ელგუჯა ყუბანეიშვილი

ვეივლეტ–გარდაქმნის საფუძვლები

დამხმარე სახელმძღვანელო

თბილისი

სახელმძღვანელო განკუთვნილია საინჟინრო და ეკონომიური პროფილის სტუდენტებისათვის, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის. სახელმძღვანელო წარმოადგენს შესავალს ვეივლეტ–გარდაქმნაში, სადაც განხილულია ვეივლეტ–გარდაქმნის არსი, მისი გამოყენების პრაქტიკული ასპექტები, რომლებიც ორიენტირებული არიან დროზე დამოკიდებული მონაცემების დამუშავებისათვის.

რეცენზენტები:

ასოცირებული პროფესორი ჯ. ნონიკაშვილი
ასოცირებული პროფესორი კ. ფაღავა

რედაქტორი მ. იაშვილი
კომპიუტერული უზრუნველყოფა ლ. ყუბანეიშვილი
ქაღალდის ზომა 60X84 $\frac{1}{16}$.
ნაბეჭდი თაბახი 4,2 შეკვეთა 63

გამომცემლობა
შ.პ.ს. „თობალისი“, 2009წ

შესავალი

ვეივლეტ–გარდაქმნა წარმოადგენს დროზე დამოკიდებული ფუნქციების, კერძოდ სიგნალების (დროითი მწკრივების) წრფივი გარდაქმნის განსაკუთრებელ სახეს, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია გამოვავლინოთ სიგნალის ისეთი ლოკალური თავისებურებები, რომელთა გამოვლენა ტრადიციულ ფურიეს და ლაპლასის გარდაქმნებით შეუძლებელია. განსაკუთრებით ეს ეხება არასტაციონალურ შემთხვევით პროცესებს, რომელთა შემადგენელი კომპონენტები (ამპლიტუდა,სიხშირე,ფაზა) იცვლებიან დროსა და სივრცეში.

ვეივლეტ–გარდაქმნა ბოლო ათეული წლის განმავლობაში ჩამოყალიბდა როგორც ახალი სამეცნიერო მიმართულება. ტერმინი „Wavelet“ ინგლისურიდან ითარგმნება, როგორც მოკლე ტალღა. „მოკლეს“ ქვეშ იგულისხმება ის, რომ ვეივლეტის ფუნქციას გააჩნია სასრულო სიგანე. სიტყვა „ტალღა“ ასახავს იმ ფაქტს, რომ ვეივლეტ–ფუნქცია რხევადია. პირველად ვეივლეტის ცნება შემოიტანეს ჟ.მორლეტამ და ა.გროსმანმა 1984წ, როცა ისინი იკვლევდნენ სიგნალების ჯგუფს ბაზისური ფუნქციით, რომელსაც ვეივლეტი უწოდეს. ვეივლეტები წარმოადგენენ გარკვეული ფორმის მათემატიკური ფუნქციების ერთობლიობის განზოგადოებულ დასახელებას, რომლებიც ლოკალიზებული არიან როგორც დროით, ასევე სიხშირულ არეში.

გაზვიადების გარეშე შეგვიძლია აღვნიშნოთ, რომ ვეივლეტებმა მოახდინეს არასტაციონარული შემთხვევითი პროცესების დამუშავების თეორიასა და პრაქტიკაში მნიშვნელოვანი გარღვევა. დღეისათვის ვეივლეტ–გარდაქმნა ძირითადად გამოიყენება დროზე დამოკიდებული პროცესების (სიგნალი, დროითი მწკრივი) დამუშავებისათვის. გარდა ამისა, მისი გამოყენება

შესაძლებელია მრავალ სფეროში: მედიცინასა და ბიოლოგიაში, ასტროფიზიკაში, გეოფიზიკაში, ქვანტურ მექანიკაში და ბევრ სხვა მიმართულებაში.

უნდა შევნიშნოთ, რომ ვეივლეტ–გარდაქმნა არ უნდა განვიხილოთ, როგორც სიგნალების დამუშავების უნივერსალური ტექნოლოგია. ვეივლეტების შესაძლე-ბლობები ჯერ კიდევ ბოლომდე არ არის შესწავლილი, მაგრამ ეს იმას არ ნიშნავს, რომ ვეივლეტების განვითარება მომავალში მთლიანად გამორიცხავს ინფორმაციის დამუშავებისა და ანალიზის ტრადიციულ მეთოდებს.

მიუხედავად იმისა, რომ დღეისათვის ვეივლეტ–გარდაქმნაზე საზღვარგარეთ უამრავი სტატიები, მონოგრაფიები და სახელმძღვანელოებია შექმნილი. საქართველოში ქართულ ენაზე დაწერილი სახელ-მძღვანელო დეფიციტს წარმოადგენს. წარმოდგენილი სახელმძღვანელო პირველ რიგში საინჟინრო და ეკონომიკური პროფილის სტუდენტებისათვის არის განკუთვნილი, თუმცა მათი გამოყენება შეუძლიათ ინჟინრებს, ეკონომისტებს და ყველა იმ პიროვნებებს, რომლებიც დაკავებული არიან მონაცემების დამუშავების საკითხებით.

დღეისათვის არსებობს ვეივლეტ–გარდაქმნის სპეციალიზირებული პროგრამული პაკეტები, რომლებიც ჩართულია კომპიუტერული მათემატიკის ძირითად სისტემებში (Matlab, Mathematica, Mathcad და სხვა).

1. ფურიეს გარდაქმნა

ნებისმიერი დროზე დამოკიდებული $x(t)$ ფუნქცია (შემთხვევითი პროცესი, სიგნალი, დროითი მწკრივი) შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ჯამი $y(t)$ ბაზისური ფუნქციის ნამრავლისა c_k კოეფიციენტებზე

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k y(t) \quad . \tag{1.1}$$

რადგან $y(t)$ ბაზისური ფუნქცია ფიქსირებულია როგორც გარკვეული სახის ფუნქცია, ამიტომ მხოლოდ c_k კოეფიციენტები შეიცავენ $x(t)$ ფუვქციაზე ინფორმაციას.

დროზე დამოკიდებული ფუნქციები უშუალოდ გვაძლევენ დროში ფუნქციის კონკრეტულ მნიშვნელობებს. მაგრამ, თუ გვაინტერესებს სხვა ინფორმაცია, მაგალითად სიხშირეზე, მაშინ უნდა მოვახდინოთ ფუნქციის გარდაქმნა. საზოგადოდ ფუნქციის მიმართ ნებისმიერი მათემატიკური გარდაქმნა გამოიყენება იმისათვის, რომ სიგნალიდან მივიღოთ დამატებითი ინფორმაცია, რომელიც საწყის სიგნალში უშუალოდ არ ჩანს. იმისათვის, რომ გავაცნობიეროთ ვეივლეტ–გარდაქმნის არსი საჭიროა განვიხილოთ ფურიეს გარდაქმნა, რადგან ის მჭიდროთ არის დაკავშირებული ვეივლეტ–გარდაქმნასთან.

1.1. ფურიეს გარდაქმნის არსი

მრავალი ათეული წლის განმავლობაში რეალური ფიზიკური პროცესების და მათ შორის შემთხვევითების დამუშავების ძირითად საშუალებას წარმოადგენდა ჰარმონიული ანალიზი, რომლის მათემატიკურ საფუძველს წარმოადგენდა ფურიეს გარდაქმნა. 1882 წ. ფრანგმა მათემატიკოსმა ფურიემ აჩვენა, რომ ნებისმიერი

პერიოდული ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ კომპლექსური ექსპონენციალური ფუნქციების უსასრულო ჯამის სახით. ამრიგად, ჰილბერტის L_2 სივრცეში თუ განვიხილავთ რაიმე $x(t)$ პერიოდულ ფუნქციას $x(t)\in L_2[0,2\pi]$, მაშინ ის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ფურიეს მწკრივის სახით, სადაც $\psi(t)$ ბაზისად აღებულია კომპლექსური ექსპონენტა. ე.ი. (1.1) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\{jkt\} \;,$$

სადაც $$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\exp\{-jkt\}dt \;.$$

ფურიეს მწკრივისათვის სამართლიანია პარსაველის ტოლობა:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|x(t)\right|^2 dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|c_k\right|^2$$

და ის განიხილება როგორც ენერგიის შენახვის კანონი. დირიხლეს პირობის თანახმად ფურიეს მწკრივი თანაბრად კრებადია $x(t)$ ფუნქციის მიმართ.

შემდგომში ფურიეს მწკრივი განზოგადოებული იქნა არაპერიოდული პროცესებისთვის. კერძოთ, თუ განვიხილავთ უწყვეტ სტაციონარულ შემთხვევით პროცეს $x(t)$, მაშინ ნებისმიერი $x(t)\in L_2(R)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ფურიეს გარდაქმნა

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp\{-j\omega t\}dt \qquad (1.2)$$

რომელსაც დროითი ფუნქცია $x(t)$ გადაყავს $X(\omega)$ სიხშირულ ფუნქციაში და მას ფურიეს პირდაპირი გარდაქმნა (ან სპექტრი) ეწოდება. ფურიეს გარდაქმნა არსებობს თუ სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dx < \infty \quad .$$

ფურიეს გარდაქმნა შექცევადია, ე.ი. მას გააჩნია უკუ გარდაქმნა:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp\{jkt\} d\omega ,$$

რომელიც უზრუნველყოფს საწყისი $x(t)$ ფუნქციის აღდგენას. ფურიეს გარდაქმნა უნიტარულია, ე.ი.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{1.3}$$

და მას პარსაველის იგივეობა ეწოდება, რომელიც გვიჩვენებს ენერგიის შენახვას, როდესაც ხდება დროითი სივრციდან სიხშირულ სივრცეში გადასვლა. (1.3) ტოლობის მარცხენა მხარეს არსებულ ინტეგრალს ეწოდება $x(t)$ სიგნალის ენერგია, ხოლო მარჯვენა მხარეს მყოფ გამოსახულებას–ენერგიის სპექტრული სიმკვრივე. ე.ი.

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2 \quad . \tag{1.4}$$

ფურიეს გარდაქმნა ძირითადად გამოიყენება სტაციონარული შემთხვევითი პროცესებისათვის, სადაც სიხშირული კომპონენტები დროში არ იცვლებიან და აქედან გამომდინარე, სპექტრული ანალიზის დროს არ გვჭირდება ინფორმაცია დროზე, რადგან სიგნალში არსებული ყველა სიხშირე არსებობს მთელი დროის მანძილზე.

განვიხილოთ (1.2) ტოლობა. $x(t)$ სიგნალი მრავლდება ω სიხშირის მქონე ექსპონენტაზე და შემდეგ ხდება ინტეგრირება დროის მთელ ინტერვალში. უნდა შევნიშნით, რომ (1.2) გამოსახულებაში ექსპონენციალური წევრი ეილერის ფორმულის თანახმად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\exp\{j\omega t\} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

ე.ი. საწყისი $x(t)$ სიგნალი მრავლდება კომპლექსურ გამოსახულებაზე, რომელიც შედგება ω სიხშირის სინუსებისა და კოსინუსებისაგან. შემდეგ ხდება ამ ნამრავლების ინტეგრირება ანუ აჯამვა. თუ მიღებულ შედეგს გააჩნია დიდი მნიშვნელობა, მაშინ ω სიხ ხშირე $x(t)$ სიგნალში მნიშვნელოვნად არის წარმოდგენილი. ხოლო, თუ ინტეგრალის მნიშვნელობა მცირეა (ნულის ტოლია ან ნულთან ახლოს მდგომი სიდიდეა), მაშინ ω სიხშირე სიგნალში უმნიშვნელოა ან საერთოდ არ გააჩნია მას.

(1.2) გამოსახულებაში ინტეგრირება ყოველი ω სიხშირის მნიშვნელობისათვის ხდება უსასრულო საზღვრებში, მთელი დროითი ღერძის გასწვრივ. ამიტომაა, რომ ამა თუ იმ სიხშირის არსებობის დროის ფაქტორს არავითარი მნიშვნელობა არ გააჩნია, რადგან სიხშირის წილი საერთო ჯამში მაინც იქნება ერთნაირი.

1.3. ფურიეს გარდაქმნის დადებითი და უარყოფითი თვისებები

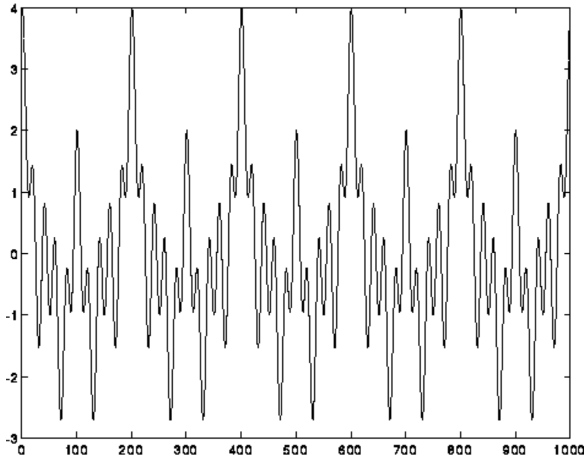
როგორც ავღნიშნეთ, ფურიეს გარდაქმნა გვაძლევს სიხშირულ ინფორმაციას, რომელსაც სიგნალი შეიცავს, თუმცა დროის რომელ მომენტში წარმოიშვა ეს სიხშირე და როდის დამთავრდა ჩვენთვის უცნობია. თუ სიგნალი სტაციონარულია, მაშინ ასეთი ინფორმაცია არ გვჭირდება, რადგან სიხშირეები დროში არ იცვლებიან, ე.ი. ისინი სიგნალში არსებობენ მთელი დროის მანძილზე.

დაუშვათ, გვაქვს ორი სხვადასხვა სიგნალი, რომელთა სპექტრული მახასიათებლები ერთნაირია. ერთ–ერთი სიგნალი (ნახ. 1.1), რომელიც შედგება 10, 25, 50 და 100ჰც სიხშირეებისაგან

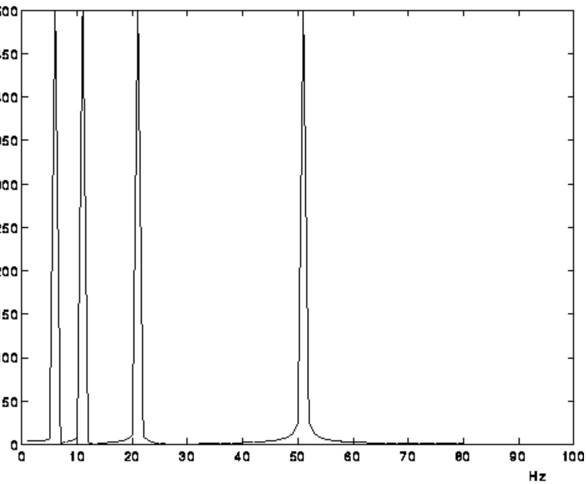
$$x(t) = \cos(2\pi\,10t) + \cos(2\pi\,25t) + \cos(2\pi\,50t) + \cos(2\pi\,100t)$$

სტაციონარულია, რადგან ეს სიხშირეები მთელი დროის განმავლობაში არსებობენ და დროში არ იცვლებიან. ამ სიგნალის ფურიეს გარდაქმნა ნაჩვენებია ნახ. 1.2, სადაც

ოთხივე სიხშირის სპექტრი მკაფიოდ არის წარმოჩენილი.

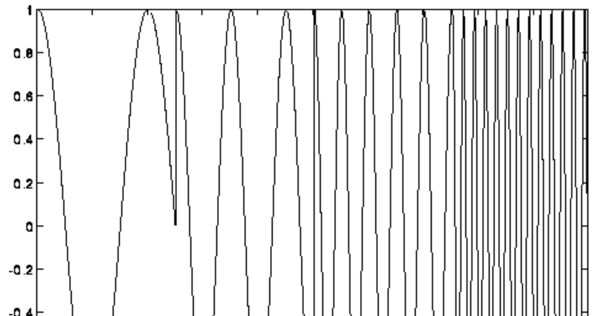


ნახ. 1.1

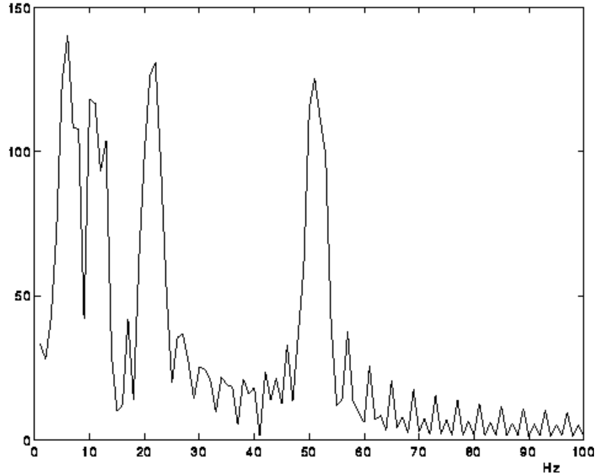


ნახ. 1.2

ეხლა განვიხილოთ მეორე სიგნალი, რომელიც შედგება იგივე ოთხი სიხშირისაგან, რომლებიც დროში თანმიმდევრულად არიან წარმოდგენილნი: 0-300 მლწმ ინტერვალში სიგნალის სიხშირეა 100 ჰც, 300–600 მლწმ ინტერვალში – 50 ჰც. 600–800 მლწმ ინტერვალში – 25 ჰც და ბოლო ინტერვალში – 10 ჰც. ასეთი სიგნალი, რომელიც არასტაციონარულია წარმოდგენილია ნახ. 1.3-ზე და მისი ფურიეს გარდაქმნა ნაჩვენებია ნახ. 1.4-ზე.



ნახ. 1.3



ნახ. 1.4

როგორც ნახ. 1.4 ჩანს, სიგნალის ოთხივე სიხშირის სპექტრი, ისევე, როგორც სტაციონარული სიგნალის დროს, მკაფიოდ არიან გამოსახულნი, მაგრამ მათ შორის არსებობენ „ცრუ“ სიხშირეები, რომელთაც გააჩნიათ მცირე ამპლიტუდა. ეს გამოწვეულია იმით, რომ სიგნალში სიხშირეები იშვიათად იცვლებიან. გარდა ამისა, ადვილი შესამჩნევია, რომ მაღალი სიხშირეების კომპონენტებს გააჩნიათ მაღალი ამპლიტუდა ვიდრე დაბალსიხშირიან კომპონენტებს. ეს იმიტომ ხდება, რომ მაღალი სიხშირეების ხანგრძლიობა (300მლწმ) მეტია, ვიდრე დაბალი სიხშირეების ხანგრძლიობა (200მლწმ).

ამრიგად, თუ შევადარებთ ერთი და იგივე სიხშირეების მქონე სტაციონარულ და არასტაციონარულ სიგნალებს, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ორივე შემთხვევაში სპექტრები მკაფიოდ არიან წარმოდგენილნი იმ განსხვავებით, რომ არასტაციონარული სიგნალის დროს სპექტრებს გააჩნიათ სხვადასხვა ამპლიტუდა და მათ შორის არსებობს დაბალი ამპლიტუდის ცრუ

სიხშირეები, მაშინ როდესაც სტაციონარული სიგნალის შემთხვევაში სპექტრების ამპლიტუდები ერთნაირია და ცრუ სიხშირეები არ არსებობენ. გარდა ამისა, ფურიეს გარდაქმნა კარგად არჩევს სიგნალში არსებულ სიხშირეებს, მაგრამ უძლურია განსაზღვროს დროის რომელ მომენტებშია წარმოშობილი ეს სიხშირეები. აქედან გამომდინარე, არასტაციონარული სიგნალებისათვის ფურიეს გარდაქმნა შეიძლება გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაში, როცა ჩვენ გვაინტერესებს ინფორმაცია მხოლოდ სიხშირეებზე და არა მათ წარმოშობის შესახებ. სხვა შემთხვევაში, ფურიეს გარდაქმნის გამოყენება კერძოდ, არასტაციონარული სიგნალებისათვის მიზანშეუწონელია.

ჩამოვაყალიბოთ ფურიეს გარდაქმნის დადებითი თვისებები:

–ფურიეს გარდაქმნა ნებისმიერ სიგნალს შლის სხვადასხვა სიხშირის ელემენტარულ რხევებად;

–ფურიეს გარდაქმნა წარმოადგენს ორთოგონალურ ოპერატორს ანუ ისეთ ოპერატორს, რომლის უკუ გარდაქმნა ემთხვევა კომპლექსურად შეუღლებული ოპერატორის გამოსახულებას;

–ფურიეს გარდაქმნის არეს წარმოადგენს L_2 სივრცე, რომელსაც მიეკუთვნება ბუნებაში არსებული დროზე დამოკიდებული მრავალი რეალური ფიზიკური პროცესი;

–პრაქტიკაში ადვილია მისი გამოყენება. ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის ალგორითმას შექმნამ კიდევ უფრო ეფექტური გახადა მისი გამოყენება პრაქტიკაში.

ფურიეს გარდაქმნას ძირითადი ნაკლოვანებებია:

–ფურიეს გარდაქმნა თუნდაც ერთი მოცემული სიხშირისათვის მოითხოვს პროცესის ცოდნას არა მხოლოდ წარსულში, არამედ მომავალშიც, რაც პრაქტიკულად განუხორციელებადია;

–რადგან პრაქტიკულად სიგნალის დაშლის შედეგად მიღებული ჰარმონიკების რაოდენობა ან სპექტრი შეზღუდულია, ამიტომ სიგნალის აღდგენა

ფურიეს უკუ გარდაქმნით თეორიულად, მითუმეტეს პრაქტიკულად, შეუძლებელია, კერძოდ გიბსის ეფექტის გამო;

–ფურიეს გარდაქმნის ბაზისურ ფუნქციას წარმოადგენს მხოლოდ ერთი $\exp\{jwt\}$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია $(-\infty,\infty)$ ინტერვალში და გააჩნია დროში უცვლელი პარამეტრები;

–ფურიეს გარდაქმნის ბაზისის ძირითად ნაკლოვანებას წარმოადგენს მისი ცუდი ლოკალიზაცია დროით სივრცეში, რადგან მისი ბაზისური ფუნქციის მოდული ყველა $t\in R$-სათვის ერთის ტოლია. აქედან გამომდინარე, ბაზისის ცუდი ლოკალიზაცია დროის კონკრეტულ მომენტებში არ იძლევა სიხშირული მახასიათებლების განსაზღვრის საშუალებას;

–არასტაციონარული პროცესებისათვის, სადაც სიხშირეები დროში ცვალებადი არიან, ფურიეს გარდაქმნის გამოყენება მიზანშეუწონელია.

1.3. ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნა

როგორც ავღნიშეთ, არასტაციონარული პროცე-სებისათვის ფურიეს გარდაქმნა შეიძლება გამოვიყენოთ იმ შემთხვევაში, როცა გვაინტერესებს მხოლოდ სიხშირული ინფორმაცია, ხოლო სპექტრული კომპონენტების წარმოშობის დრო არ გვაინტერესებს. თუ საჭიროა სიხშირული მდგენელების დროითი ლოკალიზაციაც, მაშინ საჭიროა მივმართოთ სიგნალის სიხშირულ–დროით წარმოდგენას, რასაც ნაწილობრივ იძლევა ფურიეს ფანჯრისეული (მოკლემაშტაბიანი) გარდაქმნა.

დაუშვათ არასტაციონარული პროცესი უბან-უბან სტაციონარულია, მაშინ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ვიწრო

ფანჯარა იმისათვის, რომ მის შიგნით სიგნალი იყოს სტაციონარული. ასეთმა მიდგომამ მიიღო ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნის სახელწოდება. ამ შემთხვევაში სიგნალი იყოფა ინტერვალებად (ფანჯრებად), რომლის ფარგლებში სიგნალი ითვლება სტაციონარულად. ამისათვის გამოიყენება ფანჯრის ფუნქცია *W*, რომლის სიგანე ფანჯრის სიგანის ტოლია. ფანჯრის ფუნქცია და სიგნალი გადამრავლდებიან. თუ ფანჯრის ფუნქცია ერთეულოვანი სიმაღლის სწორკუთხედია, მაშინ სიგნალი არ შეიცვლება. სხვა შემთხვევაში სიგნალის შეჯერება ხდება ფანჯრის ფუნქციასთან. შემდეგ ხდება ამ ნამრავლის ფურიეს გარდაქმნა. შემდეგ ბიჯზე ხდება ფანჯრის წანაცვლება რაიმე τ დროით. წანაცვლებული ფანჯრის ფუნქცია კვლავ გადამრავლდება სიგნალზე, ხდება მისი ფურიეს გარდაქმნა და ა.შ. პროცედურა გრძელდება სიგნალის ბოლომდე.

ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნა მათემატიკ-ურად შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$X(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)w(t-\tau)\exp\{-j\omega t\}dt.$$

ნებისმიერი τ და ω-ისათვის განისაზღვრება ფურიეს გარდაქმნა და ვღებულობთ სიგნალის სიხშირულ-დროით გარდაქმნას. ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნის პრობლემის საფუძველს წარმოადგენს ე.წ. გეიზენბერგის განუსაზღვრელობის პრინციპი, რომლის თანახმად შეუძლებელია მივიღოთ სიგნალის სიხშირულ-დროითი წარმოდგენა ნებისმიერი სიზუსტით ანუ ერთდროულად შეუძლებელია სიხშირისა და დროის გაზომვა. ერთადერთი რაც შეგვიძლია ვიცოდეთ ეს არის სიგნალის დროითი ინტერვალები, სადაც არსებობენ გარკვეული სიხშირის ზოლები და არა ცალკეული სიხშირეები. ამ პრობლემას გარჩევადობა ეწოდება.

ამრიგად, ფურიეს გარდაქმნის დროს არ არსებობს გარჩევადობის პრობლემა სიხშირულ არეში. ანალოგურად, არ არსებობს დროითი გარჩევადობის

პრობლემა სიგნალის დროითი წარმოდგენის დროს, რადგან დროის ნებისმიერ მომენტში ცნობილია სიგნალის ზუსტი მნიშვნელობა.

ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნის დროს ფანჯარას გააჩნია სასრულო სიგანე, ფარავს მხოლოდ სიგნალის ნაწილს და ამიტომ სიხშირული გარჩევადობა უარესდება. გაუარესება იმას ნიშნავს, რომ არ გაგვაჩნია ინფორმაცია სიგნალში ცალკეული სიხშირეების შესახებ, რადგან ცნობილია მხოლოდ სიხშირული ზოლები. თუ ავიღებთ უსასრულო სიგრძის ფანჯრის სიგანეს, მაშინ მთლიანად იკარგება დროითი ინფორმაცია და ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნის მაგივრად ვღებულობთ ჩვეულებრივ ფურიეს გარდაქმნას. ამრიგად, რაც უფრო მცირეა ფანჯრის სიგანე, მით უკეთესია დროითი გარჩევადობა, მაგრამ ცუდია სიხშირული გარჩევადობა და პირიქით. გარდა ამისა, რაც უფრო ვიწროა ფანჯრის სიგანე, მით უფრო სამართლიანია დაშვება ფანჯრის არეში სიგნალის სტაციონარობის შესახებ.

ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნის გამოყენებისას ხშირად წამოიჭრება კითხვა: როგორი სახის ფანჯარა უნდა გამოვიყენოთ? ვიწრო ფანჯარა უზრუნველყოფს კარგ დროით გარჩევადობას, ხოლო ფართო–კარგ სიხშირულ გარჩევადობას. პრობლემა იმაშია, რომ ფანჯრის შერჩევა ხდება „ერთხელ და სამუდამოდ" ანუ სიგნალის მთელი ანალიზის დროს, მაშინ როდესაც სიგნალის სხვადასხვა უბანი მოითხოვს სხვადასხვა ტიპის ფანჯრების გამოყენებას (სწორედ ამ პრობლემის გადაწყვეტას ემსახურება ვეივლეტ–გარდაქმნა).

როგორც ავღნიშნეთ, ფურიეს გარდაქმნა ბაზისურ ფუნქციად იყენებს ექსპონენტას (სინუსებს და კოსინუსებს), რომლებიც ლოკალიზებული არიან გარკვეულ სიხშირულ არეში და არალოკალიზებული არიან დროით არეში. საწინაღმდეგო მაგალითია კრონეკერის იმპულსური ფუნქცია

$$y_k(t) = d_k(t) = \begin{cases} 1\,, & k = t \\ 0\,, & k \neq t\,. \end{cases}$$

ამ შემთხვევაში ფუნქციები მკვეთრად ლოკალიზებული არიან დროით არეში და სრულიად არალოკალიზებული არიან სიხშირულ არეში. ვეივლეტ–გარდაქმნას უკავია შუალედური მდგომარეობა ამ ორ უკიდურეს შემთხვევის დროს და შეიცავენ გარკვეულ ფუნქციათა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ სიგნალის (1.1) სახით წარმოდგენას. ამრიგად, ზემოდ მოყვანილ პრობლემებს და არა მარტო ამ პრობლემებს, შეძლებისდაგვარად წყვეტს ვეივლეტ–გარდაქმნა.

2. ვეივლეტ–გარდაქმნა

2.1. უწყვეტი ვეივლეტ–გარდაქმნის არსი

პრაქტიკაში რეალური სიგნალები ძირითადად არასტაციონარულ პროცესებს მიეკუთვნებიან. ასეთი სიგნალების ანალიზის დროს მეტად მნიშვნელოვანია დროის იმ მომენტების განსაზღვრა, როცა სიგნალის სიხშირული მახასიათებლები უეცრად იცვლებიან. ასეთი სიხშიულ–დროითი ანალიზის უპირატესობა თვალსაჩინოა რადგან ის განკუთვლილია სიგნალში ლოკალური სიხშირულ–დროითი შეშფოთებების გამოსავლენად. ასეთი მოკლე ხანგრძლიობის შეშფოთებების პირობებში სიგნალი შეიძლება განვიხილოთ L_2 სივრცის მთელ ნამდვილ ღერძზე $R(-\infty,\infty)$ შემდეგი ნორმით: $\left\| x(t) \right\|^2 < \infty$. ქედან გამომდინარე, ბაზისური ფუნქცია სწრაფად მილევადი უნდა იყოს, როცა $t \to \infty$ და უნდა გააჩნდეს სიგნალში როგორც სიხშირული, ასევე დროითი მახასიათებლების გამოვლენის საშუალება.

სიხშირულ–დროითი ლოკალიზაციის პირობებს აკმაყოფილებს

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad (2.1)$$

ბაზისური ფუნქცია, რომელსაც ვეივლეტი ეწოდება. $\frac{1}{\sqrt{|a|}}$ მამრავლი საჭიროა $\| \psi_{a,b}(t) \| = \| \psi(t) \|$ ნორმის შესანარჩუნებლად. $x(t)\in L_2(R)$ ფუნქციის ინტეგრალს

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt \qquad (2.2)$$

ეწოდება უწყვეტი ვეივლეტ–გარდაქმნა. აქ $a,b\in R$, $a\neq 0$. როგორც (2.1) გამოსახულებიდან ჩანს, ვეივლეტს გააჩნია ორი a და b არგუმენტი. a პარამეტრი უზრუნველყოფს სიხშირულ ანალიზს, რომელიც განსაზღვრავს ვეივლეტის ზომას და ამიტომ მას ხშირად მასშტაბს უწოდებენ. ფურიეს ანალიზში მასშტაბის ანალოგს წარმოადგენს ჰარმონიული რხევის პერიოდი ანუ სიხშირე. უნდა აღინიშნოს, რომ მასშტაბი უფრო ფართო ცნებაა (თუმცა ნაკლებად ვიზუალური), ვიდრე პერიოდი და იგი შეიძლება განისაზღვროს როგორც სიხშირის შებრუნებული მნიშვნელობა. a-ს მცირე მნიშვნელობები, რომლებიც სიგნალში ახასიათებენ სწრაფ პროცესებს, შეესაბამებიან მაღალ სიხშირეებს, ხოლო a-ს დიდი მნიშვნელობები, რომლებიც სიგნალში ახასიათებენ ნელ პროცესებს, შეესაბამებიან დაბალ სიხშირეებს.

b პარამეტრი გვიჩვენებს ვეივლეტის მდებარეობას დროის ღერძზე და მას ძვრა (წანაცვლება) ეწოდება. ფურიეს ანალიზში ამ პარამეტრს ანალოგი არ გააჩნია, გარდა ფურიეს ფანჯრისეული გარდაქმნის დროს, სადაც იგი განსაზღვრას ფანჯრის ადგილმდებარეობას დროით ღერძზე.

უკუ უწყვეტ ვეივლეტ–გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(a,b)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{dadb}{a^2} \ ,$$

სადაც c_ψ ნორმირების კოეფიციენტია, რომლის ანალოგს ფურიეს გარდაქმნაში წარმოადგენს 2π მნიშვნელობა.

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\varphi(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega < \infty \ . \qquad (2.3)$$

$\varphi(\omega)$-თი აღნიშნულია $\psi(t)$ ვეივლ;ეტის ფურიეს გარდაქმნა. ვეივლეტ–გარდაქმნის დროსაც არსებობს პარსაველის ტოლობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2 dt = \frac{1}{c_\psi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|W(a,b)|^2\frac{dadb}{a^2}$$

და $E(a,b) = |W(a,b)|^2$ გამოსახულებას შეიძლება ვუწოდოთ ენერგიის სპექტრული სიმკვრივე. (1.4) გამოსახულებასთან შედარებით $E(a,b)$ გარსაზღვრავს სპექტრულ მახასიათებლებს ორივე a და b პარამეტრებისათვის და ამიტომ მას ენერგიის ლოკალურ სპექტრს უწოდებენ. საწინაღმდეგო გამოსახულებას

$$E(a) = \int_{-\infty}^{\infty}|W(a,b)|^2 db$$

უწოდებენ ენერგიის გლობალურ სპექტრს, რომელიც გვიჩვენებს ენერგიის ზრდას მასშტაბის მიხედვით და წარმოადგენს ენერგიის სპექტრული სიმკვრივის $E(\omega)$ ანალოგს. ორივე ეს მახასიათებელი ერთმანეთის მიმართ შემდეგ დამოკიდებულებაში არიან:

$$E(a) = a\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)|\psi(a\omega)|^2 d\varpi$$

2.2. ვეივლეტის თვისებები

სიხშირულ–დროითი ანალიზისათვის ბაზისურ ფუნქციებს ანუ ვეივლეტებს უნდა გააჩნდეს შემდეგი თვისებები:

1. შეზღუდვა. $y(t)$ ფუნქცია უნდა მიეკუთვნებოდეს L_2 სივრცეს და უნდა სრულდებოდეს შემდეგი უტოლობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt < \infty \quad .$$

2. ლოკალიზაცია. ფურიეს გარდაქმნისგან განსხვავებით ვეივლეტები უნდა იყვნენ ლოკალიზებული ანუ განსაზღვრული რაიმე სასრულო ინტერვალში როგორც დროით, ასევე სიხშირით. ეს იმას ნიშნავს, რომ $\Psi(t)$ ვეივლეტები და მათი ფურიეს გარდაქმნები $j(w)$ მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ნულისაგან სიხშირის და დროის მცირე დიაპაზონში და მცირედ განსხვავდებიან ნულისაგან (ან სულაც ნულის ტოლია) ამ ინტერვალის გარეთ. აქედან გამომდინარე, ვეივლეტები შეიძლება გამოვიყენოთ როგორც ფანჯრისეული ფუნქცია, რომელსაც გააჩნია ცენტრი და სიგანე.

არატრივიალური $z(t) \in L_2(R)$ ფანჯრისეული ფუნქციის ლოკალიზაციის რიცხვით ზომად მიღებულია მისი t_0 ცენტრი და რადიუსი Δ_t, რომლებიც განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$t_0 = \frac{1}{\|z(t)\|} \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 \, dt$$

$$\Delta_z^2 = \frac{1}{\|z(t)\|} \int_{-\infty}^{\infty} [t - t_0]^2 |z(t)|^2 \, dt$$

ამ დროს ფანჯრისეული ფუნქციის სიგანე $2\Delta_z$ სიდიდის ტოლია.

3. ნულოვანი მომენტები. იმისათვის, რომ უზრუნვებელყოფილი იყოს უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნა, ვეივლეტი უნდა აკმაყოფილებდეს (2.3) თანაფარდობას. ეს მიიღწევა $\varphi(0)=0$ პირობის შესრულებით, საიდანაც გამომდინარეობს:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)dt=0 \qquad (2.4)$$

გამოყენების თვალთაზრისით, ზოგჯერ მეტად მნიშვნელობანია ვეივლეტის არა მხოლოდ ნულოვანი მომენტი, არამედ m-ური რიგის მომენტების ნულთან ტოლობა

$$\int_{-\infty}^{\infty}t^{m}\psi(t)dt=0\,. \qquad (2.5)$$

ვეივლეტები, რომლებსაც გააჩნიათ ნულოვანი მომენტების დიდი რაოდენობა საშუალებას იძლევა სიგნალში უგულვებელყოფილი იყოს რეგულარული პოლინომიალური მდგენელები და გაანალიზოს მცირემასშტაბიანი ფლუქტუაციები.

4. ავტომოდელური ბაზისი ან თვითმსგავსება. ძვრისა და მასშტაბის მნიშვნელობების ცვლილებისას ბაზისური ფუნქციის ფორმა უნდა დარჩეს ერთი და იგივე.

2.3 ვეივლეტ გარდაქმნის პროცედურა.

დაუშვათ მოცემულია გასაანალიზირებადი სიგნალი. შეირჩევა ბაზისური ვეივლეტი, რომელიც იქნება ყველა ვეივლეტის (ფანჯრის) პროტოტიპი და რომლებიც მიიღებიან ვეივლეტის შეკუმშვის ან გაფართოების გზით. ბაზისური ვეივლეტის შერჩევის შემდეგ გამოთვლები იწყება a=1 მასშტაბის დროს. ამისათვის ვეივლეტი მოთავსდება სიგნალის დასაწყისში, კერძოდ სიგნალის იმ წერტილში (მნიშვნელობაში),

რომელიც შეესაბამება t=0. ვეივლეტ–ფუნქციის მასშტაბი a=1 გადამრავლდება სიგნალზე და ხდება ინტეგრირება დროის მთელ ინტერვალში. ინტეგრირების შედეგი მრავლდება $\frac{1}{\sqrt{a}}$ სიდიდეზე ნორმალიზირებისათვის ანუ იმისათვის, რომ ყოველი მასშტაბისათვის სიგნალს გააჩნდეს ერთნაირი ენერგია.

ვეივლეტის მასშტაბის a=1 შემდეგ ხდება მისი წანაცვლება b დროით და $t=b$ წერტილში ხდება ზემოდ მოყვანილი პროცედურის გამეორება. ვღებულობთ კიდევ ერთ მნიშვნელობას, რომელიც შეესაბამება $t=b$. ეს პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ ვეივლეტი არ მიაღწევს სიგნალის ბოლოს, რის შედეგადაც ვღებულობთ წერტილთა ერთობლიობას სტრიქონის სახით. შემდეგ ვზრდით a-ს მნიშვნელობას და ზემოდ მოყვანილი პროცედურა მეორდება ყოველი a-ს მნიშვნელობისათვის. ამასთან მიღებული სტრიქონებით ხდება სამაშტაბო–დროითი სიბრტყის შევსება.

მასშტაბის უმცირესი მნიშვნელობა a=1 შეესაბამება უდიდეს სიხშირეს. ვეივლეტი უნდა იყოს ისეთი ვიწრო, როგორიცაა უდიდესი სიხშირის პერიოდი. ყოველ პოზიციაზე ის მრავლდება სიგნალზე. თუ სიგნალში არსებობს სპექტრული კომპონენტები, რომლებიც შეესაბამებიან a-ს მიმდინარე მნიშვნელობას, მაშინ ვეივლეტის ნამრავლი სიგნალზე იმ ინტერვალში, სადაც სპექტრული კომპონენტა არსებობს, გვაძლევს შედარებით დიდ მნიშვნელობას. წინააღმდეგ შემთხვევაში ნამრავლის მნიშვნელობა მცირეა ან ნულის ტოლი.

ამრიგად, გარდაქმნის პროცედურა სტარტს იღებს a=1 მასშტაბის დროს და გრძელდება a-ს გაზრდასთან ერთად ანუ გარდაქმნა იწყება მაღალი სიხშირეებით და გრძელდება დაბალი სიხშირეებისაკენ. პირველი მნიშვნელობა შეესაბამება უველაზე უფრო შეკუმშულ ვეივლეტს და a-ს გაზრდით ვეივლეტის სიგანე ფართოვდება.

2.4. ვეივლეტის მაგალითები

ვეივლეტები შეიძლება იყვნენ ორთოგონალური, ნახევრადორთოგონალური და ბიოორთოგონალური. ეს ფუნქციები შეიძლება იყვნენ სიმეტრიული და ასიმეტრიული. ანსხვავებენ ვეივლეტებს, რომლებიც წარმოდგენილი არიან კომპლექსურ არეში და ვეივლეტებს, რომლებსაც არ გააჩნიათ ეს თვისება. პრაქტიკაში სასურველია ვეივლეტი იყოს ორთოგონალური და სიმეტრიული. სამწუხაროდ დამტკიცებულია, რომ ასეთ ვეივლეტს მიეკუთვნება მხოლოდ ჰაარის ვეივლეტი:

$$
y(t)=\begin{cases} 1, & 0\le t<\dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2}\le t<1, \\ 0\ , & t<0,\ t\ge 1 \end{cases}
$$

რომლის ფურიეს გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$
j(w)=3q(w)\left(\frac{\sin w}{w}-\frac{\sin 3w}{3w}\right)\ ,
$$

სადაც $q(w)$ ხევისაიდის ფუნქციაა, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$
q(w)=\begin{cases} 1\ , & w>0, \\ 0\ , & w\le 0. \end{cases}
$$

ჰაარის ვეივლეტი თითქმის გამოუსადაგერია პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად, რადგან ბაზისურ ვეივლეტს გააჩნია ერთის ტოლი მნიშვნელობა [0,1] ინტერვალში და ნული ამ ინტერვალის გარეთ,

ამიტომ ჰაარის ვეივლეტი დროში კარგად ლოკალიზებულია, მაგრამ არალოკალიზებულია სიხშირულ არეში.

მოვიყვანოთ ზოგიერთი ბაზისური ვეივლეტები. ამ მხრივ, ყველაზე პოპულარულია გაუსის ფუნქცია, რომელიც ზოგადად წარმოდგენილია შემდეგნაირად:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^m}{dt^m} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right\} \qquad (2.6)$$

სადაც μ პირველი რიგის საწყისი მომენტია, σ სტანდარტული გადახრა. (2.5) პირობიდან გამომდინარე $\mu = 0$ და $\sigma = 1$, მაშინ (2.6) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\psi_m(t) = (-1)^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^m}{dt^m} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \qquad (2.7)$$

რომლის ფურიეს გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi(\omega) = m(j\omega)^n \exp\left\{-\frac{\omega^2}{2}\right\} \qquad (2.8)$$

(2.7) გამოსახულების პირველი წარმოებული ანუ როცა $m=1$ ვღებულობთ *WAVE*–ვეივლეტს, რომელსაც გააჩნია შემდეგი სახე:

$$\psi(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\},$$

გრაფიკულად *WAVE*–ვეივლეტი არასიმეტრიული ფუნქციაა, რომლის ნულოვანი მომენტი ნულის ტოლია.

ორი გაუსის ფუნქციის სხვაობა ქმნის *DOG* (*Difference of Caussians*) ვეივლეტს:

$$\mathrm{y}\,(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} - 0{,}5\exp\left\{-\frac{t^2}{8}\right\} \quad ,$$

რომლის ფურიეს გარდაქმნაა:

$$\mathrm{j}\,(\mathrm{w}) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{p}}}\left[\exp\left\{-\frac{\mathrm{w}^2}{2}\right\} - \exp\left\{-2\mathrm{w}^2\right\}\right]$$

და ასე შემდეგ. მრავალრიცხოვან ვეივლეტებიდან განვიხილოთ ყველაზე უფრო ხშირად გამოყენებადი მორლეს და *MHAT*–ვეივლეტები.

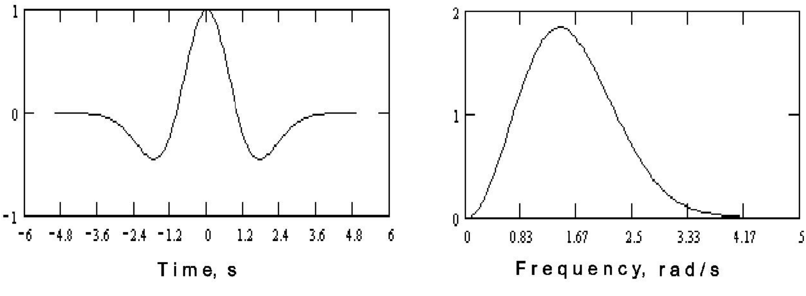
MHAT–ვეივლეტი. (2.6) გამოსახულების მეორი წარმოებულით (*m*=2) ვღებულობთ *MHAT*–ვეივლეტს

$$\mathrm{y}\,(t) = \left(1 - t^2\right)\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$$

და მის ფურიეს გარდაქმნას:

$$\mathrm{j}\,(\mathrm{w}) = \sqrt{2\mathrm{p}}\,\mathrm{w}^2\exp\left\{-\frac{\mathrm{w}^2}{2}\right\} \quad ,$$

რომელსაც გააჩნია ნულოვანი და პირველი მომენტები ნულის ტოლი. ამ ვეივლეტს სახელი *MHAT* (*Mexican HAT*) წარმოიშვა მისი გრაფიკული გამოსახულების გამო, რომელიც წააგავს მექსიკურ სომბრეროს.



ნახ. 2.1

ნახ. 2.1 წარმოდგენილია *MHAT*–ვეივლეტი (მარცხნივ) და მისი ფურიეს გარდაქმნა (მარჯვნივ). რადგან *MHAT*–ვეივლეტი სიმეტრიულია და ფურიეს სპექტრი ვიწრო ზოლისაა, ამიტომ მას გააჩნია კარგი სიხშირულ–დროითი გარჩევადობა. ლოკალიზაციის ცენტრი და რადიუსი ორივე შემთხვევაში შესაბამისად ტოლია:

$$t_0 = 0\ ,\ \ \Delta_t = 1{,}08\ ,\ \ \omega_0 = 1{,}51\ ,\ \ \Delta_\omega = 0{,}49\ .$$

MHAT–ვეივლეტის სპექტრი წარმოდგენილია მხოლოდ ნამდვილი ნაწილით და ის ძირითადად გამოიყენება რთული სიგნალების ანალიზისათვის.

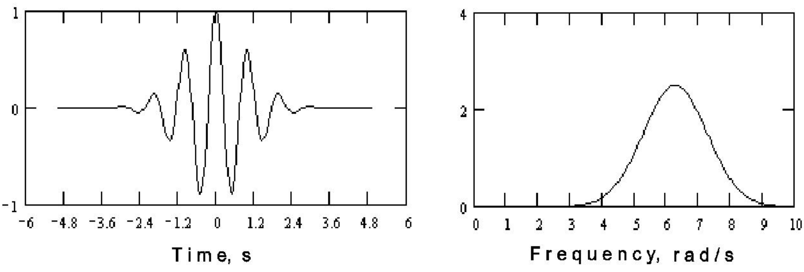
მორლეს ვეივლეტი. პრაქტიკაში ფართო გამოიყენება ჰპოვა მორლეს ვეივლეტმა, რომელსაც გააჩნია შემდეგი სახე:

$$\psi(t) = \exp\{j\omega_0 t\}\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\ ,$$

რომლის ფურიეს გარდაქმნა ტოლია:

$$\varphi(\omega) = a\sqrt{\pi}\ \exp\left\{-\frac{a^2(2\pi-\omega)^2}{4}\right\}\ .$$

სადაც ω დომინირებული სიხშირეა.



ნახ. 2.2

ნახ. 2.2 წარმოდგენილია მორლეს ვეივლეტის ნამდვილი ნაწილი (მარცხნივ) და მისი ფურიეს გარდაქმნა

(მარჯვნივ). დროით არეში მორლეს ვეივლეტის ლოკალიზაციის ცენტრი და რადიუსი ტოლია: $t_0 = 0$, $\Delta_t = \dfrac{a}{2}$. სამწუხაროდ, იგივე მონაცემების მიღება სიხშირული არესათვის გაძნელებულია. მორლეს ვეივლეტს გააჩნია ნულის ტოლი მხოლოდ ნულოვანი მომენტი.

2.5 დისკრეტული ვეივლეტ–გარდაქმნა

მიუხედავად იმისა, რომ უწყვეტი ვეივლეტ–გარდაქმნა გვაძლევს მიღებული შედეგების თვალსაჩინო წარმოდგენის საშუალებას, მისი პრაქტიკული გამოყენება შეზღუდულია. ამ შემთხვევაში ბაზისური ფუნქციები არ წარმოადგენენ მკაცრად ორთოგონალურებს, რადგან ბაზისის ელემენტები უსასრულოდ დიფერენცირებადი არიან და ექსპონენციალური კანონით მიისწრაფიან უსასრულობისაკენ. გარდა ამისა, სიგნალის გაზომვის შედეგები წარმოადგენენ არა ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია მთელი დროის ღერძზე, არამედ მწკრივს, რომლის მოცულობა ყოველთვის სასრულოა. აქედან გამომდინარე, ვეივლეტ–გარდაქმნის ინტეგრალი უნდა შეიცვალოს ჯამით, ე.ი. ვღებულობთ დისკრეტულ ვეივლეტ-გარდაქმნას. თუ დროითი მწკრივი მოცემულია Δt დისკრეტიზაციის ინტერვალით,

$$x_k = x_k(t_k),\; t_k = \Delta t \cdot k,\; k = 1,2,.....,N$$

მაშინ დისკრეტულ ვეივლეტ-გარდაქმნას ექნება შემდეგი სახე:

$$W(a,b) = \frac{1}{n(a,b)} \sum_{k=1}^{N} x_k \psi\left(\frac{t_k - b}{a}\right) , \qquad (2.9)$$

სადაც

$$n(a,b)=\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{-\frac{1}{B}\left(\frac{t_k-b}{a}\right)^2\right\} \qquad (2.10)$$

B სიდიდე ღებულობს სხვადასხვა მნიშვნელობას იმისდა მიხედვით, თუ რომელ ვეივლეტს ვიყენებთ. მაგალითად, *MHAT*–ვეივლეტისათვის B=2, ხოლო მორლეს ვეივლეტის-ათვის $B=a^2$. თუ შევადარებთ (2.9) გამოსახულებას (2.2) გამოსახულებას შევამჩნევთ, რომ (2.2) ფორმულის მნიშვნელიდან ამოღებულია $\sqrt{|a|}$ მამრავლი, რომელიც შეცვლილია შემდეგი გამოსახულებით:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{1}{B}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right\}dt=a\sqrt{B}\mathrm{p}$$

რითაც უგულვებელყოფილია ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდის დამოკიდებულება a პარამეტრზე. (2.9) გამოსახულება განისაზღვრება შემდეგი

$$a_i\ ,b_j\ ,\quad i=1,2,....,N_a\ ,\qquad j=0,1,2,.....,N_b$$

მნიშვნელობების საფუძველზე.

2.6 სკალოგრამა, სკეილოგრამა და სკელეტონი

თუ გამოვიყენებთ (2.9) გამოსახულებას, მაშინ ლოკალური სპექტრის ენერგიის შეფასება იქნება:

$$S(a_i,b_j)=\left|W(a_i,b_j)\right|^2 \qquad (2.11)$$

ამ ფუნქციას უწოდებენ სკალოგრამას, რომელსაც გააჩნია მასშტაბის მიმართ ენერგიის განაწილების თვისება. რადგან ეს განაწილება b პარამეტრის საშუალებით ლოკალიზებულია დროში, ამიტომ (2.11) გამოსახულებას შეიძლება ვუწოდოთ ლოკალური სკალოგრამა.

ცხადია რომ (2.11) გამოსახულების საფუძველზე შეგვიჩლია შევაფასოთ ენერგიის გლობალური სპექტრი:

$$G(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j), \qquad (2.12)$$

სადაც N^* –იმ წერტილების რაოდენობაა, რომლის მიხედვითაც ხდება (2.12) გამოსახულების გასაშუალება. (2.12) გამოსახულებას უწოდებენ სკეილოგრამას, რომელიც წარმოადგენს ფურიე–გარდაქმნის გაგლუვებულ პერიოდოგრამის პირდაპირ ანალოგს.

$S(a_i, b_j)$ სკალოგრამის მნიშვნელობები დევს ზედაპირზე და მისი წარმოდგენისათვის გამოიყენება ორი მეთოდი:

ა) სკალოგრამის ზედაპირის სიბრტყისეული წარმოდგენა სამგანზომილებიან სივრცეში (a,b,s) კორდინატებით, სადაც აბსცისათა ღერძზე გადაზომილია b წანაცვლება, ორდინანტთა ღეძზე – a მასშტაბი, ხოლო s სიდიდე მესამე ღერძზე.

ბ) სკალოგრამის ზედაპირის სიბრტყისეული წარმოდგენა (a,b) კორდინატებით ტოპოგრაფიული რუკის სახით. მესამე s მაჩვენებლის მასშტაბი ნაჩვენებია ან იზოხაზის დაგრადუირებით ან იზოხაზებს შორის არსებული სივრცის გაფერადებით, სადაც მაქსიმუმების არეს გააჩნია, მაგალითად, თეთრი ფერი, ხოლო მინიმუმების არეს – შავი ფერი.

ხშირად სკალოგრამაზე კონტურული წრფეები სიხშირით ახლოს არიან ერთმანეთთან, რაც ხელს უშლის დროში სიხშირეების განაწილების ევოლუციას. ამის თავიდან ასაცილებლად შეგვიძლია გამოვიყენოთ სკალოგრამოს ის წერტილები, სადაც მას გააჩნია a და b პარამეტრებით მაქსიმუმები:

$$S_c(a_i, b_j) = \begin{cases} S_{ij}\ ,\text{როცა}\ S_{i-1,j} < S_{ij} > S_{i+1,j} \\ \qquad \text{ან}\ S_{i,j-1} < S_{ij} > S_{i,j+1} \\ 0 \quad \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases} \qquad (2.13)$$

ამ ფორმულაში $S_{ij} \equiv S(a_i, b_j)$. (2.13) სახის ფუნქციას სკელეტონი ეწოდება. სინუსოიდალური სიგნალის შემთხვევაში სკელეტონის წერტილები განლაგდებიან წრფეზე, რომელიც პარალელურია დროით ღერძის მიმართ. თუ მონაცემებში გვაქვს ჰარმონიული ან კვაზიჰარმონიული კომპონენტები, მაშინ სკელეტონის ტოპოგრაფიული რუკა შედგება ხაზებისაგან, რომლებიც ორიენტირებულები არიან b ღერძის მიმართ. თუ სიგნალი შეიცავს ხმაურის კომპონენტებს, მაშინ სკელეტონის ხაზები გაიჭიმება პერპენდიკულად ანუ a ღერძის პარალელურად. თუ მონაცემები შეიცავენ როგორც ჰარმონიულ, ასევე ხმაურის კომპონენტებს, მაშინ სკელეტონის რუკაზე ისინი წარმოდგენილნი არიან ცალ-ცალკე.

მოკლედ ჩამოვაყალიბოთ ვეივლეტ–გარდაქმნის დადებითი და უარყოფითი თვისებები:

– ვეივლეტ–გარდაქმნას გააჩნია პრაქტიკულად ფურიეს გარდაქმნის ყველა დადებითი თვისება;

– ბაზისური ვეივლეტები კარგად არიან ლოკალიზებულნი როგორც სიხშირულ, ასევე დროით დიაპაზონებში;

– ფურიეს გარდაქმნისაგან განსხვავებით ბაზისურ ვეივლეტებს გააჩნიათ საკმაოდ მრავალფეროვანი ფუნქციები, რომლებიც ორიენტირებული არიან სხვადასხვა ტიპის ამოცანების გადასაწყვეტად;

– ბაზისური ვეივლეტები შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც სასრულო ისე უსასრულო ინტერვალში, რომლებიც რეალიზებული არიან სხვადა-სხვა სახის გლუვი ფუნქციებისაგან;

– ვეივლეტ–გარდაქმნის ნაკლოვანებად შეიძლება ჩავთვალოთ მისი შედარებითი სირთულე.

უნდა აღინიშნოს, რომ ვეივლეტ–გარდაქმნა ყოველთვის არ ცვლის ფურიეს გარდაქმნას. ასე მაგალითად, ფურიეს ანალიზი ხშირად გამოიყენება ორთოგონალური ვეივლეტის შესაქმნელად, მრავალ-

მაშტაბური ანალიზის ჩასატარებლად და სხვა. ბევრი ვეივლეტ–გარდაქმნის თეორემები მტკიცდება ფურიეს ანალიზის მეშვეობით. ამრიგად, ანალიზის ეს ორი მეთოდი წარმოადგენს ერთმანეთის მიმართ ურთიერთდამატებას და არა კონკურენტულ მეთოდებს.

3 ვეივლეტ–გარდაქმნის გამოყენების ზოგიერთი ასპექტი

3.1 ვეივლეტ–გარდაქმნა როგორც ფილტრაცია

გავიხსენოთ, რომ ფილტრაცია ეწოდება საწყისი ფუნქციის ისეთ გარდაქმნას, რომელსაც მივყავართ მისი სპექტრული შემადგენლობის შეცვლასთან. x(t) სიგნალის ფილტრი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(t-\tau)d\tau \quad , \qquad (3.1)$$

სადაც $h(t)$ ფილტრის წონითი ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = 1 . \qquad (3.2)$$

(3.1) გამოსახულების ფურიეს გარდაქმნის შედეგად ვღებულობთ:

$$Y(\omega)=H(\omega)X(\omega) \quad ,$$

სადაც $H(\omega)$ ფილტრის გადამცემი ფუნქციაა, რომელიც მიიღება წონითი ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნით:

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\exp\{-j\omega\tau\}d\tau \quad .$$

მაგალითად, საფეხუროვანი წონითი ფუნქციისათვის

$$h(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2T}, & |\tau|\le T,\\ 0\quad, & |\tau|>T\end{cases}$$

გადამცემ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(\omega)=\frac{\sin(T\omega)}{T\omega}\ . \tag{3.3}$$

ზოგადად (3.3) გამოსახულებიდან გამომდინარეობს, რომ $H(0)=1$, ამიტომ (3.2) გამოსახულებით მიიღება დაბალსიხშირიანი ფილტრაცია. უნდა აღინიშნოს, რომ (3.3) გადამცემი ფუნქციის სიხშირული გატარების სიგანე განისაზღვრება მხოლოდ ფილტრის წონითი ფუნქციით ანუ T მაჩვენებლის მნიშვნელობით.

თუ შევადარებთ (2.2) და (3.1) გარდაქმნებს, შეიძლება ითქვას, რომ უწყვეტი ვეივლეტ–გარდაქმნა შეიძლება ჩაითვალოს საწყისი $x(t)$ ფუნქციის ფილტრად. თუ (2.2) გამოსახულების მიმართ გამოვიყენებთ ფურიეს გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ:

$$W(a,\omega)=\sqrt{a}\,\psi(a\omega)x(\omega)$$

საიდანაც ჩანს, რომ ვეივლეტ–გარდაქმნის გადამცემ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(\omega)=\sqrt{a}\,\psi(a\omega) \tag{3.4}$$

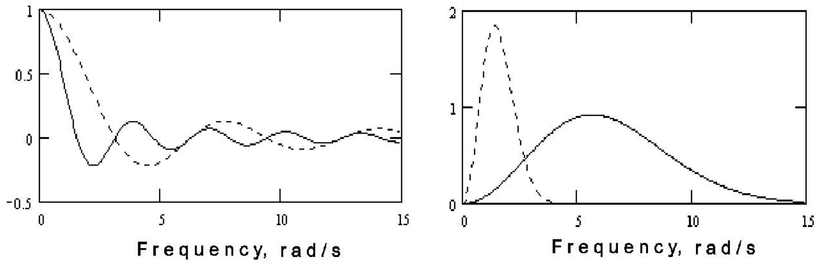
$\psi(0=0)$ პირობის თანახმად (3.4) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $H(0)=0$. ამას ისიც უნდა დაუმატოთ, რომ მასშტაბის ყოველ $a>0$ მნიშვნელობისათვის $H(\omega)$ ფუნქციის მაქსიმუმი იმყოფება

$$\omega_{\max}=\frac{c}{a}$$

სიხშირეზე, სადაც c მნიშვნელობა დამოკიდებულია ვეივლეტის ტიპზე. ასე მაგალითად, *MHAT* ვეივლეტისათვის $c=\sqrt{2}$, ხოლო მორლეს ვეივლეტისათვის $c=2\pi$. გარდა ამისა, $H(\omega)$ ფუნქციის ეფექტური სიგანე მცირდება a მასშტაბის გაზრდისას. სხვა

სიტყვებით, ვეივლეტ–გარდაქმნა წარმოადგენს ზოლურ ფილტრს ცვლადი სიგანის გატარების ზოლით (დიდი მასშტაბისათვის ვიწრო, ხოლო მცირე მასშტაბისათვის ფართო).

ნახ. 3.1 წარმოდგენილია (3.3) და (3.4) გადამცემი ფუნქციები. ნახაზის მარცხნივ ნაჩვენებია დაბალ-სიხშირიანი ფილტრის გადამცემი ფუნქცია (3.3), როცა *T*=1 (დაშტრიხული წრფე) და როცა *T*=2 (უწყვეტი წრფე). ნახაზის მარჯვნივ ნაჩვენებია *MHAT* ვეივლეტის ზოლური ფილტრის გადამცემი ფუნქცია (3.4), როცა *a*=0,25 (უწყვეტი წირი) და როცა *a*=1 (დაშტრიხული წირი).



ნახ. 3.1

ამრიგად, სამაშტაბო კოეფიციენტის $a>0$ ყოველი მნიშვნელობისათვის $W(a,b)$ სიდიდე, რომელიც განსაზღვრულია (2.2) გარდაქმნით, წარმოადგენს საწყისი ფუნქციის ფილტრაციის შედეგს სიხშირულ დიაპაზონში, რომლის ცენტრი განისაზღვრება სამაშტაბო კოეფიციენტით, ხოლო სიგანე – შერჩეული ვეივლეტის თვისებებით.

3.2 სიგნალის გამოყოფა ხმაურიდან

დროითი მწკრივების სპექტრულ ანალიზში სასარგებლო სიგნალის გამოყოფა ხმაურიდან ძირითადად წარმოებს სტატისტიკური მეთოდებით. ჩავთვალოთ, რომ დროითი მწკრივი

$$x_k = x(t_k),\; t_k = \Delta t \cdot k,\quad k = 1,2,\ldots..,N$$

წარმოადგენს შემთხვევითი სიდიდის არაკორელირებულ ამონარჩევს, რომელსაც გააჩნია ნორმალური განაწილება ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით და σ_0^2 დისპერსიით. ე.ი.

$$\left\langle x_p x_q \right\rangle = \begin{cases} \sigma_0^2 \;, & p = q \;, \\ 0 \;, & p \neq q \;. \end{cases}$$

განვსაზღვროთ მორლეს ვეივლეტისათვის სკალოგრამის მნიშვნელობების განაწილების კანონი. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა:

$$\tau_k = \frac{t_k - b}{a} \quad .$$

სკალოგრამა წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$S(a,b) = P^2(a,b) + Q^2(a,b) \;,$$

სადაც

$$P(a,b) = \frac{1}{n(a,b)} \sum_{k=1}^{N} x_k \exp\left\{-\frac{\tau_k}{a^2}\right\} \cos(2\pi\tau_k) \;,$$

$$Q(a,b) = \frac{1}{n(a,b)} \sum_{r=0}^{N} x_k \exp\left\{-\frac{\tau_k}{a^2}\right\} \sin(2\pi\tau_k) \;.$$

ადვილად მტკიცდება, რომ ფიქსირებულ b პარამეტრის დროს $P(a,b)$ და $Q(a,b)$ წარმოადგენენ ნორმალურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეებს ნულოვანი მათემატიკური ლოდინით და დისპერსიით:

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} Z(a,b) \;,$$

სადაც

$$Z(a,b)=\frac{1}{n^2(a,b)}\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{-\frac{2\tau_k}{a^2}\right\} \quad .$$

განვიხილოთ ნორმირებული სკალოგრამა:

$$S(a,b)=\frac{S(a,b)}{\sigma_0^2 Z(a,b)} \quad .$$

$2S(a,b)$ სიდიდეს გააჩნია χ^2 განაწილება ორი თავისუფლების ხარისხით. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნორმირებული სკალოგრამა a პარამეტრის მიმართ წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს, რომლის განაწილების კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$P(x)=\exp\{-x\} \qquad 0<x<\infty \quad .$$

თუ ნორმირებული სკალოგრამის განაწილების კანონი ცნობილია, მაშინ შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ სიგნალის ხმაურიდან გამოყოფის კრიტერიუმი. მართლაც, ალბათობა იმისა, რომ ნორმირებული სკალოგრამის მნიშვნელობები გადააჭარბებენ მოცემულ T მნიშვნელობას განისაზღვრება ფორმულით:

$$P\{S(a,b)>T\}=\int_T^{\infty} p(x)dx=\exp\{-T\}$$

თუ ავიღებთ მნიშვნელოვნების დონეს $\alpha<<1$, რომელიც განსაზღვრავს იშვიათ ხდომილობის ალბათობას, მაშინ სიგნალის გარჩევის ზღურბლის მნიშვნელობა ტოლია:

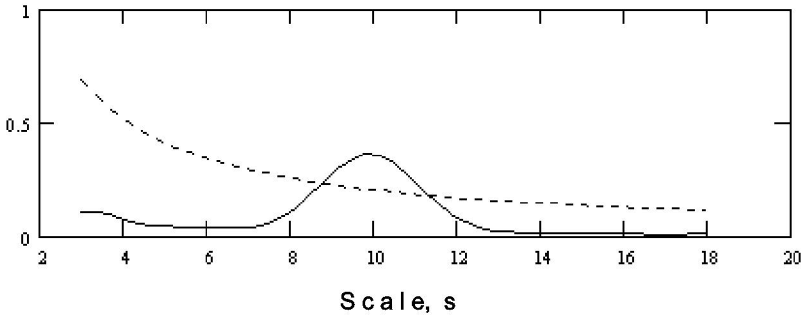
$$T_\alpha=-\lg\alpha \quad .$$

სხვა სიტყვებით, $p=1-\alpha$ ალბათობით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $S(a,b)$ სკალოგრამის ის მნიშვნელობები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ უტოლობას:

$$S(a,b)>\sigma_0^2 Z(a,b)T_\alpha \qquad (3.5)$$

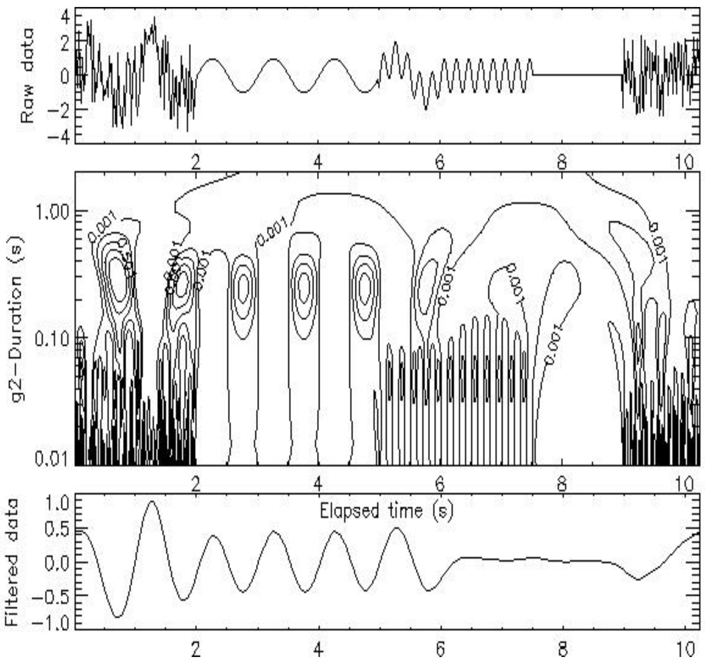
მიკუთვნებიან სასარგებლო სიგნალს. უნდა აღინიშნოს, რომ $Z(a,b)$ ფუნქცია პრაქტიკულად არ არის დამოკიდებული b ძვრაზე. ნახ. 3.2 წარმოდგენილია (3.5)

გამოსახულების მარჯვენა მხარეს მდგომი ფუნქციის მახასიათებელი სახე, როცა N=100 და $\Delta t = 1$. ნახაზე წყვეტილი წირი გვიჩვენებს სიგნალის ხმაურიდან აღმოჩენის 99%-იან ზღურბლს.



ნახ. 3.2

ნახ. 3.3 წარმოდგენილია უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნის გამოყენება სიგნალის ფილტრაციისათვის.



ნახ. 3.3

ამ შემთხვევაში ფილტრაცია ეფუძნება უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნის დროითი კოეფიციენტების ნაწილობრივ გამოყენებას, ზოგიერთი ხანგრძლიობის გამორიცხვის საშუალებით. ნახაზზე მოყვანილი სიგნალის ფილტრაციისათვის გამოყენებული იყო ვეივლეტ–გარდაქმნის სიხშირული ზოლის მხოლოდ 20-40%.

3.3 სინუსოიდის ვეივლეტ–გარდაქმნა

დროითი მწკრივების ფურიეს ანალიზი და ვეივლეტ–ანალიზი ეფუძნება არსებული ინფორმაციის დროით არედან სიხშირულ არეში გადაყვანას ან არეში, რომელიც მოცემულია a,b პარამეტრებით ვეივლეტ–გარდაქმნის დროს. პოლიჰარმონიული ფუნქციის ანალიზის დროს საჭიროა ვიცოდეთ თუ როგორ სახეს ღებულობს მარტივი სინუსოიდა ამ არეებში ვეივლეტ–გარდაქმნის შემთხვევაში. ამისათვის განვიხილოთ სინუსოიდა:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) = \frac{A}{2j}\left[\exp\{j\omega_0 t\} - \exp\{-j\omega_0 t\}\right] \ ,$$

რომლის ფურიეს გარდაქმნა ტოლია:

$$X(\omega) = \frac{A\pi}{j}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right] \ . \qquad (3.6)$$

თუ (2.2) გამოსახულების მიმართ ჯერ გამოვიყენებთ ფურიეს გარდაქმნას, ხოლო შემდეგ ფურიეს უკუ გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ:

$$W(a,b) = \frac{A\sqrt{a}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(a\omega)X(\omega)\exp\{jb\omega\}d\omega \ . \qquad (3.7)$$

ჩავსვათ (3.6) გამოსახულება (3.7) გამოსახულებაში:

$$W(a,b) = \frac{A\sqrt{a}}{2j}\left[\exp\{jb\omega_0\}\varphi(a\omega_0) - \exp\{-jb\omega_0\}\varphi(-a\omega_0)\right] \qquad (3.8)$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\varphi(\omega)$ ფუნქცია ნამდვილია და ლუწი, მაშინ (3.8) გამოსახულება მარტივდება:

$$W(a,b) = A\sqrt{a}\,\varphi(a\omega_0)\sin(\omega_0 b) \ . \qquad (3.9)$$

(3.8) და (3.9) ფორმულები შეესაბამებიან უწყვეტ ვეივლეტ–გარდაქმნას. (3.8) და (3.9) გამოსახულებები შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$W(a,b)=\frac{A}{2j\sqrt{B\pi}}\left[\exp\{j\omega_0 b\}\varphi(a\omega_0)-\exp\{-j\omega_0 b\}\varphi(-a\omega_0)\right] \tag{3.10}$$

$$W(a,b)=\frac{A}{\sqrt{B\pi}}\varphi(a\omega_0)\sin(\omega_0 b) \tag{3.11}$$

MHAT–ვეივლეტისათვის B=2, ხოლო მორლეს ვეივლეტისათვის $B=a^2$. თუ გამოვიყენებთ *MHAT* – ვეივლეტს და (3.11) ფორმულაში ჩავსვათ მისი ფურიეს გარდაქმნას

$\varphi(\omega)=\sqrt{2\pi}\omega^2\exp\left\{-\frac{\omega^2}{2}\right\}$, მაშინ მივიღებთ:

$$W(a,b)=A^2\omega_0^2\exp\left\{-\frac{a^2\omega_0^2}{2}\right\}\sin(\omega_0 b) \tag{3.12}$$

და მის შესაბამის სკალოგრამას:

$$S(a,b)=A^2a^4\omega_0^4\exp\{-a^2\omega_0^2\}\sin^2\omega_0^2 b\ . \tag{3.13}$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ სინუსოიდის ω_0 სიხშირის დაფიქსირებისას *MHAT*–გარდაქმნა არის იგივე სიხშირის სინუსოიდა, რომლის ამპლიტუდა დამოკიდებულია მასშტაბის მიმდინარე მნიშვნელობაზე. განვსაზღვროთ (3.12) და (3.13) გამოსახულებების მაქსიმუმი მასშტაბის მიმართ. ამისათვის გავაწამოვოდ ორივე გამოსახულება a-თი და გაუტოლოთ ნულს. მიღებულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$a_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}$$

სინუსოიდის P_0 პერიოდისათვის გვექნება:

$$P_0=\frac{2\pi}{\omega_0}=\pi\sqrt{2}a_{\max}\approx 4{,}44a_{\max}\ .$$

მორლეს ვეივლეტის გამოყენებისას , თუ (3.11) გამოსახულებაში ჩავსვამთ მორლეს ვეივლეტის ფურიეს გარდაქმნას

$$j\left(w\right)=a\sqrt{p}\ \exp\left\{-\frac{a^2\left(2p-w\right)^2}{4}\right\},$$

მაშინ მივიღებთ:

$$W\left(a,b\right)=\frac{A}{2j}\left[\exp\left\{jw_0b-\frac{a^2}{4}\left(2p-aw_0\right)\right\}-\exp\left\{-jw_0b-\frac{a^2}{4}\left(2p+aw_0\right)\right\}\right]$$

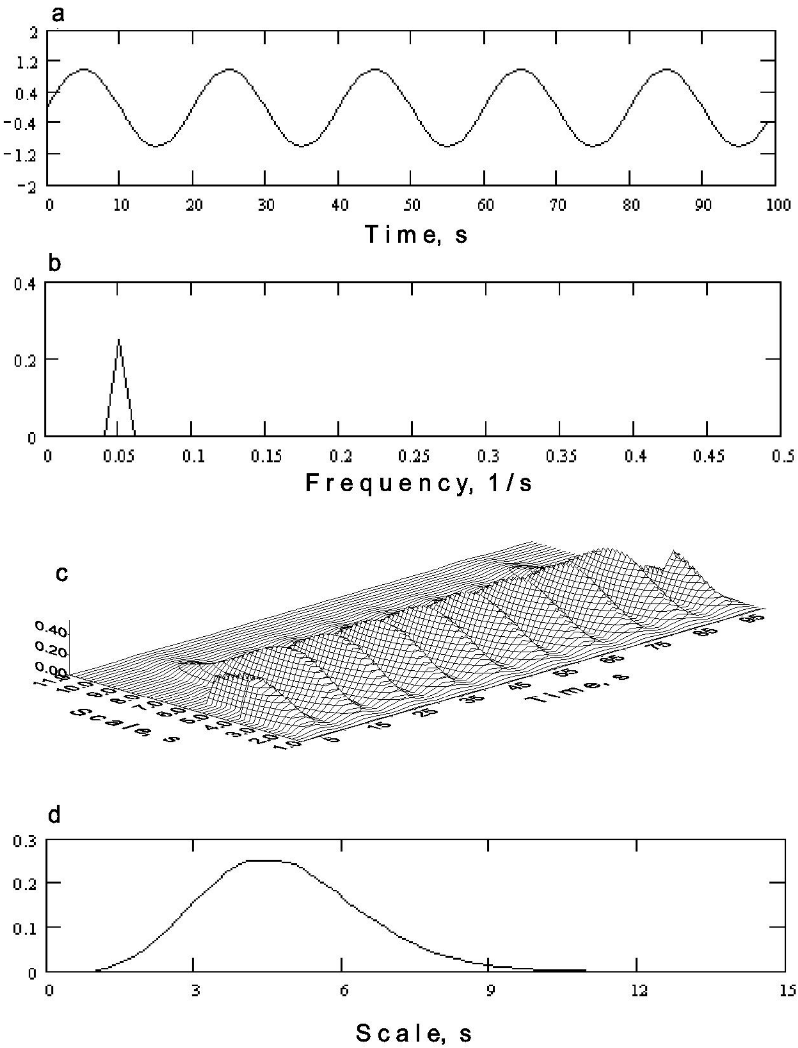
$$S\left(a,b\right)=\frac{A^2}{4}\left[\exp\left\{-\frac{a^2}{2}\left(2p-aw_0\right)^2\right\}+\exp\left\{-\frac{a^2}{2}\left(2p+aw_0\right)^2\right\}\right]$$

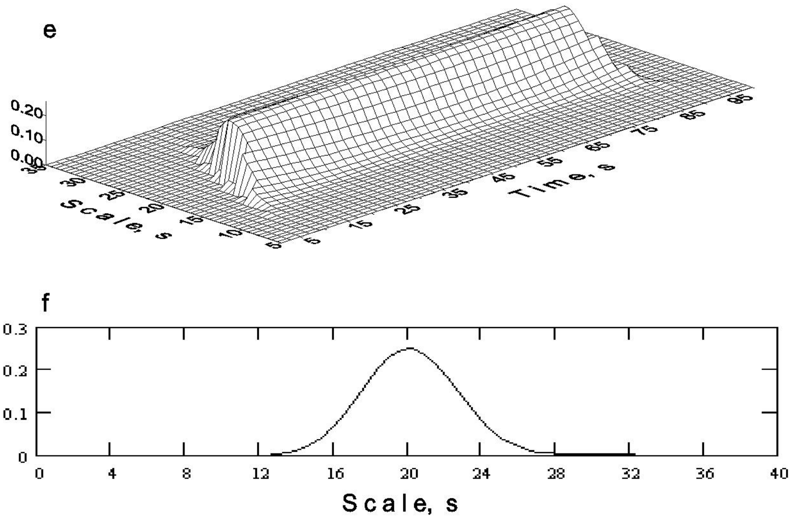
წინა შემთხვევისაგან განსხვავებით, ჩვენ ვხედავთ, რომ სინუსოიდის ლოკალური სპექტრის ენერგია არ არის დამოკიდებული b ძვრაზე და მასშტაბის მაქსიმუმი სინუსოიდის პერიოდთან დაკავშირებულია შემდეგნაირად:

$$P_0=a_{\max}.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ კავშირი სინუსოიდის პერიოდსა და მაქსიმალურ მასშტაბს შორის მორლეს ვეივლეტის გამოყენებისას იგივეა რაც ფურიეს გარდაქმნისას. ამ გარემოების გათვალისწინებით მორლეს ვეივლეტის გამოყენება დროითი მწკრივების ანალიზისათვის უფრო მიზანშეწონილია, ვიდრე *MHAT*–ვეივლეტისა.

ნახ. 3.4 ნაჩვენებია სინუსოიდის ვეივლეტ–გაგდაქმნა, სადაც *a*–საწყისი მწკრივია; *b*–ფურიეს გარდაქმნა; *c*–სკალოგრამა (*MHAT*–ვეივლეტი); *d*–სკეილოგრამა (*MHAT*–ვეივლეტი); *e*–სკალოგრამა(მორლეს ვეივლეტი); *f*–სკეილოგრამა (მორლეს ვეივლეტი).


a
2
1.2
0.4
-0.4
-1.2
-2
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Time, s
b
0.4
0.2
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
Frequency, 1/s
c
0.40
0.20
0.00
Scale, s
Time, s
5
15
25
35
45
55
65
75
85
95
d
0.3
0.2
0.1
0
0
3
6
9
12
15
Scale, s


e
0.20
0.10
0.00
Scale, s
Time, s
f
0.3
0.2
0.1
0
0
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
Scale, s

ნახ. 3.4

4. ᲓᲠᲝᲘᲗᲘ ᲛᲬᲙᲠᲘᲕᲔᲑᲘᲡ ᲕᲔᲘᲕᲚᲔᲢ–ᲒᲐᲠᲓᲐᲥᲛᲜᲘᲡ ᲐᲚᲒᲝᲠᲘᲗᲛᲘ

1. საწყისი მონაცემები.

მოცემულია დროითი მწკრივი:

$$x_k = x(t_k), \quad t_k = \Delta t \cdot k, \quad k = 1,2,\cdots,N ,$$

სადაც Δt –დისკრეტიზაციის ინტერვალია; N–დროითი მწკრივის განზომილება.

2. დროითი მწკრივის გრაფიკული წარმოდგენა.

საწყისი მონაცემების გრაფიკული წარმოდგენა საშუალებას იძლევა მწკრივში არსებული მუდმივი მდგენელის ან კიდევ დაბალსიხშირიანი მდგენელის ანუ ტრენდის წარმოდგენის საშუალებას. რადგან ვეივლეტ–ფუნქციას გააჩნია ნულის ტოლი ნულოვანი მომენტი, ამიტომ იგი იწვევს მწკრივიდან მუდმივი მდგენელის გამორიცხვას, რასაც ვერ ვიტყვით ტრენდის შესახებ, რადგან ვეივლეტ–გარდაქმნას ასეთი თვისება არ გააჩნია. დროითი მწკრივის მაღალსიხშირული კომპონენტების შესასწავლად სასურველია ორივე ეს მდგენელი გამოირიცხოს მწკრივიდან.

3. ტრენდის გამორიცხვა და მწკრივის ცენტრირება

ტრენდის გამოსარიცხავად საჭიროა ტრენდის მოდელის აგება. თუ ტრენდს გააჩნია რაიმე თეორიული ახსნა, მაშინ ტრენდის მოდელირება ხდება ამ თეორიის საფუძველზე. სხვა შემთხვევაში ხდება ტრენდის აპროქსიმაცია რომელიმე ემპირიული ფუნქციის საშუალებით. ტრენდის მოდელის პარამეტრები განისაზღვრებიან უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. შემდეგ ხდება ტრენდის მნიშვნელობების გამორკლება საწყისი დროითი მწკრივის მნიშვნელობებიდან. ამ პროცესის მარტივ შემთხვევას წარმოადგენს მწკრივის მუდმივი

მდგენელის გამორიცხვა დროითი მწკრივის ცენტრირებით:

$$\widetilde{x}_k = x_k - m \quad ,$$

სადაც m საშუალო არითმეტიკულია:

$$m = \frac{1}{N}\sum_{ik=1}^{N} x_k \quad .$$

სანამ ვეივლეტ–გარდაქმნას გამოვიყენებდეთ სასურველია დროითი მწკრივის სპექრტული ანალიზის ჩატარება ფურიეს გარდაქმნის გამოყენებით.

4. ფურიეს გარდაქმნა.

განისაზღვრება ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა:

$$X_k = \Delta t \sum_{n=1}^{N} \widetilde{x}_n \exp\left\{- j\,\frac{2\pi kn}{N}\right\}, \quad k = 1,2,\cdots,N\,.$$

ამის შემდეგ გამოითვლება სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შეფასება:

$$G_k = \frac{1}{N^2}\left[(\mathrm{Re}\,X_k)^2 + (\mathrm{Im}\,X_k)^2\right], \qquad k = 1,2,\cdots,\frac{N}{2} \quad .$$

სპექტრული სიმკვრივის მნიშვნელობები შეესაბამებიან

$$f_k = \frac{k}{\Delta t N}, \quad k = 1,2,\cdots,\frac{N}{2}$$

სიხშირეებს. k-ს მნიშვნელობები აიღება $\frac{N}{2}$-მდე იმიტომ, რომ ის შეესაბამება ნაიკვისტის სიხშირეს.

შენიშვნა: ჩვენ აქ არ განვიხილავთ სპექტრის განსაზღვრის ცდომილებებს და მათი შენცირების მეთოდებს.

5. ვეივლეტ–გარდაქმნის გამოთვლა

დისკრეტული ვეივლეტ–გარდაქმნა გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$W(a_i, b_j) = \frac{1}{n(a_i, b_j)}\sum_{k=1}^{N} \widetilde{x}_k \psi\left(\frac{t_k - b_j}{a_i}\right) \ ,$$

სადაც

$$n(a_i,b_j)=\sum_{k=1}^{N}\exp\left\{-\frac{1}{B}\left(\frac{t_k-b_j}{a_i}\right)^2\right\}$$

თუ $\mathsf{y}(t)$ ვეივლეტად შევარჩევთ მორლეს ვეივლეტს, მაშინ $B=a^2$.

6. ვეივლეტის არგუმენტების დისკრეტიზაცია

ყოველ ვეივლეტს გააჩნია საკუთარი ფორმა და ზომა, რომელიც მასშტაბის ფიქსირებულ მნიშვნელობის დროს განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$d_0=2\Delta_t a \quad ,$$

სადაც Δ_t ვეივლეტის რადიუსია. თუ ჩავთვლით დროითი მწკრივის დისკრეტიზაციის ინტერვალს $\Delta t=const$, მაშინ პოლიჰარმონიული პროცესის ჰარმონიკების პერიოდების დიაპაზონი განისაზღვრება $P_{\max}=2\Delta t$ და $P_{\min}=N\Delta t$ მნიშვნელობებით. აქედან გამომდინარე, შევარჩიოთ ვეივლეტის ზომისა და ჰარმონიული კომპონენტების გათვალისწინებით სამაშტაბო კოეფიციენტების მნიშვნელობები.

$$P_{\min}=2\Delta_t a_{\min}\;;\quad P_{\max}=2\Delta_t a_{\max}\quad ,$$

აქედან

$$a_{\max}=\frac{\Delta t}{\Delta_t}\;;\quad a_{mion}=\frac{N\Delta t}{2\Delta_t}\,.$$

მორლეს ვეივლეტისათვის გვექნება:

$$a_{\min}=\frac{2\Delta t}{a}\;;\quad a_{\max}=\frac{N\Delta t}{a}\quad .$$

შემოვიტანოთ a მასშტაბის დისკრეტიზაციის ინტერვალი

$$\Delta a=\frac{a_{\max}-a_{\min}}{N_a}\quad ,$$

მაშინ $\quad a_i=a_{\min}+\Delta a i,\quad i=1,2,\cdots,N_a\,.$

ეხლა განვიხილოთ b ძვრის დისკრეტიზაცია. მარტივ შემთხვევაში ძვრის დიაპაზონის საზღვრები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$b_{\min}\geq 0\;;\; b_{\max}\leq N\Delta t\quad .$$

ამ შემთხვევაში ძვრის დისკრეტული ნიშვნელობები განისაზღვრებიან ფორმულით:

$$b_j = b_{\min} + \Delta b j \ , \quad j = 1,2,\cdots,N_b \ ,$$

სადაც Δb ძვრის დისკრეტიზაციის ინტერვალია, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$\Delta b = \frac{b_{\max} - b_{\min}}{N_b} \ .$$

7. სკალოგრამის განსაზღვრა

$$S(a_i, b_j) = \left| W(a_i, b_j) \right|^2$$

8. სკელეტონის განსაზღვრა

$$S_c(a_i, b_j) = \begin{cases} S_{ij} \text{ ,როცა } S_{i-1,j} < S_{ij} > S_{i+1,j} \\ \quad \text{ან } S_{i,j-1} < S_{ij} > S_{i,j+1} \\ 0 \quad \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

9. სიგნალის გამოყოფა ხმაურიდან

$$S(a_j, b_j) = \begin{cases} S(a_i, b_j), & S(a_i, b_j) \geq \sigma_0^2 Z(a_i, b_j) T_\alpha \\ 0 \ , & S(a_i, b_j) < \sigma_0^2 Z(a_i, b_j) T_\alpha \end{cases} \ ,$$

სადაც

$$Z(a_i, b_j) = \frac{1}{n^2(a_i, b_j)} \sum_{k=1}^{N} \exp\left\{ -\frac{2}{a^2} \frac{t_k - b_j}{a_i} \right\} \qquad (4.1)$$

ზოგჯერ უფრო მოსახერხებელია სიგნალის გამოყოფა არა სკალოგრამიდან, არამედ სკელეტონიდან. ამ შემთხვევაში (4.1) ფორმულის მარჯვენა მხარეს $S(a,b)$ მაგივრად უნდა გამოვიყენოთ $S_c(a,b)$.

10. სკეილოგრამის განსაზღვრა

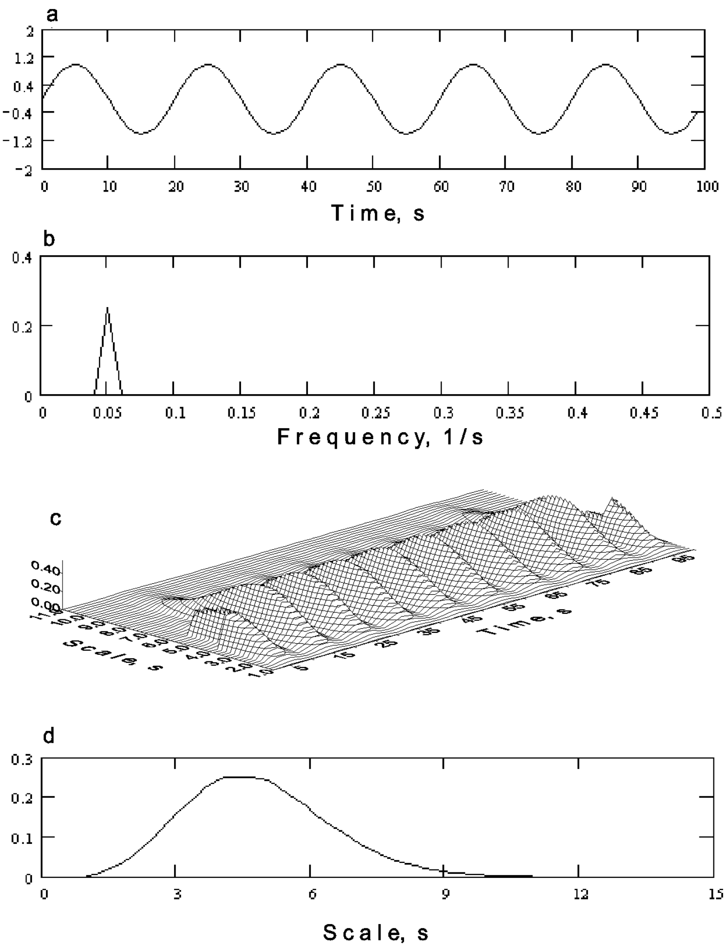
$$G_i = \frac{1}{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} S(a_i, b_j), \qquad i = 1,2,\cdots,N_a \ .$$

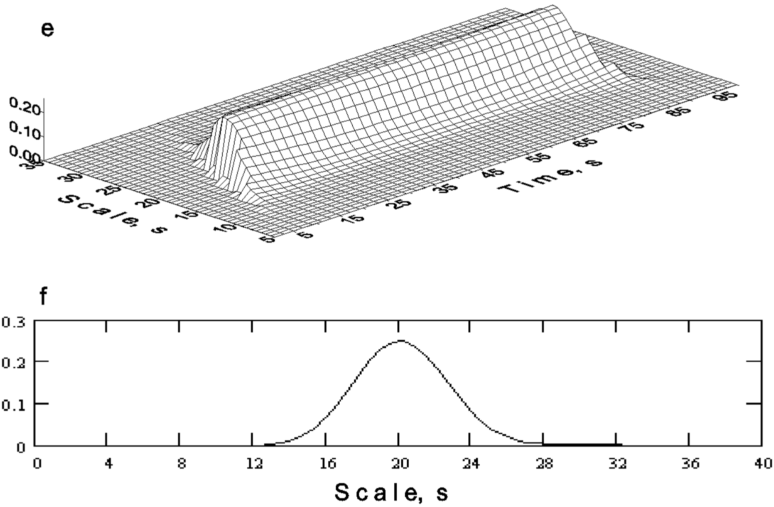
11. ალგორითმის დასასრული.

5 მოდელური ფუნქციების ვეივლეტ–გარდაქმნა

5.1 სინუსოიდა

ნახ. 5.1a წარმოდგენილია T=20 წმ პერიოდის (f=0,05ჰც) სინუსოიდა, რომელიც მოცემულია $\Delta t = 1$ ბიჯით (N=100). მისი ფურიეს გარდაქმნა ნაჩვენებია ნახ. 5.1b. ვეივლეტ–გარდაქმნისათვის გამოყენებული იყო მორლეს და *MHAT*–ვეივლეტები. როგორც ნახ. 5.1c ჩანს, *MHAT*–ვეივლეტი გვაძლევს სკალოგრამას (ნახ. 5.1c), რომელიც წარმოდგენილია სამგანზომილებიან სივრცეში და შედგება ამოზნექილი ზედაპირებით, რომლებიც ერთმანეთის მიმართ მდებარეობენ 10 წმ ინტერვალით. ეს იმით აიხსნება, რომ გრაფიკზე წარმოდგენილ პოლიჰარმონიული ფუნქციის მახასიათებელ დეტალს წარმოადგენს სინუსოიდის ამოზნექილობა და ჩაზნექილობა ანუ რხევის ნახევარი პერიოდი. ამის საწინააღმდეგოს წარმოადგენს მორლეს ვეივლეტი, რომელსაც გააჩნია ჰარმონიული რხევა (თუმცა მილევადი) და რომელიც დროით მწკრივში არჩევს რხევის მთელ პერიოდს. ამით აიხსნება სინუსოიდის მახასიათებელი ფორმა, რომელიც წარმოდგენილია სკალოგრამაზე (a,b,s) კორდინანტებში (ნახ. 5.1c) და რომელიც წაავგავს მთის ფორმას. სინუსოიდის სკალოგრამის ასეთი წარმოდგენა შეესაბამება ფურიეს გარდაქმნას, ამიტომ მორლეს ვეივლეტის გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია ჰარმონიული რხევის ანალიზისათვის, ვიდრე *MHAT*–ვეივლეტისა. ნახ. 5.1f ნაჩვენებია მორლეს ვეივლეტის სკეილოგრამა, სადაც მკაფიოდ წარმოდგენილია სინუსოიდა T=20 პერიოდით.


a
Time, s
b
Frequency, 1/s
c
Scale, s
Time, s
d
Scale, s

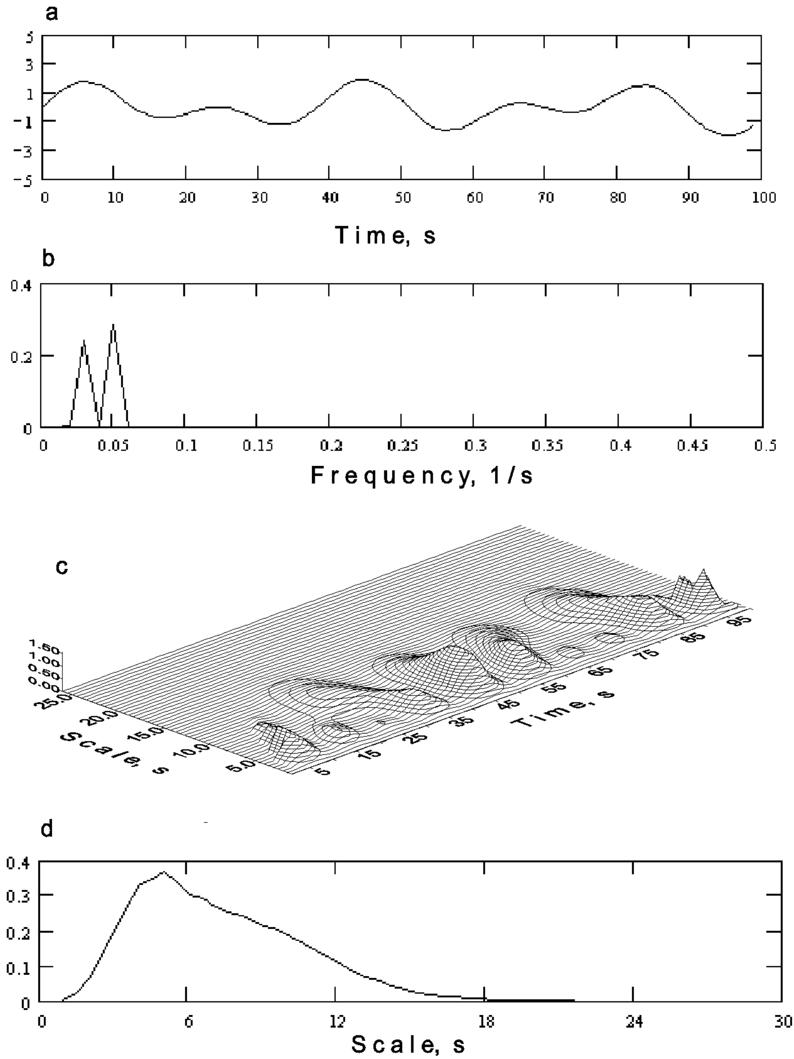


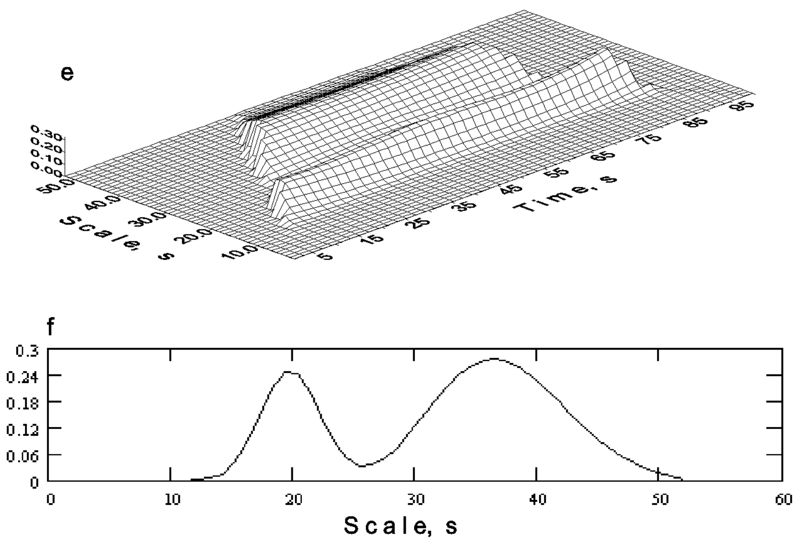
ნახ. 5.1

5.2 ორი სინუსოიდის ჯამი

მოცემულია დროითი მწკრივი (ნახ. 5.2*a*), რომელიც წარმოადგენს ორი სინუსოიდის პერიოდებით $T_1 = 20$ და $T_2 = 35$; $\Delta t = 1$, $n = 100$, ჯამს. მისი ფურიეს გარდაქმნა ნაჩვენებია ნახ. 5.2*b*. აქაც ვეივლეტ–გარდაქმნისათვის გამოყენებული იყო მორლეს და *MHAT*–ვეივლეტები. ადვილი შესამჩნევია, რომ *MHAT*–ვეივლეტით მიღებული სკალოგრამა (ნახ. 5.2*c*) და სკეილოგრამა (ნახ. 5.2*d*) ვერ უზრუნველყოფენ საწყისი სიგნალის ორი კომპონენტის გამოყოფას, მიუხედავად იმისა, რომ მათი პერიოდები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმსნეთისაგან. ეს ფაქტი იმით აიხსნება, რომ *MHAT*–ვეივლეტს გააჩნია

დროით არეში ძლიერი ლოკალიზაცია, რის გამოც დაბალია სიხშირულ არეში გარჩევადობის ხარისხი.





ნახ. 5.2

რაც შეეხება მორლეს ვეივლეტს, რომელსაც დროით არეში არც ისეთი ძლიერი ლოკალიზაცია გააჩნია მისი გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია, რადგან როგორც სკალოგრამიდან (ნახ. 5.2*e*) ასევე სკეილოგრამიდან (ნახ. 5.2*f*) ჩანს საწყისი სიგნალის ორივე პერიოდი მკვეთრად არიან გამოყოფილნი. ეს იმით აიხსნება, რომ მორლეს ვეივლეტი, *MHAT*–ვეივლეტთან შედარებით, უფრო ნაკლებად არის ლოკალიზირებული დროით არეში და ამიტომ $a^2 = 2$ მნიშვნელობის დროს მისი გარჩევადობა სიხშირულ არეში მეტია ვიდრე *MHAT*–ვეივლეტისა. მიუხედავად ამისა, შეიძლება შეიქმნას ისეთი სიტუაცია, როცა სიგნალის სიხშირეები ახლოს არიან ერთმანეთთან და ვერ მოხდეს მათი გარჩევა

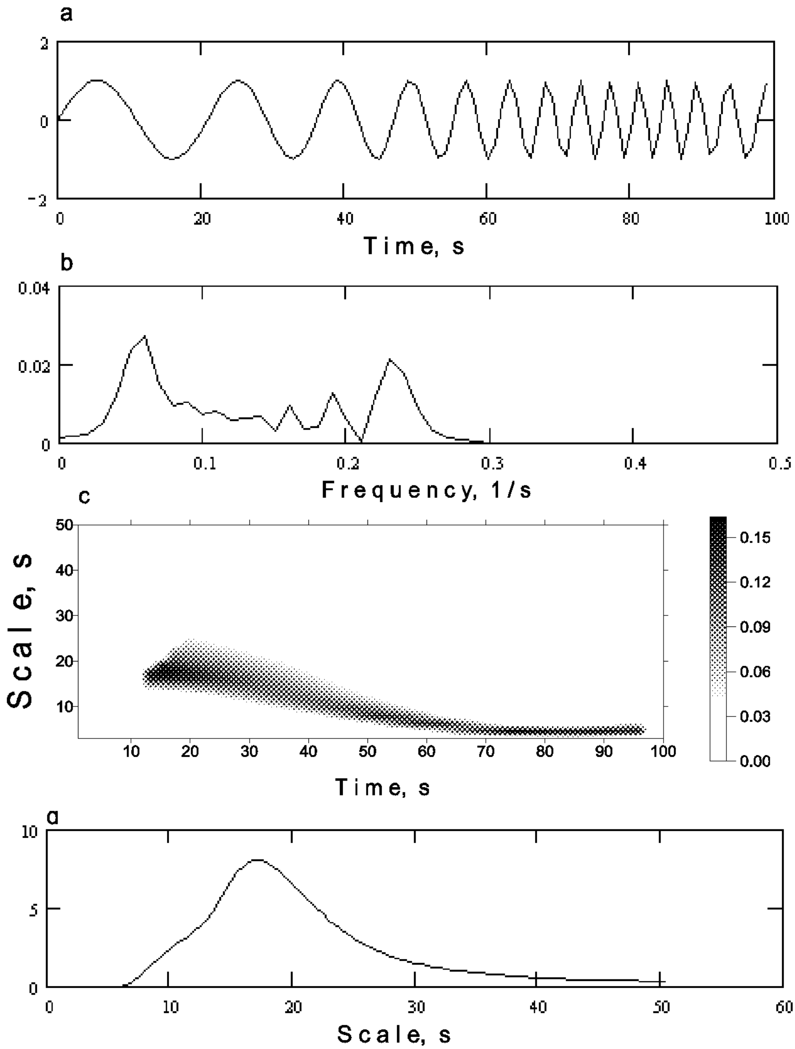
მორლეს ვეივლეტით $a^2=2$ სტანდარტული მნიშვნელობით. ასეთ სიტუაციაში a პარამეტრის მნიშვნელობა უნდა გავზარდოთ. ამით ჩვენ ვამცირებთ ვეივლეტ–გარდაქმნის დროით გარჩევადობას, რადგან იზრდება სიხშირული გარჩევადობა.

განხილული მაგალითებიდან ჩანს, რომ დროითი მწკრივისათვის უფრო მიზანშეწონილია მორლეს ვეივლეტის გამოყენება.

5.3 ცვლადპერიოდიანი სინუსოიდა

ზემოდ მიყვანილი მაგალითები გვიჩვენებენ, რომ რეგულარული სიგნალის ვეივლეტ–გარდაქმნა არ იძლევა ახალ ინფორმაციას ფურიეს გარდაქმნასთან შედარებით. სიტუაცია მკვეთრად იცვლება, როცა სიგნალის პარამეტრები დროში იცვლებიან. ნახ. 5.3*a* წარმოდგენილია სინუსოიდა, რომლის პერიოდი თანდათან მცირდება დროის ღერძის მიმართ. ასეთი სინუსოიდის ფურიეს გარდაქმნა (ნახ. 5.3*b*), სკალოგრამა (ნახ. 5.3*c*) და სკეილოგრამა (ნახ. 5.3*d*) განსაზღვრილია მორლეს ვეივლეტის საშუალებით.

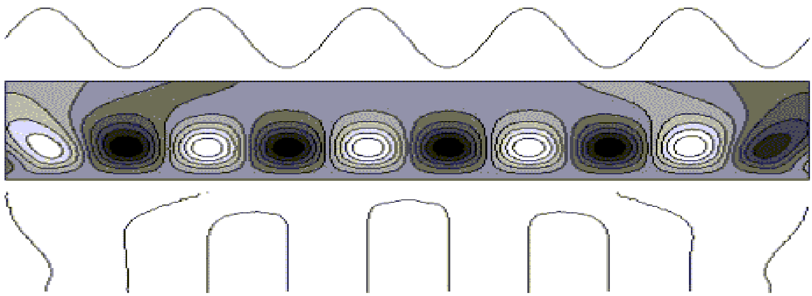
როგორც ნახაზიდან ჩანს, ფურიეს გარდაქმნა გვაძლებს პერიოდოგრამას, რომლის სიმძლავრის პიკები გაბნეულია სიხშირის ფართო დიაპაზონში, მაშინ როდესაც ვეივლეტ–გარდაქმნის სკალოგრამა მკაფიოდ გვიჩვენებს პერიოდის დრეიფს დროის ღერძის გასწვრივ.



ნახ. 5.3

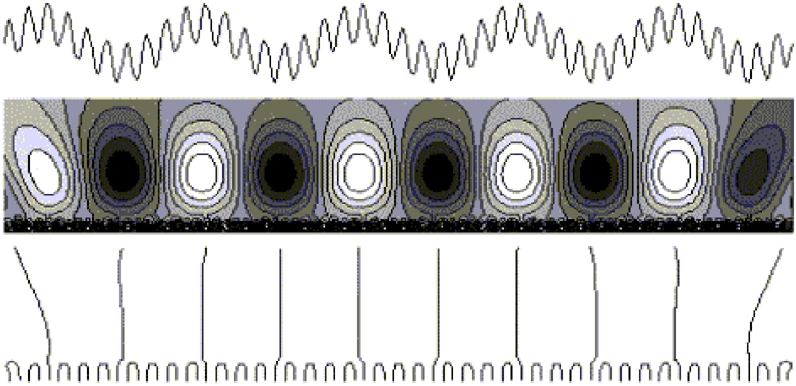
5.4 სკალოგრამის წარმოდგენა ტოპოგრაფიული რუკის საშუალებით

ეხლა განვიხილოთ ვეივლეტ–გარდაქმნა, სადაც სკალოგრამა წარმოდგენილია ტოპოგრაფიული რუკის საშუალებით. ქვემოდ მოყვანილ მაგალითებში ვეივლეტ–გარდაქმნებში გამოყენებული იყო *MHAT*-ვეივლეტი.



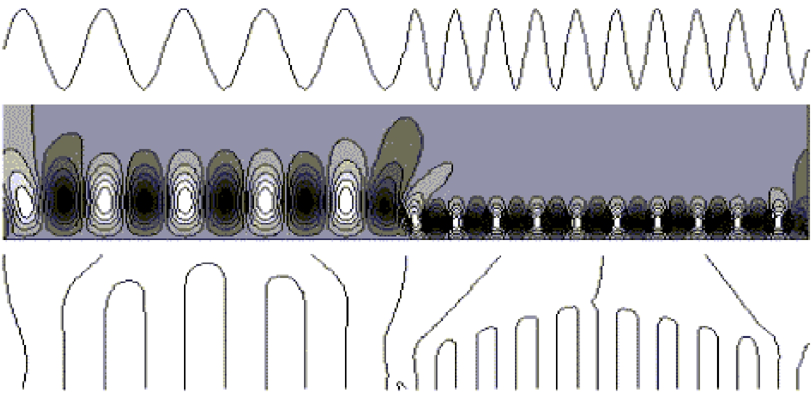
ნახ. 5.4

ნახ. 5.4 წარმოდგენილია სინუსოიდის ვეივლეტ–გარდაქმნის შედეგი, რომლის ზედა ნაწილში მოცემულია საწყისი სიგნალი, შუაში მდებარეობს ვეივლეტ–გარდაქმნის სკალოგრამის ტოპოგრაფიული რუკა და ნახაზის ქვედა ნაწილში სკელეტონი. სკალოგრამის ტოპოგრაფიულ რუკაზე მკაფიოდ ჩანს სინუსოიდის მაქსიმუმების (თეთრი ფერი) და მინიმუმების (შავი ფერი) თანმიმდევრობა. მაქსიმუმების და მინიმუმების არეების საზღვრები ემთხვევიან სინუსოიდის ნულოვან მნიშვნელობებს. სკელეტონებს შორის მუდმივი მანძილი მიუთითებს სიგნალის სინუსოიდალურ ხასიათზე. დასაწყისში და ბოლოში სკელეტონები დამახინჯებულია, რაც გამოწვეულია კიდური ეფექტით.



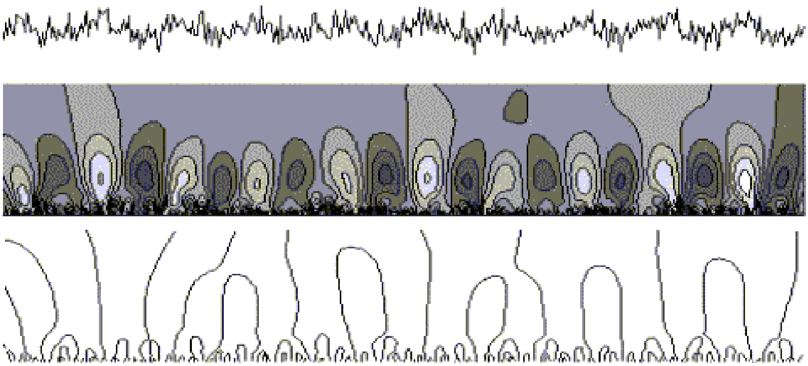
ნახ. 5.5

ნახ. 5.5 წარმოდგენილია ორი სინუსოიდის ჯამისაგან შედგენილი სიგნალის ვეივლეტ–გარდაქმნა.



ნახ. 5.6

ნახ. 5.6 ნაჩვენებია ცვლადპერიოდიანი სინუსოიდის ვეივლეტ–გარდაქმნა.

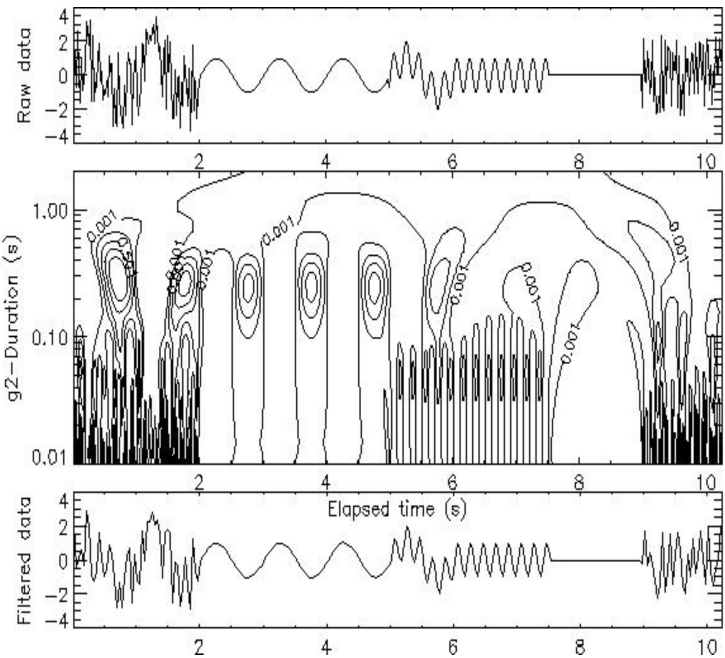


ნახ. 5.7

ნახ. 5.7 წარმოდგენილია სინუსოიდისა და შემთხვევითი მონაცემების ჯამისაგან შემდგარი სიგნალის ვეივლეტ–გარდაქმნის შედეგი.

5.5 უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნა

ისევე რიგორც ფურიეს გარდაქმნის დროს, უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნა სიგნალს სრულად აღადგენს. მაგალითისათვის განვიხილოთ შერეული სიგნალი, რომელიც შედგება გადაუკვეთავი სხვადასხვა სიხშირის სინუსოიდებისაგან და შემთხვევითი ხმაურისაგან (ნახ. 5.8).



ნახ. 5.8

როგორც ნახაზიდან ჩანს, სიგნალი თითქმის აღსდგა მაღალსიხშირიანი ნაწილის გამოკლებით. იმისათვის, რომ სიგნალის ხმაური მთლიანად იყოს აღდგენილი, საჭიროა სკალოგრამის „გაფართოება“ მოკლე პერიოდიანი მდგენელების მიმართულებით.

როგორც ზემოდ იყო ნაჩვენები, უკუ ვეივლეტ–გარდაქმნა ფართოდ გამოიყენება სიგნალების დამუშავებაში, კერძოდ სიგნალის ფილტრაციისათვის (იხ. §3.2).

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Вытязев В.В. Вейвлет–анализ временных рядов. Учеб. пособие.СПб. 2001
2. Новиков Л.В. Основы вейвлет–анализа сигналов.СПб, 1999
3. Дремин И.М. идр. Вейвлеты и их использование. Успехи Физических наук,т.171,М.,2001
4. Васильева Л.Г. и др. Преобразования Фурье и вейвлет–преобрвзования.Их своиства и применение. Вычислительные методы и программирование, т.3, М.,2002
5. Воробьев В.М. Грибунн В.Г. Теория и практика вейвлет–преобразование. СПб,1999
6. Астафъева Н.М. Веивлет–анализ: Основы теории и примери применения. Успехи физических наук, 1996, т.166 N11.
7. Robi Polikar. The Engineers Ultimate Guide to Wavelet Analysis. The Wavelet Tutorial.[htth://WWW.hublic iastate. edu/rpolikar/WAVELETS/Wtutorial,htvl]/