზადების იმ დონის უზრუნველყოფა, რაც აუცილებელია შემდგომში შესაბამისი სპეციალობის დისციპლინების შესასწავლად და, მეორე მხრივ, იმ უნარ-ჩვევების გამომუშავება, რაც საჭიროა მათემატიკური თეორიულ-ალგორითმული ცოდნის გამოყენებისათვის პრაქტიკული საინჟინრო ამოცანების გადასაწყვეტად. მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკური აპარატის, კერძოდ, წრფივი ალგებრის მეთოდების გამოყენების ილუსტრირებას კონკრეტული ტექნიკური ამოცანების ამოხსნაში. შინაარსობრივი და სტილისტიკური თვალსაზრისით, ეს ასპექტი მას მოწინავე ტექნიკურ უნივერსიტეტებში ამჟამად

მოქმედ „საინჟინრო მათემატიკის“ სახელმძღვანელოებთან აახლოებს.

სახელმძღვანელო ორი ნაწილისგან შედგება. I ნაწილში განხილულია კომპლექსური რიცხვები, მატრიცები, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები, ვექტორები და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. II ნაწილში მოცემულია წრფივი სივრცეები, წრფივი ოპერატორები, ჯგუფის, რგოლის და ველის ცნება, კოდირების თეორიის ელემენტები, ბულის ალგებრები და მათთან დაკავშირებული საკითხები, გრაფთა თეორიისა და ავტომატთა თეორიის ელემენტები.

I თავი. კომპლექსური რიცხვები და მრავალწევრები

გერმანელ მათემატიკოსს კრონეკერს ეკუთვნის შემდეგი გამონათქვამი: „ღმერთმა შექმნა ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, სხვა ყველაფერი შექმნილია ადამიანის მიერ“. სიტყვა „ნატურალური“ არის „ბუნებრივის“ სინონიმი. ნატურალური რიცხვები ისეთი რიცხვებია, რომლებიც წარმოიშვნენ თვლის შედეგად. ნებისმიერი ორი ნატურალური რიცხვის ჯამი ნატურალური რიცხვია. იმისათვის, რომ შესაძლებელი გახდეს რიცხვებზე სხვა ოპერაციების (გამოკლების, გაყოფის, ამოფესვის) შესრულება, ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე უნდა გაფართოვდეს გარკვეული სახის „ხელოვნური“ (არანატურალური) რიცხვების საშუალებით. ასეთნაირად შემოდის მათემატიკაში უარყოფითი, რაციონალური, ირაციონალური და კომპლექსური რიცხვების ცნება.

კომპლექსური რიცხვი განისაზღვრება როგორც $a+bi$ სახის გამოსახულება, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i სპეციალური სიმბოლოა, რომელსაც ეწოდება წარმოსახვითი ერთეული. კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში არითმეტიკული ოპერაციები განსაზღვრულია ისეთნაირად, რომ კომპლექსური i რიცხვის კვადრატი -1-ის ტოლია ($i^2=-1$), ე.ი.

კომპლექსურ რიცხვებს შორის არის ისეთი რიცხვი, რომლის კვადრატი უარყოფითია. ეს საშუალებას იძლევა განვსაზღვროთ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში ამოფესვის ოპერაცია ნებისმიერი, მათ შორის უარყოფითი რიცხვებისათვის. თავისი „ხელოვნურობის“ მიუხედავად, კომპლექსური რიცხვები გვაძლევს ძლიერ მათემატიკურ იარაღს ზოგიერთი საინჟინრო ამოცანის ამოსახსნელად. მაგალითად (იხ. §4), კომპლექსურ რიცხვებს დიდი გამოყენება აქვს ცვლადი დენის ელექტროწრედის გაანგარიშებისას. ეს განპირობებულია იმით, რომ ცვლადი დენი ელექტროწრედებში იცვლება სინუსოიდური $I = I_m \sin(\varphi_0 + \omega t)$ *კანონის მიხედვით (*I_m *დენის ამპლიტუდაა,* φ_0*-საწყისი ფაზა,* ω *-სიხშირე), ხოლო ამ სახის დამოკიდებულებას გარკვეული წესით შეესაბამება*

$$I^* = \tilde{I} e^{i\omega t}$$

ფორმის განტოლება (იხ. (4.12) და (4.13)), რომელიც სრულად აღწერს ელექტროწრედში მიმდინარე პროცესებს. კომპლექსური სახით ჩაწერილი განტოლების გამოყენება უფრო ხელსაყრელია, რადგან მაჩვენებლიანი $I^* = \tilde{I} e^{i\omega t}$ *ფორმით წარდგენილ რიცხვებზე ჩატარებული მოქმედება (გამრავლება, გაყოფა, გაწარმოება და ა.შ.) გაცილებით მოსახერხებელია, ვიდრე სინუსების და კოსინუსების შემცველ გამოსახულებებზე.*

§1. კომპლექსური რიცხვის ცნება. მოქმედებანი კომპლექსურ რიცხვებზე

კომპლექსური რიცხვი განისაზღვრება როგორც $a+bi$ სახის გამოსახულება, სადაც a და b ნამდვილი რიცხვებია, ხოლო i სპეციალური სიმბოლო, რომელსაც ეწოდება ***წარმოსახვითი ერთეული***. ნამდვილ a რიცხვს ეწოდება $z=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის **ნამდვილი ნაწილი** და აღინიშნება $\operatorname{Re} z$ სიმბოლოთი (realis ლათინურად ნიშნავს ნამდვილს), ხოლო ნამდვილ b რიცხვს ეწოდება კომპლექსური z რიცხვის ***წარმოსახვითი ნაწილი*** და აღინიშნება $\operatorname{Im} z$ სიმბოლოთი (imaginarius ლათინურად ნიშნავს წარმოსახვითს).

მაგალითად, $z=2-3i$ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი $\operatorname{Re} z=2$, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი $\operatorname{Im} z=-3$.

$\bar{z}=a-bi$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $z=a+bi$ კომპლექსური რიცხვის **შეუღლებული** რიცხვი.

$z_1=a_1+b_1i$ და $z_2=a_2+b_2i$ კომპლექსური რიცხვები ტოლია, თუ $\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2$ და $\operatorname{Im} z_1=\operatorname{Im} z_2$:

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i \iff a_1=a_2 \text{ და } b_1=b_2.$$

თუ $b=0$ (ე.ი. $\operatorname{Im} z=0$), მაშინ $z=a+bi$ კომპლექსურ რიცხვს აღნიშნავენ a-თი და მას აიგივებენ ნამდვილ a რიცხვთან:

$$a+oi=a. \tag{1.1}$$

ეს იმის ანალოგიურია, როცა რაციონალური რიცხვი $\frac{5}{1}$ გაიგივებულია მთელ რიცხვთან 5.

თუ $b \neq 0$, მაშინ $z = a + bi$ კომპლექსურ რიცხვს **წარმოსახვითი** ეწოდება. თუ ამავე დროს $a = 0$ (ე.ი. $\mathrm{Re}\, z = 0$), მაშინ წარმოსახვით კომპლექსურ $o + bi$ რიცხვს აღნიშნავენ bi-თი და უწოდებენ **წმინდა წარმოსახვით რიცხვს:**

$$o + bi = bi . \qquad (1.2)$$

ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლე არის ნამდვილ და წარმოსახვით რიცხვთა სიმრავლეების გაერთიანება. ამ თვალსაზრისით, კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლე წარმოადგენს ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლის გაფართოებას (ნამდვილი რიცხვი ისეთი z კომპლექსური რიცხვია, რომლის წარმოსახვითი ნაწილი $\mathrm{Im}\, z = 0$):

$$R \subset C .$$

ვთქვათ, $z_1 = a_1 + b_1 i$ და $z_2 = a_2 + b_2 i$. ამ რიცხვების ჯამი განისაზღვრება ტოლობით:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i . \qquad (1.3)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $z_1 = 3 + 2i$ და $z_2 = -5 + 4i$ კომპლექსური რიცხვების ჯამი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $z_1 + z_2 = (3-5) + (2+4)i = -2 + 6i.$ □

თუ z_1 *და* z_2 *ნამდვილი რიცხვებია* (*ე.ი.* $b_1 = b_2 = 0$), *მაშინ (1.3) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ*

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (0 + 0)i = a_1 + a_2,$$

ე.ი. ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამი იმ შემთხვევაში, როცა ეს რიცხვები ნამდვილია, მათ ჩვეულებრივ ჯამს ემთხვევა. (1.1) და (1.2) შეთანხმების გათვალისწინებით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ კომპლექსური რიცხვის a+bi ჩაწერაში ნიშანი + აღნიშნავს შეკრებას, ე.ი. a+bi კომპლექსური რიცხვი წარმოადგენს ნამდვილი a რიცხვის და წმინდა წარმოსახვითი bi რიცხვის ჯამს.

კომპლექსურ რიცხვთა C *სიმრავლეში* ***გამოკლების*** *ოპერაცია განსაზღვრულია, როგორც შეკრების ოპერაციის შებრუნებული. აქედან გამომდინარე,* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *და* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *რიცხვებისათვის*

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

მაგალითი 2. *ვიპოვოთ* $z_1 = 3 + 2i$ *და* $z_2 = -5 + 4i$ *რიცხვების სხვაობა.*

ა მ ო ხ ს ნ ა. $z_1 - z_2 = 3 - (-5) + (2 - 4)i = 8 - 2i$. □

$z_1 = a_1 + b_1 i$ *და* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *კომპლექსური რიცხვების* ***ნამრავლი*** *განისაზღვრება ტოლობით:*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)i. \qquad (1.4)$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $z_1 = 3+2i$ და $z_2 = -5+4i$ რიცხვების ნამრავლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$z_1 \cdot z_2 = \left(3\cdot(-5) - 2\cdot 4\right) + \left(2\cdot(-5) + 3\cdot 4\right)\, i = -23 + 2\, i\,. \,\square$$

თუ z_1 და z_2 ნამდვილი რიცხვებია (ე.ი. $b_1 = b_2 = 0$), მაშინ (1.4) ტოლობის თანახმად,

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a_1 + 0i)\cdot(a_2 + 0i\right) = \left(a_1 a_2 - 0\cdot 0) + (0\cdot a_2 + a_1\cdot 0\right)\, i = a_1 a_2\,,$$

ე.ი. ასეთნაირად განსაზღვრული ოპერაცია ნამდვილი რიცხვების შემთხვევაში ემთხვევა ჩვეულებრივ ნამრავლს. შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ bi სახის კომპლექსური რიცხვი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც b და i კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი:

$$\left(b + 0i\right)\cdot\left(0 + 1i\right) = \left(b\cdot 0 - 0\cdot 1\right) + \left(0\cdot 0 + b\cdot 1\right) i = bi\,.$$

ვიპოვოთ ახლა წარმოსახვითი ერთეულის კვადრატი:

$$i^2 = i\cdot i = \left(0 + 1i\right)\cdot\left(0 + 1i\right) = \left(0\cdot 0 - 1\cdot 1\right) + \left(1\cdot 0 + 0\cdot 1\right)i = -1 + 0\cdot i = -1.$$

ამრიგად,

$$i^2 = -1$$

და i კომპლექსური რიცხვი არის $\sqrt{-1}$ ფესვის ერთ-ერთი მნიშვნელობის ტოლი. აქედან გამომდინარეობს, რომ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში შესაძლებელია კვადრატული ფესვის ამოღება ნებისმიერი უარყოფითი რიცხვიდან. მაგალითად,

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25\cdot(-1)}=\sqrt{25}\sqrt{-1}=\pm 5i.$$

მაგალითი 4. *ამოვხსნათ კვადრატული განტოლება*

$$x^2-6x+34=0.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. $\dfrac{D}{4}=9-34=-25$. *აქედან*

$$x=3+\sqrt{-25}=3\pm 5i,$$

ე.ი. მოცემულ კვადრატულ განტოლებას აქვს ორი (კომპლექსური) ფესვი:

$$x_1=3-5i, \qquad x_2=3+5i. \qquad \square$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ ზემოთ შემოღებული ოპერაციები აკმაყოფილებს არითმეტიკული ოპერაციებისათვის დამახასიათებელ ყველა პირობას: $\forall z_1,z_2,z_3\in C$

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$;

2. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$;

3. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$;

4. $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$;

5. $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

ამ თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ კომპლექსური რიცხვების გადამრავლებისას შეიძლება ვისარგებლოთ მრავალწევრების გამრავლების წესით (იმის გათვალისწინებით, რომ $i^2=-1$ *).*

მაგალითად,

$$(3+2i)(-5+4i)=3\cdot(-5)+3\cdot 4i+2i(-5)+2i\cdot 4i=-15+2i+8i^2=$$

$$=-15+2i-8=-23+2i.$$

გაყოფის ოპერაცია კომპლექსურ რიცხვთა C სიმრავლეში განისაზღვრება, როგორც გამრავლების ოპერაციის შებრუნებული ოპერაცია, ე.ი.

$$\frac{z_1}{z_2} = z \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z \cdot z_2 \qquad (z_2 \neq 0).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ, თუ $z_1 = a_1 + b_1 i$ და $z_2 = a_2 + b_2 i$ $(z_2 \neq 0)$, მაშინ $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$

მაგალითი 5. ვიპოვოთ $z_1 = -23 + 2i$ და $z_2 = -5 + 4i$ რიცხვების ფარდობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-23 + 2i}{-5 + 4i} = \frac{-23(-5) + 2\cdot 4}{(-5)^2 + 4^2} + \frac{2\cdot(-5) - (-23)\cdot 4}{(-5)^2 + 4^2}\, i = 3 + 2i. \quad \square$$

მოვიყვანოთ გაყოფის ოპერაციის ზოგიერთი თვისება, რომელთა დამტკიცება შეიძლება უშუალო შემოწმებით:

1. $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$;

2. $\dfrac{z_1 \pm z_2}{z_3} = \dfrac{z_1}{z_3} \pm \dfrac{z_2}{z_3}$;

3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 z}{z_2 z}$ $\qquad (z \neq 0)$.

შევნიშნოთ, რომ ორი კომპლექსური რიცხვის ფარდობის გამოსათვლელად საკმარისია მრიცხველი და მნიშვნელი გავამრავლოთ მნიშვნელის შეუღლებულზე:

$$\frac{-23+2i}{-5+4i}=\frac{(-23+2i)(-5-4i)}{(-5+4i)(-5-4i)}=\frac{123+82i}{(-5)^2-(4i)^2}=\frac{123+82i}{41}=3+2i.$$

აღვნიშნოთ შეუღლებულ რიცხვებთან დაკავშირებული ზოგიერთი თვისება:

1. $\bar{z}=z \Leftrightarrow z\in R$;
2. $\overline{(\bar{z})}=z$;
3. $z+\bar{z} \in R$;
4. $z\cdot\bar{z} \in R$;
5. $\overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
6. $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$;
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $(z_2\neq 0)$;
8. $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$.

შევამოწმოთ, მაგალითად, მე-6 ტოლობა. ვთქვათ, $z_1=a_1+b_1i$ *და* $z_2=a_2+b_2i$. *მაშინ*

$$z_1z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(b_1a_2+a_1b_2)i\,,$$

საიდანაც

$$\overline{z_1z_2}=(a_1a_2-b_1b_2)-(b_1a_2+a_1b_2)i\,. \qquad (1.5)$$

ამავე დროს,

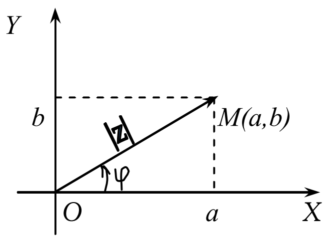
$$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(b_1a_2+a_1b_2)i. \qquad (1.6)$$

(1.5) და (1.6) ტოლობების შედარებით მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$. *ეს წესი ინდუქციით შეიძლება*

ნებისმიერ ნატურალურ მაჩვენებლიანი ხარისხისთვის განზოგადდეს (თვისება 8).

§2. კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული წარმოდგენა. კომპლექსური რიცხვის მოდული და არგუმენტი

ვთქვათ, სიბრტყეზე არჩეულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა. ყოველ კომპლექსურ $z=a+bi$ რიცხვს შევუსაბამოთ ამ სიბრტყის M წერტილი, რომლის კოორდინატებია a და b (ნახ. 2.1).

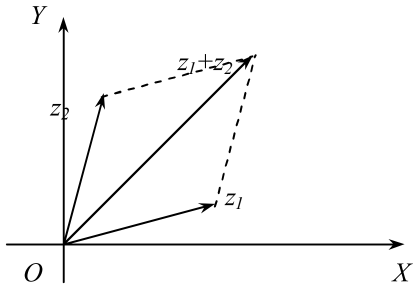


ნახ. 2.1.

ცხადია, ამით დავამყარეთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობა კომპლექსურ რიცხვებსა და სიბრტყის წერტილებს შორის. ამის გამო, ასეთ სიბრტყეს კომპლექსურ სიბრტყეს უწოდებენ. ხშირად კომპლექსურ რიცხვს

კომპლექსურ სიბრტყეზე გამოსახავენ არა წერტილით, არამედ ამ წერტილის რადიუს-ვექტორით (ნახ. 2..1).

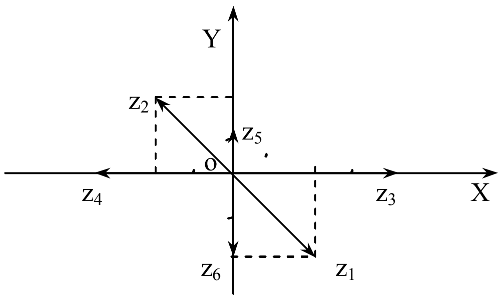
ადვილი შესამჩნევია, რომ ორი კომპლექსური რიცხვის ჯამის გამომსახველი რადიუს-ვექტორი წარმოადგენს შესაბამის რადიუს-ვექტორთა ჯამს (ნახ. 2.2, იხ. §15).



ნახ. 2.2.

მაგალითი 1. ავსახოთ კომპლექსურ სიბრტყეზე შემდეგი კომპლექსური რიცხვები: $z_1=2-2i$, $z_2=-2+2i$, $z_3=4$, $z_4=-3$, $z_5=i$, $z_6=-2i$.

ა მ ო ხ ს ნ ა.



ნახ. 2.3.

შევნიშნოთ, რომ კომპლექსური სიბრტყის აბსცისთა ღერძის წერტილები გამოსახავს ნამდვილ რიცხვებს, ხოლო ორდინატთა ღერძის წერტილები – წმინდა წარმოსახვით რიცხვებს. ამის შესაბამისად, OX ღერძს უწოდებენ ნამდვილ ღერძს, ხოლო OY ღერძს – წარმოსახვითს.

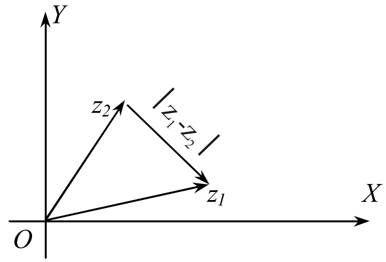
z კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი M წერტილის $\overrightarrow{OM}$ რადიუს-ვექტორის სიგრძეს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ***მოდული*** *და აღინიშნება $|z|$ სიმბოლოთი. ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს (იხ. ნახ. 2.1), რომ კომპლექსური $z=a+bi$ რიცხვის მოდული განისაზღვრება ტოლობით:*

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (2.1)$$

ცხადია, ნამდვილი რიცხვის შემთხვევაში მოდულის განსაზღვრება ემთხვევა ნამდვილი რიცხვის მოდულის განსაზღვრებას:

$$|a+0i|=\sqrt{a^2+0^2}=\sqrt{a^2}=|a|.$$

შევნიშნოთ, რომ ორი კომპლექსური რიცხვის სხვაობის მოდული ამ რიცხვების გამომსახველ წერტილებს შორის მანძილის ტოლია (ნახ. 2.4).

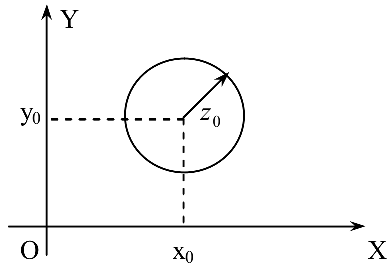


ნახ. 2.4.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ისეთ z წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც

$$|z-z_0|=r \qquad (|z-z_0| \le r\ ),$$

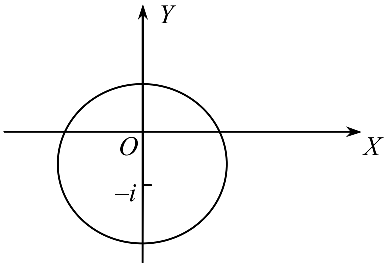
სადაც $r>0$, წარმოადგენს წრეწირს (წრეს) ცენტრით $z_0 = x_0 + y_0 i$ წერტილში და r რადიუსით (ნახ. 2.5).



ნახ. 2.5.

მაგალითი 2. მოვძებნოთ კომპლექსურ სიბრტყეზე სიმრავლე ისეთ z წერტილებისა, რომლებიც აკმაყოფილებს $|z+i| \le 2$ პირობას.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $z_0 = -i$, $r = 2$, ამიტომ აღნიშნული სიმრავლე წარმოადგენს წრეს. რომლის ცენტრი მოთავსებულია $z_0 = -i$ წერტილში, ხოლო რადიუსი $r = 2$ (ნახ. 2.6) □



ნახ. 2.6.

ვთქვათ, $z \neq 0$. φ - თი აღვნიშნოთ კუთხე OX ღერძსა და $\overline{OM}$ რადიუს-ვექტორს შორის, ათვლილი OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 2.1). ასეთ φ კუთხეს ეწოდება z კომპლექსური რიცხვის **არგუმენტი** და აღინიშნება $\arg z$ სიმბოლოთი. $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის φ არგუმენტი შეიძლება განისაზღვროს სისტემიდან:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} . \qquad (2.2)$$

თუ $a \neq 0$, მაშინ მეოთხედის გათვალისწინებით $z = a + bi$ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი შეიძლება ვიპოვოთ აგრეთვე ტოლობიდან

$$tg\varphi=\frac{b}{a}.$$

იმისათვის, რომ კომპლექსური რიცხვის არგუმენტი იყოს განსაზღვრული ცალსახად, საკმარისია შემოვიფარგლოთ 2π სიგრძის შუალედით. ასეთ შუალედად ჩვენ მივიღებთ $(-\pi;\pi]$ სიმრავლეს (ზოგიერთ შემთხვევაში გამოიყენება შუალედი $[0;2\pi)$).

მაგალითი 3. ვიპოვოთ შემდეგი კომპლექსური რიცხვების მოდული და არგუმენტი:

1) $z_1=2-2i$; 2) $z_2=-2+2i$; 3) $z_3=4$; 4) $z_4=-3$; 5) $z_5=i$; 6) $z_6=-2i$;

ა მ ო ხ ს ნ ა. 1) $z_1=2-2i$;

$$|z_1|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}; \quad tg\varphi_1=\frac{-2}{2}=-1.$$

რადგან z_1 რიცხვის გამომსახველი წერტილი მდებარეობს მეოთხე მეოთხედში (ნახ. 2.3), აქედან გამომდინარეობს, რომ $\varphi_1=-\frac{\pi}{4}$;

2) $z_2=-2+2i$;

$$|z_2|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}; \quad tg\varphi_2=\frac{2}{-2}=-1.$$

წინა შემთხვევისაგან განსხვავებით, შესაბამისი წერტილი მდებარეობს მეორე მეოთხედში (ნახ. 2.3), ამიტომ $\varphi_2=\frac{3}{4}\pi$;

3) $z_3=4$;

$$|z_3| = |4| = 4 .$$

რადგან ამ რიცხვის შესაბამისი წერტილი მდებარეობს OX ღერძზე მის დადებით ნაწილში (ნახ. 2.3), ამიტომ $\varphi_3 = 0$;

4) $z_4=-3$;

$$|z_4| = |-3| = 3 .$$

რადგან z_4 *რიცხვის შესაბამისი წერტილი მდებარეობს OX ღერძზე მის უარყოფით ნაწილში (ნახ. 2.3), ამიტომ* $\varphi_4 = \pi$;

5) $z_5=i=0+1i$;

$$|z_5| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,$$

ხოლო

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{2}$$

(z_5 *რიცხვის შესაბამისი წერტილი მდებარეობს OY ღერძზე მის დადებით ნაწილში (ნახ. 2.3)*);

6) $z_6=-2i=0-2i$; *ამ შემთხვევაში (იხ. ნახ. 2.3)*

$$|z_6| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2,$$

ხოლო

$$\varphi_6 = -\frac{\pi}{2} . \qquad \square$$

§3. კომპლექსური რიცხვის ტრიგონომეტრიული და მაჩვენებლიანი ფორმა

ვთქვათ, $z = a + bi$ ნებისმიერი არანულოვანი კომპლექსური რიცხვია. აღვნიშნოთ r-ით ამ რიცხვის მოდული, ხოლო φ-თი – არგუმენტი. (2.1) და (2.2) ტოლობებიდან მივიღებთ, რომ

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,,$$

საიდანაც

$$z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

ამრიგად, ნებისმიერი $z \neq 0$ კომპლექსური რიცხვი შეიძლება იყოს წარმოდგენილი შემდეგი სახით:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,, \qquad (3.1)$$

სადაც $r = |z|$, $\varphi = \arg z$. (3.1)-ს ეწოდება კომპლექსური რიცხვის ***ტრიგონომეტრიული ფორმა.***

ეილერის ფორმულის თანახმად, ნებისმიერი ნამდვილი φ რიცხვისათვის

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}\,.$$

ამის შესაბამისად, ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი შეიძლება ჩაიწეროს ე.წ. ***მაჩვენებლიანი (პოლარული) ფორმით:***

$$z = re^{i\varphi} = r \cdot \exp(i\varphi)\,. \qquad (3.2)$$

ვთქვათ, მოცემულია ორი კომპლექსური რიცხვი $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ და $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. ვიპოვოთ ამ რიცხვების ნამრავლი

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)\right] =$$
$$= r_1 r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right]. \qquad (3.3)$$

ამრიგად, ორი კომპლექსური რიცხვის გადამრავლებისას მათი მოდულები მრავლდება, ხოლო არგუმენტები იკრიბება:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$$

და

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

(უფრო ზუსტად, $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k$, სადაც $k \in Z$).

აქედან გამომდინარეობს, რომ მაჩვენებლიანი ფორმით ჩაწერილი კომპლექსური რიცხვების გადამრავლება შეიძლება განხორციელდეს ჩვეულებრივი წესით:

$$z_1 z_2 = \left(r_1 e^{i\varphi_1}\right)\left(r_2 e^{i\varphi_2}\right) = r_1 r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

მაგალითი1. ვიპოვოთ $z_1 = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$ და $z_2=3(\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$ კომპლექსური რიცხვების ნამრავლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (3.3)-ის თანახმად,

$$z_1 z_2 = 2\cdot 3\,[\cos(20^\circ + 40^\circ) + i\sin(20^\circ + 40^\circ)] =$$
$$=6(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 3+3\sqrt{3}i. \quad \square$$

თუ $z_1=z_2=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, მაშინ (3.3)-დან მივიღებთ

$$z_1^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

ეს წესი ინდუქციით შეიძლება განზოგადდეს ნებისმიერი ნატურალური n რიცხვისათვის:

$$[r(\cos\phi + i\sin\phi)]^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi). \qquad (3.4)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $r=1$, ვღებულობთ **მუავრის ფორმულას**

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi. \qquad (3.5)$$

მაჩვენებლიანი ფორმის შემთხვევაში (3.4) ღებულობს შემდეგ სახეს:

$$(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

მაგალითი 2. ვიპოვოთ $(2-2i)^6$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ჩავწეროთ კომპლექსური რიცხვი $z = 2-2i$ ტრიგონომეტრიული სახით. რადგან $|z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, ხოლო $\varphi = \arg z = -\dfrac{\pi}{4}$ (იხ. §2, მაგალითი 3), ამიტომ $2-2i = 2\sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right]$. (3.4) ფორმულის თანახმად,

$$(2-2i)^6 = \left(2\sqrt{2}\right)^6\left[\cos 6(-\frac{\pi}{4}) + i\sin 6(-\frac{\pi}{4})\right] = 512(0+i) = 512i. \ \square$$

ვთქვათ, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ და $z_2 \neq 0$. მაშინ

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\phi_1\cos\phi_2+\sin\phi_1\sin\phi_2+i(\sin\phi_1\cos\phi_2-\cos\phi_1\sin\phi_2)}{\cos^2\phi_2+\sin^2\phi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right], \qquad (3.6)$$

ე.ი.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

და

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2 .$$

მაჩვენებლიანი ფორმის შემთხვევაში

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} .$$

ვთქვათ, n ნატურალური რიცხვია. n-ური ხარისხის ფესვის განსაზღვრების თანახმად,

$$w=\sqrt[n]{z}\Leftrightarrow w^n=z .$$

თუ $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $(z\neq 0)$, ხოლო $w=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, მაშინ $w^n=z$ ტოლობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) .$$

აქედან

$$\rho^n=r$$

და

$$n\alpha = \varphi + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

ამ ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

($\sqrt[n]{r}$ არის არითმეტიკული ფესვი დადებითი r რიცხვიდან) და

$$\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \qquad (k \in Z). \qquad (3.7)$$

თუ უკანასკნელ ტოლობას ჩავწერთ

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

სახით, დავრწმუნდებით, რომ k-ს ნებისმიერი ორი მნიშვნელობისათვის, რომელთა სხვაობა n რიცხვის ჯერადია, α კუთხის შესაბამის მნიშვნელობათა სხვაობა იქნება 2π-ის ჯერადი. აქედან გამომდინარეობს, რომ n-ური ხარისხის ყველა ფესვის მისაღებად (3.7) ტოლობაში საკმარისია ავიღოთ k-ს ნებისმიერი n თანამიმდევრობითი მთელი მნიშვნელობა, მაგალითად, $0,1,2,\ldots,n-1$ (ან $1,2,\ldots,n$ და ა.შ.).

ამრიგად, n-ური ხარისხის ფესვი $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ კომპლექსური რიცხვიდან განსაზღვრავს n რაოდენობის კომპლექსურ რიცხვს

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (3.8)$$

სადაც $k=0,1,2,\ldots,n-1$ ($\sqrt[n]{r}$ არის ფესვის არითმეტიკული მნიშვნელობა).

მაგალითი 3. ვიპოვოთ $\sqrt[3]{8}$ ფესვის ყველა მნიშვნელობა და აღვნიშნოთ ისინი კომპლექსურ სიბრტყეზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $r=8$, $\varphi=0$, $n=3$, ამიტომ (3.8) ფორმულის თანახმად,

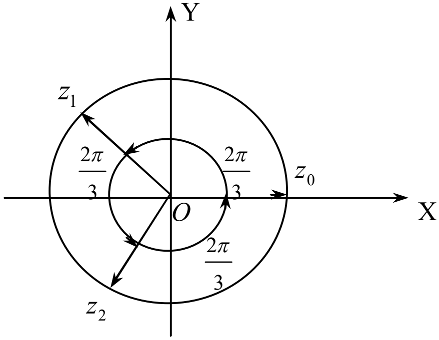
$$\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),\quad (k=0,1,2)$$

1) $k=0,\quad z_0=2(\cos 0+i\sin 0)=2;$

2) $k=1,\quad z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-1+i\sqrt{3};$

3) $k=2,\quad z_2=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-1-i\sqrt{3}.$

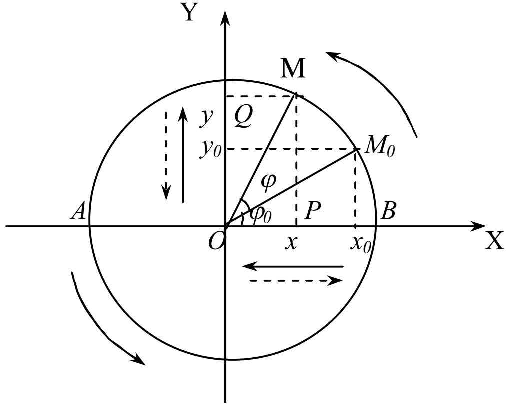
ავაგოთ $\sqrt[3]{8}$ ფესვის მიღებული მნიშვნელობები კომპლექსურ სიბრტყეზე:



ნახ. 3.1.

§4. კომპლექსური რიცხვების გამოყენება ცვლადი დენის ელექტროწრედების გაანგარიშებისას

ვთქვათ, მატერიალური M წერტილი თანაბრად მოძრაობს r-რადიუსიან წრეწირზე (ნახ. 4.1). დავუშვათ, რომ დროის საწყის $t=0$ მომენტში ის იმყოფებოდა M_0 მდგომარეობაში და $\angle BOM_0 = \varphi_0$.



ნახ. 4.1.

P-თი აღვნიშნოთ M მოძრავი წერტილის გეგმილი OX ღერძზე, ხოლო x-ით P წერტილის გადახრა წრეწირის O ცენტრიდან (ე.ი. მიმართული OP მონაკვეთის სიდიდე). თუ $\angle M_0OM = \varphi$, მაშინ $\angle BOM = \varphi_0 + \varphi$ და

$$x = OM \cdot \cos\angle BOM = r\cos(\varphi_0 + \varphi).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ თანაბარი მოძრაობის დროს კუთხე იცვლება დროის პროპორციულად, ე.ი.

$$\varphi = \omega t, \qquad (4.1)$$

აქედან მივიღებთ

$$x = r\cos(\varphi_0 + \omega t). \qquad (4.2)$$

(4.2) არის P წერტილის რხევის განტოლება. შევნიშნოთ, რომ, რადგან

$$\cos(\varphi_0 + \omega t) = \cos\varphi_0 \cos\omega t - \sin\varphi_0 \sin\omega t,$$

ამიტომ რხევის (4.2) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს აგრეთვე

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t \qquad (4.3)$$

სახით, სადაც

$$a = r\cos\varphi_0, \qquad b = -r\sin\varphi_0 .$$

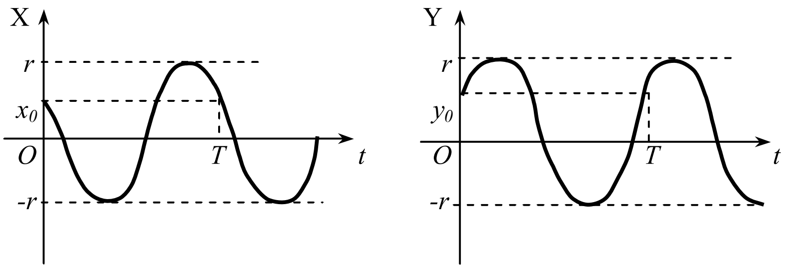
თუ მოძრავ M წერტილს დავაგეგმილებთ OY ღერძზე და შესაბამის წერტილს აღვნიშნავთ Q-თი (იხ. ნახ. 4.1), მაშინ Q წერტილის y გადახრისათვის მივიღებთ:

$$y = r\sin(\varphi_0 + \omega t) . \qquad (4.4)$$

რადგან

$$\cos(\varphi_0 + \omega t) = \sin\left(\varphi_0 + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) ,$$

ეს ნიშნავს, რომ როგორც (4.2), ისე (4.4) განტოლებით განსაზღვრული გადახრა იცვლება სინუსოიდური კანონის მიხედვით (ნახ. 4.2 ა და 4.2 ბ).



$x = r\cos(\varphi_0 + \omega t)$ — ა

$y = r\sin(\varphi_0 + \omega t)$ — ბ

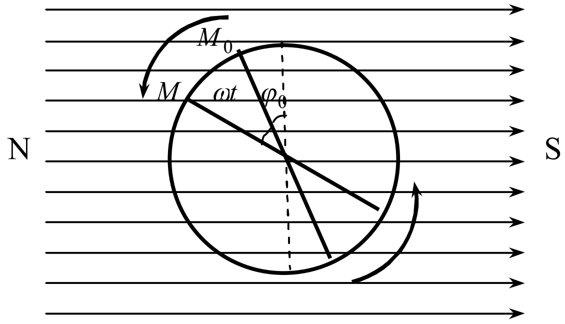
ნახ. 4.2.

მოძრაობას, რომელიც განისაზღვრება (4.2), (4.4) ან რაც იგივეა, (4.3) სახის განტოლებებით, ეწოდება მარტივი ჰარმონიული რხევა. დადებით r რიცხვს ეწოდება რხევის ამპლიტუდა, $\varphi_0 + \omega t$ -ს – რხევის ფაზა დროის t მომენტში, φ_0 კუთხეს – საწყისი ფაზა, ხოლო ω -ს – კუთხური სიხშირე. (4.1)-დან გამომდინარეობს, რომ ω კუთხური სიხშირე დროის ერთეულში მობრუნების კუთხის ტოლია, რის შესაბამისად

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

არის ის დრო, რა დროშიც მოძრავი M წერტილი ერთ სრულ ბრუნს შეასრულებს. ასეთ T რიცხვს ეწოდება რხევის პერიოდი.

სინუსოიდური კანონის მიხედვით იცვლება აგრეთვე ელექტრომამოძრავებელი ძალა (მოკლედ ემ ძალა), რომელიც გამომუშავდება ელექტროგენერატორების მიერ ელექტროსადგურებში. ეს გამოწვეულია იმით, რომ გენერატორის როტორი თანაბრად ბრუნავს მაგნიტურ ველში, რომელიც როტორის ღერძის პერპენდიკულარულადაა მიმართული (ნახ. 4.3).



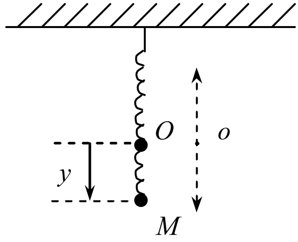
ნახ. 4.3.

თუ ძაბვის და დენის მაქსიმალურ მნიშვნელობებს (ამპლიტუდებს) აღვნიშნავთ შესაბამისად U_m და I_m-ით, მაშინ ძაბვის და დენის მყისი მნიშვნელობა (ე.ი. მნიშვნელობა დროის მოცემულ t მომენტში) განისაზღვრება შემდეგი ტოლობებიდან:

$$U(t) = U_m \cos(\varphi_0 + \omega t), \tag{4.5}$$

$$I(t) = I_m \cos(\varphi_0 + \omega t). \tag{4.6}$$

შევნიშნოთ, რომ ასეთივე კანონზომიერებებს ემორჩილება ზამბარის რხევისას მასზე დამაგრებული M მატერიალური წერტილის y გადახრა წონასწორობის O მდგომარეობიდან (მცირე გადახრების შემთხვევაში) (ნახ. 4.4).



ნახ. 4.4.

დავუბრუნდეთ ჰარმონიული რხევის ზოგად შემთხვევას. x^*-ით აღვნიშნოთ კომპლექსური რიცხვი, რომლის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებია შესაბამისად (4.2) და (4.4) ტოლობებით განსაზღვრული x და y რიცხვები, ე.ი.

$$x^* = x + iy = r\cos(\varphi_0 + \omega t) + ir\sin(\varphi_0 + \omega t) =$$

$$= r[\cos(\varphi_0 + \omega t) + i\sin(\varphi_0 + \omega t)] = re^{i(\varphi_0 + \omega t)} = re^{i\varphi_0}e^{i\omega t}. \qquad (4.7)$$

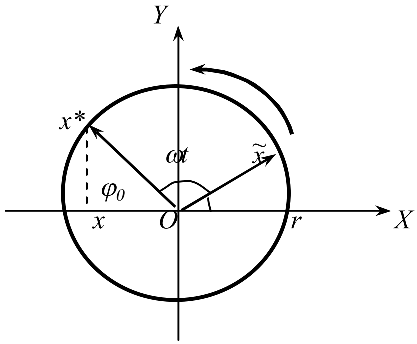
თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$\tilde{x} = re^{i\varphi_0}, \qquad (4.8)$$

მაშინ (4.7) - დან მივიღებთ:

$$x^* = \tilde{x}e^{i\omega t} = \tilde{x}\exp(i\omega t). \qquad (4.9)$$

კომპლექსური რიცხვის გეომეტრიული წარმოდგენიდან (იხ. §2) გამომდინარეობს, რომ x^* კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი წერტილი მიიღება $\tilde{x}$ კომპლექსური რიცხვის შესაბამისი წერტილიდან, მისი $\varphi = \omega t$ კუთხით მობრუნებით O სათავის გარშემო (ნახ. 4.5).



ნახ. 4.5.

(4.9) არის ჰარმონიული რხევის განტოლება, ჩაწერილი კომპლექსური სახით: შესაბამისი x გადახრა წარმოადგენს x^* კომპლექსური რიცხვის ნამდვილ ნაწილს:

$$x = \mathrm{Re}(\tilde{x} e^{i\omega t}) . \qquad (4.10)$$

ასეთი მიდგომის ეფექტურობა ის არის, რომ მათემატიკური ოპერაციების შესრულება $\exp(i\omega t)$ *ექსპონენტაზე გაცილებით უფრო მოსახერხებელია, ვიდრე კოსინუსებსა და სინუსებზე.*

მაგალითად, რადგან

$$\frac{dx^*}{dt} = \frac{d(\tilde{x} e^{i\omega t})}{dt} = \tilde{x} \frac{d\left(e^{i\omega t}\right)}{dt} = \left(i\omega\right) \tilde{x} e^{i\omega t} = i\omega x^* ,$$

ამიტომ

$$\frac{dx^*}{dt} = v^* \qquad (v^* = \tilde{v} e^{i\,\omega\, t})$$

სახის თანაფარდობა შეიძლება შეიცვალოს თანაფარდობით:

$$\left(i\omega\right)\ \tilde{x} e^{i\omega t} = \tilde{v} e^{i\omega t} ,$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$(i\omega)\tilde{x} = \tilde{v}\,.$$

ამრიგად, კომპლექსური სახით წარმოდგენის შემთხვევაში გაწარმოების ოპერაცია იცვლება კომპლექსურ $i\omega$ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციით:

$$\frac{dx^*}{dt} = v^* \Leftrightarrow (i\omega)\;\tilde{x} = \tilde{v}\;. \qquad (4.11)$$

ცვლადი ძაბვისა და დენის შემთხვევაში (4.8) და (4.9)-ის შესაბამისად (4.5) და (4.6)-ის გათვალისწინებით შეგვიძლია დავწეროთ

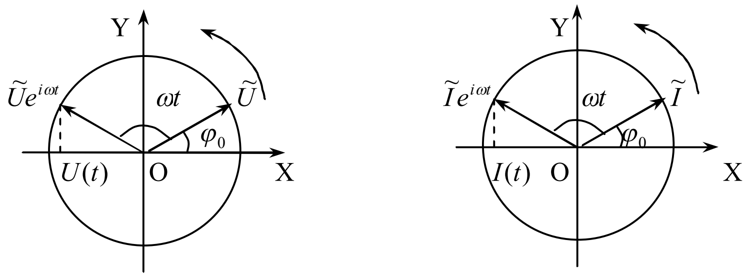
$$U^* = \tilde{U}e^{i\omega t} \qquad (I^* = \tilde{I}e^{i\omega t})\,, \qquad (4.12)$$

სადაც

$$\tilde{U} = U_m e^{i\varphi_0} \qquad (\tilde{I} = I_m e^{i\varphi_0})\,. \qquad (4.13)$$

იმისათვის, რომ $\tilde{U}\,(\tilde{I})$ მნიშვნელობიდან მივიღოთ ძაბვის (დენის) მყისი $U(t)$ $(I(t))$ მნიშვნელობა, $\tilde{U}\,(\tilde{I})$ კომპლექსური რიცხვი უნდა გავამრავლოთ $e^{i\omega t}$-ზე და ავიღოთ მიღებული კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი (ნახ. 4.6 ა და ნახ. 4.6 ბ)

$U(t) = \mathrm{Re}(\tilde{U} e^{i\omega t})$ $\qquad\qquad$ $\left(I(t) = \mathrm{Re}(\tilde{I} e^{i\omega t})\right).$



ა) $\qquad\qquad$ *ბ)*

ნახ. 4.6.

ცხადია, როგორც $\tilde{U}$, ისე $\tilde{U} e^{i\omega t}$ კომპლექსური რიცხვის მოდული ძაბვის მაქსიმალური U_m მნიშვნელობის (ე.ი. ამპლიტუ-დის) ტოლია. იგივე ითქმის ცვლადი დენის შესახებ.

ომის კანონის თანახმად, ნებისმიერ გამტარში გამავალი დენი ამ გამტარის ბოლოებზე მოდებული პოტენციალთა სხვაობის პროპორციულია:

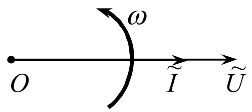
$$I = \frac{U}{R}.$$

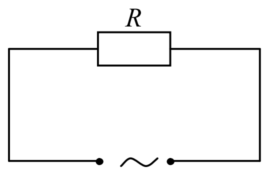
ამ პროპორციის $\frac{1}{R}$ კოეფიციენტს ეწოდება ***გამტარობა,*** *ხოლო გამტარობის შებრუნებულ R სიდიდეს –* ***გამტარის წინაღობა.*** *ეს თანაფარდობა მართებულია როგორც მუდმივი, ისე ცვლადი დენის შემთხვევაში (ცხადია, ცვლადი დენის შემთხვევაში U-სა და I-ში იგულისხმება მათი მყისი მნიშვნელობები).*

კომპლექსური სახით აღნიშნული თანაფარდობა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{R}. \qquad (4.14)$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ აღნიშნულ შემთხვევაში ძაბვა და დენი ერთ ფაზაში იმყოფებიან (ნახ. 4.7).





ნახ. 4.7.

როცა მავთულის ხვიაში (კოჭში) გადის დენი, წარმოიშობა მაგნიტური ველი. ამ ველის ცვლილებით კოჭის ყოველ ხვიაში და შესაბამისად, კოჭის ბოლოებზე წარმოქმნილი თვითინდუქციის ელექტრომამოძრავებელი ძალა დენის ცვლილების პროპორციულია, ე.ი.

$$U = L\frac{dI}{dt}.$$

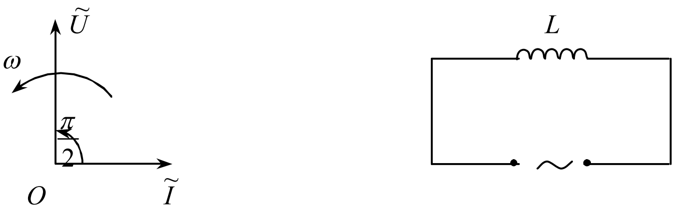
ამ პროპორციის L კოეფიციენტს ეწოდება კოჭის **თვითინდუქციის კოეფიციენტი.** (4.11)-ის შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\tilde{U} = (i\omega)L\tilde{I}. \qquad (4.15)$$

რადგან

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

(4.15)-დან გამომდინარეობს, რომ ინდუქციურობა ელექტროწრედში იწვევს დენის ფაზის $\frac{\pi}{2}$-ით ჩამორჩენას ძაბვის ფაზასთან შედარებით (ნახ. 4.8).



ნახ. 4.8.

თუ შემოვიღებთ შემდეგ აღნიშვნას:

$$Z_L = i\omega L\,, \tag{4.16}$$

მაშინ (4.15)-დან მივიღებთ:

$$\widetilde{U} = Z_L \widetilde{I} \tag{4.17}$$

ან, რაც იგივეა,

$$\widetilde{I} = \frac{\widetilde{U}}{Z_L}\,, \tag{4.18}$$

ე.ი. ინდუქციურობის შემცველ წრედში Z_L სიდიდე ასრულებს წინაღობის როლს. Z_L კომპლექსური რიცხვის მოდულს

$$|Z_L| = X_L = \omega L \tag{4.19}$$

ეწოდება **ინდუქციური წინაღობა.** რადგან

$$\left|\widetilde{U}\right| = U_m\,, \qquad \left|\widetilde{I}\right| = I_m\,,$$

ამიტომ (4.17)-დან ვღებულობთ:

$$U_m = \omega L I_m,$$

ე.ი. ძაბვის და დენის ამპლიტუდების შეფარდება ინდუქციური $X_L = \omega L$ წინაღობის ტოლია.

თუ კონდენსატორის ფირფიტებს დავმუხტავთ, მაშინ მათ შორის წარმოშობილი პოტენციალთა სხვაობა მოდებული მუხტის სიდიდის პროპორციული იქნება, ე.ი.

$$U = \frac{q}{C}. \tag{4.20}$$

ამ პროპორციის $\frac{1}{C}$ კოეფიციენტის შებრუნებულ C რიცხვს ეწოდება კონდენსატორის **ტევადობა**. რადგან

$$I = \frac{dq}{dt},$$

ამიტომ (4.11)-ის შესაბამისად

$$\tilde{I} = i\omega\tilde{q},$$

საიდან

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{I}}{i\omega}.$$

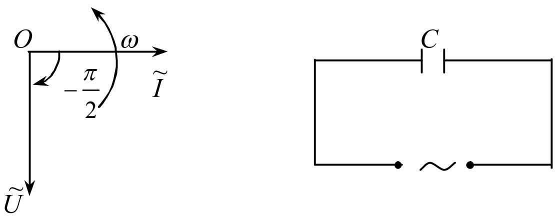
ამის გათვალისწინებით (4.20)-დან მივიღებთ:

$$\tilde{U} = \frac{\tilde{I}}{i\omega C}. \tag{4.21}$$

რადგან

$$\frac{1}{i} = i^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

(4.21) -დან გამომდინარეობს, რომ ტევადობა ელექტროწრედში იწვევს ძაბვის ფაზის ჩამორჩენას $\frac{\pi}{2}$-ით დენის ფაზასთან შედარებით (ნახ. 4.9).



ნახ.4.9.

წინა შემთხვევის ანალოგიურად შეიძლება დაიწეროს:

$$\tilde{U} = Z_C \tilde{I}\,, \qquad (4.22)$$

სადაც

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad (4.23)$$

და

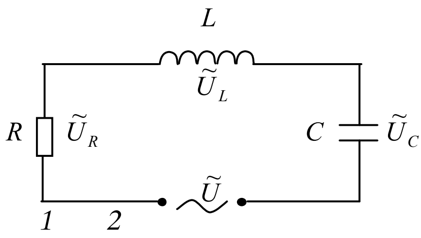
$$U_m = X_C I_m\,.$$

აქედან

$$X_C = \frac{1}{\omega C}\ . \qquad (4.24)$$

X_C *რიცხვს ეწოდება* ***ტევადობითი წინაღობა.***

გავაერთიანოთ სამივე შემთხვევა და განვიხილოთ ელექტროწრედი, რომელიც თანამიმდევრობით შეერთებული სამი ელემენტისგან შედგება (ნახ. 4.10).



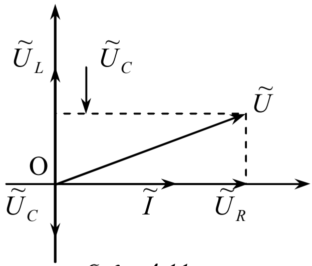
ნახ. 4.10.

კირხჰოფის კანონის თანახმად,

$$\tilde{U} = \tilde{U}_R + \tilde{U}_L + \tilde{U}_C\,,$$

საიდანაც (4.14), (4.17) და (4.22) ტოლობების გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$\tilde{U} = \left(R + Z_L + Z_C\right)\tilde{I}\ .$$



ნახ. 4.11.

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას:

$$Z = R + Z_L + Z_C\,,$$

შეიძლება დავწეროთ $\tilde{U} = Z\tilde{I}$, საიდანაც

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{Z}\,. \qquad (4.25)$$

ეს არის ომის კანონის განზოგადება ცვლადი დენის შემთხვევაში. Z კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება ***კომპლექსური იმპედანსი*** *(სრული წინაღობა). (4.16) და (4.23) ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ კომპლექსური იმპედანსი*

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \qquad (4.26)$$

R-ს ეწოდება ***აქტიური წინაღობა****, ხოლო*

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \qquad (4.27)$$

რეაქტიული წინაღობა*. რადგან*

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \, ,$$

ამიტომ სრული წინაღობა იქნება მინიმალური, როცა

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \, ,$$

ე.ი. როცა $X_L = X_C$ და

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \, . \qquad (4.28)$$

სრული წინაღობის მინიმალური მნიშვნელობა იქნება:

$$|Z|_{\min} = R \, .$$

(4.28) ტოლობით განსაზღვრულ სიხშირეს ***რეზონანსული*** *ეწოდება. ცხადია (იხ. ნახ. 4.11), ასეთ შემთხვევაში $\widetilde{U}_L$ და $\widetilde{U}_C$ რიცხვების მოდულები ტოლია და $\widetilde{U} = \widetilde{U}_R$.*

§5. მრავალწევრის დაშლა მამრავლებად

1. მრავალწევრი კომპლექსურ არეში. ალგებრის ძირითადი თეორემა.

ვთქვათ, n ნებისმიერი არაუარყოფითი მთელი რიცხვია. გამოსახულებას

$$p(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n , \qquad (5.1)$$

სადაც $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ კომპლექსური რიცხვებია, ამასთან $c_0 \neq 0$, ეწოდება ***n-ური ხარისხის მრავალწევრი*** *(ანუ* ***პოლინომი****). $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ რიცხვებს ეწოდება მრავალწევრის* ***კოეფიციენტები****.*

მაგალითად,

$$p(z) = 5z^2 - 2iz + \sqrt{3}$$

არის მეორე ხარისხის მრავალწევრი, ხოლო

$$q(z) = 3$$

– ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი.

თუ მრავალწევრის ყველა კოეფიციენტი ნულის ტოლია, მაშინ მას **ნულოვანი მრავალწევრი** ეწოდება. $p(z)=0$ ნულოვანი მრავალწევრის ხარისხი განსაზღვრული არ არის.

თუ z_0 კომპლექსური რიცხვია, მაშინ $p(z_0)$-ით აღინიშნება $p(z)$ მრავალწევრის მნიშვნელობა z_0 წერტილში, ე.ი.

$$p(z_0)=c_0 z_0{}^n+c_1 z_0{}^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_0+c_n .$$

მაგალითად, თუ $p(z)=3z^2-1$, მაშინ $p(i)=3i^2-1=-4$.

თუ

$$p(z_0)=0,$$

მაშინ z_0 კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება $p(z)$ **მრავალწევრის ფესვი**.

მაგალითად,

$$p(z)=z^2+1$$

მრავალწევრის ფესვებია $z_1=i$ და $z_2=-i$, რადგან

$$p(i)=i^2+1=0$$

და

$$p(-i)=(-i)^2+1=0 .$$

$p(z)=0$ განტოლებას ეწოდება **ალგებრული,** ხოლო $p(z)$ მრავალწევრის ხარისხს – ამ **განტოლების ხარისხი**.

ვთქვათ, $p(z)$ არის n ხარისხის $(n\geq 1)$ მრავალწევრი, ხოლო z_0 ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია. გავყოთ $p(z)$

მრავალწევრი $z-z_0$ *სხვაობაზე (ეს სხვაობა წარმოადგენს პირველი ხარისხის მრავალწევრს). მიღებული განაყოფი აღვნიშნოთ* $p_1(z)$ *-ით, ხოლო ნაშთი* r *-ით, ე.ი.*

$$p(z)=(z-z_0)p_1(z)+r. \qquad (5.2)$$

(5.2) ტოლობაში $p_1(z)$ *არის* $n-1$ *ხარისხის მრავალწევრი, ხოლო* r *გარკვეული კომპლექსური რიცხვი (ნულოვანი ხარისხის მრავალწევრი).*

მაგალითად, თუ $p(z)=2z^2-3z+1$, *ხოლო* $z_0=5$, *მაშინ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია,*

$$2z^2-3z+1=(z-5)(2z+7)+36.$$

აქ $p_1(z)=2z+7$, *ხოლო* $r=36$.

თეორემა 5.1 (ბეზუ). $p(z)$ *მრავალწევრის* $z-z_0$ *სხვაობაზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი უდრის ამ მრავალწევრის მნიშვნელობას* z_0 *წერტილში, ე.ი.*

$$r=p(z_0).$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ (5.2) ტოლობის ორივე ნაწილში შევიტანთ $z=z_0$ *მნიშვნელობას, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას.* □

შედეგი 5.2. *იმისათვის, რომ* z_0 *რიცხვი იყოს* $p(z)$ *მრავალწევრის ფესვი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოს* $z-z_0$ *სხვაობაზე.* □

ვთქვათ, z_0 *არის* n*-ური ხარისხის* $(n \geq 1)$ $p(z)$ *მრავალწევრის ფესვი. მაშინ* $p(z)$ *მრავალწევრი უნაშთოდ გაიყოფა* $z - z_0$ *სხვაობაზე:*

$$p(z) = (z - z_0)p_1(z). \qquad (5.3)$$

თუ $p_1(z_0) \neq 0$, *მაშინ* z_0*-ს ეწოდება* $p(z)$ *მრავალწევრის მარტივი ფესვი.*

მაგალითად, $z_0 = 1$ *არის* $z^3 - 1$ *მრავალწევრის მარტივი ფესვი, რადგან*

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1),$$

ხოლო $z^2 + z + 1$ *მრავალწევრის მნიშვნელობა* $z_0 = 1$ *წერტილში არ უდრის 0-ს.*

დავუშვათ ახლა, რომ z_0 *არის* $p_1(z)$ *მრავალწევრის ფესვიც. მაშინ* $p_1(z)$ *მრავალწევრი წარმოიდგინება* $(z - z_0)p_2(z)$ *სახით და (5.3)-დან მივიღებთ, რომ*

$$p(z) = (z - z_0)^2 p_2(z),$$

სადაც $p_2(z)$ *არის* $n-2$ *ხარისხის მრავალწევრი. თუ* z_0 *არის* $p_2(z)$ *მრავალწევრის ფესვიც, მაშინ ეს პროცესი გაგრძელდება. გარკვეული საფეხურის შემდეგ მივიღებთ ტოლობას:*

$$p(z) = (z - z_0)^k p_k(z),$$

სადაც k ნატურალური რიცხვია $(k \le n)$, $p_k(z)$ არის $n-k$ ხარისხის მრავალწევრი და $p_k(z_0) \ne 0$. ასეთ შემთხვევაში z_0 რიცხვს ეწოდება $p(z)$ მრავალწევრის k-ჯერადობის ფესვი.

მაგალითად, რიცხვი $z_0 = -2$ არის $p(z) = (z+2)^3(z^2 + +z+1)$ მრავალწევრის სამჯერადი ფესვი, რადგან $(-2)^2 + +(-2)+1 \ne 0$.

ჩვენ განვმარტეთ მრავალწევრის ფესვის ჯერადობა, მაგრამ საკითხავია, აქვს თუ არა საზოგადოდ ნებისმიერ მრავალწევრს ფესვი. დადებით პასუხს ამ კითხვაზე იძლევა ***ალგებრის ძირითადი თეორემა****, რომელიც 1799 წელს დაამტკიცა გამოჩენილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა კარლ ფრიდრიხ გაუსმა.*

თეორემა 5.3 (ალგებრის ძირითადი თეორემა). *ყოველ $p(z)$ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი $n \ge 1$, აქვს ერთი ფესვი მაინც, ნამდვილი ან კომპლექსური.* □

ამ თეორემის დამტკიცება ჩვენი კურსის ფარგლებს სცილდება.

თეორემა 5.4. *ყოველ $p(z)$ მრავალწევრს, რომლის ხარისხი $n \ge 1$, აქვს ზუსტად n ფესვი (ჯერადობის გათვალისწინებით).*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, z_1 არის

$$p(z) = c_0 z_0{}^n + c_1 z_0{}^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z_0 + c_n \quad (c_0 \ne 0)$$

მრავალწევრის ფესვი. მაშინ (იხ. (5.3))

$$p(z) = (z - z_1)p_1(z),$$

სადაც $p_1(z)$ არის $n-1$ ხარისხის მრავალწევრი. თუ $n-1 \geq 1$ (ე.ი. $n \geq 2$), მაშინ ალგებრის ძირითადი თეორემის თანახმად, $p_1(z)$ მრავალწევრს აქვს ერთი ფესვი მაინც. აღვნიშნოთ ეს ფესვი z_2-ით. მაშინ

$$p_1(z) = (z - z_2)p_2(z),$$

და, შესაბამისად,

$$p(z) = (z - z_1)(z - z_2)p_2(z),$$

სადაც $p_2(z)$ არის $n-2$ ხარისხის მრავალწევრი. თუ $n-2 \geq 1$, ეს პროცესი გაგრძელდება. საბოლოოდ მივიღებთ მრავალწევრის შემდეგ წარმოდგენას:

$$p(z) = c_0(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n). \qquad (5.4)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ რიცხვები $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (მათ შორის შეიძლება იყოს ტოლი რიცხვები) წარმოადგენს $p(z)$ მრავალწევრის ფესვებს. □

შედეგი 5.5. ყოველი მრავალწევრი იშლება წრფივ მამრავლებად.

მაგალითი 1. დავშალოთ $z^3 - 8 = 0$ მრავალწევრი წრფივ მამრავლებად.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ამოვხსნათ განტოლება

$$z^3 - 8 = 0.$$

ამ განტოლების ფესვებია (იხ. §3, მაგალითი 3) $z_1 = 2$,

$z_2 = -1+\sqrt{3}i$ და $z_3 = -1-\sqrt{3}i$. აქედან (5.4) ფორმულის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$z^3 - 8 = (z-2)\left[z-(-1+\sqrt{3}i)\right]\ \left[z-(-1-\sqrt{3}i)\right]. \quad \square$$

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, (5.4) ტოლობაში $z_1, z_2, ..., z_n$ რიცხვებს შორის შეიძლება იყოს ერთმანეთის ტოლი რიცხვები (ჯერადი ფესვები). თუ $z_1, z_2, ..., z_m$ ამ ფესვების განსხვავებული მნიშვნელობებია $(m \le n)$, ხოლო $k_1, k_2, ..., k_m$ შესაბამისი ჯერადობები, მაშინ (5.4)-ს შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$p(z) = c_0 (z-z_1)^{k_1} (z-z_2)^{k_2} \cdots (z-z_m)^{k_m},$$

სადაც $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

მაგალითად,

$$p(z) = z^6 - 6z^5 + 9z^4$$

მრავალწევრისათვის ასეთ დაშლას აქვს შემდეგი სახე:

$$p(z) = z^4 (z-3)^2.$$

მეექვსე ხარისხის ალგებრულ განტოლებას

$$z^6 - 6z^5 + 9z^4 = 0$$

ჯერადობის გათვალისწინებით აქვს ექვსი ფესვი ($z_1 = 0$ არის ოთხჯერადი ფესვი, ხოლო $z_2 = 3$ - ორჯერადი).

2. ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრის დაშლა წრფივ და კვადრატულ მამრავლებად.

ვთქვათ,

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_m \qquad (a_0 \neq 0)$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრია $(a_i \in R,\ i = 0,1,...,n)$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ კომპლექსურ რიცხვთა ჯამის და ნამრავლის შეუღლებული ამ რიცხვების შეუღლებული რიცხვების შესაბამისად ჯამის და ნამრავლის ტოლია, მივიღებთ, რომ ნებისმიერი კომპლექსური z_0 რიცხვისათვის

$$\overline{p(z_0)} = \overline{a_0 z_0{}^n + a_1 z_0{}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z_0 + a_n} =$$

$$= \overline{a_0 z_0{}^n} + \overline{a_1 z_0{}^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1} z_0} + \overline{a}_n =$$

$$= \overline{a}_0 \overline{z}_0{}^n + \overline{a}_1 \overline{z}_0{}^{n-1} + \cdots + \overline{a}_{n-1} \overline{z}_0 + \overline{a}_n =$$

$$= a_0 \overline{z}_0{}^n + a_1 \overline{z}_0{}^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \overline{z}_0 + a_n = p(\overline{z}_0)$$

$(\overline{a}_i = a_i$, რადგანაც $a_i \in R$). ამრიგად, $\forall z_0 \in C$,

$$\overline{p(z_0)} = p(\overline{z}_0). \qquad (5.5)$$

თეორემა 5.6. *თუ z_0 კომპლექსური რიცხვი არის ნამდვილკოეფიციენტებიანი $p(z)$ მრავალწევრის ფესვი, მაშინ ამ რიცხვის შეუღლებული $\overline{z}_0$ რიცხვიც იქნება ამ მრავალწევრის ფესვი.*

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. რადგან $p(z_0) = 0$, ამიტომ $\overline{p(z_0)} = 0$. მაგრამ (5.5)-ის ძალით $\overline{p(z_0)} = p(\overline{z}_0)$, საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი ტოლობა. □

შედეგი 5.7. *ნებისმიერ ნამდვილკოეფიციენტებიან კენტი ხარისხის ალგებრულ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ნამდვილი ფესვი.*

მართლაც, 5.6 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ასეთ განტოლებას შეიძლება არანამდვილ (წარმოსახვით) ფესვთა მხოლოდ ლუწი რაოდენობა ჰქონდეს. □

დავშალოთ ნამდვილკოეფიციენტებიანი მრავალწევრი წრფივ მამრავლებად:

$$p(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_m)^{k_m}\,. \qquad (5.6)$$

თუ ყველა ფესვი $z_1,z_2,...,z_m$ *ნამდვილია, მაშინ (5.6) წარმოადგენს ნამდვილკოეფიციენტებიან* $p(z)$ *მრავალწევრის დაშლას წრფივ მამრავლებად. დავუშვათ,* $z_1,z_2,...,z_m$ *ფესვებს შორის არსებობს არანამდვილიც. ვთქვათ,* $z_l=\alpha+\beta i$ $(\beta\neq 0)$ *ერთ-ერთი ასეთი ფესვია, მაშინ 5.6 თეორემის თანახმად* $z_1,z_2,...,z_m$ *რიცხვებს შორის იარსებებს* z_l *რიცხვის შეუღლებული რიცხვი* $z_j=\alpha-\beta i$. *გადავამრავლოთ (5.6) დაშლის შესაბამისი თანამამრავლები* $(z-z_l)(z-z_j)$:

$$(z-z_l)(z-z_j)=z^2-(z_l+z_j)z+z_lz_j=z^2-2\alpha z+\alpha^2+\beta^2\,. \qquad (5.7)$$

თუ შემოვიღებთ $-2\alpha=p$ *და* $\alpha^2+\beta^2=q$ *აღნიშვნას, (5.7) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:*

$$(z-z_2)(z-z_j)=z^2+pz+q\,,$$

სადაც p *და* q *ნამდვილი რიცხვებია და* $p^2-4q<0$.

ამრიგად. დამტკიცდა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.8 *ყოველი ნამდვილკოეფიციენტებიანი* $p(z)$ *მრავალწევრი შეიძლება დაიშალოს ნამდვილკოეფიციენტებიან მრავალწევრთა ნამრავლად, რომელთა ხარისხი ორს არ აღემატება:*

$$p(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}...(z-z_s)^{k_s}(z^2+p_1z\cdot+q_1)^{l_1}\cdots(z^2+p_tz\cdot+q_t)^{l_t}\,,\quad (5.8)$$

სადაც

$$a_0,z_1,...,z_s,p_1,q_1,...,p_t,q_t\in R,\ k_1,...,k_s,l_1,...,l_t\in N,$$

$$p_i^{\ 2}-4q_i<0\ \ (i=1,...,t)\,. \qquad \square$$

მაგალითად, თუ

$$p(z)=4z^4+8z^3+7z^2-2z-2\,,$$

მაშინ, როგორც ადვილად მოწმდება,

$$p(z)=4\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)(z^2+2z+2)\,.$$

უკანასკნელი თანამამრავლი (z^2+2z+2) *წარმოადგენს კვადრატულ სამწევრს, რომლის დისკრიმინანტი* $D=4-8=-4<0$. *ამიტომ ის ნამდვილკოეფიციენტებიან წრფივ მამრავლებად არ იშლება.*

II თავი. მატრიცთა ალგებრა და წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები

მატრიცა განისაზღვრება როგორც რიცხვებისაგან შედგენილი მართკუთხოვანი ცხრილი (იხ. §6). ტექნიკურ დარგებში მატრიცების საშუალებით ხდება სხვადასხვა სახის ინფორმაციის აღრიცხვა და შენახვა. გარდა ამისა, ბევრი საინჟინრო ამოცანა დაიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემაზე, ხოლო ასეთი სისტემების ჩაწერა და ამოხსნა მოსახერხებელია მატრიცული სახით. აღნიშნულ ამოცანებს მიეკუთვნება, მაგალითად, მუდმივი დენის ელექტროწრედის ანალიზის ამოცანა (იხ. §14). მატრიცთა თეორია გამოიყენება აგრეთვე სიგნალის აპროქსიმაციის ამოცანებში, რადიოსიგნალის ანალიზის დროს ხშირ შემთხვევაში მიზანშეწონილია რთული აგებულების სიგნალის მიახლოება (აპროქსიმაცია) უფრო მარტივი სიგნალების საშუალებით. ასეთი სახის ამოცანების ამოხსნა დაიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების ამოხსნაზე (იხ. §7 და §14). რა თქმა უნდა, აღნიშნული საკითხებით არ შემოიფარგლება მატრიცების და წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების თეორიის გამოყენება საინჟინრო მეცნიერებებში.

§6. მატრიცის ცნება. წრფივი ოპერაციები მატრიცებზე

ვთქვათ, $a_{ij}\,(i=1,2,...,m;\, j=1,2,...,n)$ გარკვეული რიცხვებია – ნამდვილი ან კომპლექსური. შევადგინოთ ამ რიცხვებისაგან მართკუთხოვანი ცხრილი

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

ასეთ ცხრილს ეწოდება $m\times n$ განზომილების მატრიცა. m არის სტრიქონების რაოდენობა, ხოლო n- სვეტებისა. შევნიშნოთ, რომ მატრიცა აღინიშნება აგრეთვე ასე:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ან

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

მაგალითად,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad (6.1)$$

არის 2×3 განზომილების მატრიცა, რადგან ის ორი სტრიქონისა და სამი სვეტისაგან შედგება.

a_{ij} ელემენტის ინდექსები i და j მიუთითებს შესაბამისად იმ სტრიქონისა და სვეტის ნომრებს, რომლებსაც ეკუთვნის ეს ელემენტი. მაგალითად, (6.1) ტოლობით მოცემულ A მატრიცაში $a_{12}=6$, ხოლო $a_{21}=-3$.

შევნიშნოთ, რომ მატრიცა არის მხოლოდ ცხრილი და მას არავითარი რიცხვითი მნიშვნელობა არ მიეწერება.

$m\times n$ განზომილების მატრიცას ხშირად სიმოკლისათვის აღნიშნავენ ასე: $A=(a_{ij})_{m\times n}$. ერთი და იმავე განზომილების ორ $A=(a_{ij})_{m\times n}$ და $B=(a_{ij})_{m\times n}$ მატრიცას ეწოდება ტოლი, თუ მათი შესაბამისი ელემენტები ტოლია, ე.ი. $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$.

განსაზღვრება. თუ A მატრიცის სტრიქონებს ჩავწერთ სვეტებად, მივიღებთ **ტრანსპონირებულ** A^T მატრიცას:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad \square$$

A მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა აღინიშნება აგრეთვე A' სიმბოლოთი.

მაგალითად, (6.1) ტოლობით მოცემული მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცაა

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

განსაზღვრება. მატრიცას, რომელიც შედგება ერთი სტრიქონისაგან, **სტრიქონ-მატრიცა** ეწოდება:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \qquad \square$$

განსაზღვრება. მატრიცას, რომელიც შედგება ერთი სვეტისაგან, **სვეტ-მატრიცა** ეწოდება:

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}. \qquad \square$$

ცხადია, სტრიქონ-მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა არის სვეტ-მატრიცა და პირიქით, სვეტ-მატრიცის ტრანსპონირებული მატრიცა სტრიქონ-მატრიცაა. მაგალითად, თუ

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

მაშინ

$$A^T=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

თუ $m=n$, ე.ი. A მატრიცის სტრიქონების რიცხვი მისი სვეტების რიცხვის ტოლია, მაშინ მატრიცას ეწოდება კვადრატული, ხოლო n რიცხვს – ამ კვადრატული მატრიცის რიგი.

მაგალითად,

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

არის მეორე რიგის კვადრატული მატრიცა.

კვადრატული

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (6.3)$$

მატრიცის $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ელემენტთა ერთობლიობას ეწოდება მატრიცის მთავარი დიაგონალი. (6.2) ტოლობით მოცემულ A მატრიცის მთავარი დიაგონალი 5 და 1 რიცხვებისაგან შედგება.

განსაზღვრება. კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება **სიმეტრიული**, თუ $A^T = A$. □

ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ სიმეტრიული (6.3) მატრიცისათვის სრულდება ტოლობა $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1,2,\dots,n)$, ე.ი. სიმეტრიული A მატრიცის ელემენტები სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი მატრიცის მთავარი დიაგონალის მიმართ. მაგალითად,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

არის მესამე რიგის სიმეტრიული მატრიცა.

განსაზღვრება. თუ კვადრატული მატრიცის ყველა ელემენტი, რომელიც არ მდებარეობს მთავარ დიაგონალზე, ნულის ტოლია, მაშინ მატრიცას დიაგონალური ეწოდება.

დიაგონალურ მატრიცას აქვს შემდეგი სახე:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

მაგალითად,

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

არის მესამე რიგის დიაგონალური მატრიცა.

ხშირად დიაგონალურ მატრიცას აღნიშნავენ ასე:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} \\ \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

განსაზღვრება. დიაგონალურ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი ერთმანეთის ტოლია, ეწოდება **სკალარული** :

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}. \qquad \square$$

განსაზღვრება. დიაგონალურ მატრიცას, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, ეწოდება **ერთეულოვანი** მატრიცა და აღინიშნება E ან I სიმბოლოთი

$$E=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

განსაზღვრება. მატრიცას, რომლის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, ეწოდება **ნულოვანი** და აღინიშნება 0 სიმბოლოთი

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

განსაზღვრება. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ და $B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ **მატრიცათა ჯამი** ეწოდება ისეთ $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი c_{ij} ელემენტი A და B მატრიცების შესაბამისი a_{ij} და b_{ij} ელემენტების ჯამის ტოლია: $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=1,2,\dots,m;$

$j=1,2,...,n)$. A და B მატრიცების ჯამი აღინიშნება $A+B$ სიმბოლოთი. □

მაგალითად, თუ

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} -6 & 3 & 21 \\ 7 & 0 & -40 \end{bmatrix},$$

მაშინ

$$A+B=\begin{bmatrix} 2-6 & 1+3 & 3+21 \\ -1+7 & 3+0 & 8-40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & 4 & 24 \\ 6 & 3 & -32 \end{bmatrix}.$$

განსაზღვრება. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ მატრიცის k **რიცხვზე ნამრავლი** ეწოდება ისეთ $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ მატრიცას, რომლის ყოველი c_{ij} ელემენტი A მატრიცის შესაბამისი a_{ij} ელემენტის და k რიცხვის ნამრავლის ტოლია:

$$c_{ij}=k\cdot a_{ij} \quad (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n). \qquad \square$$

მაგალითად, თუ

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 2 \end{bmatrix},$$

მაშინ

$$-3A=\begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 18 & -6 \end{bmatrix}.$$

აღვნიშნოთ, რომ მატრიცთა შეკრების და მატრიცის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციებს ეწოდება წრფივი ოპერაციები.

$E(m,n)$-ით აღვნიშნოთ $m \times n$ განზომილების ყველა მატრიცის სიმრავლე.

სავარჯიშო 6.1. დაამტკიცეთ, რომ $E(m,n)$ სიმრავლეში განსაზღვრული წრფივი ოპერაციები აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $\forall A, B, C \in E(m,n)$ და $\forall k, l \in R$.

1. $A + B = B + A$ (კომუტაციურობა);
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (ასოციაციურობა);
3. $A + 0 = A$;
4. $A + (-1)A = 0$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $(kl)A = k(lA)$;
7. $(k+l)A = kA + lA$;
8. $k(A+B) = kA + kB$ (დისტრიბუციულობა);
9. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
10. $(kA)^T = kA^T$.

მოყვანილი ტოლობებიდან გამომდინარეობს, რომ მატრიცთა შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია (ტოლობა 1) და ასოციაციური (ტოლობა 2), ხოლო ნულოვანი 0 მატრიცა $E(m,n)$ სიმრავლეში ასრულებს იმავე როლს, რასაც რიცხვი 0 ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ $(-1)A$ მატრიცას ეწოდება A-ს მოპირდაპირე და აღინიშნება $-A$ სიმბოლოთი. მე-4 ტოლობის თანახმად, $A + (-A) = 0$.

აღნიშნული თვისებებიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ $E(m,n)$ სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს აბელურ (კომუტაციურ) ჯგუფს (იხ. II ნაწ.).

§7. მატრიცების ნამრავლი

ვთქვათ, n ფიქსირებული ნატურალური რიცხვია. $\sum_{i=1}^{n} a_i$ სიმბოლოთი მათემატიკაში აღინიშნება $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ელემენტების (რიცხვების) ჯამი, ე.ი.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n . \qquad (7.1)$$

i-ს ეწოდება აჯამვის ინდექსი, ის გაირბენს ყველა ნატურალურ მნიშვნელობას 1-დან n-მდე. Aჯამვის ინდექსი შეიძლება შეიცვალოს ნებისმიერი სხვა ასოთი. ამით (7.1) ტოლობის შინაარსი არ შეიცვლება:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n .$$

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში აჯამვის ინდექსის ათვლა იწყება არა ერთიდან, არამედ სხვა ნატურალუ რი რიცხვიდან. მაგალითად,

$$\sum_{i=3}^{n} a_i = a_3 + a_4 + \cdots + a_n .$$

მართებულია ტოლობები:

1. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$;

2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$;

3. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

შევამოწმოთ მაგალითად, მეორე ტოლობა (სიმარტივისათვის ავიღოთ $n=3$).

$$\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) =$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} b_i .$$

სავარჯიშო 7.1. შევამოწმოთ დანარჩენი ორი ტოლობის მართებულობა.

განსაზღვრება. $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ და $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ **მატრიცების ნამრავლი** ეწოდება ისეთ $C=[c_{ij}]_{m\times p}$ მატრიცას, რომლის ყოველი ელემენტი განისაღვრება ტოლობით:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,p) . \tag{7.2}$$

A და B მატრიცების ნამრავლი აღინიშნება AB სიმბოლოთი. მივაქციოთ ყურადღება იმას, რომ A მატრიცის (ე.ი. პირველი მატრიცის) სვეტების რიცხვი B მატრიცის (ე.ი. მეორე მატრიცის) სტრიქონების რიცხვის ტოლი უნდა იყოს.

იმისათვის, რომ გასაგები გახდეს AB მატრიცის აგებულება, გადავწეროთ (7.2) ტოლობა გაშლილი სახით:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,. \tag{7.3}$$

რადგან (7.3) ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}$ ელემენტები ადგენენ A მატრიცის i-ურ სტრიქონს, ხოლო $b_{1j}, b_{2j}, ..., a_{nj}$ ელემენტები B-მატრიცის j-ურ სვეტს, აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ AB მატრიცის c_{ij} ელემენტის მისაღებად პირველი მატრიცის i-ური სტრიქონის ყოველი ელემენტი უნდა გავამრავლოთ მეორე მატრიცის j-ური სვეტის შესაბამის ელემენტზე და მიღებული ნამრავლები შევკრიბოთ. ცხადია, ასეთნაირად აგებულ AB მატრიცაში იქნება იმდენი სტრიქონი, რამდენიც არის პირველ მატრიცაში, და იმდენი სვეტი, რამდენიც არის მეორე მატრიცაში.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

მატრიცების ნამრავლი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან A მატრიცის სვეტების რიცხვი (სამი) ემთხვევა B მატრიცის სტრიქონების რიცხვს, ამიტომ AB ნამრავლი არსებობს. AB მატრიცის c_{ij} $(i=1,2; j=1,2)$ ელემენტების გამოსათვლელად ვისარგებლოთ (7.3) ფორმულით:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 3\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 4\cdot 5 = 25;$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{i2}b_{22} + a_{13}b_{32} = 3\cdot(-3) + (-1)\cdot(-4) + 4\cdot 6 = 19;$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -2\cdot 2 + 7\cdot 1 + 0\cdot 5 = 3;$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = (-2)\cdot(-3) + 7\cdot(-4) + 0\cdot 6 = -22.$$

ამრიგად,

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 19 \\ 3 & -22 \end{bmatrix}. \qquad (7.4)$$

ვიპოვოთ ახლა BA ნამრავლი (ეს ნამრავლიც არსებობს, რადგან B მატრიცის სვეტების რიცხვი (ორი) უდრის A მატრიცის სტრიქონების რიცხვს):

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + (-3)\cdot(-2) & 2\cdot(-1) + (-3)\cdot 7 & 2\cdot 4 + (-3)\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + (-4)\cdot(-2) & 1\cdot(-1) + (-4)\cdot 7 & 1\cdot 4 + (-4)\cdot 0 \\ 5\cdot 3 + 6\cdot(-2) & 5\cdot(-1) + 6\cdot 7 & 5\cdot 4 + 6\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -23 & 8 \\ 11 & -29 & 4 \\ 3 & 37 & 20 \end{bmatrix}. \qquad \square \qquad (7.5)$$

შენიშვნა. თუ შევადარებთ (7.4) და (7.5) ტოლობებს, მივიღებთ, რომ $AB \neq BA$, ე.ი. მატრიცთა ნამრავლის ოპერაცია არ არის კომუტაციური.

სავარჯიშო 7.2. შეამოწმეთ შემდეგი ტოლობების მართებულობა (იგულისხმება, რომ A, B, C, E და 0 მატრიცებს აქვთ შესაბამისი განზომილებები):

$$AE = EA = A, \quad (A+B)C = AC + BC, \quad A(B+C) = AB + AC,$$

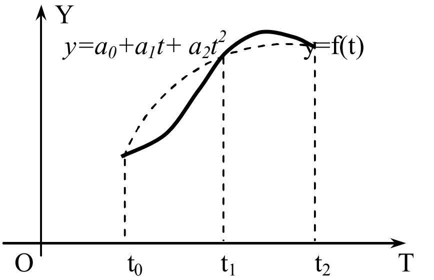
$$(AB)C = A(BC), \quad 0 \cdot A = A \cdot 0 = 0, \quad (AB)^T = B^T A^T .$$

შენიშვნა. ამ სავარჯიშოდან და წინა პარაგრაფის ბოლოს გაკეთებული შენიშვნიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი n-თვის კვადრატულ მატრიცთა $E(n,n)$ სიმრავლე წარმოადგენს რგოლს (იხ. II ნაწ.).

კავშირგაბმულობის ამოცანებში სიგნალთა ანალიზისას ხშირად საჭირო ხდება შედარებით რთული აგებულების სიგნალის აპროქსიმაცია (მისი მიახლოება) მრავალწევრით. მაგალითად, $f(t)$ სიგნალის აპროქსიმაცია მეორე ხარისხის მრავალწევრით ნიშნავს $f(t)$ ფუნქციის წარმოდგენას შემდეგი სახით:

$$f(t) \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 , \qquad (7.6)$$

სადაც a_0, a_1, a_2 მრავალწევრის კოეფიციენტებია, რომლებიც უნდა მოიძებნოს (ნახ. 7.1).



ნახ. 7.1.

საზოგადოდ, იმისათვის, რომ ცალსახად განისაზღვროს მეორე ხარისხის მრავალწევრი, უნდა ვიცოდეთ მისი მნიშვნელობა სამ განსხვავებულ წერტილში. თუ ეს წერტილებია შესაბამისად t_0, t_1 და t_2, მაშინ (7.6)-ის შესაბამისად შეგვიძლია დავწეროთ

$$\begin{cases} f(t_0) = a_0 + a_1 t_0 + a_2 t_0^2 \\ f(t_1) = a_0 + a_1 t_1 + a_2 t_1^2 \\ f(t_2) = a_0 + a_1 t_2 + a_2 t_2^2 \end{cases} . \tag{7.7}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$F = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ f(t_2) \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{7.8}$$

ცხადია, ასეთ აღნიშვნებში (7.7) სისტემა შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$F = TA \ . \tag{7.9}$$

მიღებულ მატრიცულ ტოლობაში A არის უცნობი მატრიცა (ამ მატრიცის a_0, a_1, a_2 ელემენტები მრავალწევრის საძიებელი

კოეფიციენტებია). ამის შესაბამისად, (7.9) სახის მატრიცულ ტოლობას უწოდებენ მატრიცულ განტოლებას, რომელსაც მე-11 პარაგრაფში შევისწავლით.

§8. მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტები. ძირითადი თვისებები. n – ური რიგის დეტერმინანტი

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია მეორე რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ რიცხვს ეწოდება A მატრიცის დეტერმინანტი და აღინიშნება $\det A$, $|A|$ ან

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

სიმბოლოთი. □

ამრიგად, მეორე რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} .$$

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-5) \cdot 3 = 27 .$$

სავარჯიშო 8.1. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$,

მაშინ ამ დეტერმინანტის სტრიქონები (სვეტები) პროპორციულია. □

შევნიშნოთ, რომ პირველი რიგის $A=[a]$ მატრიცის დეტერმინანტად მიღებულია თვით a რიცხვი, ე.ი. $|a|=a$.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია მესამე რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

და a_{ij} ამ მატრიცის ნებისმიერი ელემენტია. ამოვშალოთ A მატრიცაში i-ური სტრიქონი და j-ური სვეტი, ე.ი. ის სტრიქონი და ის სვეტი, რომელთა თანაკვეთაზე მდებარეობს ეს ელემენტი. ამოშლის შედეგად მიღებული მეორე რიგის მატრიცის დეტერმინანტი აღვნიშნოთ M_{ij}-თი. M_{ij} რიცხვს ეწოდება a_{ij} ელემენტის მინორი, ხოლო $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ რიცხვს – ამავე ელემენტის ალგებრული დამატება. □

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

მატრიცის a_{11}, a_{12} და a_{13} ელემენტების მინორები და ალგებრული დამატებები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. M_{11} მინორის გამოსათვლელად A მატრიცაში ამოვშალოთ პირველი სტრიქონი და პირველი სვეტი:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3 = 5 .$$

ანალოგიურად, პირველი სტრიქონის და მეორე სვეტის ამოშლით მიიღება მინორი

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -3 .$$

ასეთივე წესით გამოითვლება a_{13} ელემენტის მინორი

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = 4 .$$

შესაბამისი ალგებრული დამატებებია

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 5 ,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 3 ,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 4 . \qquad \square$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია მესამე რიგის კვადრატული მატრიცა

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} .$$

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ რიცხვს ეწოდება A მატრიცის დეტერმინანტი და აღინიშნება $\det A$, $|A|$ ან

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

სიმბოლოთი. □

ამრიგად, მესამე რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება ტოლობით:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \qquad (8.2)$$

მაგალითი 2. გამოვთვალოთ (8.1) ტოლობით მოცემული A მატრიცის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. თუ ვისარგებლებთ წინა მაგალითში ჩატარებული გამოთვლებით, მივიღებთ:

$$\Delta = 1\cdot 5 - 0\cdot 3 + 4\cdot 4 = 21. \qquad □$$

(8.2) ფორმულას მივცეთ სხვა სახე:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ, რომ მესამე რიგის დეტერმინანტი შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}, \qquad (8.3)$$

რაც სქემატურად ასახულია 8.1 ნახაზზე:

ნახ. 8.1

მაგალითი 3. გამოვთვალოთ წინა მაგალითში მოყვანილი დეტერმინანტი (8.3) ფორმულის საშუალებით:

ა მ ო ხ ს ნ ა.

Δ=1·1·(−1)+0·3·2+(−3)(−2)4−2·1·4−(−3)·0·(−1)−(−2)·3·1=21. □

მოვიყვანოთ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტის ძირითადი თვისებები. ყველა ამ თვისების მართებულობა (გარდა მე-11 თვისებისა) შეიძლება შემოწმდეს უშუალოდ (8.3) ფორმულის გამოყენებით.

თვისება 1. დეტერმინანტი არ შეიცვლება, თუ მოვახდენთ მის ტრანსპონირებას, ე.ი.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ დეტერმინანტის ყველა თვისება, რომელიც მართებულია სტრიქონებისათვის, მართებული იქნება აგრეთვე სვეტებისათვის.

თვისება 2. დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (ან სვეტის) ელემენტების მათ ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი მოცემული დეტერმინანტის ტოლია.

მაგალითად, თუ დეტერმინანტს დავშლით მეორე სვეტის მიხედვით, მივიღებთ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}.$$

თვისება 3. დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე ნამრავლთა ჯამი ნულის ტოლია.

მაგალითად, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$, რადგან დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის ელემენტებს აქ ვამრავლებთ არა მათ ალგებრულ დამატებებზე, არამედ მეორე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტების ალგებრულ დამატებებზე.

თვისება 4. ნებისმიერი ორი სტრიქონის (სვეტის) ურთიერთგადანაცვლებით დეტერმინანტი მხოლოდ ნიშანს იცვლის.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(აქ გადანაცვლებულია პირველი და მეორე სტრიქონი).

თვისება 5. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი ნულის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მაგალითად, შეგვიძლია პირდაპირ დავწეროთ, რომ

$$\begin{vmatrix} 2 & -17 & 131 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 71 & 19 \end{vmatrix} = 0,$$

რადგან ამ დეტერმინანტის მეორე სტრიქონის ყველა ელემენტი ნულის ტოლია.

თვისება 6. დეტერმინანტის ნებისმიერი სტრიქონის (სვეტის) ელემენტების საერთო მამრავლი შეიძლება გავიტანოთ დეტერმინანტის ნიშნის გარეთ.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 16 & 3 \\ 5 & -36 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -9 & 0 \end{vmatrix}$$

(მეორე სვეტიდან გატანილია საერთო მამრავლი 4).

თვისება 7.თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონის (სვეტის) შესაბამისი ელემენტები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

$$\begin{vmatrix} 31 & -7 & 58 \\ 7 & 3 & -13 \\ 31 & -7 & 58 \end{vmatrix} = 0,$$

რადგან ამ დეტერმინანტის პირველი და მესამე სტრიქონი ერთმანეთის ტოლია.

თვისება 8. თუ დეტერმინანტის რომელიმე ორი სტრიქონი (სვეტი) პროპორციულია, მაშინ დეტერმინანტი ნულის ტოლია.

მაგალითად,

$$\begin{vmatrix} -2 & 28 & 4 \\ 4 & -31 & -8 \\ 7 & 11 & -14 \end{vmatrix} = 0,$$

რადგან ამ დეტერმინანტის პირველი და მესამე სვეტი ერთმანეთის პროპორციულია (პროპორციულობის კოეფიციენტი $k=-2$).

თვისება 9. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტი წარმოდგენილია ორი შესაკრების ჯამის სახით, მაშინ თვით დეტერმინანტიც წარმოიდგინება შესაბამისი დეტერმინანტების ჯამის სახით.

ამ თვისების თანახმად,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

თვისება 10. თუ დეტერმინანტის რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ყოველ ელემენტს მივუმატებთ რომელიმე სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტს, გამრავლებულს ერთსა და იმავე რიცხვზე, მაშინ დეტერმინანტი არ შეიცვლება.

ამ თვისების გამოყენების საილუსტრაციოდ გამოვთვალოთ მე-2 მაგალითში მოყვანილი დეტერმინანტი

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

უნდა ვეცადოთ ისე გარდავქმნათ დეტერმინანტი, რომ მისი რომელიმე სტრიქონის ან სვეტის ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა, გახდეს ნულის ტოლი. ჩვენს შემთხვევაში ეს ადვილი გასაკეთებელია, მაგალითად, მეორე სვეტისათვის (ამ სვეტში არის ერთი ნულოვანი ელემენტი). ამისათვის დეტერინანტის მესამე სტრიქონის ელემენტებს მივუმატოთ 2-ზე გამრავლებული მეორე სტრიქონის შესაბამისი ელემენტები:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2+2\cdot(-3) & -2+2\cdot 1 & -1+2\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

მიღებული დეტერმინანტი დავშალოთ მეორე სვეტის მიხედვით (ე.ი. იმ სვეტის მიხედვით, რომლის ყველა ელემენტი, გარდა ერთისა, ნულის ტოლია) და გამოვთვალოთ მიღებული ჯამი:

$$\Delta = a_{12}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{23} = 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 21.$$

შედეგი. დეტერმინანტის მნიშვნელობა არ შეიცვლება, თუ მისი რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) ელემენტებს გამოვაკლებთ სხვა რომელიმე სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტებს.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ დეტერმინანტის კიდევ ერთი თვისება.

თვისება 11. თუ A და B ერთი და იმავე რიგის კვადრატული მატრიცებია, მაშინ

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B\,,$$

ე.ი. მატრიცათა ნამრავლის დეტერმინანტი ამ მატრიცების დეტერმინანტების ნამრავლის ტოლია.

მესამე რიგის დეტერმინანტი ჩვენ განვსაზღვრეთ მეორე რიგის დეტერმინანტების (ალგებრული დამატებების) საშუალებით. ანალოგიურად, მეოთხე რიგის დეტერმინანტი განისაზღვრება მესამე რიგის დეტერმინანტების საშუალებით (ალგებრული დამატებები ასეთ შემთხვევაში გარკვეული ნიშნით აღებულ მესამე რიგის მინორებს წარმოადგენს), მეხუთე რიგის დეტერმინანტი – მეოთხე რიგის დეტერმინანტების საშუალებით და ა.შ. ზოგადად, n-ური რიგის დეტერმინანტი

განისაზღვრება ინდუქციით $n-1$ რიგის დეტერმინანტების საშუალებით:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_{1i} \ ,$$

სადაც ყოველი A_{ij} არის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება (ე.ი. გარკვეული ნიშნით აღებული $n-1$ რიგის მინორი).

შევნიშნოთ, რომ მეორე და მესამე რიგის დეტერმინანტის ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი თვისება მართებულია ნებისმიერი რიგის დეტერმინანტისათვის.

მაგალითი 4. გამოვთვალოთ მეოთხე რიგის დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. პირველ სვეტს გამოვაკლოთ მესამე, შემდეგ მესამე სტრიქონს მივუმატოთ პირველი, გამრავლებული (-2)-ზე, და მიღებული დეტერმინანტი დავშალოთ პირველი სვეტის მიხედვით;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 8 . \quad \square$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია. n-ური რიგის

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

დეტერმინანტს ეწოდება **ვანდერმონდის დეტერმინანტი.**

n-ის მიმართ ინდუქციით შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$\Delta_n = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)\cdots$$
$$\cdots(x_n - x_2)\cdots(x_n - x_{n-1}).$$

ეს ტოლობა შეიძლება ჩაიწეროს აგრეთვე

$$\Delta_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \tag{8.4}$$

სახით, სადაც $\prod$ გამრავლების სიმბოლოა.

შედეგი 8.2. თუ $x_j \neq x_i \quad (i \neq j)$, მაშინ ვანდერმონდის დეტერმინანტი $\Delta_n \neq 0$. $\square$

როცა $n=3$, მაშინ (8.4) ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \,. \tag{8.5}$$

სავარჯიშო 8.3. დაამტკიცეთ (8.5) ტოლობა.

მაგალითი 5. გამოთვალეთ დეტერმინანტი

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}.$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან Δ არის ვანდერმონდის მესამე რიგის დეტერმინანტი $(x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4)$, ამიტომ (8.5) ფორმულის თანახმად,

$$\Delta = (3-2)(4-2)(4-3) = 2 . \square$$

§9. შებრუნებული მატრიცა

განსაზღვრება. ვთქვათ, A კვადრატული მატრიცაა. B მატრიცას ეწოდება A მატრიცის **შებრუნებული**, თუ

$$AB = BA = E , \tag{9.1}$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა.

სავარჯიშო 9.1. დაამტკიცეთ, რომ, თუ არსებობს A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა, მაშინ ის ერთადერთია. $\square$

A მატრიცის შებრუნებულ მატრიცას (თუ ის არსებობს) აღნიშნავენ A^{-1} სიმბოლოთი.

სავარჯიშო 9.2. დაამტკიცეთ, რომ $(A^{-1})^{-1} = A$ და $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

განსაზღვრება. კვადრატულ A მატრიცას ეწოდება არაგადაგვარებული (ან არაგანსაკუთრებული), თუ $\det A \neq 0$. $\square$

თეორემა 9.3. იმისათვის. რომ კვადრატული A მატრიცისათვის არსებობდეს შებრუნებული A^{-1} მატრიცა, აუცილებელია და საკმარისი, რომ A მატრიცა იყოს არაგადაგვარებული.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. აუცილებლობა. ვთქვათ, არსებობს A^{-1}, მაშინ (9.1)-ის თანახმად $AA^{-1} = E$, ამიტომ

$$\det(AA^{-1}) = \det E\ ,$$

მაგრამ $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$, ხოლო $\det E = 1$, ამიტომ

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1\ .$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\det A \neq 0$, ე.ი. A არაგადაგვარებული მატრიცაა.

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

არაგადაგვარებული მატრიცაა. განვიხილოთ ახალი მატრიცა

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

სადაც A_{ij} არის A მატრიცის a_{ij} ელემენტის ალგებრული დამატება $(i, j = 1,2,...,n)$. A^* მატრიცას ეწოდება A მატრიცის **მიკავშირებული** (მიაქციეთ ყურადღება იმას, რომ A^* მატრიცაში

a_{ij} ელემენტის ადგილზე დგას არა ამ ელემენტის, არამედ a_{ji} ელემენტის ალგებრული დამატება A_{ji}).

დავამტკიცოთ, რომ

$$\mathrm{B}=\frac{1}{\Delta}A^*, \tag{9.2}$$

სადაც $\Delta=\det A$, არის A მატრიცის შებრუნებული მატრიცა. A^* და B მატრიცების ნამრავლი აღვნიშნოთ C-თი. თუ $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$, მაშინ

$$b_{kj}=\frac{1}{\Delta}A_{jk} \qquad (k,j=1,2,...,n)$$

და

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{1}{\Delta}A_{jk}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk} \qquad (i,j=1,2,...,n).$$

თუ გავითვალისწინებთ დეტერმინანტის მე-2 და მე-3 თვისებებს, მივიღებთ:

$$c_{ii}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\frac{1}{\Delta}\Delta=1,$$

ხოლო, როცა $i\neq j$

$$c_{ij}=\frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\frac{1}{\Delta}\cdot 0=0.$$

ამრიგად,

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & \text{თუ} \quad i=j\\ 0, & \text{თუ} \quad i\neq j.\end{cases}$$

ეს ნიშნავს, რომ $C=[c_{ij}]$ მატრიცის მთავარ დიაგონალზე მდგომი ყველა ელემენტი ერთის ტოლია, ხოლო სხვა დანარჩენი ნულის ტოლია, ე.ი. C ერთეულოვანი მატრიცაა. რადგან $C=AB$, ამიტომ

$$AB=E.$$

ანალოგიურად დამტკიცდება ტოლობა :

$$BA=E.$$

ამ ორი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ (9.2) ტოლობით განსაზღვრული B მატრიცა არის A მატრიცის შებრუნებული. ამრიგად,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}. \qquad \square \tag{9.3}$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

მატრიცის შებრუნებული მატრიცა.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-60\neq 0,$$

ამიტომ A^{-1} მატრიცა არსებობს. ვიპოვოთ A მატრიცის ელემენტების ალგებრული დამატებები:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-18, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-28,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-15,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 8 & -5\end{vmatrix}=-17,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & -5\end{vmatrix}=-3,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 8\end{vmatrix}=2.$$

აქედან

$$A^{*}=\begin{bmatrix}-2 & -5 & -17\\ -18 & -15 & -3\\ -28 & -10 & 2\end{bmatrix},$$

ხოლო

$$A^{-1}=-\frac{1}{60}A^{*}=\begin{bmatrix}\frac{1}{30} & \frac{1}{12} & \frac{17}{60}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{20}\\ \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30}\end{bmatrix}. \qquad \square$$

§10. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემები. სისტემის ამოხსნა გაუსის მეთოდით.

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}. \qquad (10.1)$$

აქ $x_1, x_2, ..., x_n$ უცნობებია, ხოლო $a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}, b_1, b_2, ..., b_m$ ცნობილი რიცხვები. a_{ij} რიცხვებს ეწოდება **კოეფიციენტები**, ხოლო b_i-ს – **თავისუფალი წევრები** $(i = 1,2,...m; j = 1,2,...,n)$. n არის უცნობთა რიცხვი, m – განტოლებათა რიცხვი. თუ $n = m$, მაშინ სისტემას ეწოდება **კვადრატული.**

თუ (10.1) სისტემის ყველა თავისუფალი წევრი $b_i = 0$ $(i = 1,2,...m)$, მაშინ სისტემას ეწოდება **ერთგვაროვანი.** წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. როცა b_i რიცხვებს შორის ერთი მაინც არანულოვანი რიცხვია, სისტემას ეწოდება არაერთგვაროვანი.

მაგალითად, სისტემა

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \qquad (10.2)$$

არის არაერთგვაროვანი.

განსაზღვრება. დალაგებულ რიცხვთა $x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0$ ერთობლიობას ეწოდება (10.1) **სისტემის ამონახსენი,** თუ $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, ..., x_n = x_n^0$ ჩასმა (10.1) სისტემის ყოველ განტოლებას იგივეობად გადააქცევს. □

მაგალითად, რიცხვთა წყვილი (2;1) არის (10.2) სისტემის ამონახსენი, რადგან x=2, y=1 ჩასმა ამ სისტემის ორივე განტოლებას იგივეობად გადააქცევს. ადვილად დავრწმუნდებით, რომ მოცემულ სისტემას სხვა ამონახსენი არა

აქვს. ამავე დროს, ზოგადად, სისტემას შეიძლება ჰქონდეს ამონახსენთა უსასრულო რაოდენობა. მაგალითად,

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \qquad (10.3)$$

სისტემის ამონახსნებია (0;0), (1;1), (–1;–1), (2;2) და, ზოგადად, ნებისმიერი (a,a) სახის წყვილი, სადაც $a\in R$. აღვნიშნოთ ისიც, რომ სისტემას საერთოდ შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსე, ნი. მაგალითად,

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x-y=1 \end{cases} \qquad (10.4)$$

სისტემას არ გააჩნია ამონახსენი.

განსაზღვრება. თუ განტოლებათა სისტემას აქვს ერთი მაინც ამონახსენი, მას ეწოდება **თავსებადი**, წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. როცა არც ერთი ამონახსენი არა აქვს, სისტემას ეწოდება **არათავსებადი**. □

მაგალითად, (10.2) და (10.3) თავსებადი სისტემებია, ხოლო (10.4) სისტემა არათავსებადია. ნებისმიერი ერთგვაროვანი სისტემა თავსებადია, რადგან $(0;0;\ldots;0)$ ყოველთვის არის სისტემის ამონახსენი.

განსაზღვრება. ორ სისტემას ეწოდება **ტოლფასი** (ანუ ეკვივალენტური), თუ მათი ამონახსენთა სიმრავლეები ტოლია. □

აღვნიშნოთ, რომ ერთი და იმავე უცნობების შემცველი ნებისმიერი ორი არათავსებადი სისტემა ეკვივალენტურია.

თუ სისტემის რომელიმე განტოლებას მივუმატებთ (ან გამოვაკლებთ) ამავე სისტემის სხვა რომელიმე განტოლებას, ხოლო სისტემის დანარჩენ განტოლებებს უცვლელად დავტოვებთ, მივიღებთ მოცემული სისტემის ეკვივალენტურ სისტემას. სწორედ ამ თვისებას ეყრდნობა სისტემის ამოხსნის **გაუსის მეთოდი**, რომელსაც უწოდებენ აგრეთვე უცნობთა **გამორიცხვის მეთოდს**. გაუსის მეთოდის არსი ისაა, რომ ზემოთ აღნიშნული სახის გარდაქმნებით ამოსახსნელი სისტემა დაგვყავს მის ტოლფას ე.წ. სამკუთხა სისტემაზე.

გავარჩიოთ გაუსის მეთოდი მაგალითების მიხედვით.

მაგალითი 1. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x-3y+4z=10 \\ -2x+8y-5z=-16 \\ 4x-2y+z=0. \end{cases} \tag{10.5}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვრიცხოთ x უცნობი მეორე და მესამე განტოლებიდან. ამისათვის მეორე განტოლებას მივუმატოთ პირველი, გამრავლებული 2-ზე, ხოლო მესამე განტოლებას – ისევ პირველი, გამრავლებული –4-ზე:

$$\begin{cases} x-3y+4z=10 \\ 2y+3z=4 \\ 10y-15z=-40\ . \end{cases}$$

მიღებული სისტემის მეორე განტოლება გავყოთ 2-ზე, ხოლო მესამე 5-ზე:

$$\begin{cases} x-3y+4z=10 \\ \quad y+1,5z=2 \\ \quad 2y-3z=-8. \end{cases}$$

გამოვრიცხოთ ახლა მესამე განტოლებიდან y უცნობი. ამისათვის მესამე განტოლებას მივუმატოთ მეორე, გამრავლებული –2-ზე:

$$\begin{cases} x-3y+4z=10 \\ \quad y+1,5z=2 \\ \quad -6z=-12. \end{cases}$$

მიღებული სისტემის ამოხსნა უნდა დავიწყოთ უკანასკნელი $-6z=-12$ განტოლებით. აქედან ნაპოვნი მნიშვნელობა $z=2$ შეგვაქვს მეორე განტოლებაში $y+1,5z=2$, საიდანაც ვპოულობთ y უცნობის მნიშვნელობას $y=-1$. ამის შემდეგ $y=-1$ და $z=2$ მიღებული მნიშვნელობები შეგვაქვს პირველ განტოლებაში $x-3y+4z=10$, საიდანაც ვღებულობთ x უცნობის მნიშვნელობას $x=-1$.

ამრიგად, (10.5) სისტემა თავსებადია და (-1; -1; 2) არის ამ სისტემის ერთადერთი ამონახსენი.

შევნიშნოთ, რომ (10.5) სისტემის აღნიშნული გარდაქმნა შეიძლება ჩაიწეროს მატრიცული სახით:

$$y=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 10 \\ -2 & 8 & -5 & -16 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & -15 & -40 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 4 & 10\\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2\\ 0 & 2 & -3 & -8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 4 & 10\\ 0 & 1 & 1{,}5 & 2\\ 0 & 0 & -6 & -12\end{array}\right]. \qquad \square$$

მაგალითი 2. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x-y+z=0\\ 2x+y-3z=1\\ 3x+3y-7z=2.\end{cases} \tag{10.6}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. გამოვრიცხოთ x უცნობი მეორე და მესამე განტოლებიდან:

$$\begin{cases} x-y+z=0\\ 2x+y-3z=1\\ 3x+3y-7z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0\\ 3y-5z=1\\ 6y-10z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0\\ 3y-5z=1\\ 3y-5z=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0\\ 3y-5z=1\end{cases}.$$

თუ z უცნობს მივანიჭებთ ნებისმიერ $z=t$ მნიშვნელობას, მაშინ მეორე განტოლებიდან მივიღებთ y უცნობის შესაბამის მნიშვნელობას $y=\dfrac{5t+1}{3}$. y და z უცნობების მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ პირველ განტოლებაში და ვიპოვოთ x უცნობის შესაბამისი მნიშვნელობა $x=\dfrac{2t+1}{3}$. ამრიგად, ნებისმიერი t რიცხვისათვის $x=\dfrac{2t+1}{3}$, $y=\dfrac{5t+1}{3}$, $z=t$ წარმოადგენს (10.6) სისტემის ამონახსენს, ე.ი. სისტემა თავსებადია და მას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე

$$\left(x=\frac{2t+1}{3},\ y=\frac{5t+1}{3},\ t\,\middle|\, t\in R\right).$$

თუ t პარამეტრს მივანიჭებთ გარკვეულ რიცხვით მნიშვნელობას, მივიღებთ სისტემის ერთ-ერთ ამონახსენს.

მაგალითად, პარამეტრის $t=1$ მნიშვნელობას შეესაბამება ამონახსენი (1;2;1), ხოლო $t=4$ მნიშვნელობას – ამონახსენი (3;7;4). □

მაგალითი 3. ამოვხსნათ სისტემა

$$\begin{cases} x+\quad y-2z=0 \\ -2x\quad +\quad 5z=5 \\ 3x+5y-5z=8. \end{cases} \tag{10.7}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ სისტემის შესაბამისი გარდაქმნა

$$\begin{cases} x+\ y-2z=0 \\ -2x\quad +\ 5z=5 \\ 3x+5y-5z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2z=0 \\ 2y+z=5 \\ 2y+z=8 \end{cases}$$

გამოვაკლოთ მესამე განტოლებას მეორე:

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2y+\ z=5 \\ 0=3 \end{cases} .$$

რადგან $0\neq 3$, ამიტომ სისტემა არათავსებადია. არათავსებადი იქნება აგრეთვე ამ სისტემის ეკვივალენტური სისტემა (10.7). □

§11. წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემების მატრიცული ფორმა. კრამერის ფორმულები

1. **წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ჩაწერა და ამოხსნა მატრიცული სახით.** ვთქვათ, მოცემულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{11.1}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

ვიპოვოთ A და x მატრიცათა ნამრავლი

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

რადგან Ax სვეტ-მატრიცის პირველი სტრიქონი წარმოადგენს (11.1) სისტემის პირველი განტოლების მარცხენა ნაწილს, მეორე სტრიქონი – მეორე განტოლების მარცხენა ნაწილს და ა.შ., ამიტომ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (11.1) სისტემა შეიძლება შეიცვალოს ერთი მატრიცული განტოლებით:

$$Ax = b. \tag{11.2}$$

თუ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ არის (11.1) სისტემის ამონახსენი, მაშინ სვეტ-მატრიცა

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T \tag{11.3}$$

იქნება მატრიცული (11.2) განტოლების ამონახსენი, და პირიქით, თუ (11.3) არის მატრიცული (11.2) განტოლების ამონახსენი, მაშინ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ იქნება (11.1) სისტემის ამონახსენი.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა სისტემა (11.1) კვადრატულია, ე.ი. როცა სისტემაში შემავალ განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვის ტოლია $(m = n)$. A მატრიცა ასეთ შემთხვევაში იქნება კვადრატული.

თეორემა 11.1. თუ $\det A \neq 0$, მაშინ (11.2) მატრიცულ განტოლებას აქვს ამონახსენი, ეს ამონახსენი ერთადერთია და განისაზღვრება ტოლობით

$$x = A^{-1} b . \tag{11.4}$$

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თეორემის პირობის ძალით $\det A \neq 0$, ამიტომ არსებობს შებრუნებული მატრიცა A^{-1}. რადგან

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b ,$$

ამიტომ სვეტ-მატრიცა $x = A^{-1}b$ არის $Ax = b$ მატრიცული განტოლების ამონახსენი.

დავამტკიცოთ, რომ (11.2) მატრიცულ განტოლებას სხვა ამონახსენი არა აქვს. მართლაც, ვთქვათ $x = x_0$ არის (11.2) განტოლების რომელიმე ამონახსენი. მაშინ შესრულდება მატრიცული ტოლობა:

$$Ax_0 = b .$$

ამ ტოლობის ორივე ნაწილი მარცხნიდან გავამრავლოთ A^{-1} მატრიცაზე

$$A^{-1}(Ax_0) = A^{-1}b . \qquad (11.5)$$

რადგან

$$A^{-1}(Ax_0) = (A^{-1}A)x_0 = Ex_0 = x_0 ,$$

ამიტომ (11.5)-დან მივიღებთ:

$$x_0 = A^{-1}b ,$$

რაც ამონახსენის ერთადერთობას ამტკიცებს. □

შედეგი 11.2. თუ $\det A \neq 0$, მაშინ

$$Ax = 0$$

მატრიცულ განტოლებას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} = [0, 0, \dots , 0]^T . \qquad □$$

მაგალითი 1. შემდეგი სისტემა ჩავწეროთ მატრიცული ფორმით და ამოვხსნათ:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 10 \\ -2x + 8y - 5z = -16 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases} . \qquad (11.6)$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad x=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

რადგან

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-60\neq 0,$$

ამიტომ $Ax=b$ მატრიცული განტოლების ერთადერთი ამონახსენია

$$x=A^{-1}b=-\frac{1}{60}\begin{bmatrix} -2 & -5 & -17 \\ -18 & -15 & -3 \\ -28 & -10 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(იხ. §9, მაგალითი 1).

ამრიგად, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (11.6) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი $x=-1,\quad y=-1,\quad z=2$.□

2. კრამერის ფორმულები. ჩვენ გავეცანით წრფივ ალგებრულ განტოლებათა კვადრატული სისტემის ამოხსნის ერთ-ერთ მეთოდს. ახლა გავეცნოთ ამ მეთოდის ნაირსახეობას – კრამერის წესს.

ვთქვათ, მოცემულია წრფივ ალგებრულ განტოლებათა კვადრატული სისტემა (11.1) (ე.ი. $m=n$). შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Δ დეტერმინანტს ეწოდება სისტემის დეტერმინანტი. ნებისმიერი ნატურალური i რიცხვისათვის, სადაც $1 \le i \le n$, აღვნიშნოთ Δ_i-თი დეტერმინანტი, რომელიც მიიღება სისტემის Δ დეტერმინანტისაგან, თუ მის i-ურ სვეტს შევცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_2 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Δ_i-ის ეწოდება სისტემის i-ური დამხმარე დეტერმინანტი. შევნიშნოთ, რომ ამ დეტერმინანტის დაშლას i-ური სვეტის მიხედვით აქვს შემდეგი სახე:

$$\Delta_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni} \quad (i=1, 2, \dots, n), \qquad (11.7)$$

სადაც A_{ki} არის A მატრიცის a_{ki} ელემენტის ალგებრული დამატება $(k=1, 2, \dots, n)$.

თეორემა 11.3. თუ (11.1) სისტემის დეტერმინანტი $\Delta \ne 0$, მაშინ სისტემა თავსებადია და მას აქვს ერთადერთი ამონახსენი:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (11.8)$$

(11.8)-ს ეწოდება **კრამერის ფორმულები.**

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ამონახსენის არსებობა და ერთადერთობა გამომდინარეობს წინა თეორემიდან. იმავე თეორემის ძალით ეს ერთადერთი ამონახსენი განისაზღვრება

(11.4) მატრიცული ტოლობიდან. თუ გავითვალისწინებთ (11.7)-ს, მივიღებთ:

$$x=A^{-1}b=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n \end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{bmatrix},$$

ე.ი. $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$, … , $x_2=\frac{\Delta_n}{\Delta}$. □

მაგალითი 2. ამოვხსნათ (11.6) სისტემა კრამერის წესით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $\Delta=-60\neq 0$. გამოვთვალოთ დამხმარე დეტერმინანტები:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 10 & -3 & 4 \\ -16 & 8 & -5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=60, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 10 & 4 \\ -2 & -16 & -5 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}=60,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ -2 & 8 & -16 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}=-120\cdot$$

აქედან

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{60}{-60}=-1,\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{60}{-60}=-1,\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-120}{-60}=2.$$

□

შევნიშნოთ, რომ 11.2 შედეგი $Ax=0$ სახის ერთგვაროვანი მატრიცული განტოლების შესახებ ერთგვაროვანი სისტემის შემთხვევაში შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ფორმით:

შედეგი 11.4. თუ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვანი

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

სისტემის დეტერმინანტი $\Delta\neq 0$, მაშინ სისტემას აქვს მხოლოდ ნულოვანი ამონახსენი.

§12. მატრიცის რანგი. თეორემა ბაზისური მინორის შესახებ

ვთქვათ, მოცემულია $m\times n$ რიგის

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & . & . & .\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

მატრიცა და ნატურალური k რიცხვი, რომელიც არ აღემატება m და n რიცხვებიდან უმცირესს ($k\leq m,\ \ k\leq n$). შევარჩიოთ

მატრიცის ნებისმიერი k სტრიქონი და ნებისმიერი k სვეტი; ამ სტრიქონების და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შევადგინოთ k-ური რიგის დეტერმინანტი. ასეთ დეტერმინანტს ეწოდება A მატრიცის k-ური რიგის მინორი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & -5 \\ -7 & -5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \tag{12.1}$$

მატრიცის მეორე და მესამე რიგის ზოგიერთი მინორი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მაგალითად. დავაფიქსიროთ პირველი და მეორე სტრიქონი და პირველი და მეორე სვეტი. ამ სტრიქონე-ბისა და სვეტების გადაკვეთაზე მდგომი ელემენტებისაგან შედგენილი დეტერმინანტი

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -11$$

არის A მატრიცის მეორე რიგის ერთ-ერთი მინორი. ანალოგიურად, თუ შევარჩევთ, მაგალითად, მეორე და მესამე სტრიქონს და პირველ და მეოთხე სვეტს, მივიღებთ მეორე რიგის სხვა მინორს:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = 10 .$$

ვიპოვოთ ახლა A მატრიცის მესამე რიგის მინორები. ამისათვის საკმარისია დავაფიქსიროთ მატრიცის სამი სვეტი (მატრიცის სტრიქონების რიცხვი სამის ტოლია). მაგალითად,

თუ დავაფიქსირებთ სვეტებს, რომელთა ნომრებია შესაბამისად 1,2,3 და 1,2,4, მივიღებთ მესამე რიგის ორ მინორს:

$$M_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -3 \\ -7 & -5 & 4 \end{vmatrix}=0, \qquad M_4=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & -5 \\ -7 & -5 & 9 \end{vmatrix}=0. \quad \square$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, A არანულოვანი მატრიცაა. ნატურალურ r რიცხვს ეწოდება A მატრიცის **რანგი**, თუ:

1. A მატრიცაში არსებობს ნულისაგან განსხვავებული ერთი მაინც r რიგის მინორი;

2. A მატრიცის ყველა მინორი, რომლის რიგი r-ზე მეტია (თუ ასეთი არსებობს), ნულის ტოლია.

A მატრიცის რანგი აღინიშნება $rank\,A$ ან r_A სიმბოლოთი. ნულოვანი მატრიცის რანგად მიღებულია რიცხვი 0.□

შენიშვნა. მეორე პუნქტში მოყვანილი პირობის შესასრულებლად საკმარისია, რომ ნულის ტოლი იყოს ყველა ის $r+1$ რიგის მინორი, რომელიც მოიცავს ნულისაგან განსხვავებულ r რიგის მინორს.□

მაგალითი 2. ვიპოვოთ (12.1) ტოლობით მოცემული A მატრიცის რანგი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან არსებობს A მატრიცის მეორე რიგის ნულისაგან განსხვავებული მინორი M_1, ხოლო მისი შემცველი მესამე რიგის ყველა მინორი ნულის ტოლია, ამიტომ $r_A=2$. □

თეორემა 12.1. მატრიცის რანგი არ შეიცვლება თუ:

1. მოვახდენთ მატრიცის ტრანსპონირებას;
2. მოვახდენთ მატრიცის სტრიქონების (სვეტების) ურთიერთგადანაცვლებას;
3. სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს გავამრავლებთ ნულისაგან განსხვავებულ ერთსა და იმავე ნებისმიერ რიცხვზე;
4. სტრიქონის (სვეტის) ყველა ელემენტს მივუმატებთ სხვა სტრიქონის (სვეტის) შესაბამის ელემენტს;
5. ამოვშლით ნულოვან სტრიქონს (სვეტს). □

ამ თეორემის მართებულობა გამომდინარეობს დეტერმინანტის თვისებებიდან.

ვიპოვოთ ამ წესით (12.1) ტოლობით მოცემული A მატრიცის რანგი. ამისათვის A მატრიცის მესამე სტრიქონს მივუმატოთ პირველი და მეორე სტრიქონების ჯამი და მიღებულ მატრიცაში ამოვშალოთ ნულებისაგან შედგენილი მესამე სტრიქონი:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & -5 \\ -7 & -5 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}.$$

რადგან მიღებული მატრიცის რანგი 2-ის ტოლია, ამიტომ 2- ის ტოლი იქნება აგრეთვე A მატრიცის რანგი, ე.ი. $r_A = 2$.

განსაზღვრება. ვთქვათ, $rank\ A = r \neq 0$. მატრიცის იმ r რიგის მინორს, რომელიც განსხვავებულია ნულისაგან, ეწოდება

ბაზისური მინორი, მატრიცის შესაბამის სტრიქონებს – **ბაზისური სტრიქონები**, სვეტებს კი – **ბაზისური სვეტები.** □

შენიშვნა. მატრიცს შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე ბაზისური მინორი (და შესაბამისად, ბაზისური სტრიქონების და სვეტების რამდენიმე სისტემა).

მაგალითად, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ და $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$ არის (12.1) მატრიცის ბაზისური მინორები; პირველი ბაზისური მინორის შესაბამისი ბაზისური სტრიქონებია:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \text{ და } \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

ხოლო ბაზისური სვეტებია:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ და } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

ვთქვათ,

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \; a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

სვეტ-მატრიცებია.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

გამოსახულებას, სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვებია, ეწოდება $a_1, a_2, \dots, a_n$ სვეტ-მატრიცების **წრფივი კომბინაცია.**

თუ არსებობს $a_1, a_2, ..., a_n$ სვეტ-მატრიცების ისეთი წრფივი კომბინაცია, რომელიც ნულოვანი სვეტ-მატრიცის ტოლია, ე.ი.

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0, \qquad (12.2)$$

ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ რიცხვებიდან ერთი მაინც განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ $a_1, a_2, ..., a_n$ სვეტ-მატრიცებს ეწოდება **წრფივად დამოკიდებული.** წინააღმდეგ შემთხვევაში, ე.ი. თუ (12.2) ტოლობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, $a_1, a_2, ..., a_n$ სვეტ-მატრიცებს ეწოდება წრფივად დამოუკიდებელი. ყოველივე ეს სიტყვა-სიტყვით შეიძლება გავიმეოროთ სტრიქონ-მატრიცებისთვის.

ადვილი მისახვედრია, რომ თუ $a_1, a_2, ..., a_n$ სვეტ-მატრიცებიდან (სტრიქონ-მატრიცებიდან) ერთ-ერთი წარმოადგენს დანარჩენების წრფივ კომბინაციას, მაშინ ეს სვეტ-მატრიცები (სტრიქონ-მატრიცები) წრფივად დამოკიდებულია (იხ.II ნაწ.). ცხადია, ნებისმიერი მატრიცის სვეტები შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც სვეტ-მატრიცები, ხოლო სტრიქონები – როგორც სტრიქონ-მატრიცები.

თეორემა 12.2 (ბაზისური მინორის შესახებ). მატრიცის ბაზისური სტრიქონები (სვეტები) წრფივად დამოუკიდებელია, ხოლო მატრიცის ნებისმიერი სტრიქონი (სვეტი) ბაზისური სტრიქონების (სვეტების) წრფივ კომბინაციას წარმოადგენს. □

შედეგი 12.3. მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელ სტრიქონთა (სვეტთა) მაქსიმალური რაოდენობა მატრიცის რანგის ტოლია.

§13. კრონეკერ - კაპელის თეორემა

განვიხილოთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \qquad (13.1)$$

თუ სისტემა კვადრატულია (ე.ი. $m = n$) და მისი დეტერმინანტი $\Delta \neq 0$, მაშინ სისტემის ამოხსნა შეიძლება კრამერის ფორმულების საშუალებით. მაგრამ თუ $\Delta = 0$ ან, ზოგადად, სისტემა არ არის კვადრატული, მაშინ კრამერის ფორმულებს ვერ გამოვიყენებთ. ასეთ შემთხვევაში შეიძლება ვისარგებლოთ, მაგალითად, გაუსის მეთოდით (იხ. §10). აქ გავეცნობით წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის გამოკვლევის და ამოხსნის სხვა ხერხს.

(13.1) სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

მატრიცას ეწოდება **სისტემის მატრიცა.** $\overline{A}$ მატრიცას, რომელიც მიიღება სისტემის თავისუფალი წევრებისგან შედგენილი სვეტის მიწერით, სისტემის **გაფართოებული მატრიცა** ეწოდება:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

რადგან $\overline{A}$ მატრიცა A მატრიცისაგან მიიღება სვეტის დამატეთ, ამიტომ $\overline{A}$ მატრიცის რანგი იქნება ან A მატრიცის რანგის ტოლი, ან მასზე ერთით მეტი, ე.ი.

$$r_A \le r_{\overline{A}} \ . \qquad (13.2)$$

თეორემა 13.1 (კრონეკერ-კაპელი). იმისათვის, რომ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (13.1) სისტემა იყოს თავსებადი, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ სისტემის გაფართოებული $\overline{A}$ მატრიცის რანგი სისტემის A მატრიცის რანგის ტოლი იყოს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$v_1=[a_{11} \quad a_{21} \quad \dots \quad a_{m1}]^T, \quad v_2=[a_{12} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{m2}]^T, \quad \dots \quad ,$$

$$v_n=[a_{1n} \quad a_{2n} \quad \dots \quad a_{mn}]^T, \quad b=[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]^T \ .$$

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა (13.1) სისტემა ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$x_1v_1+x_2v_2+\dots+x_nv_n=b \ . \qquad (13.3)$$

ა უ ც ი ლ ე ბ ლ ო ბ ა. ვთქვათ, სისტემა (13.1) თავსებადია და $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ არის ამ სისტემის ერთ-ერთი ამონახსენი. მაშინ (13.3) -ის თანახმად,

$$b=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_n v_n,$$

ე.ი. $\overline{A}$ მატრიცის ბოლო b სვეტი წარმოადგენს დანარჩენი $v_1,v_2,...,v_n$ სვეტების წრფივ კომბინაციას. აქედან გამომდინარეობს, რომ დამატებითი b სვეტი A მატრიცის წრფივად დამოუკიდებელი სვეტების მაქსიმალურ რიცხვს არ გაზრდის. ეს ნიშნავს (იხ. შედეგი 12.3), რომ

$$r_{\overline{A}}\le r_A.$$

თუ (13.2)-ს გავითვალისწინებთ, მივიღებთ დასამტკიცებელ ტოლობას

$$r_A=r_{\overline{A}}.$$

ს ა კ მ ა რ ი ს ო ბ ა. ვთქვათ,

$$r_A=r_{\overline{A}}=r$$

($r\neq 0$, რადგან $A\neq 0$) და $v_1,v_2,...,v_r$ არის A (და $\overline{A}$) მატრიცის ბაზისური სვეტები. მაშინ $\overline{A}$ მატრიცის ყოველი სვეტი და მათ შორის b სვეტიც, წარმოადგენს ამ ბაზისური სვეტების წრფივ კომბინაციას, ე .ი.

$$b=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_r v_r=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots+\alpha_r v_r+0v_{r+1}+\cdots+0v_n.$$

აქედან (13.3)-ის გათვალისწინებით გამომდინარეობს, რომ $(\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_r,0,\dots,0)$ არის (13.1) სისტემის ერთ-ერთი ამონახსენი და, მაშასადამე, სისტემა თავსებადია. □

შემდეგი თეორემა იძლევა სისტემის ამონახსენის პოვნის ალგორითმს მისი თავსებადობის შემთხვევაში.

თეორემა 13.2. თუ

$$r_A = r_{\overline{A}} = r = n ,$$

სადაც n უცნობთა რიცხვია, მაშინ (13.1) სისტემას აქვს ერთადერთი ამონახსენი. თუ

$$r_A = r_{\overline{A}} = r < n ,$$

მაშინ (13.1) სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე, ამასთან, $n-r$ უცნობთა მნიშვნელობა შეიძლება შეირჩეს ნებისმიერად.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, ბაზისური მინორი განლაგებულია A მატრიცის მარცხენა ზედა კუთხეში. მაშინ მატრიცის პირველი r სტრიქონი

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}),$$

$$(a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(a_{r1} \quad a_{r2} \quad \dots \quad a_{rn})$$

იქნება ბაზისური, ხოლო დანარჩენი $m-r$ სტრიქონი

$$(a_{r+11} \quad a_{r+12} \quad \dots \quad a_{r+1n})$$

$$(a_{r+21} \quad a_{r+22} \quad \dots \quad a_{r+2n})$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}).$$

წარმოადგენს მათ წრფივ კომბინაციას (თეორემა 12.2). აქედან გამომდინარე, (13.1) სისტემაში შეიძლება დავტოვოთ მხოლოდ

პირველი r განტოლება, რადგან დანარჩენი $m-r$ განტოლება წარმოადგენს მათ შედეგს:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases}.$$

მიღებული სისტემის მარცხენა ნაწილში დავტოვოთ მხოლოდ ის შესაკრებები, რომელთა კოეფიციენტები ადგენს ბაზისურ მინორს, ხოლო ყველა დანარჩენი გადავიტანოთ მარჯვენა ნაწილში:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=b_2-a_{2r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{2n}x_n \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases}. \qquad (13.4)$$

მიღებული სისტემა განვიხილოთ როგორც წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა $x_1,x_2,...,x_r$ უცნობების მიმართ, ხოლო $x_{r+1},x_{r+2},...,x_n$ უცნობებს მივანიჭოთ ნებისმიერი რიცხვითი მნიშვნელობები. ასეთი სისტემის Δ დეტერმინანტი A მატრიცის ბაზისური მინორის ტოლია, ამიტომ $\Delta\neq 0$ და სისტემას აქვს ამონახსენი. $x_1,x_2,...,x_r$ უცნობების შესაბამისი მნიშვნელობები შეიძლება ვიპოვოთ კრამერის ფორმულების საშუალებით. □

დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარე, ერთგვაროვანი სისტემის შემთხვევაში შედეგები შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი სახით:

შედეგი 13.3. იმისათვის, რომ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსენი, აუცილებელია და საკმარისი სისტემის მატრიცის რანგი ნაკლები იყოს უცნობთა რიცხვზე; □

შედეგი 13.4. თუ ერთგვაროვანი სისტემის განტოლებათა რიცხვი უცნობთა რიცხვზე ნაკლებია, მაშინ სისტემას აქვს არანულოვანი ამონახსენი; □

შედეგი 13.5. იმისათვის, რომ კვადრატულ ერთგვაროვან სისტემას ჰქონდეს არანულოვანი ამონახსენი, აუცილებელია და საკმარისი ამ სისტემის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი. □

მაგალითი 1. გამოვიკვლიოთ სისტემა

$$\begin{cases} 2x+3y-z-4u=2 \\ 5x+2y-3z-5u=5 \\ -7x-5y+4z+9u=-7 \end{cases} \qquad (13.5)$$

და თავსებადობის შემთხვევაში ვიპოვოთ სისტემის ყველა ამონახსენი.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 5 & 2 & -3 & -5 \\ -7 & -5 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & -3 & -5 & 5 \\ -7 & -5 & 4 & 9 & -7 \end{bmatrix}.$$

როგორც უკვე გავარკვიეთ (იხ. §12, მაგალითი 2)

$$r_A=2,$$

და $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ არის A მატრიცის ერთ-ერთი ბაზისური მინორი. რადგან ამ მინორის შემცველი $\overline{A}$ მატრიცის მესამე რიგის მინორი

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \\ -7 & -5 & 7 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ამიტომ

$$r_{\overline{A}} = 2,$$

ე.ი.

$$r_A = r_{\overline{A}} = 2 .$$

მაშასადამე, (13.5) სისტემა თავსებადია.

დავტოვოთ ამ სისტემაში მხოლოდ ის განტოლებები, რომელთა კოეფიციენტები ადგენს A მატრიცის ბაზისურ მინორს და გადავწეროთ მიღებული სისტემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 + z + 4u \\ 5x + 2y = 5 + 3z + 5u \end{cases} .$$

მივანიჭოთ z და u თავისუფალ უცნობებს ნებისმიერი $z = \alpha_1$ და $u = \alpha_2$ რიცხვითი მნიშვნელობები და ამოვხსნათ მიღებული სისტემა კრამერის ფორმულებით:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -11, \qquad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} 2 + \alpha_1 + 4\alpha_2 & 3 \\ 5 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 & 2 \end{vmatrix} = -7\alpha_1 - 7\alpha_2 - 11,$$

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 + \alpha_1 + 4\alpha_2 \\ 5 & 5 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 - 10\alpha_2 ;$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7\alpha_1-7\alpha_2-11}{-11}=\frac{7}{11}\alpha_1+\frac{7}{11}\alpha_2+1$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{\alpha_1-10\alpha_2}{-11}=-\frac{1}{11}\alpha_1+\frac{10}{11}\alpha_2.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ (13.5) სისტემას აქვს ამონახსენთა უსასრულო სიმრავლე:

$$\begin{cases} x=\frac{7}{11}\alpha_1+\frac{7}{11}\alpha_2+1 \\ y=-\frac{1}{11}\alpha_1+\frac{10}{11}\alpha_2 \\ z=\alpha_1 \\ u=\alpha_2 \end{cases} \qquad \alpha_1,\alpha_2\in R.$$

ეს სიმრავლე შეიძლება ჩაიწეროს აგრეთვე ასეთი სახით:

$$\left\{\left(\frac{7}{11}\alpha_1+\frac{7}{11}\alpha_2+1,-\frac{1}{11}\alpha_1+\frac{10}{11}\alpha_2,\alpha_1,\alpha_2\ \middle|\alpha_1,\alpha_2\in R\right)\right\}. \qquad (13.6)$$

სისტემის რომელიმე კონკრეტული ამონახსენის მისაღებად (13.6) -ში საკმარისია ავიღოთ α_1 და α_2 რიცხვების კონკრეტული მნიშვნელობები. მაგალითად, როცა $\alpha_1=1$ და $\alpha_2=-1$, (13,6)-დან მივიღებთ (13.5) სისტემის ერთ-ერთ კერძო ამონახსენს $(1;\ -1;\ 1;\ -1)$.

შევნიშნოთ, რომ სისტემის ამონახსენთა (13.6) სიმრავლეს შეიძლება მივცეთ სხვადასხვა სახე. მაგალითად, თუ შემოვიღებთ აღნიშვნებს $\alpha_1=11t_1$, $\alpha_2=11t_2$ $(t_1,t_2\in R)$, მაშინ აღნიშნული სიმრავლე ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$\{(7t_1+7t_2+1,\ -t_1+10t_2,\ 11t_1,\ 11t_2)\mid t_1,\ t_2\in R\}. \quad \square \qquad (13.7)$$

§14. მატრიცთა ალგებრის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ (ელექტროწრედის ანალიზი)

დავუბრუნდეთ §7-ში განხილულ ამოცანას $f(t)$ სიგნალის აპროქსიმაციის შესახებ მეორე ხარისხის მრავალწევრით. რადგან

$$T=\begin{bmatrix}1 & t_0 & t_0^2\\ 1 & t_1 & t_1^2\\ 1 & t_2 & t_2^2\end{bmatrix}, \qquad t_0<t_1<t_2,$$

მატრიცის დეტერმინანტი არის ვანდერმონდის დეტერმინანტი (იხ. §8), ამიტომ $\det T\neq 0$ (შედეგი 8.2) და (7.9) სახის ყველა მატრიცულ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსენი.

მაგალითი 1. მოვახდინოთ $f(t)=\cos\dfrac{\pi}{2}t$ სიგნალის აპროქსიმაცია [-1,1] შუალედში მეორე ხარისხის $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ მრავალწევრით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ავიღოთ $t_0=-1,\ \ t_1=0,\ \ t_2=1$. მაშინ

$$f(t_0)=f(-1)=\cos(-\frac{\pi}{2})=0,$$

$$f(t_1)=f(0)=\cos 0=1,$$

$$f(t_2)=f(1)=\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

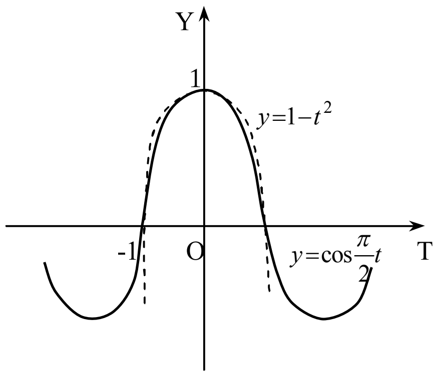
ამის შესაბამისად, (7.7) სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases}a_0-a_1+a_2=0\\ a_0\qquad\qquad\ =1\\ a_0+a_1+a_2=0\end{cases}.$$

აქედან ადვილად მივიღებთ საძიებელი მრავალწევრის კოეფიციენტებს $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=-1$.

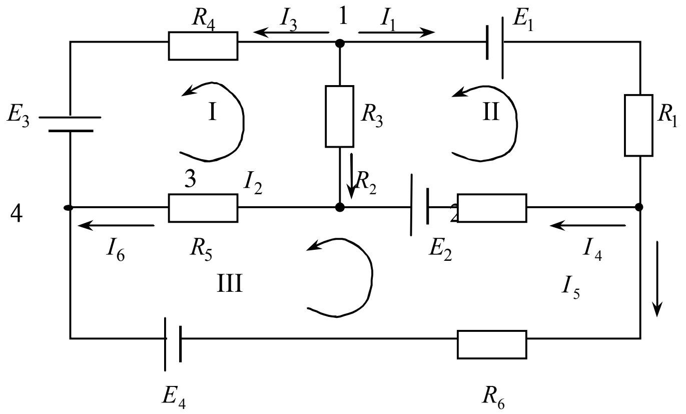
ამრიგად, [-1,1] შუალედში $f(t)=\cos\frac{\pi}{2}t$ სიგნალი მიახლოებით შეიძლება იყოს წარმოდგენილი მეორე ხარისხის მრავალწევრით $p(t)=1-t^2$ (ნახ. 14.1):

$$\cos\frac{\pi}{2}t\approx 1-t^2. \qquad \square$$



ნახ. 14.1

ახლა განვიხილოთ მატრიცთა ალგებრის გამოყენება ელექტროწრედის ანალიზისთვის. სიმარტივისთვის, შემოვიფარგლოთ შემდეგი კონკრეტული სქემით, რომელიც სამი ჩაკეტილი კონტურისგან შედგება:



ნახ. 14.2

კირხჰოფის პირველი წესის თანახმად, განშტოებული ელექტროწრედის ნებისმიერი კვანძისათვის დენთა ალგებრული ჯამი ნულის ტოლია, ე.ი.

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 + I_3 &= 0 \quad (\text{კვანძი } 1)\\
-I_1 + I_4 + I_5 &= 0 \quad (\text{კვანძი } 2)\\
-I_2 - I_4 + I_6 &= 0 \quad (\text{კვანძი } 3)\\
-I_3 - I_5 - I_6 &= 0 \quad (\text{კვანძი } 4).
\end{aligned}
\tag{14.1}
$$

აქედან

$$
\begin{cases}
I_3 = -I_1 - I_2\\
I_5 = I_1 - I_4\\
I_6 = I_2 + I_4.
\end{cases}
\tag{14.2}
$$

კირხჰოფის მეორე წესის თანახმად, ელექტროწრედის ნებისმიერი ჩაკეტილი კონტურის ცალკეულ უბნებზე ძაბვის ვარდნათა ალგებრული ჯამი შესაბამის წყაროთა ელექტრომამოძრავებელი ძალების ალგებრული ჯამის ტოლია.

ომის კანონის გათვალისწინებით აქედან მივიღებთ:

$$\begin{cases} -R_3I_2+R_4I_3-R_5I_6=E_3 \\ -R_1I_1+R_3I_2-R_2I_4=E_1+E_2 \\ R_2I_4-R_6I_5+R_5I_6=E_4-E_2. \end{cases} \qquad (14.3)$$

მაგალითი 4. ვთქვათ,

$R_1=15_\Omega;\, R_2=1_\Omega;\, R_3=1_\Omega;\, R_4=2_\Omega;\, R_5=2_\Omega;\, R_6=1_\Omega;\, E_1=0{,}7v;\, E_2=1{,}2v;$
$E_3=0{,}3v;\quad E_4=0{,}3v.$ ვიპოვოთ $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$.

ა მ ო ხ ს ნ ა. გადავწეროთ მიღებული (14.3) სისტემა შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} -I_2+2I_3-2I_6=0{,}3 \\ -15I_1+I_2-I_4=1{,}9 \\ I_4-I_5+2I_6=-0{,}9. \end{cases}$$

(14.2)-ის გათვალისწინებით აქედან მივიღებთ:

$$\begin{cases} -2I_1-5I_2-2I_4=0{,}3 \\ -15I_1+I_2-I_4=1{,}9 \\ -I_1+2I_2+4I_4=-0{,}9. \end{cases}$$

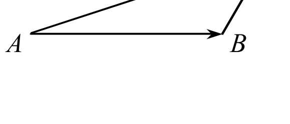
თუ ამოვხსნით ამ სისტემას, მივიღებთ $I_1=-0{,}1;\ I_2=0{,}1;$ $I_4=-0{,}3.$ (14.2)-დან შეგვიძლია განვსაზღვროთ $I_{3,}\ I_5$ და I_6-ის მნიშვნელობები: $I_3=0;\ \ I_5=0{,}2;\ \ I_6=-0{,}2$. ამრიგად,

$$I_1=-0{,}1A;\ I_2=0{,}1A;\ I_3=0A;\ I_4=-0{,}3A;\ I_5=0{,}2A;\ I_6=-0{,}2A. \quad \square$$

III თავი. ვექტორები

გარკვეული ფიზიკური სიდიდეების (მასა, სიხშირე, ენერგია და ა.შ.) სრული აღწერისათვის საკმარისია ვიცოდეთ მხოლოდ მათი რიცხვითი მნიშვნელობები. მეორე მხრივ, ზოგიერთი ფიზიკური სიდიდეების (ძალა, სიჩქარე, აჩქარება, ელექტრული და მაგნიტური დაძაბულობა და ა.შ.) განსაზღვრისათვის რიცხვითი მნიშვნელობების ცოდნა საკმარისი არ არის. მაგალითად, თუ ვიცით, რომ რომელიმე მატერიალური სხეული მოძრაობს 30 მ/წმ სიჩქარით, ჩვენ ვერ განვსაზღვრავთ, სად იქნება ეს სხეული 5 წამის შემდეგ, რადგან არ ვიცით, რა მიმართულებით მოძრაობს იგი. ისეთ სიდიდეებს, რომლებიც ხასიათდება არა მარტო რიცხვითი მნიშვნელობებით, არამედ გარკვეული მიმართულებითაც, ეწოდება ვექტორული სიდიდეები ანუ ვექტორები.

მაგალითად, თუ მატერიალური სხეული გადაადგილდა A წერტილიდან B წერტილში, მაშინ ეს გადაადგილება შეგვიძლია აღვნიშნოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით, რომელსაც გადაადგილების ვექტორი ეწოდება.

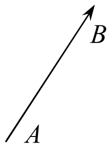


თუ შემდეგ ეტაპზე ეს სხეული B წერტილიდან გადაადგილდება C წერტილში, მაშინ ასეთ გადაადგილებას შეესაბამება $\overrightarrow{BC}$ ვექტორი. ამ ორი გადაადგილების თანამიმდევრობით შესრულებას შეესაბამება ვექტორი, რომელსაც ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{BC}$ ვექტორების ჯამი. თუ რაიმე $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით მატერიალური სხეული წრფის გასწვრივ გადაადგილდება A წერტილიდან B წერტილში, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა (რომელიც არ არის ვექტორული სიდიდე) გამოითვლება $\vec{F}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლით (იხ. (18.5)). ვექტორული განტოლებით აღიწერება აგრეთვე მაგნიტურ და ელექტრულ ველებში მიმდინარე მრავალი პროცესი (იხ. (15.6), (15.7), (18.5), (18.6), (18.7), (18.9), (18.10)).

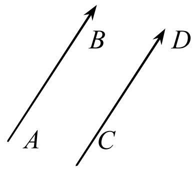
§15. ვექტორები. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე

განვიხილოთ სივრცის წერტილების ყველა დალაგებული წყვილის სიმრავლე. ყოველი ასეთი (A,B) წყვილი გეომეტრიულად შეიძლება აისახოს ორიენტირებული (მიმართული) AB მონაკვეთის საშუალებით, რომლის საწყისი

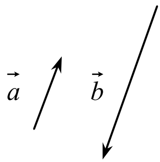
წერტილი ემთხვევა A წერტილს, ხოლო ბოლო წერტილი – B წერტილს (ნახ. 15.1).



ნახ. 15.1



ნახ. 15.2



ნახ. 15.3

ასეთ ორიენტირებულ მონაკვეთს ეწოდება **გეომეტრიული ვექტორი** (ანუ, უბრალოდ, ვექტორი) და აღინიშნება $\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი. ამ მონაკვეთის A წერტილს ეწოდება ვექტორის **სათავე**, ხოლო B წერტილს – ვექტორის **ბოლო**. როცა არ არის აუცილებელი ვექტორის სათავის და ბოლოს მითითება, ვექტორს აღნიშნავენ ერთი ასოთი (მაგალითად, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ და ა.შ.). AB მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის **მოდული** ანუ **სიგრძე** და აღინიშნება $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ სიმბოლოთი. ვექტორს, რომლის სიგრძე ერთის ტოლია, ეწოდება **ერთეულოვანი.**

ვექტორის ცნების შემოღებისას იგულისხმებოდა, რომ A ვექტორის საწყისი წერტილი არ ემთხვევა მის ბოლო B წერტილს. მაგრამ ზოგადობის თვალსაზრისით, მნიშვნელოვანია აგრეთვე ე.წ. **ნულოვანი** ვექტორის განხილვა, ე.ი. ისეთი ვექტორისა, რომლის სათავე და ბოლო ემთხვევა ერთმანეთს.

ნულოვანი ვექტორი აღინიშნება $\vec{0}$ სიმბოლოთი. ცხადია, ნულოვანი ვექტორის სიგრძე ნულის ტოლია, ე.ი. $|\vec{0}| = 0$.

ორ არანულოვან $\overrightarrow{AB}$ და $\overrightarrow{CD}$ ვექტორს (ნახ. 15.2) ეწოდება ტოლი ვექტორები, თუ:

1. ამ ვექტორების მოდულები ტოლია, ე.ი. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$;

2. შესაბამისი ორიენტირებული მონაკვეთები პარალელურია, ე.ი. $AB \,||\, CD$;

3. ამ მონაკვეთებს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ.

შენიშვნა. სიმბოლო $\vec{a}$ აღნიშნავს არა მხოლოდ ერთ ორიენტირებულ მონაკვეთს, არამედ მთელ კლასს ისეთი ვექტორებისა, რომლებიც მოცემული $\vec{a}$ ვექტორის ტოლია (ეს იმის ანალოგიურია, რომ, მაგალითად, $\frac{2}{3}$ სიმბოლო აღნიშნავს არა მხოლოდ წილადს $\frac{2}{3}$-ს, არამედ წილადთა ერთობლიობას $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$ და ა.შ.). სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ყოველი ვექტორი წარმოადგენს ორიენტირებულ მონაკვეთთა სიმრავლის ეკვივალენტობის ერთ-ერთ კლასს (იხ. II ნაწ.).

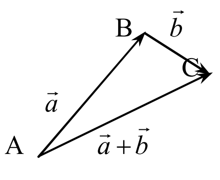
$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს **კოლინეარული** ეწოდება, თუ შესაბამისი ორიენტირებული მონაკვეთები პარალელურია (ნახ. 15.3). ნულოვანი $\vec{0}$ ვექტორი ნებისმიერი სხვა ვექტორის

კოლინეარულ ვექტორად ითვლება. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარულ ვექტორებს აღვნიშნავთ ასე: $\vec{a}\,||\,\vec{b}$.

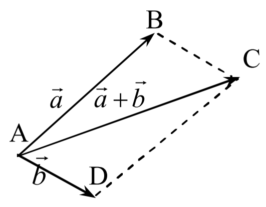
ორ არანულოვან $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორს ეწოდება **ორთოგონალური** (აღნიშვნა $\vec{a}\perp\vec{b}$), თუ კუთხე შესაბამის ორიენტირებულ მონაკვეთებს შორის მართია.

ვექტორებს, რომლებიც ერთი და იმავე სიბრტყის პარალელურია, **კომპლანარული** ეწოდება.

ორი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ჯამი განისაზღვრება შემდეგნაირად: ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი A წერტილი და ავაგოთ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ და $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ვექტორები. ვექტორს, რომლის სათავეა A, ხოლო ბოლო C (ე.ი. $\overrightarrow{AC}$ ვექტორს), ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ **ვექტორების ჯამი** და $\vec{a}+\vec{b}$ სიმბოლოთი აღინიშნება (ნახ. 15.4).



ნახ. 15.4



ნახ.15.5

სავარჯიშო 15.1. დაამტკიცეთ, რომ ვექტორთა შეკრების ოპერაციის შედეგი არ არის დამოკიდებული საწყისი წერტილის შერჩევაზე. ☐

ვექტორთა შეკრების აღნიშნულ წესს ეწოდება **სამკუთხედის წესი.** სამკუთხედის ცნობილი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისთვის

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|.$$

სავარჯიშო 15.2. დაამტკიცეთ, რომ ორი არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის ჯამი შეიძლება განისაზღვროს $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის დიაგონალის საშუალებით (ნახ.15.5). □

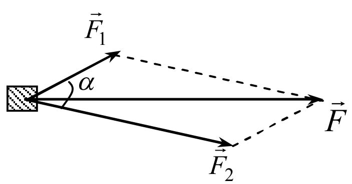
თუ M მატერიალურ წერტილზე მოქმედებს ორი ძალა $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$, მაშინ მათი ტოლქმედი $\vec{F}$ ძალა წარმოადგენს $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ვექტორების ჯამს:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

ცხადია (იხ. ნახ. 15.6), რომ ამ ტოლქმედის სიდიდე

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2 + 2\left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{F}_2\right|\cos\alpha} ,$$

სადაც α არის კუთხე $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ვექტორებს შორის (ორ არანულოვან ვექტორს შორის კუთხედ მიღებულია კუთხე შესაბამის ორიენტირებულ მონაკვეთებს შორის).



ნახ.15.6

ცხადია, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}\,. \qquad (15.1)$$

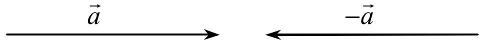
ადვილი მისახვედრია აგრეთვე, რომ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}\,.$$

$\overrightarrow{BA}$ ვექტორს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის **მოპირდაპირე.** $\vec{a}$ ვექტორის მოპირდაპირე ვექტორი აღინიშნება $-\vec{a}$ სიმბოლოთი. ამრიგად,

$$\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}\,. \qquad (15.2)$$

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ $-\vec{a}$ ვექტორის სიგრძე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძის ტოლია, $-\vec{a}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია და მიმართულია $\vec{a}$ ვექტორის საპირისპიროდ (ნახ.15.7).



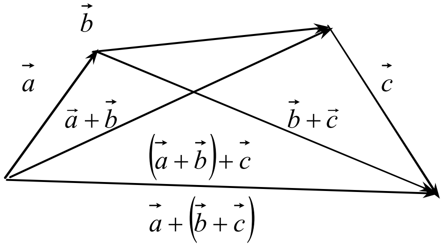
ნახ. 15.7

ვექტორთა შეკრების ოპერაცია **კომუტაციურია** (იხ.ნახ.15.5), ე.ი. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისათვის

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,. \qquad (15.3)$$

ეს ოპერაცია არის აგრეთვე **ასოციაციური** (ნახ.15.8), ე.ი. ნებისმიერი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორისათვის

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \qquad (15.4)$$



ნახ.15.8

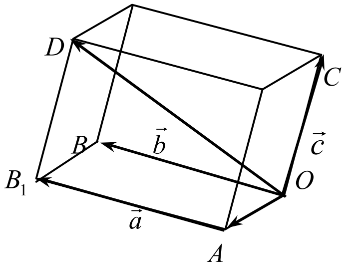
ამ თვისებიდან გამომდინარე, სამი $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორის ჯამი შეიძლება ჩაიწეროს $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ სახით ფრჩხილების მითითების გარეშე. ინდუქციით ეს წესი შეიძლება განზოგადდეს შესაკრებთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის:

$$\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_{n-1}+\vec{a}_n=\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_{n-1}\right)+\vec{a}_n .$$

შენიშვნა. (15.1) – (15.4) თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ ყველა ვექტორის V_3 სიმრავლე შეკრების ოპერაციის მიმართ წარმოადგენს აბელურ (კომუტაციურ) ჯგუფს (იხ. II ნაწ.).

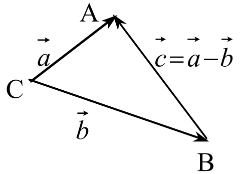
აღვნიშნოთ, რომ სამი არაკომპლანარული $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორის ჯამი განისაზღვრება მათზე აგებული პარალელეპიპედის დიაგონალური ვექტორის საშუალებით (ნახ.15.9). მართლაც, რადგან $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ და $\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, ამიტომ

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1D}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} .$$



ნახ.15.9

ისევე, როგორც რიცხვითი სიმრავლეების შემთხვევაში, გამოკლების ოპერაცია ვექტორთა სიმრავლეში განისაზღვრება როგორც შეკრების შებრუნებული ოპერაცია, ე,ი. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა არის ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი (აღინიშნება $\vec{a}-\vec{b}$ სიმბოლოთი), რომლისთვისაც სრულდება $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ ტოლობა. აქედან გამომდინარე, $\vec{a}-\vec{b}$ ვექტორის ასაგებად $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები უნდა მოვდოთ ერთ წერტილში და $\vec{b}$ ვექტორის ბოლო მიმართული მონაკვეთით შევაერთოთ $\vec{a}$ ვექტორის ბოლოსთან (ნახ.15.10).



ნახ.15.10

სავარჯიშო 15.3. დაამტკიცეთ, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა შეიძლება განისაზღვროს ტოლობით:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right). \qquad \square$$

ვთქვათ, $\vec{a}$ ნებისმიერი არანულოვანი ვექტორია და α არანულოვანი ნამდვილი რიცხვი. $\vec{a}$ **ვექტორის α რიცხვზე ნამრავლი** ეწოდება ისეთ ვექტორს (აღინიშნება $\alpha\vec{a}$ სიმბოლოთი), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სამ პირობას:

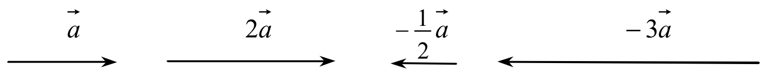
1. $\left|\alpha\vec{a}\right|=|\alpha|\left|\vec{a}\right|$;

2. $\alpha\vec{a} \,||\, \vec{a}$;

3. თუ $\alpha>0$, მაშინ $\alpha\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულებას, ხოლო თუ $\alpha<0$, მაშინ $\alpha\vec{a}$ ვექტორის მიმართულება $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების საპირისპიროა.

თუ $\vec{a}=\vec{0}$ ან $\alpha=0$, მაშინ განსაზღვრების თანახმად, $\alpha\vec{a}=\vec{0}$.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების საილუსტრაციო მაგალითები მოყვანილია 15.11 ნახ-ზე:



ნახ.15.11

განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$1\vec{a}=\vec{a} \qquad (15.5)$$

და

$$(-1)\vec{a}=-\vec{a}\,.$$

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ ელექტრულ ველში მოთავსებულ q მუხტზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა და ამ ველის $\vec{E}$ დაძაბულობა დაკავშირებულია ერთმანეთთან ტოლობით:

$$\vec{F}=q\vec{E}\,. \qquad (15.6)$$

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი. თუ $\vec{H}$ არის მაგნიტური ველის დაძაბულობა, ხოლო $\vec{B}$ ამავე ველის მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი, მაშინ

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}\,, \qquad (15.7)$$

სადაც μ_0 მაგნიტური მუდმივაა.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების განსაზღვრების მე-2 პუნქტის თანახმად, ნებისმიერი α რიცხვისათვის $\alpha\vec{a}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია. მართებულია შებრუნებული დებულებაც:

თეორემა 15.4. თუ $\vec{a}\neq\vec{0}$ და $\vec{a}\parallel\vec{b}$, მაშინ არსებობს ისეთი α რიცხვი, რომ $\vec{b}=\alpha\vec{a}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. პირობის ძალით $\left|\vec{a}\right| \neq 0$.

შემოვიღოთ $k = \dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ აღნიშვნა,

მაშინ

$$\left|\vec{b}\right| = k\left|\vec{a}\right|.$$

თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მიმართულება ემთხვევა ერთმანეთს, აქედან მივიღებთ, რომ $\vec{b} = k\vec{a}$, ხოლო თუ მათი მიმართულება საპირისპიროა, მაშინ $\vec{b} = -k\vec{a}$. ორივე შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგი სახის თანაფარდობას:

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}. \qquad \square$$

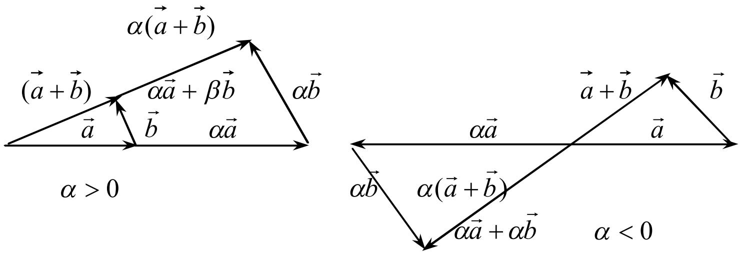
სავარჯიშო 15.5. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორისათვის და ნებისმიერი ნამდვილი α და β რიცხვისათვის

$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}), \tag{15.8}$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \tag{15.9}$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}. \tag{15.10}$$

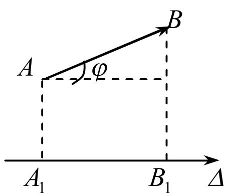
მითითება. განიხილეთ სხვადასხვა შემთხვევები α და β რიცხვების ნიშნების გათვალისწინებით. (15.10) ტოლობის დამტკიცებისას ისარგებლეთ 15.12 ნახაზით. $\square$



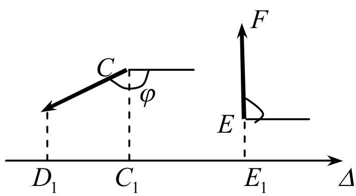
ნახ.15.12

§16. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. ვექტორის კოორდინატები

ვთქვათ, Δ რიცხვითი ღერძია და $\overrightarrow{AB}$- ნებისმიერი ვექტორი. A_1-ით აღვნიშნოთ A წერტილის ორთოგონალური გეგმილი Δ ღერძზე, ხოლო B_1-ით – B წერტილისა. A_1B_1 ორიენტირებული მონაკვეთის სიდიდეს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის **გეგმილი** Δ ღერძზე და აღინიშნება **გეგ**$_{\Delta}\overrightarrow{AB}$ სიმბოლოთი (ნახ.16.1)



ნახ. 16.1



ნახ.16.2

ამრიგად, გეგ $_{\Delta}\overrightarrow{AB}$ უდრის A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძეს, როცა A_1B_1 ორიენტირებული მონაკვეთის მიმართულება ემთხვევა Δ ღერძის მიმართულებას, და მინუს ნიშნით აღებულ A_1B_1 მონაკვეთის სიგრძეს, როცა A_1B_1 ორიენტირებული მონაკვეთის მიმართულება Δ ღერძის საპირისპიროა. იმ შემთხვევაში, როცა $A_1=B_1$ (ე.ი. როცა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორი Δ ღერძის პერპენდიკულარულია), გეგ $_{\Delta}\overrightarrow{AB}=0$. მაგალითად, გეგ $_{\Delta}\overrightarrow{AB}>0$ (ნახ. 16.1), გეგ $_{\Delta}\overrightarrow{CD}<0$, გეგ $_{\Delta}\overrightarrow{EF}=0$ (ნახ.16.2).

ცხადია (იხ. ნახ.16.1 და 16.2), რომ

$$\text{გეგ}_{\Delta}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|cos\varphi ,$$

სადაც φ არის კუთხე $\overrightarrow{AB}$ ვექტორსა და Δ ღერძის დადებით მიმართულებას შორის.

სავარჯიშო 16.1. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისათვის და ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისათვის

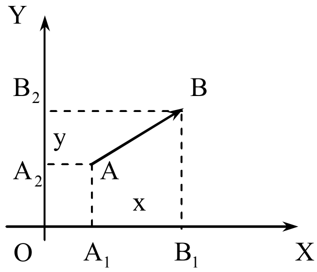
$$\text{გეგ}_{\Delta}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\text{გეგ}_{\Delta}\vec{a}+\text{გეგ}_{\Delta}\vec{b} \qquad (16.1)$$

და

$$\text{გეგ}_{\Delta}\alpha\vec{a}=\alpha\,\text{გეგ}_{\Delta}\vec{a}. \quad \square \qquad (16.2)$$

ვთქვათ, სიბრტყეზე ფიქსირებულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა OXY სისტემა და $\overrightarrow{AB}$ ამ სიბრტყეში მდებარე ვექტორია (ნახ.16.3). შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$x=\text{გეგ}_{ox}\overrightarrow{AB}, \qquad y=\text{გეგ}_{oy}\overrightarrow{AB}.$$



ნახ.16.3

x და y რიცხვებს ეწოდება $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის **კოორდინატები** კოორდინატთა მოცემულ სისტემაში და აღნიშნავენ ასე:

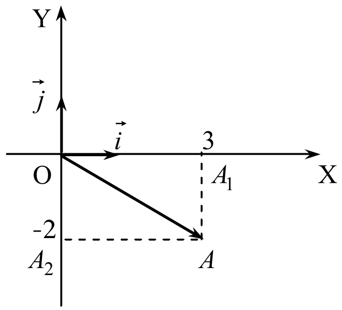
$$\overrightarrow{AB}=(x,y).$$

მაგალითად,

$$\vec{a}=(3,-2)$$

ნიშნავს, რომ **გეგ** $_{ox}\,\vec{a}=3$ და **გეგ** $_{oy}\,\vec{a}=-2$ (ნახ.16.4). ამ ნახაზიდან გამომდინარეობს, რომ $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$, სადაც $\vec{i}$ და $\vec{j}$ შესაბამისად OX და OY ღერძების მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორებია $\left(\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1, \quad \vec{i}\perp\vec{j}\right)$. ასეთ $\vec{i}$ და $\vec{j}$ ვექტორებს ეწოდება OX და OY საკოორდინატო **ღერძების მგეზავები**. ამრიგად,

$$\vec{a}=(3,-2)\Leftrightarrow\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}.$$



ნახ.16.4

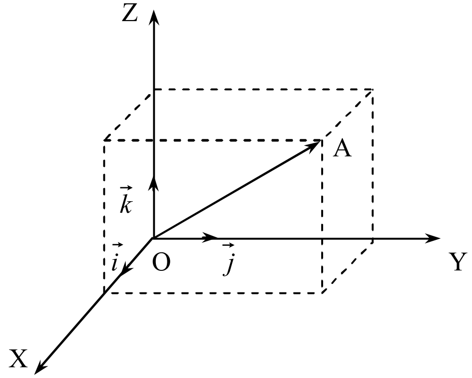
სივრცითი მართკუთხა კოორდინატთა $OXYZ$ სისტემის შემთხვევაში ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორის x, y და z კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$x=\text{გეგ}_{ox}\,\vec{a}, \quad y=\text{გეგ}_{oy}\,\vec{a}, \quad z=\text{გეგ}_{oz}\,\vec{a}.$$

ამ შემთხვევაშიც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{a}=(x,y,z)\Leftrightarrow \vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

სადაც $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ შესაბამისად OX, OY და OZ საკოორდინატო ღერძების მგეზავებია (ნახ. 16.5).



ნახ. 16.5

თეორემა 16.2. თუ $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ და $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, მაშინ $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$ და $\alpha\vec{a}=(\alpha x_1,\ \alpha y_1,\ \alpha z_1)$ $(\alpha\in R)$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა.

$$\vec{a}+\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)+\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$

$$=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k},$$

ე.ი.

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2).$$

ანალოგიურად დამტკიცდება ტოლობა $\alpha\vec{a}=(\alpha x_1,\alpha y_1,\alpha z_1)$. □

შევნიშნოთ, რომ 16.1. სავარჯიშო მოტანილი თეორემის ერთ-ერთი შედეგია.

შედეგი 16.3. იმისათვის, რომ ორი ვექტორი იყოს კოლინეარული, აუცილებელია და საკმარისი მათი კოორდინატები იყოს პროპორციული.

მითითება. იხ. თეორემა 15.4. □

ჩამოვაყალიბოთ ვექტორების კოორდინატებთან დაკავშირებული სხვა შედეგებიც.

შედეგი 16.4. ნებისმიერი წერტილის კოორდინატები ამ წერტილის რადიუს-ვექტორის კოორდინატების ტოლია. □

შედეგი 16.5. თუ

$$\vec{a}=(x,y,z),$$

მაშინ

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

მითითება. ისარგებლეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის თვისებით (იხ. ნახ. 16.5). □

α, β და γ-თი აღვნიშნოთ ის კუთხეები, რომელთაც $\vec{a}$ ვექტორი ადგენს შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძებთან. ამ კუთხეების კოსინუსებს $\cos\alpha, \cos\beta$ და $\cos\gamma$-ს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის **მიმართულების კოსინუსები.**

შედეგი 16.6. თუ

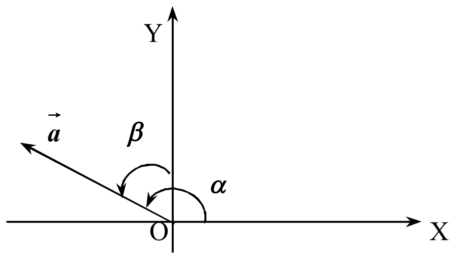
$$\vec{a}=(x, y, z),$$

მაშინ

$$x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha,\quad y=\left|\vec{a}\right|\cos\beta,\quad z=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma\ . \qquad (16.3)$$

შენიშვნა. ვთქვათ, $\vec{a}$ ვექტორი მდებარეობს OXY სიბრტყეში. α-თი აღვნიშნოთ კუთხე OX ღერძსა და $\vec{a}$ ვექტორს შორის, ათვლილი OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო β-თი – კუთხე OY ღერძსა და $\vec{a}$ ვექტორს შორის (ნახ. 16.6). მაშინ, როგორც ადვილი შესამოწმებელია, $\cos\beta=\sin\alpha$. ამის გამო (16.3) ფორმულებს ასეთ შემთხვევაში შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha,\quad y=\left|\vec{a}\right|\sin\alpha\ . \qquad \square \qquad (16.4)$$



ნახ. 16.6

შედეგი 16.7. თუ $\vec{a}=(x, y, z)$ $\quad(\vec{a}\neq 0)$, მაშინ

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \qquad \square \quad (16.5)$$

შედეგი 16.8. ერთეულოვანი ვექტორის კოორდინატები მისი მიმართულების კოსინუსების ტოლია, ე.ი. თუ $|\vec{e}|=1$, მაშინ

$$\vec{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

(ან $\vec{e}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$, თუ $\vec{e}$ მოთავსებულია OXY სიბრტყეში).□

შედეგი 16.9. ნებისმიერი ვექტორის მიმართულების კოსინუსებისათვის

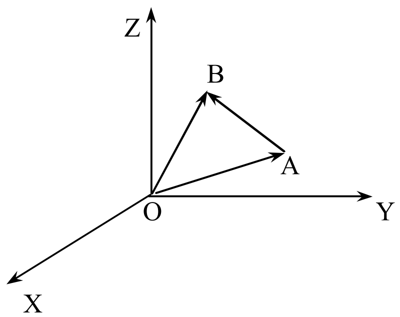
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \quad \square$$

ამ პარაგრაფის ბოლოს განვიხილოთ და ამოვხსნათ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი ამოცანა.

ამოცანა 16.10. მოცემულია $A=(x_1, y_1, z_1)$ და $B=(x_2, y_2, z_2)$ წერტილების კოორდინატები. ვიპოვოთ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის კოორდინატები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ (ნახ. 16.7), ხოლო $\overrightarrow{OB}=(x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{OA}=(x_1, y_1, z_1)$, ამიტომ

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$



ნახ. 16.7

მაგალითად, თუ $A=A(3;-1;\ 5)$, $B=B(2;\ 4;\ 1)$, მაშინ $\overrightarrow{AB}=(-1, 5, -4)$, ხოლო $\overrightarrow{BA}=(1, -5, 4)$. □

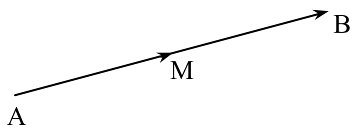
ამოცანა 16.11. მოცემულია $A=(x_1, y_1, z_1)$ და $B=(x_2, y_2, z_2)$ წერტილების კოორდინატები. ვიპოვოთ მანძილი ამ წერტილებს შორის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. რადგან $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, ამიტომ

$$AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ . \ \square$$

ამოცანა 16.12. მოცემულია $A=(x_1,y_1,z_1)$ და $B=(x_2,y_2,z_2)$ წერტილების კოორდინატები. ვიპოვოთ AB მონაკვეთის ისეთი M წერტილის კოორდინატები, რომლებიც AB მონაკვეთს გაყოფს მოცემული $\alpha:\beta$ თანაფარდობით.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $AM:MB=\alpha:\beta$ თანაფარდობიდან ვღებულობთ, რომ $\beta\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{MB}$ (ნახ. 16.8).



ნახ. 16.8

თუ ამ ტოლობას კოორდინატებით ჩავწერთ, მივიღებთ:

$$\beta(x-x_1)=\alpha(x_2-x),\ \beta(y-y_1)=\alpha(y_2-y),\ \beta(z-z_1)=\alpha(z_2-z),$$

საიდანაც

$$x=\frac{\beta x_1+\alpha x_2}{\alpha+\beta}\ ,\quad y=\frac{\beta y_1+\alpha y_2}{\alpha+\beta}\ ,\quad z=\frac{\beta z_1+\alpha z_2}{\alpha+\beta}\ . \qquad (16.6)$$

კერძო შემთხვევაში, როცა $\alpha=\beta=1$, აქედან ვღებულობთ მონაკვეთის შუაზე გაყოფის ფორმულებს:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\ ,\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\ .$$

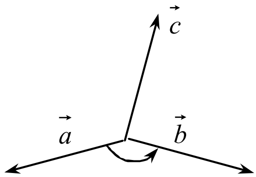
შევნიშნოთ, რომ (16.6) ფორმულებს შეიძლება მივცეთ სხვა სახე; თუ (16.6)-ში მრიცხველს და მნიშვნელს გავყოფთ β-ზე და შემოვიღებთ $\dfrac{\alpha}{\beta}=k$ აღნიშვნას, მივიღებთ:

$$x=\frac{x_1+kx_2}{k+1}, \quad y=\frac{y_1+ky_2}{k+1}, \quad z=\frac{z_1+kz_2}{k+1}. \qquad (16.7)$$

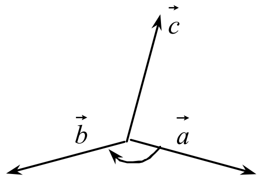
(16.7) არის AB მონაკვეთის $\dfrac{AM}{MB}=k$ თანაფარდობით გაყოფის ფორმულები. □

§17. ვექტორთა მარჯვენა და მარცხენა სამეული. კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია

განსაზღვრება. არაკომპლანარულ ვექტორთა დალაგებულ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ სამეულს ეწოდება **მარჯვენა ან მარჯვენა ორიენტაციის სამეული (მარცხენა ან მარცხენა ორიენტაციის სამეული),** თუ ამ სამი ვექტორის ერთ წერტილში მოდების შემდეგ $\vec{a}$ ვექტორის $\vec{b}$ ვექტორისაკენ უმცირესი კუთხით მობრუნება $\vec{c}$ ვექტორის ბოლოდან ჩანს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით).



ნახ. 17.1



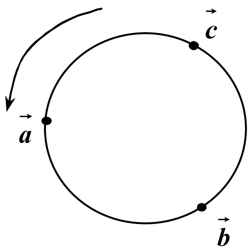
ნახ. 17.2

მაგალითად, 17.1 ნახაზზე მოყვანილი $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ სამეული მარჯვენაა, ხოლო 17.2-ზე – მარცხენა.

ვექტორთა ორ სამეულს ეწოდება ერთნაირი ორიენტაციის სამეული, თუ ორივე მარჯვენაა ან ორივე მარცხენაა.

მაგალითად, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ და $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ სამეულები ერთნაირი ორიენტაციის სამეულებია, ხოლო $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ და $\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}$ – საწინააღმდეგო. შევნიშნოთ, რომ ვექტორთა სამეულში ნებისმიერი ორი ვექტორის გადანაცვლება იწვევს ამ სამეულის ორიენტაციის შეცვლას.

ზოგადად, ერთნაირი ორიენტაციის სამეულების ასაგებად შეგვიძლია ვისარგებლოთ სქემით:

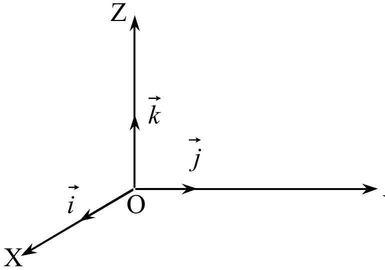


ნახ. 17.3

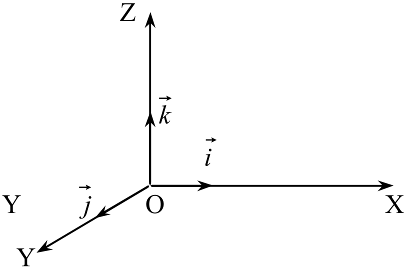
თუ ვიმოძრავებთ მოცემული წრეწირის გასწვრივ გარკვეული მიმართულებით (მაგალითად, ნახაზზე ნაჩვენები მიმართულებით), მივიღებთ ერთნაირი ორიენტაციის $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, $\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)$ და $\left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right)$ სამეულებს. მათი საწინააღმდეგო ორიენტაციის სამეულებია $\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right)$, $\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right)$ და $\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right)$.

განსაზღვრება. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას ეწოდება მარჯვენა (მარცხენა), თუ საკოორდინატო ღერძების $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ მგეზავები მარჯვენა (მარცხენა) სისტემას ქმნის.

17.4 ნახაზზე მოყვანილი სისტემა მარჯვენაა, ხოლო 17.5-ზე – მარცხენა. შემდეგში ძირითადად ვისარგებლებთ კოორდინატთა მარჯვენა სისტემით.



ნახ. 17.4



ნახ. 17.5

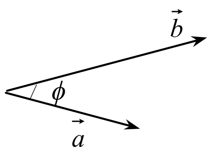
§18. ვექტორთა სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლი

1. **სკალარული ნამრავლის ცნება.** არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების **სკალარული ნამრავლი** ეწოდება ამ ვექტორების სიგრძეებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის ნამრავლს. თუ $\vec{a}$ (ან $\vec{b}$) ნულოვანი ვექტორია, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ან $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ სიმბოლოთი. განსაზღვრების ძალით:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi\,, \tag{18.1}$$

სადაც φ არის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის (ნახ. 18.1).



ნახ. 18.1

რადგან

$$\left|\vec{b}\right|\,\mathbf{cos}\varphi\,=\,\text{გეგ}_{\vec{a}}\,\vec{b}\,,\qquad \left|\vec{a}\right|\,\mathbf{cos}\varphi\,=\,\text{გეგ}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,,$$

ამიტომ (18.1) ტოლობას შეიძლება მივცეთ შემდეგი სახე:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\,=\,\left|\vec{a}\right|\,\text{გეგ}_{\vec{a}}\,\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\,\text{გეგ}_{\vec{b}}\,\vec{a}\,,$$

ე.ი. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ერთ-ერთი ვექტორის სიგრძისა და ამ ვექტორზე მეორე ვექტორის გეგმილის ნამრავლის ტოლია. ამ ფორმულიდან გამომდინარეობს აგრეთვე, რომ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილი ერთეულოვან $\vec{e}$ ვექტორზე ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლის ტოლია, ე.ი. თუ $|\vec{e}|=1$, მაშინ

$$\text{გეგ}_{\vec{e}}\,\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{e}. \qquad (18.2)$$

სკალარული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ ორი **არანულოვანი** $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ორთოგონალური (ე.ი. ურთიერთპერპენდიკულარული) ვექტორებია:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}\ . \qquad (18.3)$$

$\vec{a}$ ვექტორი სკალარულ ნამრავლს თავის თავზე, ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის **სკალარული კვადრატი** და $\vec{a}^{\,2}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად,

$$\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2.$$

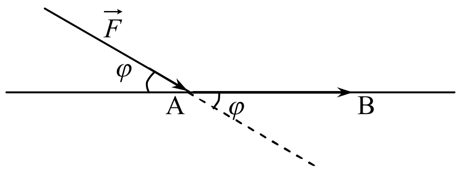
ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\ . \qquad (18.4)$$

ფიზიკის კურსიდან ცნობილია, რომ თუ მუდმივი $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით მატერიალური წერტილი AB წრფის გასწვრივ გადაადგილდება A წერტილიდან B წერტილში, მაშინ ამ ძალის მიერ შესრულებული W მუშაობა განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$W = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi ,$$

სადაც φ არის კუთხე $\vec{F}$ და $\overrightarrow{AB}$ ვექტორებს შორის (ნახ. 18.2).



ნახ. 18.2

რადგან

$$\left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} ,$$

ამიტომ $\vec{F}$ ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა წარმოადგენს ამ ძალის (როგორც ვექტორის) და $\overrightarrow{AB}$ გადაადგილების სკალარულ ნამრავლს, ე.ი.

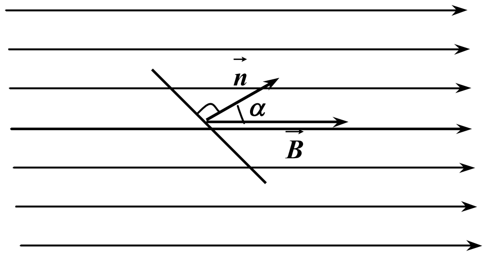
$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} . \qquad (18.5)$$

განვიხილოთ სკალარული ნამრავლის კიდევ ერთი გამოყენება ფიზიკიდან.

ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის შემთხვევაში ერთეულოვანი ფართობის მქონე ბრტყელი ზედაპირის გამჭოლი მაგნიტური ნაკადი

$$\Phi=\left|\vec{B}\right|\cos\alpha ,$$

სადაც $\vec{B}$ არის ველის მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი, ხოლო α – კუთხე აღნიშნული ზედაპირის მართობულ $\vec{n}$ ვექტორსა და $\vec{B}$ მაგნიტურ ინდუქციას შორის (ნახ. 18.3).



ნახ. 18.3

$\vec{n}$ ვექტორს ეწოდება ზედაპირის **ნორმალური ვექტორი**. თუ ვიგულისხმებთ, რომ $\left|\vec{n}\right|=1$, მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Phi=\left|\vec{B}\right|\cos\alpha=\left|\vec{B}\right|\left|\vec{n}\right|\cos\alpha=\vec{B}\cdot\vec{n} .$$

ამრიგად, ერთგვაროვანი მაგნიტური ველის შემთხვევაში ერთეულოვანი ბრტყელი ზედაპირის გამჭოლი მაგნიტური ნაკადი წარმოადგენს ველის მაგნიტური ინდუქციის და ამ ზედაპირის ერთეულოვანი ნორმალური ვექტორის სკალარულ ნამრავლს:

$$\Phi=\vec{B}\cdot\vec{n} . \qquad (18.6)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ S ფართობის მქონე ბრტყელი ზედაპირის გამჭოლი მაგნიტური ნაკადი შეიძლება გამოითვალოს შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

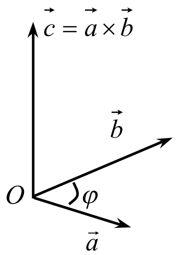
$$\Phi = \left(\vec{B} \cdot \vec{n}\right) S \, . \qquad (18.7)$$

2. ვექტორული ნამრავლის ცნება. ვთქვათ, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია. $\vec{a}$ ვექტორის **ვექტორული ნამრავლი** $\vec{b}$ ვექტორზე ეწოდება ისეთ $\vec{c}$ ვექტორს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სამი პირობით:

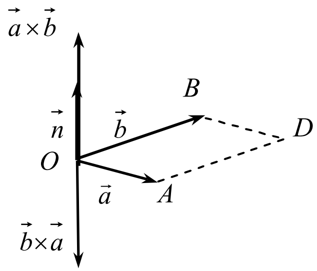
1. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$,სადაც φ არის კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის;

2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \; \vec{c} \perp \vec{b}$;

3. $\vec{c}$ ვექტორის მიმართულება ისეთია, რომ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ვექტორთა სამეული მარჯვენაა (ნახ. 18.4).



ნახ. 18.4



ნახ. 18.5

$\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი $\vec{b}$ ვექტორზე აღინიშნება $\vec{a}\times\vec{b}$ ან $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ სიმბოლოთი. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ განსაზღვრების თანახმად, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

ხაზგასმით აღვნიშნოთ, რომ სკალარული ნამრავლისაგან განსხვავებით ვექტორთა ვექტორული ნამრავლი არის ვექტორი და არა რიცხვი. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ $\vec{a}$ ვექტორის ვექტორული ნამრავლი თავის თავზე აღინიშნება $\vec{a}\times\vec{a}$ $\left(\text{ან } \left[\vec{a},\vec{a}\right]\right)$ სიმბოლოთი, და არა $\vec{a}^{\,2}$-ით ($\vec{a}^{\,2}$ არის ვექტორის სკალარული კვადრატი და წარმოადგენს რიცხვს).

ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრების პირველი პუნქტიდან გამომდინარეობს, რომ ორი არაკოლინეარული ვექტორის ვექტორული ნამრავლის მოდული ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის ტოლია, ე.ი. $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S_{OADB}$ (იხ. ნახ. 18.5). თუ $\vec{a}\times\vec{b}$ ვექტორის მგეზავს (ე.ი. $\vec{a}\times\vec{b}$ ვექტორის მიმართულების მქონე ერთეულოვან ვექტორს) აღვნიშნავთ $\vec{n}$-ით $\left(\left|\vec{n}\right|=1\right)$, მაშინ მივიღებთ:

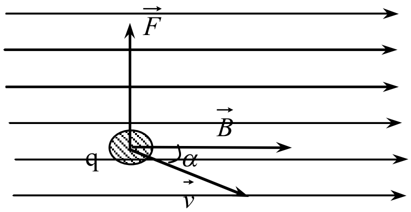
$$\vec{a}\times\vec{b}=S\vec{n}. \qquad (18.8)$$

ვთქვათ, რაიმე q მუხტი მოძრაობს მაგნიტურ ველში. $\vec{F}$ ძალა (ე.წ. **ლორენცის ძალა**), რომელიც მოქმედებს ამ მუხტზე, დამოკიდებულია როგორც q მუხტის სიდიდეზე, ასევე

ამ მუხტის მოძრაობის $\vec{v}$ სიჩქარეზე. ამ ძალის სიდიდე განისაზღვრება ტოლობით:

$$\left|\vec{F}\right|=q\left|\vec{v}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\alpha ,$$

სადაც $\vec{B}$ არის ველის მაგნიტური ინდუქციის ვექტორი, ხოლო α არის კუთხე $\vec{v}$ და $\vec{B}$ ვექტორებს შორის. $\vec{F}$ ძალა მიმართულია ისეთნაირად, რომ ის მართობულია $\vec{v}$ და $\vec{B}$ ვექტორების და ვექტორთა სამეული $\vec{F},\vec{v},\vec{B}$ მარჯვენაა (ნახ. 18.6).



ნახ. 18.6

ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, ლორენცის ძალისათვის შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\vec{F}=q\,\vec{v}\times\vec{B}\,. \qquad (18.9)$$

აქედან მიიღება აგრეთვე, რომ თუ მაგნიტურ ველში მოთავსებულ სადენში გადის I დენი, მაშინ ამ სადენის ერთეულოვანი სიგრძის ყოველ მონაკვეთზე მოქმედებს $\vec{F}$

ძალა, რომელიც წარმოადგენს $\vec{I}$ და $\vec{B}$ ვექტორების ვექტორულ ნამრავლს:

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}. \qquad (18.10)$$

აქ $\left|\vec{I}\right| = I$, ხოლო $\vec{I}$ ვექტორის მიმართულება ემთხვევა სადენის მიმართულებას.

3. შერეული ნამრავლი და მისი გეომეტრიული შინაარსი. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი ეწოდება $\vec{a} \times \vec{b}$ ვექტორული ნამრავლის სკალარულ ნამრავლს $\vec{c}$ ვექტორზე.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი აღინიშნება $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ სიმბოლოთი. განსაზღვრების ძალით:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\vec{c}.$$

შევნიშნოთ, რომ ვექტორთა შერეული ნამრავლი არის რიცხვი. შემდეგი თეორემა იძლევა შერეული ნამრავლის გეომეტრიულ ინტერპრეტაციას.

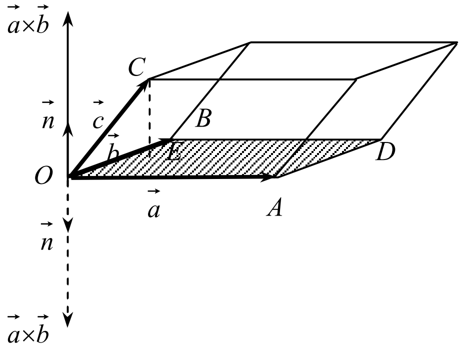
თეორემა 18.1. თუ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ კომპლანარული ვექტორებია, მაშინ $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$. თუ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია, მაშინ $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ შერეული ნამრავლის მოდული ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია; ამავე დროს, თუ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ სამეული მარჯვენაა, მაშინ $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) > 0$, ხოლო თუ მარცხენაა, მაშინ $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) < 0$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ და შესაბამისად,

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{0}\,\vec{c}=0\,.$$

ვთქვათ, ახლა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არაკოლინეარული ვექტორებია. მაშინ $\vec{a}\times\vec{b}=S\vec{n}$ (იხ. ტოლობა (18.8)), საიდანაც

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=S\vec{n}\cdot\vec{c}=S\left(\vec{n}\cdot\vec{c}\right)=S\cdot გეგ_{\vec{n}}\vec{c} \qquad (18.11)$$



ნახ. 18.7

თუ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ კომპლანარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{c}$ იქნება $\vec{n}$ ვექტორის ორთოგონალური (იხ. ნახ. 18.7), ამიტომ $გეგ_{\vec{n}}\vec{c}=0$. თუ ამას გავითვალისწინებთ (18.11) ტოლობაში, მივიღებთ, რომ ასეთ შემთხვევაში $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

თუ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ არაკომპლანარული ვექტორებია და ეს სამეული მარჯვენაა, მაშინ $გეგ_{\vec{n}}\vec{c}>0$ და შესაბამისად,

$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)>0$, ხოლო თუ ეს სამეული მარცხენაა, მაშინ $გეგ_{\vec{n}}\vec{c}<0$ და $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)<0$.

რადგან $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის $OADB$ ფუძეზე დაშვებული CE სიმაღლე $\left|გეგ_{\vec{n}}\vec{c}\right|$ რიცხვის ტოლია, ამიტომ (18.11) ფორმულიდან მივიღებთ, რომ

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|=\left|S\cdot გეგ_{\vec{n}}\vec{c}\right|=S\cdot CE=V,$$

სადაც V აღნიშნული პარალელეპიპედის მოცულობაა. □

შედეგი 18.2. იმისათვის, რომ სამი ვექტორი იყოს კომპლანარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ვექტორთა შერეული ნამრავლი იყოს ნულის ტოლი. □

4. ვექტორთა სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლის ძირითადი თვისებები. $\forall\,\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in V_3$, $\forall\alpha\in R$:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$;
2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;
3. $\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;
4. $\vec{a}^{\,2}\geq 0$; თუ $\vec{a}^{\,2}=0$, მაშინ $\vec{a}=\vec{0}$;
5. თუ $\forall\,\vec{c}\in V_3$ $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$, მაშინ $\vec{a}=\vec{b}$;
6. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
7. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;

8. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)=\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)=\left(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right)=-\left(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\right)=-\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\right)=-\left(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\right)$;

9. $\left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)=\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right)+\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)$, $\left(\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{d}\right)=\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)+\left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right)$,

$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}+\vec{d}\right)=\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)+\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right)$;

10. $\left(\alpha\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)=\left(\vec{a}, \alpha\vec{b}, \vec{c}\right)=\left(\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{c}\right)=\alpha\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$;

11. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (დისტრიბუციულობა);

12. $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\alpha\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

13. $\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=\vec{k}^{\,2}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

14.

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=\vec{0}$, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$, $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$,

$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$.

მოვიყვანოთ ზოგიერთი თვისების დამტკიცება:

2. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}=\left|\vec{c}\right|\text{გეგ}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|\left(\text{გეგ}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{გეგ}_{\vec{c}}\vec{b}\right)=$

$=\left|\vec{c}\right|\text{გეგ}_{\vec{c}}\vec{a}+\left|\vec{c}\right|\text{გეგ}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

3. მტკიცდება ანალოგიურად.

7. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$, ხოლო $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\vec{a}=\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)$. მაგრამ $\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|=\left|\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)\right|=V$ (თეორემა 18.1). ამავე დროს, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ და $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ ვექტორთა სამეულებს აქვთ ერთნაირი ორიენტაცია, ამიტომ $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ და $\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)$ რიცხვების ნიშნებიც ემთხვევა ერთმანეთს და მაშასადამე, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)=\left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right)$.

8. გამომდინარეობს მე-7 თვისებიდან.

5. სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლის გამოსახვა კოორდინატებში.

თეორემა 18.3. თუ $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{z}=(x_3,y_3,z_3)$, მაშინ

I. $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$;

II. $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$,

ან, თუ დავშლით დეტერმინანტის პირველი სტრიქონის მიხედვით,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k};$$

III. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ზემოაღნიშნული თვისებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

I. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$

$$=x_1x_2\vec{i}^{\,2}+x_1y_2\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+x_1z_2\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)+y_1x_2\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)+y_1y_2\vec{j}^{\,2}+y_1z_2\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)+$$

$$+z_1x_2\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right)+z_1y_2\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right)+z_1z_2\vec{k}^{\,2}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2;$$

II. $\vec{a}\times\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$

$$=x_1x_2\left(\vec{i}\times\vec{i}\right)+x_1y_2\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)+z_1z_2\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+y_1x_2\left(\vec{j}\times\vec{i}\right)+$$

$$+y_1y_2\left(\vec{j}\times\vec{j}\right)+y_1z_2\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+z_1x_2\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+z_1y_2\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+z_1z_2\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)=$$

$$=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix};$$

I I I. რადგან

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$

და

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\vec{k},$$

ხოლო ვექტორთა სკალარული ნამრავლი მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ჯამის ტოლია, ამიტომ

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=x_1\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

შედეგი 18.4. თუ $\vec{a}=(x,y,z)$, მაშინ

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \qquad (18.12)$$

მართლაც, თეორემის ძალით, $\vec{a}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2$, ხოლო (18.4) ფორმულის თანახმად, $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

შევნიშნოთ, რომ მე-16 პარაგრაფისგან განსხვავებით (იხ. შედეგი 16.5), ამ ფორმულის გამოყვანისას აქ არ ვისარგებლეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის თვისებით. პირიქით, მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის აღნიშნული თვისება პირდაპირ გამომდინარეობს (18.12) ფორმულიდან.

შედეგი 18.5. იმისათვის, რომ ორი არანულოვანი $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ და $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ვექტორი იყოს ორთოგონალური, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ამ ვექტორების შესაბამისი კოორდინატების ნამრავლთა ჯამი იყოს ნულის ტოლი, ე.ი,

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

შედეგი 18.6. კუთხე φ ორ არანულოვან $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ და $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ ვექტორს შორის გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

შედეგი 18.7. იმისათვის, რომ სამი $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ და $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ ვექტორი იყოს კომპლანარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ მათი კოორდინატებისგან

შედგენილი მესამე რიგის დეტერმინანტი იყოს ნულის ტოლი, ე.ი.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\vec{a} = (1, 2, -2)$, $\vec{b} = (2, -1, -1)$, $\vec{c} = (3, 2, -3)$. ვიპოვოთ:

1) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი;

2) კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის;

3) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ვექტორული ნამრავლი;

4) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი;

5) $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების შერეული ნამრავლი;

6) $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-2)(-1) = 2;$

2) $$cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-2)(-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9},$$

საიდანაც

$$\varphi = arccos\frac{\sqrt{6}}{9};$$

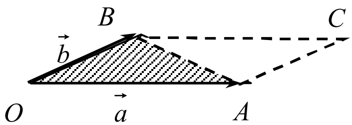
3) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=-4\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$,

ე.ი.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-4;-3;-5);$$

4) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებზე აგებული სამკუთხედის ფართობი ამ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამის ფართობის ნახევრის ტოლია (ნახ. 18.8), ამიტომ

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-3)^2+(-5)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2};$$



ნახ.18.8

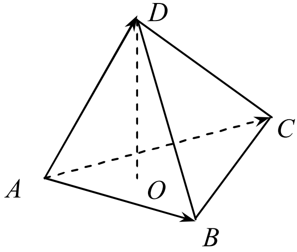
5) $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=-3;$

6) $V_{\text{პარ}}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left|-3\right|=3.$

მაგალითი 2. ცნობილია პირამიდის წვეროები $A(1,-1,2)$, $B(2,1,0)$, $C(3,-2,1)$ და $D(4,1,-1)$. ვიპოვოთ ამ პირამიდის მოცულობა და D წვეროდან დაშვებული პირამიდის DO სიმაღლე (ნახ. 18.9).

ა მ ო ხ ს ნ ა. სამკუთხა პირამიდის მოცულობა შესაბამისი პარალელეპიპედის მოცულობის $\frac{1}{6}$-ის ტოლია, ე.ი.

$$V_{\text{პირ.}} = \frac{1}{6}\left| \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \right|.$$



ნახ. 18.9

მაგრამ $\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (2;-1;-1)$, $\overrightarrow{AD} = (3;2;-3)$, ამიტომ

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3;$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$V_{\text{პირ}} = \frac{1}{6}\left|-3\right| = \frac{1}{2}.$$

რადგან $V_{\text{პირ}} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot DO$, ამიტომ

$$DO = \frac{3V_{\text{პირ}}}{S_{\Delta ABC}}.$$

მაგრამ (იხ. მაგალითი 1)

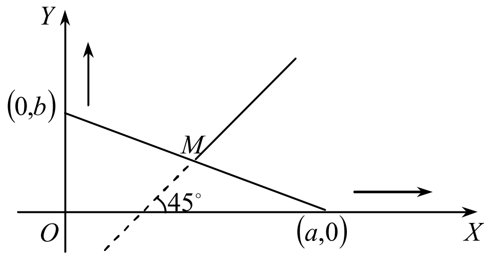
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

საიდანაც $$DO = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

IV თავი. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

ანალიზური გეომეტრია არის მათემატიკის დარგი, რომელიც შეისწავლის გეომეტრიულ ფიგურებს ალგებრული მეთოდებით. XVII საუკუნეში ფრანგი მათემატიკოსის რ. დეკარტის მიერ პირველად იქნა შემუშავებული კოორდინატთა მეთოდი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს ერთმანეთს დავუკავშიროთ გეომეტრიული და ალგებრული ცნებები.

ამ თავში კოორდინატთა მეთოდის საფუძველზე დავამყარებთ შესაბამისობას წერტილებსა და რიცხვებს შორის. ამ შესაბამისობის საშუალებით კი გეომეტრიული ფიგურების თვისებებს შევისწავლით ალგებრული განტოლებების საშუალებით. ხშირ შემთხვევაში ეს საგრძნობლად აადვილებს ამოცანის ამოხსნას. მაგალითად, განვიხილოთ გეომეტრიული ამოცანა, რომლის ამოხსნა უფრო მოსახერხებელია კოორდინატთა მეთოდით, ვიდრე წმინდა გეომეტრიული მეთოდებით. ვიპოვოთ, რა წირს აღწერს ორ ურთიერთმართობულ ღერძზე ერთი და იმავე სიდიდის სიჩქარით მოძრავი ორი მატერიალური სხეულის შემაერთებელი მონაკვეთის შუა წერტილი. ვთქვათ, პირველი სხეული მოძრაობს OX ღერძის გასწვრივ $A(a,0)$ წერტილიდან, ხოლო მეორე – OY ღერძის გასწვრივ $B(0,b)$ წერტილიდან (იხ. ნახაზი).



მაშინ t დროის შემდეგ პირველი სხეული იქნება $(a+vt,0)$ წერტილში, ხოლო მეორე $(0,b+vt)$ წერტილში, სადაც v არის სხეულების მოძრაობის სიჩქარის სიდიდე. ვთქვათ, აღნიშნული მონაკვეთის შუა წერტილია $M(x,y)$. მაშინ $x=\dfrac{a+vt}{2}$, $y=\dfrac{b+vt}{2}$, საიდანაც t პარამეტრის გამორიცხვით მივიღებთ $y=x+\dfrac{b-a}{2}$ ალგებრულ განტოლებას, რომელიც, როგორც ვნახავთ, წარმოადგენს წრფის განტოლებას. ეს კი გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ მონაკვეთის შუა წერტილი მოძრაობს წრფეზე.

კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით შევისწავლით სხვადასხვა სახის წირებისა და ზედაპირების ფორმებს და მათ თვისებებს, რომლებიც, თავის მხრივ, ფართო გამოყენებას პოულობს საინჟინრო ამოცანებში (იხ. §22).

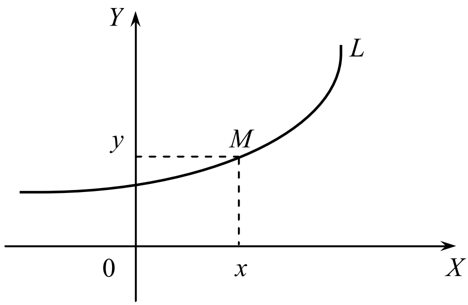
§19. წირის და ზედაპირის განტოლების ცნება. ალგებრული წირები და ზედაპირები

განსაზღვრება. ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა OXY სისტემა და L არის ამ სიბრტყეში მდებარე წირი (ნახ. 19.1).

$$F(x,y)=0 \tag{19.1}$$

განტოლებას ეწოდება L **წირის განტოლება**, თუ სიბრტყის $M(x,y)$ წერტილი ეკუთვნის L წირს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (19.1) განტოლებას, ე.ი.

$$M(x,y)\in L \Leftrightarrow F(x,y)=0 .$$



ნახ. 19.1

შევნიშნოთ, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია $F(x,y)=0$ განტოლების წარმოდგენა ცხადი $y=\varphi(x)$ სახით.

განსაზღვრება. $A_1x^{k_1}y^{l_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}+\cdots+A_mx^{k_m}y^{l_m}=0$ სახის განტოლებას, სადაც $A_1,A_2,\ldots,A_m$ ნებისმიერი ნამდვილი

რიცხვებია, ხოლო $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_m, l_m$ არაუარყოფითი მთელი რიცხვებია, ეწოდება **ალგებრული განტოლება** x და y უცნობების მიმართ. თუ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ კოეფიციენტები განსხვავებულია ნულისაგან, მაშინ $k_1+l_1, k_2+l_2, \ldots, k_m+l_m$ რიცხვებს შორის უდიდესს ეწოდება **ალგებრული განტოლების ხარისხი.**

მაგალითად,

$$2x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}y^3 = 0$$

არის მეხუთე ხარისხის ალგებრული განტოლება (მის წევრებს შორის უდიდესი ხარისხი 5 აქვს პირველ წევრს $2x^3y^2$), ხოლო $2x-y+5=0$ არის პირველი ხარისხის განტოლება. პირველი ხარისხის განტოლებას ეწოდება აგრეთვე **წრფივი განტოლება**.

განსაზღვრება. სიბრტყეში მდებარე L წირს ეწოდება **ალგებრული წირი,** თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ეს წირი მოიცემა ალგებრული განტოლებით. ამ განტოლების ხარისხს ეწოდება **ალგებრული წირის რიგი.** წირის რიგი არ არის დამოკიდებული დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შერჩევაზე.

მაგალითად, $y=2x$ განტოლებით განსაზღვრული წირი (წრფე) არის პირველი რიგის წირი, ხოლო $y=x^2$ განტოლებით განსაზღვრული წირი (პარაბოლა) – მეორე რიგის.

შენიშვნა. $F(x,y)=0$ სახის განტოლება შეიძლება განსაზღვრავდეს არა ერთ წირს, არამედ წირთა გარკვეულ ერთობლიობას (მაგალითად, განტოლება $x^2-y^2=0$ განსაზღვრავს ორ წრფეს $y=x$ და $y=-x$); იგი შეიძლება განსაზღვრავდეს ერთ წერტილს ან წერტილთა სასრულ ერთობლიობას (მაგალითად, $x^2+y^2=0$ განტოლება განსაზღვრავს ერთ წერტილს – კოორდინატთა სისტემის O სათავეს); შეიძლება საერთოდ არ განსაზღვრავდეს არც ერთ წირს და არც ერთ წერტილს (ასეთია, მაგალითად, $x^2+y^2+1=0$ განტოლება).

ზოგიერთ შემთხვევაში მიზანშეწონილია წირის მოცემა პარამეტრული განტოლების საშუალებით. ასეთ შემთხვევაში წერტილის x და y კოორდინატები ერთმანეთს უკავშირდება დამხმარე t პარამეტრის საშუალებით:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \qquad (19.2)$$

სადაც $x(t)$ და $y(t)$ რაიმე $[\alpha,\beta]$ შუალედზე განსაზღვრული t არგუმენტის უწყვეტი ფუნქციებია. თუ პარამეტრის ყოველ $t\in[\alpha,\beta]$ მნიშვნელობას შევუსაბამებთ სიბრტყის ისეთ $M(x,y)$ წერტილს, რომლის კოორდინატებია $x=x(t)$ და $y=y(t)$, მაშინ ყველა ასეთი წერტილის სიმრავლე წარმოადგენს (19.2) განტოლებით განსაზღვრულ L წირს.

მაგალითი 1. ვაჩვენოთ,, რომ განტოლება

$$\begin{cases} x=R\,cost \\ y=R\,sint \end{cases}, \quad 0\le t \le 2\pi \quad (R>0) \tag{19.3}$$

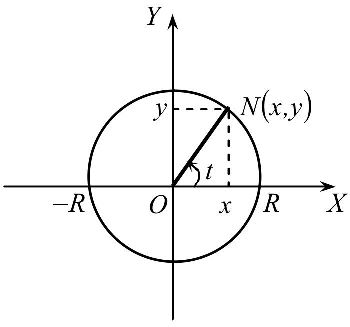
წარმოადგენს R-რადიუსიანი წრეწირის პარამეტრულ განტოლებას ცენტრით O $(0;0)$ წერტილში.

ა მ ო ხ ს ნ ა. ვთქვათ, $M(x,y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (19.3) განტოლებას. ეს ნიშნავს, რომ $[0,2\pi]$ შუალედში არსებობს t-ს ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $x=R\cos t$ და $y=R\sin t$. აქედან

$$x^2+y^2=R^2\,cos^2 t+R^2 sin^2 t=R^2\left(cos^2 t+sin^2 t\right)=R^2,$$

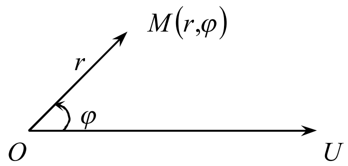
ე.ი. აღნიშნული $M(x,y)$ წერტილი ეკუთვნის მოცემულ წრეწირს.

პირიქით, ვთქვათ $N(x,y)$ წერტილი ეკუთვნის მოცემულ წრეწირს. t-თი აღვნიშნოთ კუთხე OX ღერძსა და ON სხივს შორის, ათვლილი OX ღერძიდან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 19.2). მაშინ $x=ON\cdot cost=Rcost$ და $y=ON\cdot sint=Rsint$, ე.ი. $N(x,y)$ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (19.3) განტოლებას. □



ნახ. 19.2.

სიბრტყეში მდებარე წირის განტოლება შეიძლება იყოს მოცემული აგრეთვე **პოლარულ კოორდინატთა სისტემაში.** სიბრტყის პოლარულ კოორდინატთა სისტემა შედგება ამ სიბრტყეში მდებარე რომელიმე O წერტილისაგან და მასზე გამავალ OU სხივისაგან, რომელზეც შერჩეულია სიგრძის ერთეული (მასშტაბი). O წერტილს ეწოდება **პოლუსი**, ხოლო OU სხივს – **პოლარული ღერძი**. სიბრტყის ნებისმიერი M წერტილის **პოლარული კოორდინატებია** r და φ რიცხვები, სადაც r არის მანძილი M და O წერტილებს შორის, ხოლო φ – კუთხე OX და OM სხივებს შორის, ათვლილი OU-დან საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 19.3).



ნახ. 19.3

წირის პოლარულ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

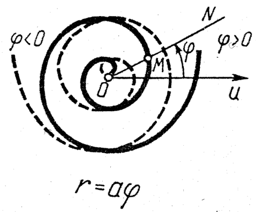
$$F(r,\varphi)=0\ ,$$

ან, თუ ის ამოხსნადია r-ის მიმართ,

$$r=r(\varphi)\quad (\alpha<\varphi<\beta),$$

სადაც $r(\varphi)$ არის რაიმე $[\alpha,\beta]$ მონაკვეთზე განსაზღვრული φ არგუმენტის არაუარყოფითი ფუნქცია.

მაგალითად, $r=a\varphi$ $(0\leq\varphi\leq2\pi)$ განტოლებით განსაზღვრული წირი, სადაც a ფიქსირებული რიცხვია, ე.წ. **არქიმედეს სპირალს** (ნახ. 19.4) წარმოადგენს.



ნახ. 19.4

განსაზღვრება. ვთქვათ, სივრცეში მოცემულია დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა $OXYZ$ სისტემა და S რაიმე ზედაპირია.

$$F(x,y,z)=0 \qquad (19.4)$$

განტოლებას ეწოდება S **ზედაპირის განტოლება**, თუ $M(x,y,z)$ წერტილი ეკუთვნის S ზედაპირს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ამ წერტილის კოორდინატები აკმაყოფილებს (19.4) განტოლებას, ე.ი.

$$M(x,y,z)\in S\Leftrightarrow F(x,y,z)=0\,.$$

თუ ამოვხსნით (19.4) განტოლებას z-ის მიმართ (იმ შემთხვევაში, როცა ეს შესაძლებელია), მივიღებთ S ზედაპირის განტოლებას ცხადი სახით:

$$z=f(x,y).$$

ისევე, როგორც წირის შემთხვევაში, განისაზღვრება ალგებრული ზედაპირი და მისი რიგი.

განსაზღვრება. S ზედაპირს ეწოდება **ალგებრული ზედაპირი**, თუ დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ეს ზედაპირი მოიცემა ალგებრული განტოლებით:

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} z^{m_2} + \dots + A_m x^{k_m} y^{l_m} z^{m_n} = 0.$$

ამ განტოლების ხარისხს ეწოდება ალგებრული S **ზედაპირის რიგი.**

რადგან სივრცეში განლაგებული ყოველი წირი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს როგორც ორი ზედაპირის თანაკვეთა, ამიტომ წირის განტოლება სივრცეში წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases},$$

სადაც სისტემის თითოეული განტოლება წარმოადგენს შესაბამისი ზედაპირის განტოლებას.

მაგალითად, რადგან $z=0$ არის OXY სიბრტყის განტოლება, $y=0$ კი OXZ – სიბრტყისა, ამიტომ სისტემა

$$\begin{cases} z=0 \\ y=0 \end{cases}$$

წარმოადგენს OX წრფის განტოლებას სივრცეში.

§20. წრფისა და სიბრტყის განტოლებები

წინა პარაგრაფში გავეცანით ალგებრული წირისა და ალგებრული ზედაპირის ცნებებს. ახლა დაწვრილებით შევისწავლოთ **პირველი რიგის წირები და ზედაპირები.**

სიბრტყეზე პირველი რიგის წირის ზოგადი განტოლებაა:

$$Ax+By+C=0 \quad \left(A^2+B^2\neq 0\right). \qquad (20.1)$$

აღვნიშნოთ ეს წირი L-ით და ვთქვათ, $M_0\left(x_0,y_0\right)\in L$. მაშინ

$$Ax_0+By_0+C=0,$$

საიდანაც

$$C=-Ax_0-By_0.$$

თუ C-ს ამ მნიშვნელობას შევიტანთ (20.1) განტოლებაში, მაშინ ელემენტარული გარდაქმნების შემდეგ მივიღებთ განტოლებას:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0. \qquad (20.2)$$

(20.2) განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს ვექტორული სახით:

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right)=0, \qquad (20.3)$$

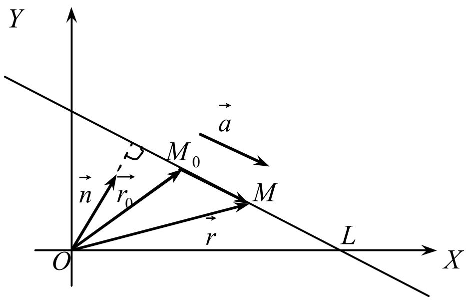
სადაც $\vec{n}=\left(A,B\right)$, $\vec{r}=\left(x,y\right)$, $\vec{r_0}=\left(x_0,y_0\right)$. რადგან $\vec{n}\neq\vec{0}$ (პირობის ძალით $A^2+B^2\neq 0$), ამიტომ (20.3) შეიძლება შეიცვალოს მისი ეკვივალენტური პირობით (იხ.(18.3)):

$$\vec{n}\perp\vec{r}-\vec{r_0}.$$

აქედან გამომდინარეობს (იხ. ნახ. 20.1), რომ L წირი წარმოადგენს $M(x,y)$ სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლეს, რომელთათვისაც

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n},$$

ე.ი. L წირი არის $M_0(x_0,y_0)$ წერტილზე გამავალი და $\vec{n}=(A,B)$ ვექტორის მართობული წრფე.



ნახ. 20.1

ჩამოვაყალიბოთ მიღებული შედეგი თეორემის სახით.

თეორემა 20.1. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში ყოველი წრფივი ალგებრული განტოლება სიბრტყეზე განსაზღვრავს წრფეს და პირიქით, სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის განტოლება არის წრფივი განტოლება.

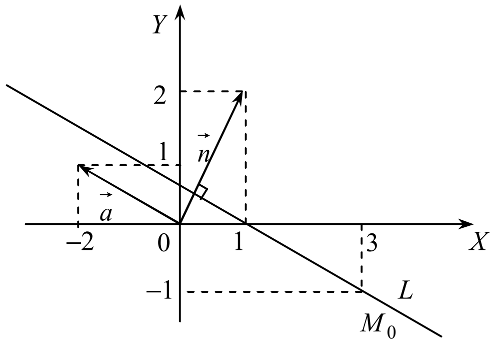
(20.1) განტოლებას ეწოდება **წრფის ზოგადი განტოლება სიბრტყეზე.** ამ განტოლების A და B კოეფიციენტები წარმოადგენს იმ ვექტორის კოორდინატებს, რომლებიც ამ

წრფის მართობულია. ასეთ $\vec{n}=(A,B)$ ვექტორს ეწოდება L წრფის **ნორმალური ვექტორი**.

თუ ცნობილია $M_0(x_0,y_0)$ წერტილი, რომელზეც გადის L წრფე, და $\vec{n}=(A,B)$ ვექტორი, რომელიც ამ წრფის მართობულია, მაშინ L წრფის განტოლების შესადგენად შეიძლება ვისარგებლოთ (20.2) ფორმულით.

მაგალითი 1. დავწეროთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც გადის $M_0(3;-1)$ წერტილზე და არის $\vec{n}=(1;2)$ ვექტორის მართობული (ნახ. 20.2).

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $A=1$, $B=2$, $x_0=3$, $y_0=-1$, ამიტომ (20.2) ფორმულის თანახმად, საძიებელი წრფის განტოლებაა $1\cdot(x-3)+2\cdot(y+1)=0$. გამარტივების შემდეგ მივიღებთ $x+2y-1=0$ განტოლებას. $\square$



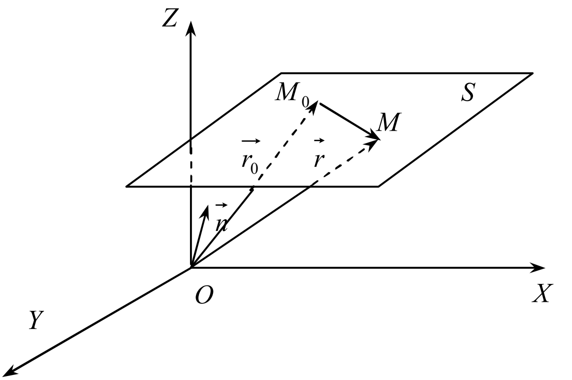
ნახ. 20.2.

თეორემა 20.1-ის ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 20.2. დეკარტის მართკუთხა $OXYZ$ კოორდინატთა სისტემაში ყოველი წრფივი ალგებრული განტოლება

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right) \qquad (20.4)$$

წარმოადგენს სიბრტყის განტოლებას და პირიქით, ნებისმიერი სიბრტყის განტოლება არის წრფივი (ნახ. 20.3).



ნახ. 20.3.

(20.4) განტოლებას ეწოდება სიბრტყის **ზოგადი განტოლება.** A, B და C კოეფიციენტები წარმოადგენს იმ $\vec{n}$ ვექტორის კოორდინატებს, რომლებიც ამ სიბრტყის მართობულია. ასეთ $\vec{n}=\left(A,B,C\right)$ ვექტორს ეწოდება სიბრტყის **ნორმალური ვექტორი.**

მოვიყვანოთ წრფის და სიბრტყის განტოლებების სხვა სახეები.

1. $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{a}\quad (t\in R)$ – წრფის ვექტორულ-პარამეტრული განტოლება (აქ $\vec{a}\neq 0$ არის წრფის პარალელური ნებისმიერი ვექტორი; ასეთ ვექტორს ეწოდება წრფის **მიმმართველი ვექტორი** (ნახ. 20.1));

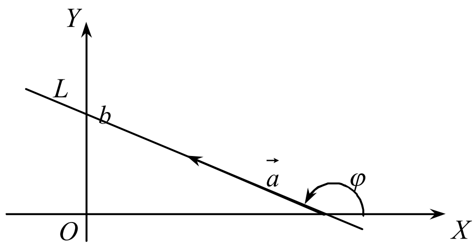
2. $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}\quad (t\in R)$ – წრფის პარამეტრული განტოლება

(აქ l, m, n წრფის $\vec{a}$ მიმმართველი ვექტორის კოორდინატებია);

3. $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – წრფის კანონიკური განტოლება.

(აქ $M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$ წრფის ერთ-ერთი წერტილია (ნახ. 20.1));

4. $y=kx+b$ – წრფის განტოლება სიბრტყეზე კუთხური კოეფიციენტით.



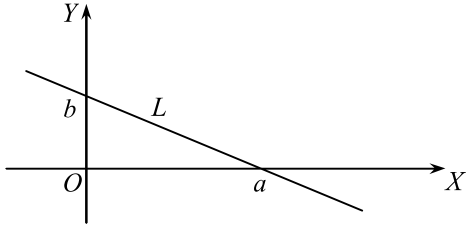
ნახ. 20.4

აქ $k=tg\varphi$, სადაც φ არის კუთხე OX ღერძსა და L წრფეს შორის, ათვლილი OX ღერძიდან საათის ისრის

მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით $\left(0\leq\varphi<\pi,\ \varphi\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$,

ხოლო b იმ მონაკვეთის სიდიდეა, რომელსაც L წრფე მოკვეთს OY ღერძზე (ნახ. 20.4). φ კუთხეს ეწოდება წრფის **დახრის კუთხე**, ხოლო k რიცხვს – კუთხური კოეფიციენტი;

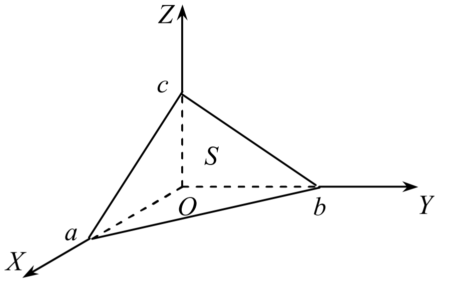
5. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – წრფის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში.



ნახ.. 20.5

აქ a და b პარამეტრის მნიშვნელობები წარმოადგენს იმ მონაკვეთების სიდიდეებს, რომლებსაც L წრფე მოკვეთს შესაბამისად OX და OY ღერძებზე (ნახ. 20.5);

6. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ – სიბრტყის განტოლება ღერძთა მონაკვეთებში (ნახ. 20.6);

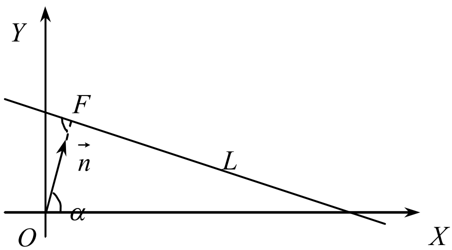


ნახ. 20.6

7. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – წრფის ზოგადი სახის განტოლება სივრცეში.

სისტემის თითოეული განტოლება წარმოადგენს სიბრტყის განტოლებას, ხოლო L წრფე განისაზღვრება, როგორც ამ სიბრტყეების თანაკვეთა. შევნიშნოთ, რომ მოცემული სიბრტყეები არაპარალელურია;

8.. $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad (p \geq 0)$ – წრფის ნორმალური განტოლება.



ნახ.20.7

აქ α არის კუთხე OX ღერძსა და კოორდინატთა O სათავიდან L წრფისადმი გავლებულ მართობს შორის, ხოლო p არის მანძილი კოორდინატთა სისტემის O სათავიდან წრფემდე (ნახ. 20.7).

იმისათვის, რომ წრფის ზოგადი (20.1) განტოლებიდან გადავიდეთ წრფის ნორმალურ განტოლებაზე, ზოგადი განტოლების ორივე მხარე უნდა გავამრავლოთ ე.წ. **მანორმირებელ** მამრავლზე

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \ .$$

λ მამრავლის ნიშანი უნდა შეირჩეს ისეთნაირად, რომ შესრულდეს $\lambda C \le 0$ პირობა;

9. $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0$ – სიბრტყის ნორმალური განტოლება.

აქ p რის მანძილი კოორდინატთა სისტემის სათავიდან სიბრტყემდე, ხოლო α, β, γ კუთხეებია, რომელთაც კოორდინატთა სისტემის O სათავიდან გავლებული მართობი შეადგენს შესაბამისად OX, OY და OZ ღერძების დადებით მიმართულებასთან. იმისათვის, რომ სიბრტყის ზოგადი (20.4) განტოლებიდან გადავიდეთ ნორმალურ სახეზე, ამ განტოლების ორივე მხარე უნდა გავამრავლოთ მანორმირებელ მამრავლზე:

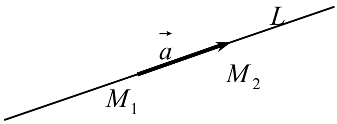
$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (\lambda D \le 0) \ .$$

§21. ძირითადი ამოცანები წრფეებსა და სიბრტყეებზე

ამოცანა 21.1. მოცემულ ორ წერტილზე გამავალი წრფის განტოლება (ნახ.21.1).

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ და $M_2(x_2,y_2,z_2)$ წერტილებზე გამავალი L წრფის განტოლებაა:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ . \qquad (21.1)$$



ნახ. 21.1.

თუ წრფე მდებარეობს OXY სიბრტყეში, მაშინ $z_1=z_2=0$ და განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\ . \qquad (21.2)$$

მაგალითი 1. დავწეროთ $M_1(2;\,-3)$ და $M_2(1;\,4)$ წერტილებზე გამავალი წრფის განტოლება.

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $x_1=2,\ y_1=-3,\ x_2=1,\ y_2=4$, ამიტომ (21.2)-დან ვღებულობთ:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+3}{4+3}\ ,$$

საიდანაც

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{7}\ .$$

თუ ამოვსნით ამ განტოლებას y-ის მიმართ, მივიღებთ წრფის

განტოლებას კუთხური კოეფიციენტით:

$$y=-7x+11\,. \quad \square$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 21.2. მოცემულ სამ წერტილზე გამავალი სიბრტყის განტოლება.

თუ $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ და $M_2(x_3,y_3,z_3)$ ერთ წრფეზე არამდებარე წერტილებია, მაშინ ამ წერტილებზე გამავალი სიბრტყის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,. \qquad (21.3)$$

ᲛᲐᲒᲐᲚᲘᲗᲘ 2. დავწეროთ იმ სიბრტყის განტოლება, რომელიც გადის $M_1(2;\,3;\,-1)$, $M_2(3,4,0)$ და $M_3(1,-1,5)$ წერტილებზე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. (21.3)-ის თანახმად,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 3-2 & 4-3 & 0+1 \\ 1-2 & -1-3 & 5+1 \end{vmatrix}=0\,.$$

თუ გამოვთვლით დეტერმინანტს და გავამარტივებთ მიღებულ გამოსახულებას, მივიღებთ განტოლებას:

$$10x-7y-3z-2=0\,. \quad \square$$

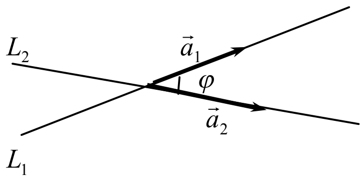
ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 21.3. კუთხე ორ წრფეს შორის.

1. თუ L_1 და L_2 წრფეების განტოლებები მოცემულია კანონიკური სახით

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{და} \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2},$$

მაშინ (იხ. ნახ. 21.2) φ კუთხე ამ წრფეებს შორის განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$cos\varphi=\frac{\left|l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2\right|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \qquad (21.4)$$



ნახ. 21.2

ორი წრფის პარალელურობის პირობაა:

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2},$$

ხოლო მართობულობის -

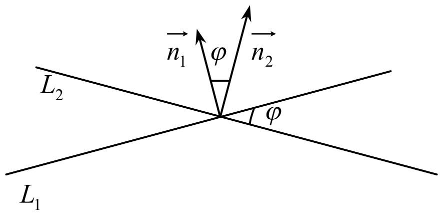
$$l_1 l_2+m_1 m_2+n_1 n_2=0;$$

2. თუ L_1 და L_2 წრფეების განტოლებები სიბრტყეზე მოცემულია ზოგადი სახით

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

მაშინ (იხ. ნახ. 21.3):

$$cos\varphi=\frac{\left|A_1 A_2+B_1 B_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (21.5)$$



ნახ. 21.3

ამ წრფეების პარალელურობის პირობაა:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},$$

ხოლო მართობულობის -

$$A_1A_2+B_1B_2=0;$$

3. თუ L_1 და L_2 წრფეების განტოლებები სიბრტყეზე მოცემულია კუთხური კოეფიციენტებით:

$$y=k_1x+b_1 \quad \text{და} \quad y=k_2x+b_2,$$

მაშინ, თუ $k_1k_2\neq-1$,

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \qquad (21.6)$$

თუ $k_1k_2=-1$, მაშინ $\varphi=90^\circ$. ამრიგად,

$$k_2=-\frac{1}{k_1}$$

არის ორი წრფის მართობულობის პირობა.

მაგალითი 3. ვიპოვოთ კუთხე $y=2x+1$ და $y=-3x+5$ წრფეებს შორის.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $k_1=2$, $k_2=-3$, ამიტომ

$$tg\varphi=\left|\frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)}\right|=1,$$

საიდანაც

$$\varphi=arctg1=45^\circ. \quad \square$$

ამოცანა 21.4. კუთხე ორ სიბრტყეს შორის.

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \quad \text{და} \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

სიბრტყეების შორის φ კუთხე განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით:

$$cos\varphi=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (21.7)$$

ამოცანა 21.5. კუთხე წრფესა და სიბრტყეს შორის.

თუ წრფე მოცემულია განტოლებით

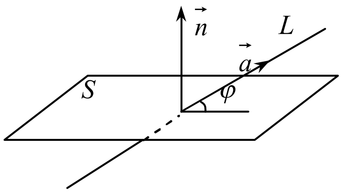
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

ხოლო S სიბრტყე განტოლებით

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

მაშინ φ კუთხე მათ შორის განისაზღვრება ტოლობით (იხ. ნახ. 21.4):

$$\sin\phi=\frac{\left|Al+Bm+Cn\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \qquad (21.8)$$



ნახ., 21.4

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 21.6. მანძილი წერტილიდან წრფემდე (სიბრტყეზე).

1. თუ L წრფის განტოლება მოცემულია ნორმალური სახით

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0\,,$$

მაშინ d მანძილი $M_0(x_0,y_0)$ წერტილიდან ამ წრფემდე განისაზღვრება ტოლობით:

$$d = \left|x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p\right|\,; \qquad (21.9)$$

2. თუ L წრფის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით

$$Ax+By+C=0\,,$$

მაშინ d მანძილი $M_0(x_0,y_0)$ წერტილიდან ამ წრფემდე განისაზღვრება ფორმულით:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\,. \qquad (21.10)$$

ᲛᲐᲒᲐᲚᲘᲗᲘ 4. ვიპოვოთ მანძილი $M_0(2;-3)$ წერტილიდან $3x+4y-4=0$ წრფემდე.

ა მ ო ხ ს ნ ა. $x_0 = 2,\ y_0 = -3,\ A = 3,\ B = 4,\ C = -4$, ამიტომ (21.10)-ის თანახმად,

$$d=\frac{|3\cdot2+4\cdot(-3)-4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\,. \quad \square$$

ამოცანა 21.7. მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე.

1. თუ სიბრტყის განტოლება მოცემულია ნორმალური სახით:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0\,,$$

მაშინ d მანძილი $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილიდან ამ სიბრტყემდე განისაზღვრება ტოლობით:

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p|\,; \qquad (21.11)$$

თუ სიბრტყის განტოლება მოცემულია ზოგადი სახით

$$Ax+By+Cz+D=0\,,$$

მაშინ d მანძილი $M_0(x_0,y_0,z_0)$ წერტილიდან ამ სიბრტყემდე განისაზღვრება ტოლობით:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,. \qquad (21.12)$$

§22. მეორე რიგის წირები და ზედაპირები

1. **მეორე რიგის წირები.** მეორე რიგის წირის ზოგადი განტოლებაა:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \;\; (A^2+B^2+C^2\neq0). \quad (22.1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\Delta=AC-B^2\,.$$

მტკიცდება (იხ. II ნაწ.), რომ (22.1) სახის ნებისმიერი განტოლებისათვის არსებობს ცვლადთა ისეთი გარდაქმნა, რომელიც ინარჩუნებს წირის ფორმას და ამავე დროს დაჰყავს აღნიშნული განტოლება შემდეგი სახის განტოლებებიდან ერთ-ერთზე:

I. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\Delta>0)$;

II. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\Delta<0)$;

III. $y^2=2px, \quad p\neq 0 \quad (\Delta=0)$.

წირებს, რომლებიც განისაზღვრება ამ განტოლებებით, ეწოდება შესაბამისად **ელიფსი, ჰიპერბოლა და პარაბოლა.** შევნიშნოთ, რომ გარდა აღნიშნული განტოლებებისა, (22.1)-დან მიიღება აგრეთვე სხვა სახის განტოლებები, მაგრამ ისინი ან საერთოდ არ განსაზღვრავენ არც ერთ წირს (მაგალითად, $x^2+y^2+1=0$ განტოლების ამონახსენთა სიმრავლე ცარიელია, ხოლო $x^2+y^2=0$ განტოლება განსაზღვრავს მხოლოდ ერთ წერტილს), ან განსაზღვრავენ ერთ წრფეს (მაგალითად, განტოლება $y^2=0$ განსაზღვრავს ერთ წრფეს $y=0$) ან წრფეთა წყვილს (განტოლება $y^2-x^2=0$ განსაზღვრავს ორ წრფეს $y=x$ და $y=-x$). ასეთ განსაკუთრებულ შემთხვევებს აქ არ განვიხილავთ.

ამრიგად, არსებობს მეორე რიგის მხოლოდ სამი წირი: ელიფსი, ჰიპერბოლა, პარაბოლა.

მაგალითი 1. დავადგინოთ, რა წირია მოცემული შემდეგი განტოლებით:

$$x^2+4y^2-2x-3=0. \tag{22.2}$$

ა მ ო ხ ს ნ ა. აქ $A=1,\ B=0,\ C=4$,

ამიტომ

$$\Delta=AC-B^2=4.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ საქმე არა გვაქვს განსაკუთრებულ შემთხვევასთან, ამ განტოლებით განსაზღვრული წირი არის ელიფსი. მართლაც, რადგან

$$x^2+4y^2-2x-3=x^2-2x+1+4y^2-4=(x-1)^2+4y^2-4,$$

ამიტომ

$$x-1=x'.$$

აღნიშვნის შემოღების შემდეგ, მივიღებთ განტოლებას:

$$(x')^2+4y^2-4=0,$$

საიდანაც

$$\frac{(x')^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

ამრიგად, (22.2) წარმოადგენს ელიფსის განტოლებას (იხ. მაგალითი 2-ც). □

დაწვრილებით შევისწავლოთ მეორე რიგის წირები.

I. **ელიფსი.**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad (22.3)$$

განტოლებას ეწოდება **ელიფსის კანონიკური განტოლება**. თუ $a>b$, მაშინ a რიცხვს ეწოდება ელიფსის **დიდი ნახევარღერძი,** b-ს – **მცირე ნახევარღერძი**; $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$ წერტილებს, სადაც

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad (22.4)$$

ეწოდება ელიფსის **ფოკუსები**, ხოლო

$$\varepsilon=\frac{c}{a}$$

რიცხვს ეწოდება ელიფსის **ექსცენტრისიტეტი.**

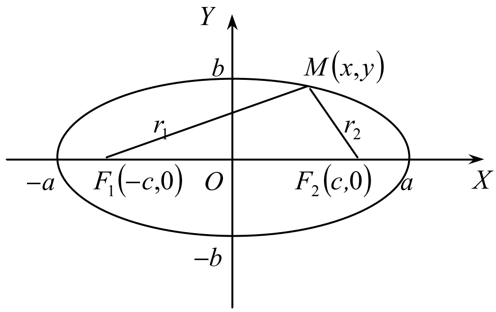
ცხადია, ელიფსის ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon<1$. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ (22.3)-დან გამომდინარეობს,

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\le 1.$$

ამიტომ

$$-a\le x\le a,\quad -b\le y\le b,$$

ე.ი. ელიფსი შემოსაზღვრული ფიგურაა (ნახ. 22.1).



ნახ. 22.1

თეორემა 22.1. ელიფსის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების ჯამი არის მუდმივი სიდიდე და უდრის $2a$-ს.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $M(x,y)$ ელიფსის ნებისმიერი წერტილია, მაშინ

$$r_1=F_1M=\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\,. \quad (22.5)$$

განვსაზღვროთ (22.3) განტოლებიდან y^2 და შევიტანოთ (22.5) ტოლობაში:

$$r_1=F_1M=\sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2cx+c^2+b^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+2cx+c^2+b^2}\,.$$

მაგრამ (22.4)-დან $a^2-b^2=c^2$ და $c^2+b^2=a^2$, ამიტომ

$$r_1=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\sqrt{(\varepsilon x+a)^2}=|\varepsilon x+a|\,.$$

რადგან $|x|\le a$ და $0\le\varepsilon<1$, ამიტომ $|\varepsilon x|\le a$ და, მაშასადამე, $a+\varepsilon x\ge 0$.

ამრიგად,

$$r_1=a+\varepsilon x\,.$$

ანალოგიურად,

$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=|\varepsilon x-a|=a-\varepsilon x\,.$$

აქედან

$$r_1+r_2=a+\varepsilon x+a-\varepsilon x=2a,$$

რაც ამტკიცებს თეორემას. □

სავარჯიშო 22.2. დაამტკიცეთ, რომ მართებულია შებრუნებული დებულება: თუ სიბრტყის რომელიმე M წერტილისათვის

$$F_1M+F_2M=2a,$$

მაშინ ეს M წერტილი არის (22.3) განტოლებით განსაზღვრული ელიფსის წერტილი.

ამრიგად, **ელიფსი** შეიძლება განისაზღვროს როგორც **სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა მანძილების ჯამი ამ სიბრტყეში მდებარე ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივი სიდიდეა** (ეს მუდმივი სიდიდე მეტია მოცემულ წერტილებს შორის მანძილზე).

$r_1=a+\varepsilon x$ და $r_2=a-\varepsilon x$ რიცხვებს ეწოდება ელიფსის $M(x,y)$ წერტილის **ფოკალური რადიუსები**. როცა $\varepsilon=0$ (ე.ი. როცა $c=0$ ან, რაც იგივეა, $a=b$), $r_1=r_2=a$ და (22.3) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x^2+y^2=a^2.$$

ამრიგად, $\varepsilon=0$ შემთხვევაში ელიფსი წარმოადგენს a-რადიუსიან წრეწირს. საზოგადოდ, რაც უფრო მცირეა ელიფსის ε ექსცენტრისიტეტი, მით უფრო ახლოსაა ელიფსის ფორმა წრეწირის ფორმასთან, ხოლო რაც უფრო

დიდია ε, მით უფრო მეტად იქნება გაჭიმული ელიფსი OX ღერძის გასწვრივ.

ცნობილია, რომ პლანეტების და ზოგიერთი კომეტების მოძრაობის ტრაექტორია წარმოადგენს ელიფსს, რომლის ერთ-ერთ ფოკუსში მოთავსებულია მზე. ამავე დროს, პლანეტების ტრაექტორიის ექსცენტრისიტეტი ε საკმაოდ მცირეა (ე.ი. პლანეტების მოძრაობის ტრაექტორია მიახლოებულია წრეწირთან), ხოლო კომეტების ტრაექტორიის ექსცენტრისიტეტი ε ახლოსაა 1-თან (ეს ნიშნავს, რომ კომეტები ხან უახლოვდება მზეს, ხან კი მნიშვნელოვნად შორდება).

მაგალითი 2. დავხაზოთ $x^2+4y^2-2x-3=0$ განტოლებით განსაზღვრული წირი.

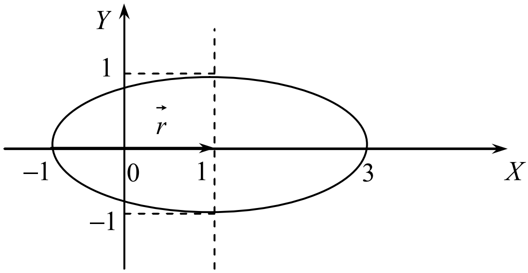
ა მ ო ხ ს ნ ა. როგორც ნაჩვენები იყო (იხ. მაგალითი 1), მოცემული განტოლება შეიძლება გადაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1\,.$$

აქ $a^2=4,\ b^2=1,$ ამიტომ $a=2,\ b=1$. ეს ელიფსი მიიღება

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

ელიფსისაგან პარალელური $\vec{r}=(1,0)$ გადატანით OX ღერძის მიმართულებით ერთი ერთეულით (ნახ. 22.2).



ნახ. 22.2

სავარჯიშო **22.3.** დაამტკიცეთ, რომ ელიფსის პარამეტრულ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

II. ჰიპერბოლა

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \qquad (22.6)$$

განტოლებას ეწოდება ჰიპერბოლის **კანონიკური განტოლება.** a და b რიცხვებს ეწოდება ჰიპერბოლის შესაბამისად **ნამდვილი და წარმოსახვითი ნახევარღერძები;** $F_1(-c,0)$ და $F_2(c,0)$ წერტილებს, სადაც

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ეწოდება ჰიპერბოლის **ფოკუსები,** ხოლო

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

რიცხვს – ჰიპერბოლის **ექსცენტრისიტეტი** (ჰიპერბოლის ექსცენტრისიტეტი $\varepsilon > 1$). (22.6) განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1,$$

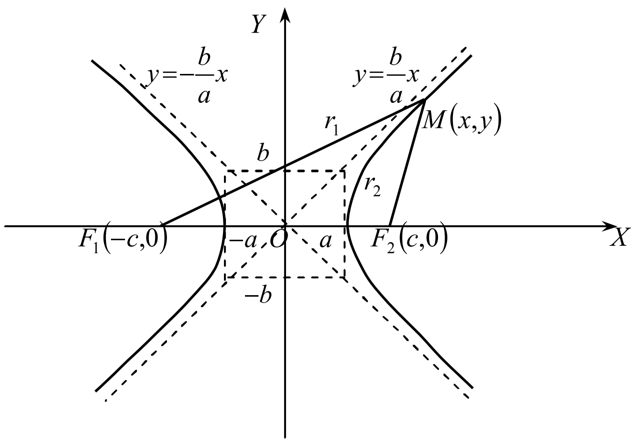
საიდანაც

$$|x| \geq a,$$

ე.ი. ჰიპერბოლა არ არის შემოსაზღვრული ფიგურა (ნახ. 22.3). ჰიპერბოლას აქვს ასიმპტოტები, რომელთა განტოლებებია:

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x.$$

თუ $a = b$, ჰიპერბოლას ეწოდება ტოლფერდა ჰიპერბოლა.



ნახ. 22.3

თეორემა 22.1-ის ანალოგიურად მტკიცდება

თეორემა 22.4. ჰიპერბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსებამდე მანძილების სხვაობის მოდული არის მუდმივი სიდიდე და უდრის $2a$-ს, ე.ი. (იხ. ნახ. 22.3)

$$\left|F_1M - F_2M\right| = 2a\,. \qquad (22.7)$$

მართებულია შებრუნებული დებულებაც, ე.ი. თუ სიბრტყის რომელიმე M წერტილისათვის სრულდება (22.7) ტოლობა, მაშინ M წერტილი არის (22.6) განტოლებით განსაზღვრული ჰიპერბოლის წერტილი.

ამრიგად, **ჰიპერბოლა შეიძლება განისაზღვროს როგორც სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომელთა მანძილების სხვაობის მოდული ამ სიბრტყეში მდებარე ორ მოცემულ წერტილამდე მუდმივი სიდიდეა** (ეს მუდმივი სიდიდე ნაკლებია მოცემულ წერტილებს შორის მანძილზე).

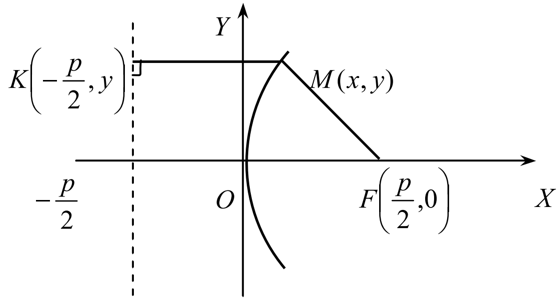
$r_1 = F_1M$ და $r_2 = F_2M$ რიცხვებს ეწოდება ჰიპერბოლის M წერტილის ფოკალური რადიუსები. ეს რადიუსები გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$r_1 = \left|a + \varepsilon\, x\right|, \qquad r_2 = \left|a - \varepsilon\, x\right|.$$

III. პარაბოლა.

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \qquad (22.8)$$

განტოლებას ეწოდება პარაბოლის **კანონიკური განტოლება.** $F\left(0,\frac{P}{2}\right)$ წერტილს ეწოდება პარაბოლის **ფოკუსი**, ხოლო $x=-\frac{p}{2}$ წრფეს – პარაბოლის დირექტრისა (ნახ. 22.4).



ნახ. 22.4

თეორემა 22.5. პარაბოლის ნებისმიერი წერტილიდან ფოკუსამდე მანძილი ამ წერტილიდან დირექტრისამდე მანძილის ტოლია.

დ ა მ ტ კ ი ც ე ბ ა. ვთქვათ, $M(x,y)$ პარაბოლის ნებისმიერი წერტილია (ნახ. 22.4), მაშინ

$$FM=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2}=$$

$$=\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}+2px}=\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2},$$

ხოლო

$$KM=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|=x+\frac{p}{2},$$

ე.ი.

$$FM=KM, \qquad (22.9)$$

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა. □

სავარჯიშო 22.6. დაამტკიცეთ, რომ თუ სიბრტყის რომელიმე M წერტილისათვის სრულდება (22.9) ტოლობა, მაშინ M წერტილი წარმოადგენს (22.8) განტოლებით განსაზღვრული პარაბოლის წერტილს.

მაგალითი 3. დავხაზოთ

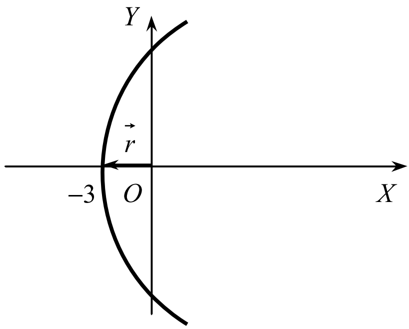
$$y^2-4x-12=0$$

განტოლებით განსაზღვრული წირი.

ა მ ო ხ ს ნ ა. მოვახდინოთ მოცემული განტოლების გარდაქმნა

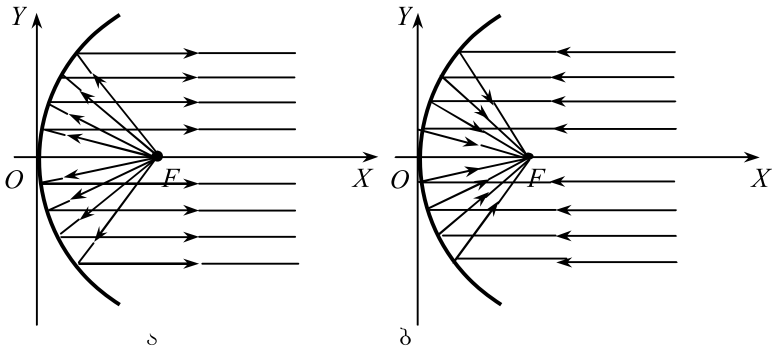
$$y^2-4x-12=0 \Leftrightarrow y^2=4(x+3).$$

აქედან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ეს წირი წარმოადგენს პარაბოლას, რომელიც მიიღება $y^2=4x$ პარაბოლისაგან $\vec{r}=(-3,0)$ პარალელური გადატანით (ნახ. 22.5). □



ნახ. 22.5

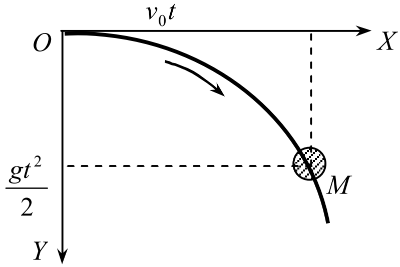
აღვნიშნოთ პარაბოლის ერთი მნიშვნელოვანი ოპტიკური თვისება: პარაბოლის F ფოკუსიდან გამავალი სინათლის სხივები პარაბოლიდან სარკული არეკვლის შემდეგ პარაბოლის ღერძის პარალელურ სხივთა კონას ქმნიან (ნახ. 22.6 ა).



ნახ. 22.6.

პარაბოლის აღნიშნული თვისება გამოიყენება განათების სხვადასხვა სახის მოწყობილობების კონსტრუირებისას. ეს თვისება გამოიყენება აგრეთვე ტელესკოპებსა და ანტენებში, კერძოდ, პარაბოლურ ანტენებში, სადაც ელექტრომაგნიტური ენერგიის დაფოკუსება ხდება პარაბოლის ფოკუსში (ნახ. 22.6 ბ).

აღვნიშნოთ პარაბოლასთან დაკავშირებული კიდევ ერთი საინტერესო ფაქტი: ჰორიზონტალურად ნატყორცნი სხეულის ტრაექტორია წარმოადგენს პარაბოლას (ნახ. 22.7).

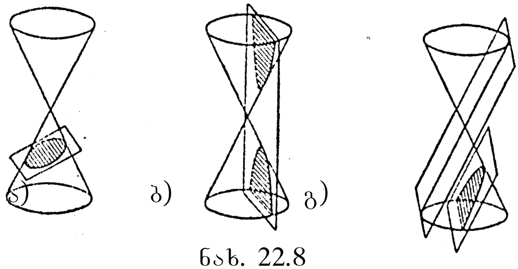


ნახ. 22.7

მართლაც, ამ ტრაექტორიის ნებისმიერი M წერტილის კოორდინატებია $x=v_0t$ და $y=\frac{gt^2}{2}$. თუ პირველი განტოლებიდან ნაპოვნი პარამეტრის $t=\frac{x}{v_0}$ მნიშვნელობას შევიტანთ მეორე განტოლებაში, მივიღებთ საძიებელი პარაბოლის განტოლებას:

$$y=\frac{g}{2v_0^2}x^2 .$$

შევნიშნოთ, რომ მეორე რიგის წირებს უწოდებენ აგრეთვე **კონუსურ კვეთებს**, რაც განპირობებულია იმით, რომ ეს წირები წარმოადგენს წრიული კონუსის გარკვეულ კვეთებს (ნახ. 22.8 ა – ელიფსი, 22.8 ბ – ჰიპერბოლა, 22.8 გ – პარაბოლა).



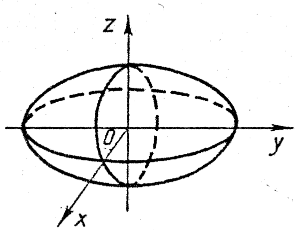
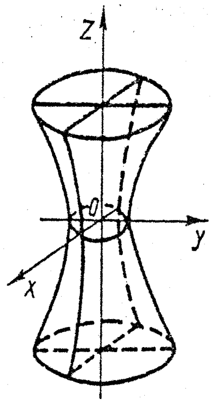
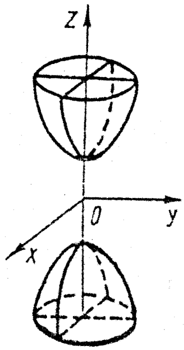
ნახ. 22.8

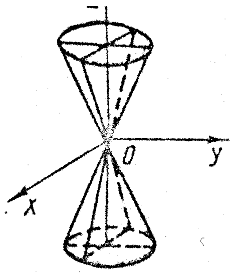
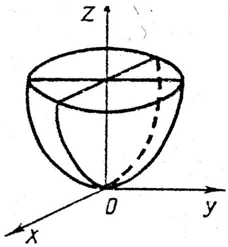
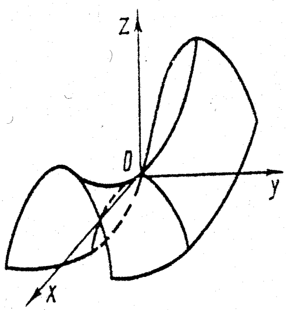
2. მეორე რიგის ზედაპირები. მეორე რიგის ზედაპირის ზოგადი განტოლებაა:

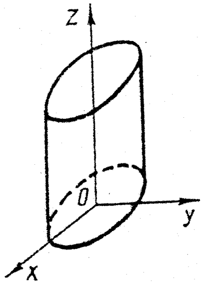
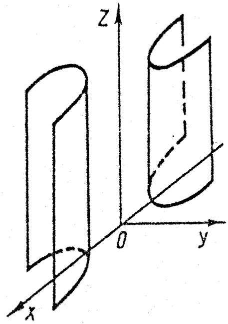
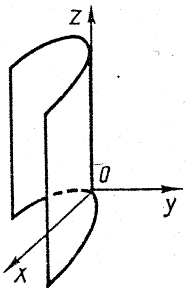
$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dyz+Exz+Fxy+Kx+Ly+Mz+N=0\,, \quad (22.10)$$

სადაც $A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2\neq 0$.

ისევე, როგორც მეორე რიგის წირების შემთხვევაში, შეიძლება დამტკიცდეს, რომ განსაკუთრებული შემთხვევების გამოკლებით, მეორე რიგის ზედაპირის ზოგადი განტოლება ცვლადთა გარკვეული გარდაქმნით, რომელიც დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემის შეცვლის ტოლფასია, $\mathrm{I}-\mathrm{XI}$ სახის ერთ-ერთ განტოლებაზე დაიყვანება:

I	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ ელიფსოიდი	
II	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი	
III	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$ ორკალთა ჰიპერბოლოიდი	

IV	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ კონუსი	
V	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$ ელიფსური პარაბოლოიდი	
VI	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$ ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი	

VII	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ ელიფსური ცილინდრი	
VIII	$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ ჰიპერბოლური ცილინდრი	
IX	$$y^2=2px$$ პარაბოლური ცილინდრი	

ამრიგად, არსებობს მეორე რიგის მხოლოდ ცხრა ზედაპირი: ელიფსოიდი, ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი, ორკალათა ჰიპერბოლოიდი, კონუსი, ელიფსური პარაბოლოიდი, ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი, ელიფსური ცილინდრი, ჰიპერბოლური ცილინდრი და პარაბოლური ცილინდრი.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

1. დურგლიშვილი ნ., ბუაძე ა., იოსავა მ., მელაძე ო., სიგუა ლ. უმაღლესი მათემატიკის ამოცანათა კრებული. I ნაწილი. თბილისი: განათლება, 1989.

2. თოფურია ს., ხოჭოლავა ვ., მაჭარაშვილი ნ., გიორგაძე დ., კვალიაშვილი ა. წრფივი ალგებრის და ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები. თბილისი: განათლება, 1988.

3. A.C. Bajpai, I.M. Calus, J.A. Fairley. Mathematics for Engineers and Scientists, John Wiley & Sons, London – New York – Sidney – Toronto, 1973.

4. A Croft, R. Davison, M. Hargreaves. Engineering Mathematics. A Modern Foundation for Electronic, Electrical and System Engineers. Addison-Wesley, Harlow – New York – Tokyo, 1996.

5. G. James, D. Burley, D. Clements, P. Dyke, J. Searl, J. Wright. Modern Engineering Mathematics. Addison-Wesley, Wokinngham - New York – Tokyo, 1992.

ს ა რ ჩ ე ვ ი

13. კრონეკერ–კაპელის თეორემა.

14. მატრიცთა ალგებრის ზოგიერთი გამოყენების შესახებ (ელექტროწრედების ანალიზი).

III თავი. ვექტორები

15. ვექტორის ცნება. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე.

16. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. ვექტორის კოორდინატები.

17. ვექტორთა მარჯვენა და მარცხენა სამეული. კოორდინატთა სისტემის ორიენტაცია.

18. ვექტორთა სკალარული, ვექტორული და შერეული ნამრავლი.

IV თავი. ანალიზური გეომეტრიის ელემენტები

19. წირის და ზედაპირის განტოლების ცნება. ალგებრული წირები და ზედაპირები.

20. წრფის და სიბრტყის განტოლებები.

21. ძირითადი ამოცანები წრფეებზე და სიბრტყეებზე.

22. მეორე რიგის წირები და ზედაპირები.