

ირაკლი გორჯოლაძე, დავით გორგიძე,  
გურამ ბაღათურია, ლევან ჯიქიძე

თ ე ო რ ი უ ლ ი მ ე ქ ნ ი კ ა  
(სტატიკა)

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი 2013



## უაკ 621.01

მოცემულია თეორიული მასალა და ამოცანების ამოხსნის მეთოდოლოგია (ტიპური ამოცანების დაწვრილებითი ამოხსნის თანხლებით), რომლის ათვისება დაეხმარება სტუდენტებს თეორიული მასალის ღრმად გაგებასა და ათვისებაში.

განკუთვნილია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ბაკალავრიატის და უმაღლესი ტექნიკური განათლების სტუდენტებისათვის. ცხადია, შეუძლიათ გამოიყენონ საქართველოს სხვა უმაღლესი სასწავლებლის სტუდენტებმაც, რომლებიც ეუფლებიან ტექნიკურ სპეციალობებს.

ყველა უფლება დაცულია. ამ წიგნის არც ერთი ნაწილი (იქნება ეს ტექსტი, ფოტო, ილუსტრაცია თუ სხვა) არანაირი ფორმით და საშუალებით (იქნება ეს ელექტრონული თუ მექანიკური) არ შეიძლება გამოყენებულ იქნას ავტორების წერილობითი ნებართვის გარეშე.

საავტორო უფლებების დარღვევა ისჯება კანონით.

## შ ე ს ა მ ა ლ ი

ყველაფერი, რაც მოქმედებს ადამიანის გრძნობის ორგანოებზე და იწვევს მის შეგრძნებებს, არის **მატერია**. მატერიის ყოველგვარ ცვლილებას **მოძრაობა** ეწოდება. მოძრაობა მატერიის ძირითადი და განუყოფელი თვისებაა – მის გარეშე მატერია არ არსებობს. ასევე არ არსებობს მოძრაობა მატერიის გარეშე. მატერიის ძირითადი ობიექტური ფორმებია **დრო** და **სივრცე**.

მატერიის მოძრაობის ფორმა მრავალგვარია. დღეისათვის ძირითადად განიხილება მოძრაობის შემდეგი ფორმები: მექანიკური, ფიზიკური, ქიმიური, ბიოლოგიური და ნოოსფერული. ეს უკანასკნელი (ნოოსფერო – ბერძნულად **გონება**) არის ბუნებისა და საზოგადოების ურთიერთქმედების სფერო, სადაც ადამიანის გონივრული მოქმედება წარმოადგენს განვითარების მთავარ მამოძრავებელ ძალას.

მოცემულ ჩამონათვალში ყოველი შემდგომი მოიცავს მის წინა ფორმას. ყოველ ფორმას აქვს თავისი დამახასიათებელი თვისებები, რომლებიც უფრო მარტივი ფორმის მქონე მოძრაობების კანონებით ვერ აიხსნება. როგორც ვხედავთ, მოძრაობის ყველა ფორმა შეიცავს მექანიკურ მოძრაობას, ამიტომ იგი ყველაზე მარტივი სახის მოძრაობაა.

**მექანიკური მოძრაობა** ეწოდება სხეულების ან ერთი სხეულის ნაწილების ურთიერთმდებარეობის შეცვლას სივრცეში დროის მიხედვით.

მეცნიერებას, რომელიც შეისწავლის მექანიკურ მოძრაობას, **მექანიკა** ეწოდება. უძრაობა მოძრაობის კერძო შემთხვევაა, ამიტომ უძრაობასაც მექანიკა შეისწავლის.

მექანიკის ძირითადი კანონები ყალიბდებოდა მრავალი თაობის მეცნიერთა მიერ. ცნობილია, რომ მექანიკის ზოგიერთ კანონს იცნობდა ბერძენი ფილოსოფოსი **არისტოტელე** (384-322 წწ, ჩვ. წ-მდე). იგი სწავლობდა ბერკეტის წონას-წორობას, წრფივ და მრუდწირულ მოძრაობებს, სიჩქარეთა შეკრების კანონს და სხვ.

პირველად სიტყვა „მექანიკა“ გამოყენებულ იქნა არისტოტელეს ერთ-ერთი მოწაფის მიერ ჩვ. წ-მდე III საუკუნეში ისეთი მოვლენის განხილვისას, როდესაც „მცირე ერევა დიდს“ (მაგალითად, ბერკეტით ტვირთის აწევისას). სიტყვა „მექანიკა“ (*mēchanikē* < *mēchanē* - იარაღი) ბერძნულია და სიტყვა-სიტყვით ნიშნავს: „ხრიკი“ „ეშმაკობა“ „ქვეშქვეშობა“.

პირველი არსებითი მეცნიერული შედეგები მექანიკაში გვხვდება **არქიმედეს** (287-212 წწ. ჩვ. წ-მდე) შრომებში. მას ეკუთვნის ჰიდროსტატიკის ერთ-ერთი – კანონი, სხეულის სიმძიმის ცენტრის მოძებნის წესები, ბერკეტის თეორია სხვ. არქიმედე ითვლება მექანიკის, როგორც მეცნიერების, ფუძემდებლად.

არქიმედეს ხანიდან აღორძინების ხანამდე მექანიკის განვითარება ძალიან შენეულა. აღორძინების ხანაში იწყება მექანიკის სწრაფი განვითარება. განსაკუთრებით აღნიშვნის ღირსია ცნობილი მხატვარი, მეცნიერი და ინჟინერი **ლენარდო და ვინჩი** (1452-1519), რომელიც იკვლევდა ხახუნთან დაკავშირებულ საკითხებს, დახრილ სიბრტყეზე სხეულის და მიწებში სითხის მოძრაობას და სხვ.

უდიდესი ღვაწლი მექანიკის განვითარებაში მიუძღვით **ნიკოლაი კოპერნიკსა** (1473-1543) და **იოჰან კეპლერს** (1571-1630). კოპერნიკი მზის გარშემო პლანეტების მოძრაობის ჰელიოცენტრული თეორიის შემქმნელია. კეპლერმა დაადგინა პლანეტების მოძრაობის კანონები, რომლებიც შემდგომში საფუძვლად დაედო ნიუტონის მიერ მსოფლიო მიზიდულობის კანონის დასაბუთებას.

ლენარდო და ვინჩის, კოპერნიკისა და კეპლერის შრომებმა საფუძველი ჩაუყარა დინამიკის კანონების დადგენას. ამ საქმეში ყველაზე დიდი წვლილი მიუძღვის იტალიელ მეცნიერს **გალილეო გალილეის** (1564-1642). მან დაადგინა მექანიკის პირველი კანონი – ინერციის კანონი; საფუძველი ჩაუყარა თანამედროვე კინემატიკას; პირველმა აღმოაჩინა თავისუფალი ვარდნისა და სიცარიელეში ჰორიზონტისადმი ნებისმიერი კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობის კანონები; სწავლობდა ბერკეტის წონასწორობის პირობებს და საფუძველი ჩაუყარა ნაგებობათა სიმტკიცის თეორიას.

ღრმა კვალი დატოვეს მექანიკის განვითარების ისტორიაში **ქრისტიან ჰიუგენსმა** (1629-1695) და **რენე დეკარტმა** (1596-1650).

ნიუტონის წინამორბედთა გენიალური აღმოჩენები, აგრეთვე ტექნიკის სხვადასხვა დარგების ყოველდღიური სასოცოცხლო მოთხოვნები, აი, ის წინაპირობები, რომლებმაც **ისააკ ნიუტონი** (1643-1727) მიიყვანა მექანიკის ზოგადი კანონების (რომლებიც დამსახურებულად ატარებს მის სახელს) აღმოჩენასა და იმ მათემატიკური აპარატის შექმნამდე, რითაც შესაძლებელია მექანიკის ზოგადი კანონების და მათი შედეგების გამოყენება პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად.

მან ნაშრომში – „ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები“ (1687) – გააერთიანა, განაზოგადა და დაასაბუთა მისი დროის მიღწევები მექანიკაში. ამ

წიგნში მოცემულია კლასიკური მექანიკის ძირითადი დებულებები. ნიუტონის უდიდესი დამსახურებაა მსოფლიო მიზიდულობის კანონის დადგენა.

ნიუტონის თანამედროვე იყო **გოტფრიდ ლაიბნიცი** (1646- 1716). მან ნიუტონისაგან დამოუკიდებლად, მასთან ერთდროულად, შექმნა დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა.

ნიუტონის შრომებით მთავრდება ახალი ბუნებისმეტყველების პირველი პერიოდი. ნიუტონის კლასიკური მექანიკა ვითარდება XVIII–XIX საუკუნეების განმავლობაში.

XVII საუკუნეში მექანიკაში იწყება ანალიზური მეთოდების სწრაფი განვითარება. **ლეონარდ ეილიერმა** (1707-1783) შეიმუშავა წერტილისა და მყარი სხეულის დინამიკის ამოცანის ამოხსნის მეთოდები შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების შედგენისა და ინტეგრირების გზით.

იმავე მიზნით, **ჟან ლერონ დალამბერმა** (1717-1783) წამოაყენა თავისი ცნობილი პრინციპი, ხოლო **ლუი ლაგრანჟმა** (1736-1813) დალამბერისა და შესაძლო გადაადგილებების პრინციპებზე დაყრდნობით შეიმუშავა ზოგადი ანალიზური მეთოდი. ამჟამად, ამოცანების ამოხსნის ანალიზური მეთოდები დინამიკაში წარმოადგენს ძირითად მეთოდებს.

XVIII–XIX საუკუნეებში მექანიკის განვითარების ისტორიაში ღრმა კვალი დატოვეს: **იოჰან ბერნულმა** (1667-1748), **მიხეილ ლომონოსოვმა** (1711-1765), **დანიელ ბერნულმა** (1700-1782), **კარლ ფრიდრიხ გაუსმა** (1777-1855), **უილიამ ჰამილტონმა** (1805-1865), **კარლ იაკობმა** (1804-1851), **მიხეილ ოსტროგრადსკიმ** (1801-1861), **სოფიო კოვალევსკაიამ** (1850-1891) და მრავალმა სხვამ.

სახელმძღვანელოს ფარგლებში შეუძლებელია XX საუკუნის მექანიკაში თუნდაც უძირითადესი მიღწევებისა და მათი ავტორების გვარების ჩამოთვლა. გამონაკლისის სახით მოვიყვანთ იმ ქართველი მექანიკოსების გვარებს, რომლებმაც თავიანთი ნიჭითა და შემოქმედებითი უნარით მსოფლიო დონის მეცნიერის სახელი დაიმსახურეს: **ნიკოლოზ მუსხელიშვილი** (1891-1976), **ივანე ნიკურაძე** (1894-1979), **ვიქტორ კუპრაძე** (1903-1985), **ილია ვეკუა** (1907-1977), **ალექსანდრე ქართველიშვილი (ქართველი)** (1896-1974), **გიორგი ბერიაშვილი** (1903-1979), **ალექსანდრე ნადირაძე** (1914-1987), **სამსონ ქუთათელაძე** (1914-1986) და სხვ. თანამედროვე მეცნიერებს შორის თავიანთი გაბედული ჰიპოთეზებით გამოირჩევიან **გია დვალი** და **გრიგოლ გაბადაძე**.

# I თავი

## თეორიული მექანიკის საბანი. ძირითადი ცნებები

### 1.1. თეორიული მექანიკის ალბილი თანამედროვე მეცნიერებასა და ტექნიკაში

დედამიწის პირობებში სხეულები ძირითადად ოთხი სახით გვხვდება: აირ-ულ, თხევად, მყარ და პლაზმურ მდგომარეობაში. ეს სხეულები თვისებებით ერთმანეთისაგან მკვეთრად განსხვავდება. რასაკვირველია, მათი მოძრაობის თვისებებიც, ასევე განსხვავდება ერთმანეთისაგან. მიუხედავად ამისა, მათ მოძრაობას ახასიათებს ზოგი ისეთი საერთო თვისება, რომლებიც არ არის დამოკიდებული თვით ამ სხეულის თვისებებზე.

*მექანიკური მოძრაობის იმ საერთო, ზოგად თვისებებს, რომლებიც არ არის დამოკიდებული თვით მოძრავი სხეულების თვისებებზე, შეისწავლის თეორიული მექანიკა.*

თეორიულ მექანიკაში ზემოხსენებული მოძრაობის ზოგადი კანონების შესასწავლად შემოაქვთ **აბსოლუტურად მყარი** (არადეფორმირებადი) სხეულის ცნება (იხ. §1.2). შემდგომში, როცა გამოვიყენებთ გამონათქვამს – „მყარი სხეული“ ან მოკლედ „სხეული“, ყოველთვის ვიგულისხმებთ აბსოლუტურად მყარ სხეულს.

აღვნიშნავთ, რომ მექანიკური მოძრაობა არის მოძრაობის დანარჩენი ფორმების შემადგენელი ნაწილი, ამიტომ მისი კანონები მართებულია მოძრაობის ყველა ფორმისათვის.

თეორიული მექანიკის კანონები, როგორც მექანიკური მოძრაობის ზოგადი კანონები, მექანიკის ძირითადი კანონებია, ამიტომ **თეორიული მექანიკა არის თანამედროვე მეცნიერების საფუძველი.**

აღსანიშნავია, რომ მექანიკური მოძრაობის შესწავლისას მხედველობაში მიიღება მოძრავი მატერიის მხოლოდ ორი ძირითადი ნიშანი: მისი განფენილობა (მატერიალური სხეულის გეომეტრიული ფორმა) და ნივთიერობა (მასა და მისი განაწილება გეომეტრიულ მოცულობაში).

თეორიული მექანიკა ტრადიციულად იყოფა სამ ნაწილად: სტატიკა, კინემატიკა და დინამიკა.

სტატიკა არის მექანიკის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ძალთა სისტემის ტოლფას სისტემებად გარდაქმნის მეთოდებს და ადგენს მყარ სხეულზე მოდებული ძალების წონასწორობის პირობებს.

კინემატიკა შეისწავლის მყარი სხეულის მოძრაობას გეომეტრიული თვალსაზრისით ანუ ამ მოძრაობის მიზეზების (ძალების) გათვალისწინების გარეშე.

დინამიკა შეისწავლის მყარი სხეულის მოძრაობას ამ მოძრაობის მიზეზების (ძალების) გათვალისწინებით.

ზოგჯერ სტატიკასა და დინამიკას აერთიანებენ და კინეტიკას უწოდებენ. ცხადია, ამ შეთხვევაში თეორიული მექანიკა იყოფა ორ ნაწილად: კინემატიკად და კინეტიკად.

**შენიშვნა 1.1.** სხეულის წონასწორობაში იგულისხმება სხეულის უძრაობა ან წრფივი და თანაბარი მოძრაობა, ან თანაბარი ბრუნვა.

## 1.2. ძირითადი ცნებები

**აბსოლუტურად მყარი სხეული** ეწოდება სასრული ზომების მოცულობას, რომელიც მთლიანად შევსებულია ნივთიერებით, ამასთან, მანძილი ამ ნივთიერების ორ ნებისმიერ წერტილს შორის არ იცვლება მთელი მოძრაობის განმავლობაში.

**ნივთიერი (მატერიალური) წერტილი** სხეულია, რომელსაც აქვს მასა, ზომები კი არა. სხვა სიტყვებით, ეს ისეთი სხეულია, რომლის ზომები ამოცანაში მოცემულ სხვა ზომებთან შედარებით, ძალიან მცირეა. ნივთიერი წერტილის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება სამი კოორდინატით.

**ნივთიერ (მატერიალურ) წერტილთა სისტემა** ეწოდება ნივთიერ წერტილთა ერთობლიობას, რომლის წერტილებზე მოქმედებს ურთიერთმიზიდულობის ძალები.

**უწყვეტი დეფორმირებადი გარემო** არის სასრული მოცულობა ან უსასრულო სივრცე, რომელიც მთლიანად შევსებულია ნივთიერებით, ამასთან, ამ გარემოს წერტილებს შორის მანძილი იცვლება.

ბუნებაში არსებობს სხეულების ურთიერთქმედების სხვადასხვა ფორმები. თეორიული მექანიკა შეისწავლის მხოლოდ მექანიკურ ურთიერთქმედებას. სხეულების **მექანიკურ ურთიერთქმედებას** ვუწოდებთ ისეთ ურთიერთქმედებას, რომლის შედეგია ან სხეულების ერთი ნაწილის ამოძრავება დანარჩენების მიმართ, ან მათი დეფორმაცია, ან ერთი და მეორეც ერთდროულად.



თუ ერთი სხეულის მეორეზე მოქმედებისას ეს უკანასკნელი იცვლის სიჩქარეს ან დებულობს დეფორმაციას, ან ერთსაც და მეორესაც, მაშინ ვამბობთ, რომ პირველი სხეული მეორეზე ახდენს **მექანიკურ მოქმედებას**.

სხეულების ურთიერთქმედების ზომას **ძალა** წარმოადგენს. აღსანიშნავია, რომ მექანიკური ურთიერთქმედების შესწავლის გაადვილების მიზნით, ერთი სხეულის მეორეზე მოქმედებას ძალის საშუალებით გამოვსახავთ. თეორიული მექანიკა შეისწავლის ძალის მოქმედებით გამოწვეულ ეფექტს და არა მის ფიზიკურ ბუნებას.

ცდებით დადგენილია, რომ ძალა ხასიათდება სიდიდით (მოდულით), მიმართულებითა და მოდების წერტილით, ე.ი. **ძალა ვექტორული სიდიდეა**.

ძალის მოდების წერტილად ითვლება სხეულის ის ნაწილი, რომელზეც უშუალოდ მოდებულია ძალა. უნდა გვახსოვდეს, რომ მოდების წერტილის ცნება პირობითია, ვინაიდან ძალის მოდება ერთ წერტილში პრაქტიკულად შეუძლებელია. ერთ წერტილში მოდებულ ძალაში იგულისხმება მოცემული სხეულის ზედაპირის ან მოცულობის ნებისმიერ მცირე ნაწილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი.

წრფეს, რომლის გასწვრივაც მიმართულია ძალა, **ძალის მოქმედების წრფე** ან მოკლედ, **ძალის ფუძე** ეწოდება.

ძალის მიმართულებად ითვლება ის მიმართულება, რომლის გასწვრივაც ის აამოძრავებდა თავისუფალ ნივთიერ წერტილს.

**თავისუფალი წერტილი** ისეთი წერტილია, რომლის გადაადგილება სივრცეში არ არის შეზღუდული. წინააღმდეგ შემთხვევაში, წერტილს ეწოდება **არა-თავისუფალი**.

ძალთა ერთობლიობას, რომლებიც მოდებულია ნივთიერ წერტილზე ან მყარ სხეულზე, **ძალთა სისტემა** ეწოდება.

ძალებს, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში არ იკვეთება და არც ერთ სიბრტყეში მდებარეობს, **სივრცითი** ან **ნებისმიერი ძალთა სისტემა** ეწოდება.

ორ ძალთა სისტემას ეწოდება **ტოლფასი**, თუ ისინი ცალ-ცალკე ერთსა და იმავე სხეულზე ერთნაირ მექანიკურ მოქმედებას ახდენენ.

ძალთა სისტემაში შემავალი ძალების გეომეტრიულ ჯამს, ამ სისტემის **ნაკრები ვექტორი** ეწოდება.

იმ ერთადერთ ძალას, რომელიც მთელი ძალთა სისტემის ტოლფასია, ამ ძალთა სისტემის **ტოლქმედი** ეწოდება.

**შენიშვნა.** შემდეგში განვიხილავთ განსხვავებას ტოლქმედსა და ნაკრები ვექტორს შორის (§4.15).

თეორიულ მექანიკაში მიღებულია, რომ ძალის მოქმედება ვრცელდება მყისიერად. ძალების მოქმედება ორნაირია: ახლოქმედება და შორსქმედება.

ძალები სხვადასხვა ბუნებისაა. მაგალითად, სიმძიმის ძალა მიზიდულობის ძალის ბუნებისაა, ხახუნის და დრეკადობის ძალები კი – ელექტრომაგნიტური ბუნების.

ცალკე გამოყოფთ გრავიტაციული ძალა. **გრავიტაციული ძალა** ჰქვია მიზიდულობის ძალას, რომელიც მოქმედებს სხეულებსა და მათ ნაწილებს შორის და არ არის დამოკიდებული ამ სხეულის ფიზიკურ მდგომარეობაზე. ყველა ობიექტს, რომელზეც მოქმედებს გრავიტაციული ძალები, **ნივთიერი** ანუ **მატერიალური** ეწოდება. თეორიულ მექანიკაში განიხილება მხოლოდ ნივთიერი სხეულები.

თუ ძალის მოქმედების შედეგად სხეული იცვლის მხოლოდ სიჩქარეს, მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს სხეულზე ძალის **დინამიკური მოქმედება**. თუ ძალის მოქმედების შედეგად სხეული დებულობს დეფორმაციას და არ იცვლის სიჩქარეს, მაშინ ამბობენ, რომ საქმე გვაქვს ძალის **სტატიკურ გამოვლინებასთან**.

განასხვავებენ აქტიურ და პასიურ ძალებს. ძალას, რომელსაც შეუძლია სხეული აამოძრაოს, **აქტიური** ეწოდება, წინააღმდეგ შემთხვევაში ძალა **პასიურია**. პასიური ძალის მაგალითია ხახუნის ძალა.

ნივთიერ წერტილთა სისტემის განხილვისას ხელსაყრელია ძალები დავყოთ გარე და შიგა ძალებად. ძალა სისტემისათვის **გარეა**, თუ ის გამოსახავს სისტემის გარე წერტილის მოქმედებას სისტემის წერტილზე. სისტემის წერტილებს შორის ურთიერთქმედების ძალებს, ამ სისტემის **შიგა** ძალები ეწოდება. ნიუტონის მესამე კანონის თანახმად, შიგა ძალები გვხვდება წყვილ-წყვილად.

ორ ძალას, რომლებიც სიდიდით ტოლია, ერთ ფუძეზე მდებარეობენ და ურთიერთსაწინააღმდეგოდ არიან მიმართული, **პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები** ეწოდება.

ერთ სიბრტყეში მოქმედ ძალებს, ხშირად **ბრტყელ ძალთა სისტემას** უწოდებენ.

ძალებს, რომელთა ფუძეები ერთ წერტილში იკვეთება, **თავმოყრილი** ეწოდება, ხოლო ფუძეების გადაკვეთის წერტილს – **თავმოყრის ცენტრი**.

თეორიული მექანიკა შეისწავლის აბსოლუტურად მყარი სხეულის (რომელიც ძალების მოქმედებით დეფორმაციას არ განიცდის) მოძრაობას, ამიტომ განიხილება ძალის მხოლოდ დინამიკური მოქმედება. ამასთან დაკავშირებით, როგორც დავინახავთ, ძალის სამი მახასიათებლიდან არსებითი მნიშვნელობა ექნება მხოლოდ ორს: მოდულსა და მიმართულებას.

ძალთა სისტემას, რომლის მოდებით ან ჩამოცილებით სხეულის მექანიკური მდგომარეობა არ იცვლება, **წონასწორობაში მყოფი (ან ნულის ტოლფასი) ძალთა სისტემა ეწოდება.**

ბრუნვის დადებით მიმართულებად მივიღოთ ბრუნვა საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში ბრუნვის მიმართულება უარყოფითია.

გავეცნოთ მყარი სხეულის ზოგიერთ მარტივი სახის მოდელს.

**ძელი.** მყარ სხეულს, რომლის ერთ-ერთი ზომა დანარჩენ ორთან შედარებით ძალიან დიდია (ხუთჯერ მაინც), ძელი ეწოდება. მართობი სიბრტყით კვეთა-ში მიღებულ ბრტყელ ფიგურას ძელის **განივი კვეთა** ეწოდება. განივი კვეთის მიხედვით ძელი არის მუდმივ- და ცვალებადკვეთიანი. ასევე ძელი არის წრფივი და მრუდე. ძელების შეერთება ხდება სახსრების საშუალებით, რომლებიც, როგორც წესი, მდებარეობს ძელის ბოლოებზე. შეერთების ადგილს **კვანძი** ეწოდება.

**ღერო.** ძელს, რომლის წონა მხედველობაში არ მიიღება და მასზე მოქმედი ყველა გარე ძალა მოდებულია სახსრებში, ღერო ეწოდება. ყველა ძალის შეკრების შედეგად მივიღებთ მხოლოდ ორ ძალას – ყოველ კვანძში თითოს. მეშვიდე აქსიომის (იხ. §2.1) თანახმად, წონასწორობის შემთხვევაში ეს ძალები პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებია. ამიტომ ძელი ან იჭიმება ან იკუმშება.

**კოჭი.** ძელს, რომელზეც მოქმედი გარე ძალები არ არის მოდებული სახსრებში, კოჭი ეწოდება.

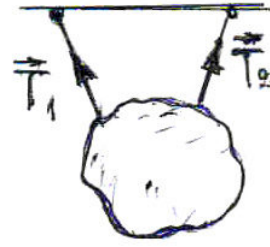
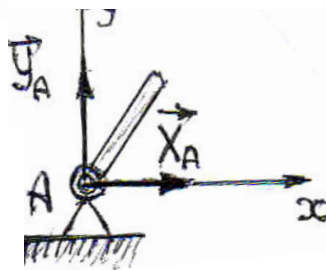
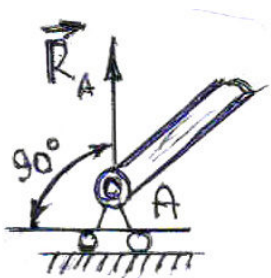
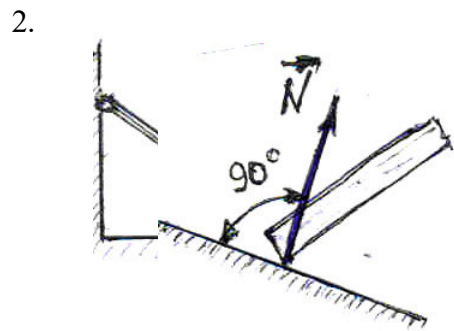
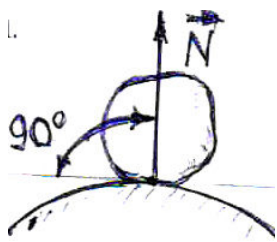
**ბერკეტი.** მყარ სხეულს, რომელსაც უძრავი ღერძის გარშემო შეუძლია ბრუნვა ამ ღერძის მართობ სიბრტყეში მდებარე ძალების მოქმედებით, ბერკეტი ეწოდება. ამ სიბრტყისა და ბრუნვის ღერძის გადაკვეთის წერტილს, ბერკეტის **საყრდენი წერტილი** ეწოდება.

**წამწე.** ხისტ ნაგებობას, რომელიც შედგენილია სახსრებით შეერთებული ძელებისაგან, წამწე ეწოდება. ხშირად განიხილება ღეროებისგან შედგენილი წამწე. კვანძებზე ან ღეროების თავისუფალ ბოლოებზე მოქმედი ძალები ყოველ ღეროში აღძრავს შიგა ძალას, რომელიც ჭიმავს ან კუმშავს ღეროს. ამ ძალას **ძალვა** ეწოდება. წამწეს ეწოდება **სტატიკურად განსაზღვრული**, თუ ერთი ღეროს ჩამოშორებითაც კი ირღვევა მისი სიხისტე.

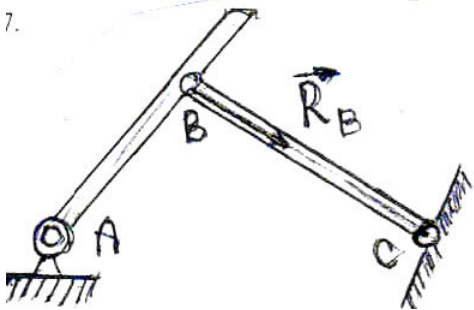
### 13. ბმის რეაქციები

ნახ. 1.1-ზე მოცემულია ბმები, რომლებიც პრაქტიკაში ძალიან ხშირად გამოიყენება. ნახაზზე ბმებთან ერთად მოცემულია მათი რეაქციებიც. განვიხილოთ თითოეული ბმა ცალ-ცალკე.

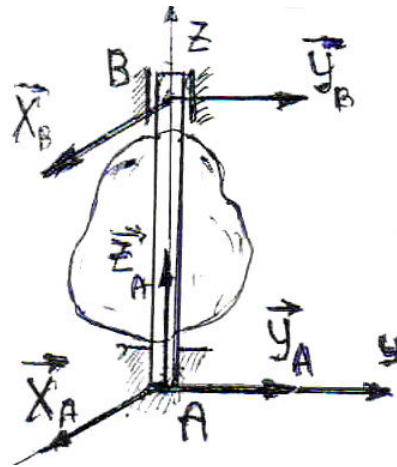
1. სხეული ეყრდნობა აბსოლუტურად მყარ გლუვ უძრავ ზედაპირს.
2. სხეული ეყრდნობა უძრავ წერტილს ან ხაზს. ხახუნი გამოორიცხულია.
3. სხეული ერთი წერტილით ეყრდნობა გლუვ უძრავ ზედაპირს.
4. ბმა ხორციელდება მოქნილი უჭიმარი ძაფის (ჯაჭვის, ან ბაგირის) გამოყენებით. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს მხოლოდ გაჭიმვას, ამიტომ ძაფის რეაქცია მიმართულია მხოლოდ ერთი მიმართულებით
5. სხეული ეყრდნობა გლუვ უძრავ ზედაპირს საგორავებით.
6. ბმა ხორციელდება უძრავი ცილინდრული სახსარის საშუალებით.
7. ბმა ხორციელდება ღეროს საშუალებით.
8. ა) ბმა ხორციელდება საქუსლეს საშუალებით.  
ბ) ბმა ხორციელდება უძრავი ცილინდრული საკისრის გამოყენებით.
9. ბმა ხორციელდება სფერული სახსრის საშუალებით.
10. კოჭის ჩამაგრება კედელში ხდება ხისტად.



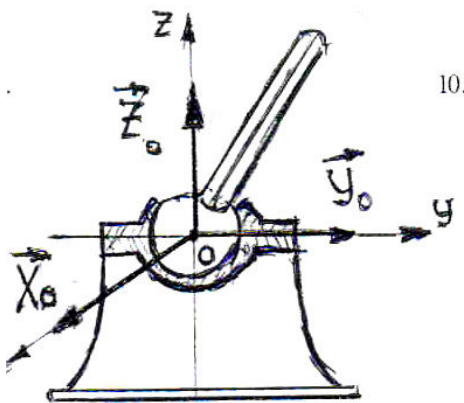
7.



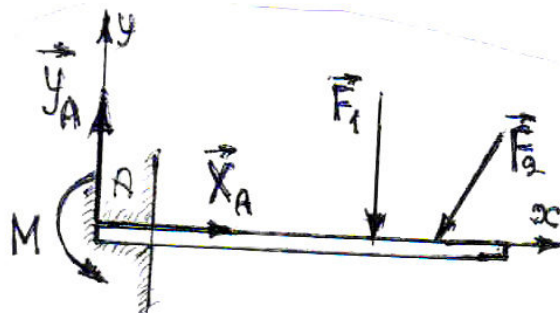
8.



9.



10.



6sb. 1.1

## II თავი

### სტატიკის აქსიომები

#### 2.1. აქსიომები. ძალების კეპრება. სრიალის ხახუნის კანონი

სტატიკა აგებულია რამდენიმე აქსიომაზე, რომელთა მიხედვით დადგენილია ნივთიერ წერტილზე, წერტილთა სისტემასა და მყარ სხეულზე მოქმედი ძალების თვისებები. აღსანიშნავია, რომ ამ აქსიომების საშუალებით მიღებული დასკვნები და თანაფარდობები მართებულია მხოლოდ აბსოლუტურად მყარი სხეულებისათვის.

**პირველი აქსიომა.** ყოველ ძალას აქვს მოდული, მიმართულება და მოდების წერტილი.

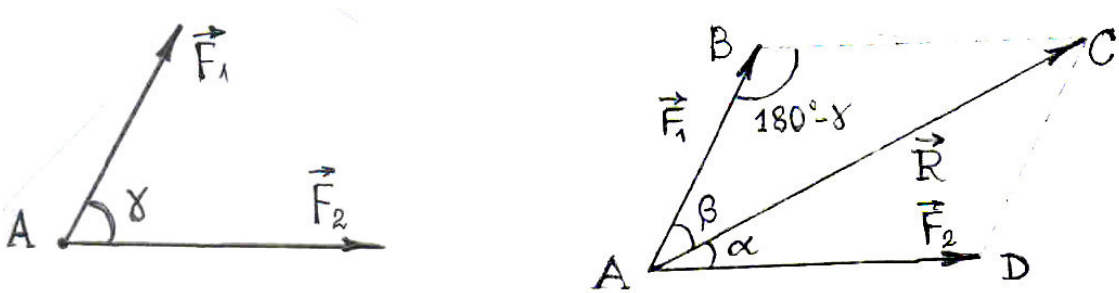
ამ აქსიომის თანახმად, ძალა ვექტორული სიდიდეა, ამიტომ ძალებისათვის მართებულია ყველა ის აღნიშვნა და დებულება, რაც მათემატიკაში მიღებულია ვექტორებისათვის.

**მეორე აქსიომა (ერთ წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი).** ერთ წერტილში მოდებული ძალთა სისტემა ერთი ისეთი ძალის ტოლფასია, რომელიც ამავე წერტილზეა მოდებული და შემდგენი ძალების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

ამ ძალას, **ერთ წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი** ეწოდება.

განვიხილოთ ძალების შეკრების ამოცანა. ვინაიდან ძალა ვექტორული სიდიდეა, ამიტომ ძალების შეკრება ხდება ვექტორულად, ან რაც იგივეა – გეომეტრიულად. ვთქვათ, სხეულის რაიმე  $A$  წერტილში მოდებულია ორი  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალა, რომელთა შორის კუთხე უდრის  $\gamma$ -ს (ნახ. 2.1). მათემატიკაში ცნობილია, რომ ამ ძალების ჯამი არის მათზე, როგორც გვერდებზე, აგებული პარალელელოგ-რამის დიაგონალი, რომელიც მოდებულია  $A$  წერტილში. თუ ძალების ჯამს (ამ შემთხვევაში ტოლქმედს) აღვნიშნავთ  $\vec{R}$ -ით, მაშინ  $ABC$  სამკუთხედიდან კოსინუსებისა და სინუსების თეორემების გამოყენებით, მივიღებთ:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \gamma}, \quad \frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}, \quad \alpha + \beta = \gamma. \quad (2.1.1)$$



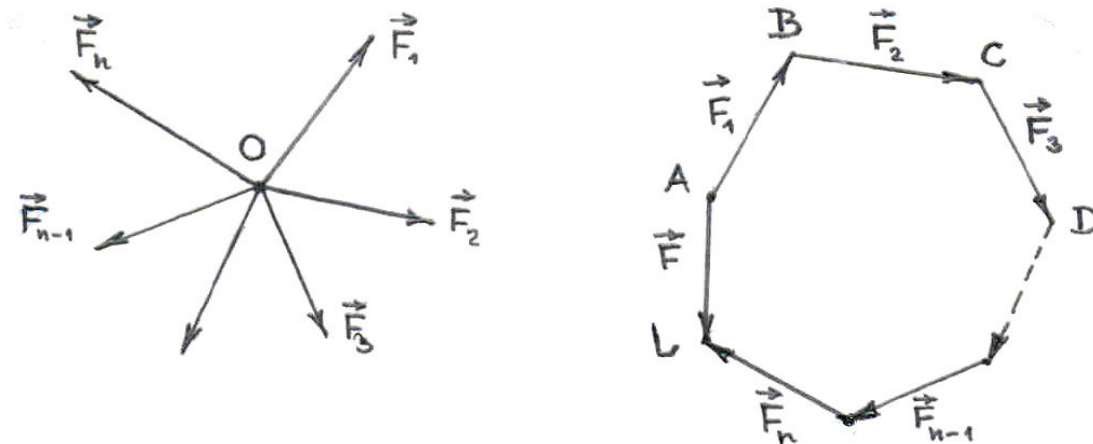
ნახ. 2.1

(2.1.1) ფორმულებით შეგვიძლია ამოვხსნათ მოცემული ორი მიმართულების გასწვრივ (ე.ი. როცა ცნობილია  $\alpha$  და  $\beta$  კუთხეები)  $\vec{F}$  ძალის დაშლის ამოცანა. აღსანიშნავია, რომ  $ABCD$  პარალელოგრამში  $\overline{DB} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$ .

ორი ძალის შეკრების განხილულ წესს ორი ძალის შეკრების პარალელოგრამის წესი ეწოდება.

ძალების შეკრების პარალელოგრამის წესიდან გამომდინარეობს: თუ  $\vec{F}_1$  ძალის ტოლი  $\overline{AB}$  ვექტორის  $B$  ბოლოზე მოვდებთ  $\vec{F}_2$  ძალის ტოლ  $\overline{BC}$  ვექტორს, ან  $\vec{F}_2$  ძალის ტოლი  $\overline{AD}$  ვექტორის  $D$  ბოლოზე მოვდებთ  $\vec{F}_1$  ძალის ტოლ  $\overline{DC}$  ვექტორს, მაშინ  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალების ჯამი ორივე შემთხვევაში იქნება, მიღებული ტეხილების ჩამკეტი  $\overline{AC}$  ვექტორი. ძალების შეკრების ამ წესს ვუწოდოთ ორი ძალის შეკრების სამკუთხედის წესი.

დავუშვათ, რომ სხეულის რაიმე წერტილზე მოდებულია  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალები (ნახ. 2.2).  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალების მიმართ გამოვიყენოთ ძალების შეკრების სამკუთხედის წესი; ჯამში მივიღებთ  $\overline{AC}$  ვექტორს; შემდეგ  $\overline{AC}$  შევკრიბოთ  $\vec{F}_3$  ძალის ტოლ  $\overline{CD}$  ვექტორთან; მივიღებთ პირველი სამი ძალის ჯამის ტოლ  $\overline{AD}$  ვექტორს; შემდეგ  $\overline{AD}$  შევკრიბოთ  $\vec{F}_4$  ძალის ტოლ ვექტორთან და ა.შ. საბოლოოდ, მივიღებთ რაღაც  $ABCD \dots L$  ტეხილს, რომლის ჩამკეტი  $\overline{AL}$  ვექტორი იქნება მოცემული ძალების ჯამი.  $ABCD \dots L$  ტეხილს ძალთა მრავალკუთხედი ეწოდება. თუ მრავალკუთხედი ჩაიკეტა, ე.ი. ბოლო ძალის ბოლო წერტილი (ჩვენ შემთხვევაში  $L$  წერტილი) დაემთხვევა საწყისს  $A$  წერტილს, მაშინ  $\overline{AL} = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული ძალების ჯამი არის ნულის ტოლი.



ნახ. 2.2

ძალთა მრავალკუთხედის აგებისას ძალების აღება შეიძლება ნებისმიერი თანმიმდევრობით. ძალების თანმიმდევრობის შეცვლა გამოიწვევს ძალთა მრავალკუთხედის მხოლოდ ფორმის შეცვლას, ჩამკეტი კი იგივე დარჩება, ე.ი. არ შეიცვლება ტოლქმედი.

ძალების შეკრების განხილულ წესს ძალების შეკრების მრავალკუთხედის წესი ეწოდება.

აღსანიშნავია, რომ ძალების შესაკრებად ამ წესის გამოყენება მოსახერხებელია ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალებისათვის. სივრცეში ძალების შესაკრებად გამოიყენება ე.წ. გეგმილების მეთოდი, რომელსაც ანალიზურ მეთოდსაც უწოდებენ (იხ. §2.5).

**მესამე აქსიომა** (თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობის). თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მასზე მოდებული ძალების ტოლქმედი ნულის ტოლი იყოს.

ამ აქსიომის თანახმად

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (2.12)$$

**მეოთხე აქსიომა** (ქმედებისა და უკუქმედების). ორი ნივთიერი წერტილის ურთიერთქმედების ძალები სიდიდით ტოლი, მიმართულებით საწინააღმდეგო და ერთ ფუძეზე მდებარე ძალებია.

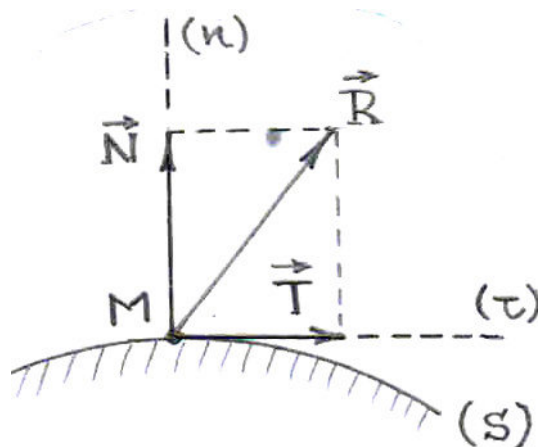
**მესუთე აქსიომა** (ბმისგან განთავისუფლების ანუ რეაქციის). ყოველი ბმის მოქმედება წერტილზე შეიძლება შეიცვალოს ძალით, რომელიც ამ წერტილზე ისეთსავე მექანიკურ მოქმედებას ახდენს, როგორსაც აღნიშნული ბმა. აღსანიშნა-



ვია, რომ ჩამოყალიბებული აქსიომა მართებულია სხეულისთვისაც.

ყოველ იმ პირობას, რომელიც ზღუდავს წერტილის (სხეულის) გადაადგილებას, მექანიკაში **ბმა** ეწოდება.

განვიხილოთ არათავისუფალი  $M$  წერტილი (ნახ. 2.3).  $S$  ზედაპირი ამ წერტილისთვის არის ბმა, ვინაიდან ხელს უშლის ქვევით გადაადგილებაში. ძალას, რომელიც გამოსახავს ბმის მოქმედებას წერტილზე, **რეაქციის ძალა** ან მოკლედ, **რეაქცია** ეწოდება. რეაქციის ძალა პასიური ძალაა, ვინაიდან მას არ შეუძლია წერტილის ამოძრავება. თუ წერტილზე არ მოქმედებს აქტიური ძალა, მაშინ რეაქციის ძალა არ არსებობს.



ნახ. 2.3

რეაქციის ძალას, როგორც წესი, აღნიშნავენ  $\vec{R}$ -ით, ხოლო მის შემდგენებს ნორმალისა და მხების გასწვრივ, შესაბამისად  $\vec{N}$ -ითა და  $\vec{T}$ -თი. ამგვარად,

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}. \quad (2.1.3)$$

$\vec{N}$  შემდგენს რეაქციის ძალის ნორმალური შემდგენი ან მოკლედ, ნორმალური რეაქცია ეწოდება, ხოლო  $\vec{T}$  შემდგენს - რეაქციის ძალის მხები შემდგენი ან მოკლედ, მხები რეაქცია.  $\vec{T}$ -ს ხახუნის ძალასაც უწოდებენ.

თუ არათავისუფალ წერტილს (სხეულს) მოვხსნით ბმებს და მათ მოქმედებას მესუთე აქსიომის თანახმად შევცვლით შესაბამისი რეაქციის ძალებით, მივიღებთ თავისუფალ წერტილს (სხეულს).

აღსანიშნავია, რომ სტატიკის ერთ-ერთ ძირითადი ამოცანაა რეაქციის ძალების განსაზღვრა.

რეაქციის ძალის მიმართულების გასაგებად გამოიყენება შემდეგი წესი: რეაქციის ძალა ყოველთვის მიმართულია ბმის მოქმედების საწინააღმდეგო მხარეს.

ზემოთ განხილული ხუთი აქსიომა შეეხება ნივთიერ წერტილს. ახლა ჩამოვყალიბებთ აქსიომებს მყარი სხეულის შესახებ.

**მექვესე აქსიომა.** მყარ სხეულზე მოდებული ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა არავითარ მექანიკურ მოქმედებას არ ახდენს ამ სხეულზე.

ამ აქსიომის თანახმად, თუ სხეულზე მოქმედებს ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა, შეგვიძლია ისინი ჩამოვაცილოთ სხეულს, ან პირიქით, შეგვიძლია სხეულზე მოვდოთ ასეთი ძალები.

**მეშვიდე აქსიომა.** თუ მყარი სხეული წონასწორობაშია ორი ძალის მოქმედებით, მაშინ ეს ძალები პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებია.

**მერვე აქსიომა (გამყარების).** თუ წონასწორობაში მყოფ დეფორმად სხეულს გავამყარებთ, მისი წონასწორობა არ დაირღვევა.

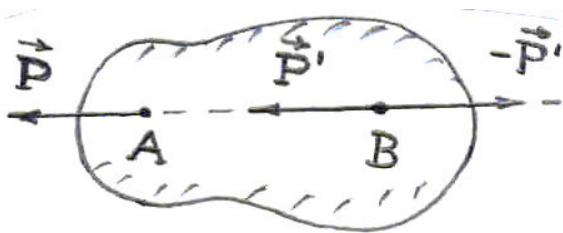
მაგალითად, თუ წონასწორობაში მყოფ წყალს ყინულად ვაქცევთ, ყინულიც წონასწორობაში იქნება.

## 2.2. ძალის გასრიალება ფუძის გასწვრივ

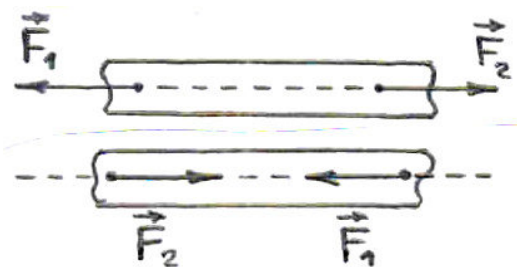
განვიხილოთ აბსოლუტურად მყარი სხეულის მექანიკის ერთ-ერთი ძირითადი **თეორემა:** აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოქმედი ძალა შეგვიძლია გავასრი-ალოთ მისი ფუძის გასწვრივ.

დამტკიცება. ვთქვათ, აბსოლუტურად მყარი სხეულის რაიმე  $A$  წერტილზე მოქმედებს  $\vec{P}$  ძალა (ნახ. 2.4). მის ფუძეზე ავიღოთ ნებისმიერი  $B$  წერტილი და მოვდოთ მასზე ორი პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალა:  $\vec{P}' = \vec{P}$  და  $-\vec{P}$  (ამის უფლება გვაქვს მექვესე აქსიომის თანახმად). მიღებული სამი ძალიდან  $\vec{P}$  და  $-\vec{P}$  პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებია, ამიტომ ისინი შეგვიძლია სხეულს ჩამოვაცილოთ და დაგვრჩება  $B$ -ში მოდებული ერთადერთი  $\vec{P}' = \vec{P}$  ძალა. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, ამ თეორემას ადგილი არა აქვს დეფორმადი სხეულისათვის. ამის თვალსაჩინოებისთვის განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი: ვთქვათ, კოჭის ბოლო-ებზე მოდებულია სიდიდით ტოლი  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  გამჭიმავი ძალები (ნახ. 2.5ა). გავასრიალოთ ეს ძალები და კოჭზე მოვდოთ ისე, როგორც ეს ნახ. 2.5ბ - ზეა გამოსახული. მივიღეთ, რომ იგივე ძალები ცდილობენ კოჭის შეკუმშვას.



ნახ. 2.4



ნახ. 2.5

### 2.3. ძალის ანალიზური გამოსახვა. ორი ამოცანა ძალის მიმართ

განვიხილოთ  $Oxy$  სიბრტყეში მდებარე  $\vec{F}$  ძალა, რომელიც  $Ox$  ღერძთან ადგენს  $\alpha$  კუთხეს (ნახ. 2.6). მათემატიკაში ცნობილია, რომ  $\vec{F}$ -ის გეგმილები  $Ox$  და  $Oy$  ღერძებზე გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

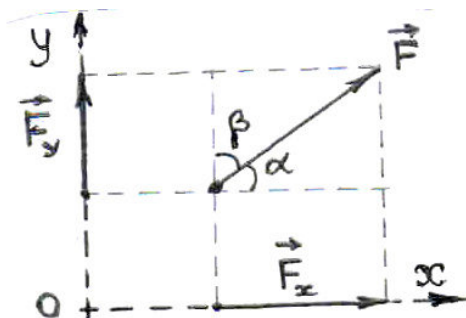
$$F_x = \text{გეგმ}_x(\vec{F}) = F \cos \alpha,$$

$$F_y = \text{გეგმ}_y(\vec{F}) = F \sin \alpha. \quad (2.3.1)$$

როცა  $\vec{F}$  ძალა სივრცეშია და  $Oxyz$  მართკუთხა კოორდინატა სისტემის ღერძებთან შესაბამისად ადგენს  $\alpha, \beta, \gamma$  კუთხეებს, მაშინ

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma. \quad (2.3.2)$$

სივრცეში ღერძებზე ძალის დასაგეგმილებლად ხშირად გვიხდება ძალის დაგეგმილება ჯერ საკოორდინატო სიბრტყეში, ხოლო შემდეგ ღერძებზე. შეგახსენებთ, რომ ვექტორის გეგმილი სიბრტყეზე ვექტორული სიდიდეა.



ნახ. 2.6

სტატიკაში ძალის მიმართ განიხილება შემდეგი ორი ამოცანა:

1. მოცემულია ძალის მოდული და მიმართულება და გვინდა გავიგოთ მისი გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე. ეს ამოცანა ამოიხსნება (2.3.1) ან (2.3.2) ფორმულებით.

2. ვიცით ძალის გეგმილები კოორდინატთა ღერძებზე და გვინდა გავიგოთ ძალა ანუ მისი მოდული და მიმართულება. თუ  $\vec{F}$  ძალის გეგმილებია  $F_x, F_y, F_z$ , მაშინ

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (2.3.4)$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \quad (2.3.5)$$

როცა ძალა მდებარეობს სიბრტყეში, მაგალითად,  $Oxy$  სიბრტყეში, მაშინ

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}. \quad (2.3.6)$$

ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია გავიგოთ  $\alpha$  კუთხე

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.3.7)$$

ფორმულით, ხოლო  $\beta$  გავიგოთ  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ტოლობიდან.

## 2.4. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის ანალიზური გამოსახვა

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს  $\vec{F}_1(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}), \vec{F}_2(F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}), \dots, \vec{F}_n(F_{nx}, F_{ny}, F_{nz})$  ძალები. განსაზღვრის თანახმად, ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი ეწოდება ძალების გეომეტრიულ ჯამს და, თუ მას აღვნიშნავთ  $\vec{F}^*$ -ით, გვექნება:

$$\vec{F}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (2.4.1)$$

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ ჯამის გეგმილი უდრის გეგმილთა ჯამს, ამ ტომ (2.4.1)-დან მივიღებთ:

$$F_x^* = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad F_y^* = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad F_z^* = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (2.4.2)$$

ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალებისთვის

$$F_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad F_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}. \quad (2.4.3)$$

გავიგებთ რა ნაკრები ვექტორის გეგმილებს, მისი მოდულისა და მიმართულების გასაგებად გამოვიყენებთ (2.3.4) და (2.3.5) ან (2.3.6) და (2.3.7) ფორმულებს.

მივიღეთ ძალების შეკრების ე.წ. **გეგმილების მეთოდი**, რომელიც ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

1. ყველა ძალას ვაგეგმილებთ კოორდინატთა ღერძებზე;
2. (2.4.2) ან (2.4.3) ფორმულებით გავიგებთ ნაკრები ვექტორის გეგმილებს;
3. (2.3.4) და (2.3.5) ან (2.3.6) და (2.3.7) ფორმულებით გავიგებთ ნაკრები ვექტორის მოდულისა და მიმართულებას.

ძალების შეკრების გეგმილების მეთოდს **ანალიზური მეთოდიც** ეწოდება.

## 2.5. ნივთიერი წერტილის წონასწორობის განტოლებები

ნივთიერი წერტილის წონასწორობის პირობა მოცემულია მესამე აქსიომით: წერტილზე მოქმედი ძალების ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი. ვექტორი ნულის ტოლია, როცა მისი გეგმილები უდრის ნულს. (2.4.2) და (2.4.3) ტოლობების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\sum_{k=1}^n F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0. \quad (2.5.1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (2.5.2)$$

ეს ტოლობები წარმოადგენს **თავისუფალი ნივთიერი წერტილის წონასწორობის განტოლებებს** შესაბამისად სივრცითი და ბრტყელი ძალთა სისტემებისათვის.

ვთქვათ, არათავისუფალ ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალები. მესუთე აქსიომის თანახმად ბმას შევცვლით  $\vec{R}$  რეაქციის ძალით და მივიღებთ თავისუფალ წერტილს, რომელზეც მოდებული ძალების ტოლქმედი ტოლი იქნება

$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{R}$ -ის. მესამე აქსიომის თანახმად წერტილის წონასწორობის-თვის უნდა

შესრულდეს პირობა:

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k + \vec{R} = 0. \quad (2.5.3)$$

ამ ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ არათავისუფალი წერტილის წონასწორობის განტოლებებს სივრცითი და ბრტყელი ძალთა სისტემებისთვის:

$$\sum_{k=1}^n F_k + R_x = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} + R_y = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} + R_z = 0. \quad (2.5.4)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + R_x = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} + R_y = 0. \quad (2.5.5)$$

## 2.6. ნივთიერი წერტილის წონასწორობის გეომეტრიული პირობა.

### ძალთა სამკუთხედი

ნივთიერი წერტილის წონასწორობის გეომეტრიული პირობა მდგომარეობს შემდეგში: წერტილზე მოქმედი ძალებით აგებული ძალთა მრავალკუთხედი უნდა იყოს ჩაკეტილი (იხ. § 2.1).

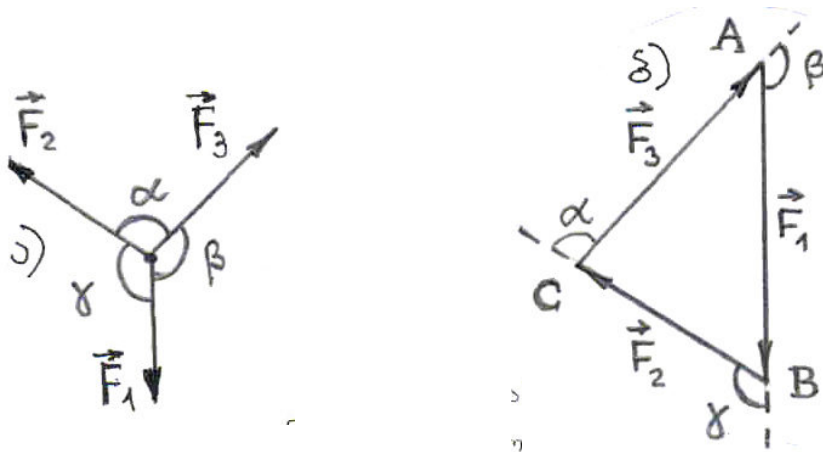
თუ წონასწორობაში მყოფ წერტილზე მოქმედებს მხოლოდ სამი ძალა, მაშინ ძალთა მრავალკუთხედის აგების შედეგად მივიღებთ ძალთა სამკუთხედს.

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: წონასწორობაში მყოფ წერტილზე მოქმედებს სამი  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  და  $\vec{F}_3$  ძალა. ცნობილია  $\vec{F}_1$  ძალის მოდული და მიმართულება, ხოლო  $\vec{F}_2$  და  $\vec{F}_3$  ძალებისთვის – მხოლოდ მიმართულებები. უნდა გავიგოთ ამ უკანასკნელთა მოდულები.

სიბრტყეში, რომელშიც  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  და  $\vec{F}_3$  ძალები მდებარეობენ, ავიოლოთ რაიმე  $A$  წერტილი და მოვდოთ მასზე ცნობილი  $\vec{F}_1$  ძალის ტოლი  $\overline{AB}$  ვექტორი (ნახ. 2.7). ვინაიდან ამ სამი ძალით აგებული მრავალკუთხედი უნდა ჩაკეტოს, ამიტომ  $\overline{AB}$  ვექტორის ერთ ბოლოზე გავატაროთ, მაგალითად,  $\vec{F}_2$  ძალის პარალელური  $BC$  წრფე, ხოლო მეორე ბოლოზე -  $\vec{F}_3$ -ის პარალელური  $AC$  წრფე. დავაფიქსიროთ ამ წრფეების გადაკვეთის  $C$  წერტილი. ძალთა მრავალკუთხედი აგების წესის თანახმად მიღებულ  $ABC$  სამკუთხედში  $\overline{BC}$  ვექტორი არის  $\vec{F}_2$  ძალის, ხოლო  $\overline{CA}$  ვექტორი -  $\vec{F}_3$  ძალის ტოლი. სინუსების თეორემის თანახმად

$$\frac{F_1}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{F_2}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{F_3}{\sin(180^\circ - \gamma)} \Rightarrow$$

$$\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma} \Rightarrow F_2 = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} F_1, \quad F_3 = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} F_1. \quad (2.6.1)$$



ნახ. 2.7

## 2.7. ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობა

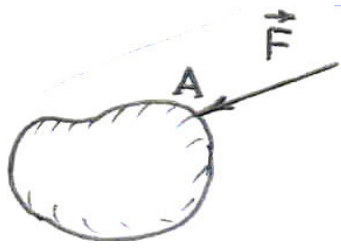
ვიხილავთ ნივთიერ წერტილთა სისტემას. ეს სისტემა წონასწორობაში იქნება, თუ მისი ყველა წერტილი იქნება წონასწორობაში. თუ სისტემაში გვაქვს  $n$  წერტილი, მაშინ სივრცითი ამოცანისთვის გვექნება  $3n$  წონასწორობის განტოლება, ხოლო ბრტყელისათვის -  $2n$ . ამ განტოლებებში შედის რეაქციის ძალებიც, რომელთა ოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს განტოლებათა რიცხვს.

## 2.8. დატვირთვის სახეები

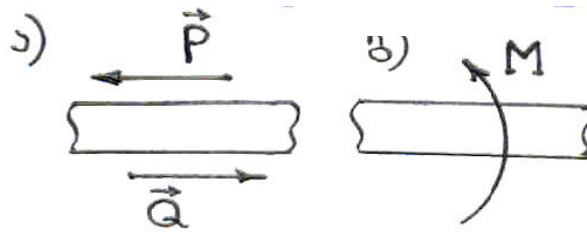
სტატიკაში ძირითადად გვხვდება შემდეგი სახის დატვირთვები.

1. **შეყურსული ძალა.** ასეთი ძალა მოდებულია სხეულის რაიმე წერტილში და ცდილობს მის ამოძრავებას (ნახ. 2.8).

2. **წყვილძალა** შედგება ორი ძალისგან, რომლებიც სიდიდით ტოლია, მდებარეობენ პარალელურ ფუძეებზე და აქვთ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება (ნახ. 2.9). სიბრტყეს, რომელშიც წყვილძალა მდებარეობს, **წყვილძალის სიბრტყე** ეწოდება. წყვილძალა ცდილობს სხეული მოაბრუნოს თავისი სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო. ნახაზზე წყვილძალას გამოსახავენ ან ორი ძალ-ით, მაგალითად,  $(\vec{P}, \vec{Q})$  (ნახ. 2.9,ა) ან წრიული ისრით (ნახ. 2.9,ბ), რომლის წვერო გვიჩვენებს სხეულის ბრუნვის მიმართულებას. მტკიცდება, რომ (იხ. §4.9) წყვილ-ძალა სავსებით ხასიათდება მხოლოდ მომენტით, რომელიც ან მოცემულია, ან უნდა გამოვთვალოთ მოცემული წყვილძალის ძალებისა და მხარის საშუალებით.

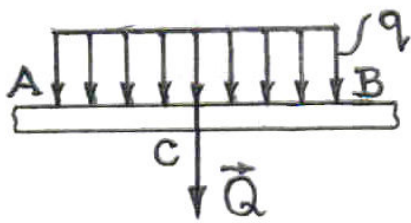


ნახ. 2.8

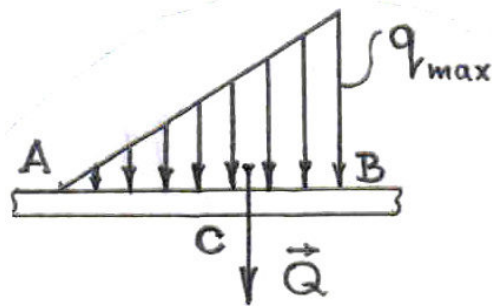


ნახ. 2.9

3. წრფის გასწვრივ თანაბრად განაწილებული ძალები (მართკუთხედის კანონით) (ნახ. 2.10). ძელის რაიმე  $AB$  უბანზე მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა ნებისმიერი  $q$  ინტენსიურობით (სიგრძის ერთეულზე მოქმედი ძალის სიდიდეა, რომლის განზომილება საერთაშორისო ერთეულთა სისტემაში არის ნ/მ). განხილული ძალები პარალელური ძალებია, ამიტომ მათი შეცვლა შეიძლება ერთი ძალით (იხ. §6.1), რომელიც ძალების ტოლქმედის ტოლია და მოდებულია  $AB$  მონაკვეთის შუა წერტილში. თუ ამ ძალას აღვნიშნავთ  $\vec{Q}$  ასოთი, გვექნება:  $|\vec{Q}| = q|AB|$ . როგორც ვხედავთ,  $\vec{Q}$ -ს მოდულის რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია იმ მართკუთხედის ფართობის რიცხვითი მნიშვნელობისა, რომლის ფუძეა  $AB$  მონაკვეთი, სიმაღლე კი  $q$ -ს ტოლია.



ნახ. 2.10



ნახ. 2.11

4. წრფის მონაკვეთზე წრფივი კანონით განაწილებული ძალები (სამ-კუთხედის კანონით) (ნახ. 2.11). ეს ძალები შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი  $\vec{Q}$  ძალით, რომლის მოდული  $|\vec{Q}| = \frac{1}{2}|AB| \cdot q_{\text{max}}$  და მოდებულია  $C$  წერტილზე, რომლის-თვისაც სრულდება შემდეგი პირობა:  $|BC| = \frac{1}{3}|AB|$ .

5. წრფის მონაკვეთზე ტრაპეციის კანონით განაწილებული ძალები (ნახ. 2.12). შეგვიძლია წავიდეთ ორი გზით: 1. ტრაპეცია დავყოთ მართკუთხედად და



სამკუთხედად ( $q_1$  და  $q_2 = q_{2\max}$  ინტენსიურობებით). მოცემული დატვირთვა შეიცვლება ორი  $|\vec{Q}_1| = |AB| \cdot q_1$  და  $|\vec{Q}_2| = \frac{1}{2}|AB| \cdot q_2$  მოდულების მქონე ძალით; 2. მთელი დატვირთვა შეგვიძლია შევცვალოთ ერთი ძალით, რომლის მოდულის რიცხვითი მნიშვნელობა ტოლია ტრაპეციის ფართობის რიცხვითი მნიშვნელობისა და მოდებულია ტრაპეციის სიმძიმის ცენტრში.

6. უძრავ ბლოკზე გადაკიდებული თოკის ერთი ბოლო დამაგრებულია მყარი სხეულის რაიმე  $A$  წერტილში, ხოლო მეორე ბოლოზე ჩამოკიდებულია  $Q$  ტვირთი (ნახ. 2.13). თუ ბლოკზე ხახუნს არ მივიღებთ მხედველობაში, მაშინ თოკის საშუალებით სხეულს გადაეცემა მთელი ტვირთის მოქმედება. ამ შემთხვევაში სხეულს მოვდებთ  $\vec{Q}$  ძალას, რომელიც თოკის გასწვრივ მიმართულია ბლოკისკენ.

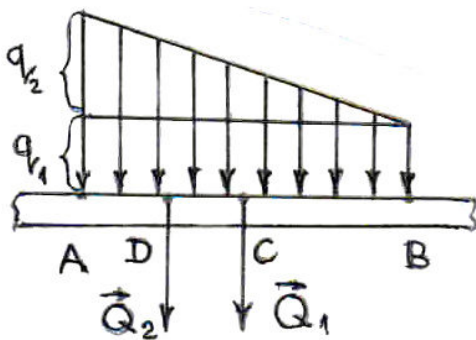
7. წრიულ რკალის გასწვრივ განაწილებული ძალები (ნახ. 2.14). ამ შემთხვევაში  $Ox$  ღერძი არის სიმეტრიის ღერძი, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^n Q_{kx} = Q, \quad \sum_{k=1}^n Q_{ky} = 0.$$

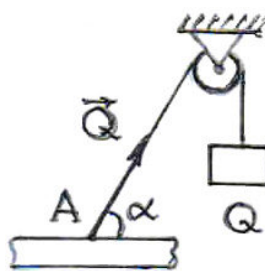
მტკიცდება, რომ

$$|\vec{Q}| = q \cdot h,$$

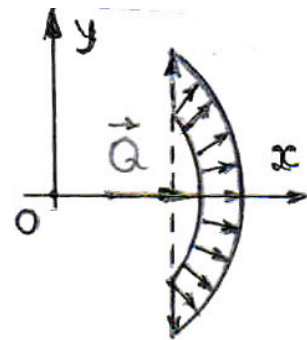
სადაც  $h = |AB|$  რკალის მომჭიმავი ქორდის სიგრძეა, ხოლო  $q$  - ინტენსიურობა.



ნახ. 2.12



ნახ. 2.13



ნახ. 2.14

## 2.9. სრიალის ხახუნი

ყოველი სხეულის ზედაპირს მეტ-ნაკლებად აქვს ხორკლიანობა, რაც ერთი სხეულის მეორე სხეულის ზედაპირის გასწვრივ გადაადგილებისას წარმოქმნის წინაღობას, რომელსაც **სრიალის ხახუნი** ეწოდება. ხახუნი ხასიათდება ძალით, რომელსაც **ხახუნის ძალა** ეწოდება. ეს ძალა ყოველთვის მიმართულია მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ცხოვრება ხახუნის გარეშე წარმოუდგენელია. გავეცნოთ მის ზოგიერთ კანონზომიერებას.

ვთქვათ, ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მდებარეობს  $G = mg$  წონის სხეული (ნახ. 2.15). ცხადია,  $\vec{G}$  სიმძიმის ძალა, რომლითაც სხეული აწევა სიბრტყეს, გაწონასწორებულია სიბრტყის მხრიდან მოქმედი  $\vec{N}$  ნორმალური რეაქციის ძალით. დავუშვათ, რომ სხეული წონასწორობაშია და მოვდოთ მასზე მცირე სიდიდის  $\vec{P}$  მამოძრავებელი ძალა. სხეული არ ამოძრავდება, რაც შეიძლება აიხსნას მხოლოდ იმით, რომ  $\vec{P}$  ძალა გაწონასწორებულია  $\vec{T}$  ხახუნის ძალით. გავზარდოთ  $\vec{P}$  ძალის სიდიდე თანდათანობით. შედეგად მივიღებთ, რომ სხეული მხოლოდ მაშინ დაიწყებს მოძრაობას, როცა  $\vec{P}$ -ს სიდიდე მიაღწევს გარკვეულ ზღვრულ მნიშვნელობას. როგორც ვხედავთ, ხახუნის ძალა არის სიბრტყის რეაქცია და მიმართულია სიბრტყის გასწვრივ. აქედან გამომდინარეობს, რომ ხახუნის ძალა სხეულის წონასწორობაში ყოფნისას იცვლება ნულიდან გარკვეულ  $T_{მსჯ}$  მაქსი-მალურ ზღვრულ მნიშვნელობამდე:

$$0 < T < T_{მსჯ}. \quad (2.9.1)$$

როდესაც  $T = T_{მსჯ}$ , ამ დროს სხეული ჯერ კიდევ იმყოფება წონასწორობაში და საკმარისია  $P$ -ს ოდნავ გაზრდა და სხეული ამოძრავდება. ვუწოდოთ ამ მდგომარეობას **კრიტიკული წონასწორობის მდგომარეობა**.

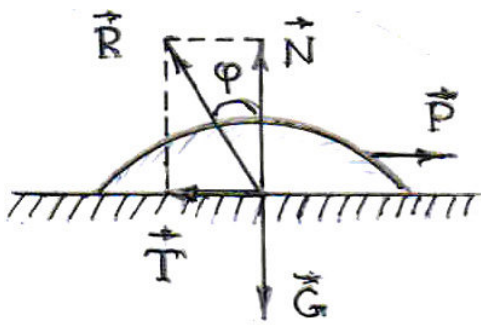
შემდგომში  $T_{მსჯ}$ -ს აღვნიშნავთ  $T$ -თი.

ფრანგმა მეცნიერმა **კულონმა** (1736-1806) 1781 წელს მრავალი ცდის საფუძველზე დაადგინა სრიალის ხახუნის შემდეგი კანონები:

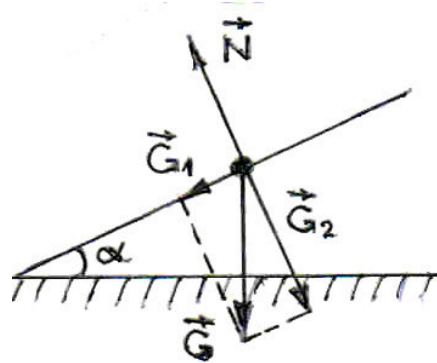
1. ხახუნის ძალა არ არის დამოკიდებული მოხახუნე ზედაპირების შეხების ფართობის სიდიდეზე;

2. ხახუნის ძალის მაქსიმალური მნიშვნელობა პროპორციულია ნორმალური რეაქციის მოდულისა;

3. ხახუნის ძალა დამოკიდებულია მოხახუნე სხეულების მასალაზე, მათი ზედაპირების მდგომარეობაზე და როგორც თვით შეხეთვაზე, ასევე ზეთის სახეობაზე.



ნახ. 2.15



ნახ. 2.16

სრიალის ხახუნი ხასიათდება სხვა კანონზომიერებებითაც, კერძოდ: ხახუნის ძალა მოძრაობისას უფრო ნაკლებია, ვიდრე უძრაობისას; ხახუნის ძალა სველი ზედაპირის შემთხვევაში ნაკლებია, ვიდრე მშრალი ზედაპირის შემთხვევაში.

2.15 ნახაზიდან ვღებულობთ:  $T = N \cdot \operatorname{tg} \varphi$ . შემოვიღოთ აღნიშვნა:  $\operatorname{tg} \varphi = f$  და მივიღებთ:

$$T = f \cdot N. \quad (2.9.2)$$

$f$ -ს ეწოდება **ხახუნის კოეფიციენტი**, ხოლო  $\varphi$ -ს – **ხახუნის კუთხე**.

(2.9.2) არის ზემოთ მოყვანილი კულონის კანონებიდან მეორე კანონი, რომელიც ახლა ასე ჩამოყალიბდება: ხახუნის ძალის მაქსიმალური მნიშვნელობა უდრის ხახუნის კოეფიციენტის ნამრავლს ნორმალური რეაქციის სიდიდეზე.

ზოგი მეცნიერი ამ კანონს **ამონტონ -კულონის კანონსაც** უწოდებს.

ვთქვათ,  $G = mg$  წონის სხეული მდებარეობს ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ სიბრტყეზე (ნახ. 2.16). ადვილად მივიღებთ:  $N = G_2 = mg \cos \alpha$ , ამიტომ (2.9.2) გვაძლევს:

$$T = fmg \cos \alpha. \quad (2.9.3)$$

ნახ. 2.16-დან ვღებულობთ, რომ დახრილ სიბრტყეზე სხეულის ჩამომსრიალებელი ძალის სიდიდე  $G_1 = mg \sin \alpha$ . იმისათვის, რომ დახრილ სიბრტყეზე სხეული იყოს უძრავი, უნდა შესრულდეს პირობა:

$$G_1 < T \Leftrightarrow mg \sin \alpha < fmg \cos \alpha \Rightarrow tg \alpha < f \Leftrightarrow tg \alpha < tg \varphi \Rightarrow \alpha < \varphi. \quad (2.9.4)$$

ეს არის **თვითდამუხრუჭების** პირობა.

დახრილ სიბრტყეს, რომლის მიერ ჰორიზონტთან შედგენილი კუთხე ნაკლებია ხახუნის კუთხეზე, **თვითმუხრუჭა** ეწოდება.

აღსანიშნავია, რომ  $\alpha = \varphi$  შეესაბამება კრიტიკული წონასწორობის მდგომარეობას.

**ამოცანა 2.1.** ძაფი, რომლის ბოლოებზე ჩამოკიდებულია  $P$  და  $Q$  ტვირთები, გადაკიდებულია  $A$  და  $B$  ბლოკებზე (ნახ. 2.17ა). ბლოკები ერთ ჰორიზონტალზე მდებარეობენ. ძაფის  $O$  წერტილზე, რომელიც ბლოკებს შორისაა, ჩამოკიდებულია  $G=50$  ნ წონის ტვირთი. წონასწორობისას ძაფის შტოები ჰორიზონტალთან ადგენენ  $\alpha = 60^\circ$  და  $\beta = 45^\circ$  კუთხეებს. ბლოკებზე ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ  $P$  და  $Q$  ტვირთების წონები. [26]

ამოხსნა. ცხადია, რომ  $O$  წერტილზე შეგვიძლია მოვდოთ სამი ძალა:  $\vec{P}$ ,  $\vec{Q}$  (იხ. §2.8) და მესამე ტვირთის  $\vec{G}$  სიმძიმის ძალა (ნახ. 3.4ბ). ადვილი მისახვედრია, რომ თუ  $O$  წერტილი უძრავია, მაშინ სხეულთა სისტემა, რომელიც შედგება ძაფის, ორი ბლოკისა და სამი ტვირთისაგან, იქნება წონასწორობაში. ამგვარად, წონასწორობის ობიექტად უნდა გამოვიყოს  $O$  წერტილი. მასზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი თავმოყრილი ძალა, რომელთაგან ორის მოდული უცნობია.

ამოცანის ამოსახსნელად გამოვიყენებთ სამივე მეთოდს: ანალიზური, გეომეტრიული და გრაფიკული.

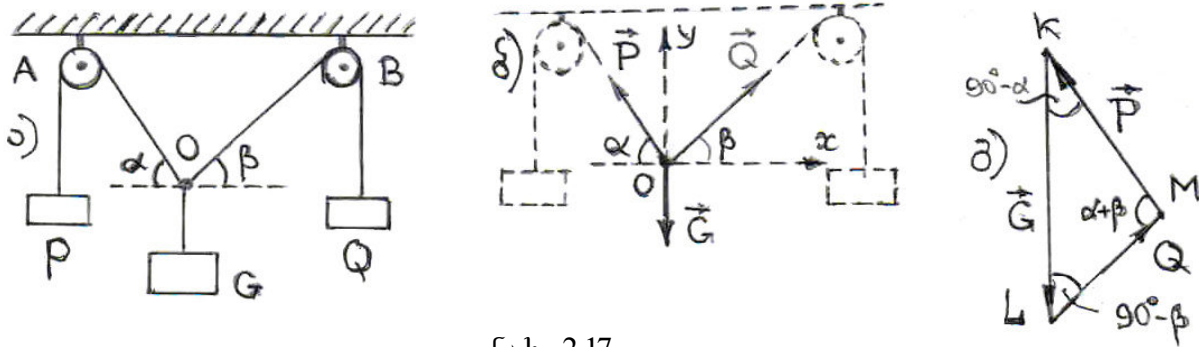
**ანალიზური მეთოდი.** ავირჩიოთ  $Oxy$  კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ეს ნახ. 3.17,ბ-ზეა მოცემული. შევადგინოთ (2.5.2) სახის განტოლებები. მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= P \cos(180^\circ - \alpha) + Q \cos \beta = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= P \cos(90^\circ - \alpha) + Q \cos(90^\circ - \beta) - G = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} G, \quad Q = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} G.$$

**გეომეტრიული მეთოდი.** ავაგოთ ძალთა სამკუთხედი (იხ. §2.6) (ნახ. 2.17გ). მიღებული  $KLM$  სამკუთხედიდან სინუსების თეორემის გამოყენებით მივიღებთ

$$\frac{P}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{Q}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{G}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow P = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} G, \quad Q = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} G.$$

**გრაფიკული მეთოდი** არხეული მასშტაბით დავხაზავთ ვერტიკალურ  $\overline{KL} = \overline{G}$  ვექტორს და შემდეგ ავაგებთ ძალთა სამკუთხედს. გავზომავთ  $KM$  და  $LM$  მონაკვეთების სიგრძეებს, მიღებულ მნიშვნელობებს გავამრავლებთ მასშტაბზე და მივიღებთ  $P$  და  $Q$  ტვირთების წონებს.



ნახ. 2.17

მოცემული რიცხვითი მიშვნელობებისთვის ადვილად გამოვთვლით:  $P \approx 36,60$  ნ და  $Q \approx 25,88$  ნ.

პასუხი.  $P \approx 36,60$  ნ;  $Q \approx 25,88$  ნ.

**ამოცანა 2.2.** ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე დევს  $P$  წონის ტვირთი (ნახ. 2.18). ტვირთზე მოსდევს  $\vec{Q}$  ძალა, რომელიც დახრილ სიბრტყესთან ადგენს  $\beta$  კუთხეს. რას უნდა უდრიდეს  $\vec{Q}$ -ს მოდული, რომ ტვირთი იყოს წონასწორობაში ( $\alpha + \beta < 90^\circ$ )?

ამოხსნა. ცხადია, წონასწორობის ობიექტია ტვირთი. მასზე მოქმედებს სამი ძალა:  $\vec{P}$  - ტვირთის სიმძიმის ძალა,  $\vec{N}$  - დახრილი სიბრტყის ნორმალური რეაქციის ძალა და  $\vec{Q}$  ძალა. ავიღოთ  $Oxy$  კოორდინატთა სისტემა ისე, როგორც ნახ. 2.18-ზეა. შევადგინოთ ტვირთის წონასწორობის განტოლება:

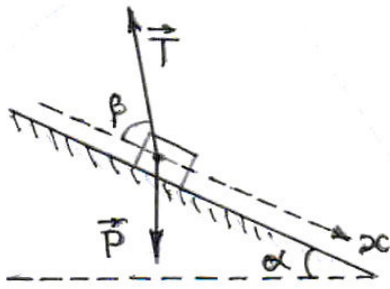
$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -Q \cos \beta + P \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} P.$$

პასუხი.  $\vec{Q} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} P.$

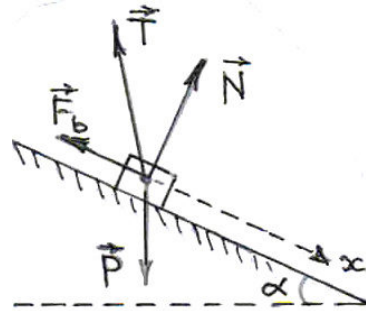
**ამოცანა 2.3.** ამოხსენით ამოცანა 2.2 იმ დაშვებით, რომ დახრილი სიბრტყე არაგლუვია და ხახუნის კოეფიციენტი  $f$ -ის ტოლია.

ამოხსნა. ამ შემთხვევაში ტვირთზე მოქმედებს ოთხი ძალა:  $\vec{P}$  - ტვირთის სიმძიმის ძალა,  $\vec{N}$  - დახრილი სიბრტყის ნორმალური რეაქციის ძალა,  $\vec{F}_f$  - ხა-

ხუნის ძალა და  $\vec{Q}$  ძალა (ნახ. 2.19). შევადგინოთ ტვირთის წონასწორობის განტოლებები:



ნახ. 2.18



ნახ. 2.19

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -Q \cos \beta - F_f + P \sin \alpha = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = Q \sin \beta + N - P \cos \alpha = 0. \Rightarrow N = P \cos \alpha - Q \sin \beta.$$

$N$ -ის მიღებული მნიშვნელობა შევიტანოთ წინა ტოლობაში და თუ გავითვალისწინებთ  $\vec{F}_f = f N$  (იხ. (2.9.2) ფორმულა), მივიღებთ:

$$-Q \cos \beta - f(P \cos \alpha - Q \sin \beta) + P \sin \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$Q(\cos \beta - f \sin \beta) = P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow Q = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} P.$$

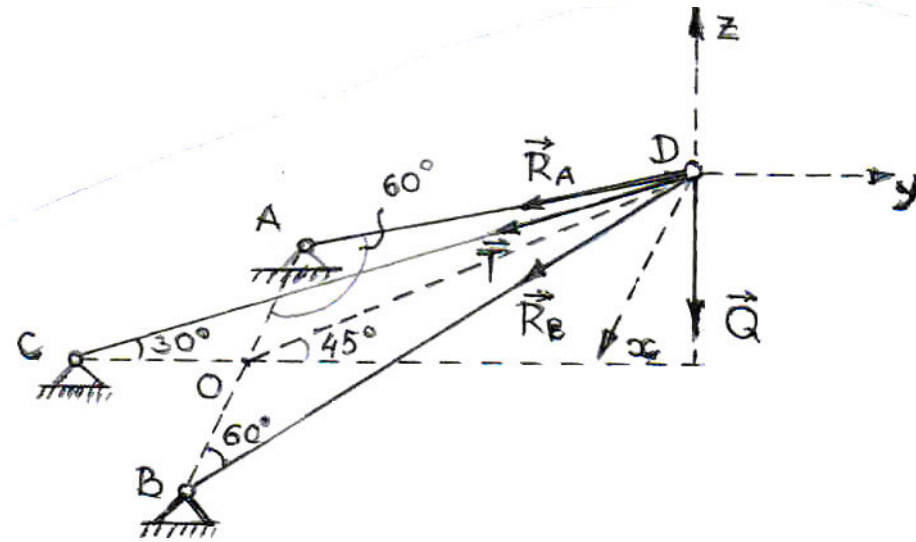
პასუხი.  $Q = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} P.$

**ამოცანა 2.4.**  $Q=50$  ნ წონის ტვირთი ჩამოკიდებულია  $D$  სახსარზე, რომელიც უძრავ მდებარეობაში შეკავებულია  $AD$  და  $BD$  ღეროებით და  $CD$  თოკით (ნახ. 2.20). განსაზღვრეთ ღეროების რეაქციები და თოკის დაჭიმულობა, თუ  $AD = BD$ . [46]

ამოხსნა. ცხადია, რომ წონასწორობის ობიექტია  $D$  სახსარი. მასზე მოქმედებს ოთხი ძალა: ვერტიკალური  $\vec{Q}$  ძალა, თოკის  $\vec{T}$  დაჭიმულობის ძალა და ღეროების  $\vec{R}_A$  და  $\vec{R}_B$  რეაქციის ძალები. დაუშვათ, რომ ღეროები იჭიმება, მაშინ რეაქციის ძალები მიმართული იქნება ღეროების გასწვრივ  $D$  კვანძიდან შიგნით. ოთხივე ძალა ერთ წერტილშია მოდებული. რადგანაც ძალების რიცხვი სამზე მეტია, ამიტომ ამოცანის ამოსახსნელად უნდა გამოვიყენოთ ანალიზური მეთოდი.

კოორდინატთა სათავე მოვათავსოთ  $D$  წერტილში.  $Dz$  ღერძი მივმართოთ  $ABC$  სიბრტყის მართობულად.  $Dy$  ღერძი ავიღოთ  $COD$  სიბრტყეში  $Dz$ -ის მართობულად, მაშინ  $Dx$  ღერძი იქნება მოთავსებული  $D$  წერტილზე გამავალი  $ABC$

სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში. ცხადია,  $\vec{Q}$  და  $\vec{T}$  ძალები ვერტიკალურ სიბრტყეში მდებარეობენ. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები, მივიღებთ:



ნახ. 2.20

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = -R_A \cos 30^\circ + R_A \cos 30^\circ = 0, \quad (ა)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = -T \cos 30^\circ - R_A \cos 30^\circ \cos 45^\circ - R_B \cos 30^\circ \cos 45^\circ = 0, \quad (ბ)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = -T \cos 60^\circ - R_A \cos 30^\circ \cos 45^\circ - R_B \cos 30^\circ \cos 45^\circ - Q = 0, \quad (გ)$$

ბ) და (გ) განტოლებებში გვაქვს ორმაგი დაგვეგმილების შედეგები, რომლებიც მიიღება  $\vec{R}_A$  და  $\vec{R}_B$  ძალების ჯერ  $OD$ -ზე, ხოლო შემდეგ შესაბამისად  $Dx$  და  $Dy$  ღერძებზე დაგვეგმილებით.

$$(ა) \text{ განტოლებიდან ვღებულობთ: } R_A = R_B. \quad (დ)$$

(ბ) და (გ) განტოლებებიდან ვღებულობთ:

$$-T \cos 30^\circ + T \cos 60^\circ + Q = 0 \Rightarrow T = Q / (\cos 30^\circ - \cos 60^\circ) \Rightarrow T = 2Q / (\sqrt{3} - 1) \Rightarrow$$

$$T = Q(\sqrt{3} + 1) \quad (ე)$$

(ბ), (დ) და (ე) განტოლებები გვაძლევს:

$$R_A = R_B = -\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)Q/2. \quad (ვ)$$

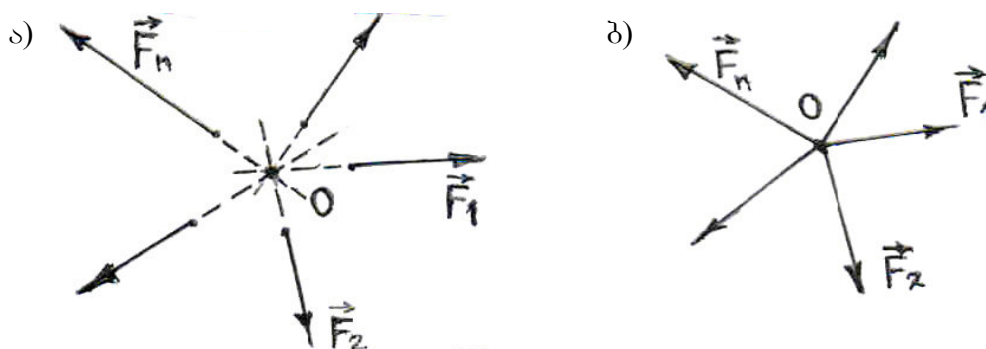
(ე) და (ვ) ტოლობებში შევიტანოთ  $Q = 50$  ნ, მივიღებთ:  $R_A = R_B \approx -96,2$  ნ;  $T = 136$  ნ.

### III თავი თავმოყრილი ძალები

#### 3.1. თავმოყრილი ძალების ტოლქმედი. თავმოყრილი ძალების წონასწორობა

განვიხილოთ აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოდებული  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  თავმოყრილი ძალები, რომელთა თავმოყრის ცენტრია  $O$  წერტილი (ნახ. 3.1,ა). გავასრიალოთ თითოეული ძალა თავის ფუძის გასწვრივ და მოვდოთ ისინი თავმოყრის წერტილში (ნახ.3.1,ბ). მივიღებთ ერთ წერტილში მოდებულ ძალებს, რომელთაც მეორე აქსიომის თანახმად აქვთ ტოლქმედი.

ამგვარად, თავმოყრილ ძალებს აქვთ ტოლქმედი, რომლის მოდების წერტილია თავმოყრის ცენტრი.



ნახ. 3.1

მესამე აქსიომის თანახმად თავმოყრილი ძალების წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათი ტოლქმედი იყოს ნულის ტოლი.

რასაკვირველია, თავმოყრილი ძალების წონასწორობის განტოლებები მოიცემა (2.5.1) და (2.5.2) ფორმულებით.

თავმოყრილი ძალებისთვის წონასწორობის განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს მომენტების საშუალებითაც (იხ. §4.1). მტკიცდება, რომ ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილი ძალების წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \quad (3.1.1)$$



სადაც  $A$  და  $B$  ნებისმიერი წერილებია, რომლებიც თავმოყრის ცენტრთან ერთად ერთ წრეზე არ უნდა მდებარეობდეს, ხოლო  $M_A(\vec{F}_k)$  და  $M_B(\vec{F}_k)$  სიმბოლოები აღნიშნავს  $\vec{F}_k$  ძალის მომენტებს  $A$  და  $B$  წერტილების მიმართ. თუ მომენტთა ცენტრს ავიღებთ ერთ-ერთი უცნობი ძალის ფუძეზე, მაშინ (3.1.1) განტოლებებიდან ყოველი მათგანში თითო უცნობი გვექნება.

### 3.2. სამი ძალის თეორემა

**თეორემა.** თუ წონასწორობაში მყოფ მყარ სხეულზე მოქმედებს სამი ძალა, რომელთაგან ორი თავმოყრილია, მაშინ სამივე ძალა თავმოყრილი იქნება.

**დამტკიცება.** განვიხილოთ მყარ სხეულზე მოდებული  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  და  $\vec{F}_3$  ძალები, რომელთაგან  $\vec{F}_1$ -ისა და  $\vec{F}_2$ -ის ფუძეები ერთ  $O$  წერილში იკვეთება (ნახ. 3.2). გავასრიალოთ  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალები ფუძეების გასწვრივ და მოვდოთ თავმოყრის  $O$  წერტილში. შევკრიბოთ ეს ორი ძალა და მათი ჯამი აღვნიშნოთ  $\vec{F}'$ -ით. მივიღეთ, რომ წონასწორობაში მყოფ მყარ სხეულზე მხოლოდ ორი ძალა მოქმედებს, ამიტომ მეშვიდე აქსიომის თანახმად  $\vec{F}'$  და  $\vec{F}_3$  პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ  $\vec{F}_3$ -ის ფუძეც გადის  $O$  წერილში. თეორემა დამტკიცებულია.

ანალოგიური თეორემა შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ  $n$  ძალის მიმართაც: თუ წონასწორობაში მყოფ მყარ სხეულზე მოქმედებს  $n$  ძალა, რომელთაგან  $n-1$  თავმოყრილია, მაშინ ყველა ძალა თავმოყრილი იქნება. სამი ძალის შემთხვევა იმიტომ გამოვყავით ცალკე, რომ წონასწორობის ამოცანის ამოხსნისას სამი ძალით აგებული მრავალკუთხედი იქნება სამკუთხედი, რომლის ამოხსნა კარგადაა ცნობილი ელემენტარული მათემატიკიდან.

### 3.3. სტატიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდთა

სტატიკის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ნივთიერი წერტილის, ნივთიერ წერტილთა სისტემისა და მყარი სხეულის წონასწორობის ამოცანის ამოხსნა. ამისათვის არსებობს ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდები: ანალიზური, გეომეტრიული (ანუ გრაფიკულ-ანალიზური) და გრაფიკული (იხ. ამოცანა 3.1).

მიზანშეწონილად მიგვაჩნია წონასწორობის ამოცანა ჩავატაროთ შემდეგი თანამიმდევრობით:

1. გამოვეყნოთ წონასწორობის ობიექტი ანუ ის წერტილი თუ სხეული, რომლის წონასწორობასაც ვიხილავთ;

2. ობიექტზე მოვდეთ ყველა მოქმედი ძალა. თუ მის ნებისმიერ სიგრძეზე მოქმედებს რაიმე სახით განაწილებული დატვირთვა, მაშინ ის უნდა შევცვალოთ ტოლფასი უმარტივესი ძალთა სისტემით (იხ. §2.8).

3. წონასწორობის ობიექტი გავათავისუფლოთ ბმებისგან და მათ ნაცვლად მოვდეთ რეაქციის ძალები.

სტატიკის ზოგიერთ ამოცანაში წინასწარ ცნობილია რეაქციის ძალის მიმართულება. ამ შემთხვევაში სასურველია მას მივანიჭოთ თავისი მიმართულება. მაგრამ ძალიან ხშირად უცნობია რეაქციის ძალის (ან ძალების) როგორც სიდიდე, ასევე მიმართულება. ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია რეაქციის ძალა დავშალოთ შემდგენებად, რომელთა მიმართულებები დავმთხვევა კოორდინატთა ღერძების მიმართულებებს, და ისინი განვიხილოთ როგორც დამოუკიდებელი ძალები. თუ ამოცანის ამოხსნის შემდეგ შემდგენს აღმოაჩნდება უარყოფითი ნიშანი, მაშინ მას სინამდვილეში აქვს ღერძის საწინააღმდეგო მიმართულება.

ზოგჯერ ამოცანაში გასაგებია წერტილის ან სხეულის დაწოლა ბმაზე (დაწოლა ზედაპირზე, ძაფის დაჭიმულობა, ძალვა ღეროში და სხვ.). ამ შემთხვევაში გავიგებთ ბმის რეაქციის ძალას და თუ მას შევუცვლით მიმართულებას საწინააღმდეგო მიმართულებით, მივიღებთ საძიებელ დაწოლას.

4. იმ შემთხვევაში, როცა ძალების რიცხვი სამია, უმჯობესია ვისარგებლოთ გეომეტრიული ან გრაფიკული მეთოდით. თუ ძალების ოდენობა სამზე მეტია, მაშინ უნდა გამოვიყენოთ ანალიზური მეთოდი, რომელსაც გვემიღების მეთოდსაც ვუწოდებთ. ანალიზური მეთოდის გამოყენებისას კოორდინატთა ღერძები შევეცადოთ ისე შევარჩიოთ, რომ რაც შეიძლება მეტი ძალა იყოს ღერძების პარალელური, რის შედეგად მივიღებთ მარტივ წონასწორობის განტოლებათა სისტემას.

აღსანიშნავია, რომ არ არის აუცილებელი არჩეული კოორდინატთა სისტემა იყოს მართკუთხა. მაგალითად, როცა ბრტყელი თავმოყრილი ძალებისთვის უცნობია მხოლოდ ორი ძალის მოდული, მაშინ სასურველია ერთი ღერძი ავიდოთ ერთ-ერთი უცნობი ძალის ფუძის მართობულად, ხოლო მეორე – მეორე ძალის ფუძის მართობულად. შედეგად მივიღებთ ერთუცნობიან ორ განტოლებას.

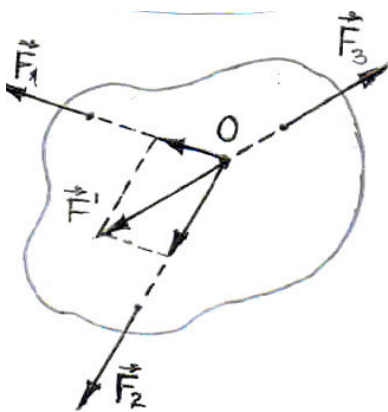
5. ამოვხსნით წონასწორობის განტოლებათა სისტემას. თუ განტოლებები შედგენილია ზოგადად, ე.ი. ჩაწერილია ასოებით, მიზანშეწონილია ამონახსნებს გაეუკეთოდ ანალიზი.

გვაქვს შემთხვევები, როცა ამოცანის ამოსახსნელად გვჭირდება რაიმე სიდიდის, მაგალითად, სიგრძის ან კუთხის ცოდნა, მაგრამ პირობის თანახმად ისინი უცნობებია. ამ დროს ამ სიდიდეს აღვნიშნავთ რაიმე ასოთი და შევადგენთ წონასწორობის განტოლებებს. თუ განტოლებათა სისტემის ამოხსნისას ეს სიდიდე არ გამოირიცხა, მაშინ მოგვიწევს მისი განსაზღვრა მოცემული სიდიდეებით.

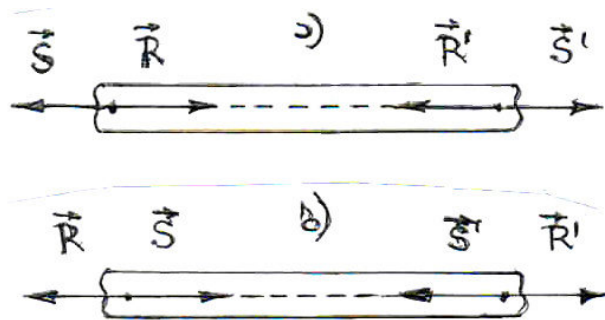
ხშირად პრაქტიკაში ბმას წარმოადგენს ღერო და გვინდა მასში აღძრული ძაღვის გაგება. ღერო სხეულია, რომლის ორი განზომილება ბევრად ნაკლებია მესამესთან შედარებით, მისი წონა მხედველობაში არ მიიღება და ყველა დატვირთვა მოდის მის ბოლოებზე (კვანძებში). იკრიბება რა კვანძებზე მოქმედი ძაღები, ვღებულობთ, რომ ღეროზე მოქმედებს მხოლოდ ორი პირდაპირ თანაწი-ნაადმდეგი ძალა, რომლებიც მას ან ჭიმავს ან კუმშავს. ღეროს შიგნით აღძრულ ძალას, რომელიც მას ჭიმავს ან კუმშავს, **ძალვა** ეწოდება. როგორც ვხედავთ, **ძალვა არის სახსრის საშუალებით გადაცემული დატვირთვა. ცხადია, ღერო თავის მხრივ მოქმედებს სახსარზე, რომელიც წარმოადგენს ღეროს რეაქციის ძალას.**

აღვნიშნოთ კვანძებზე მოდებული ძაღვები  $\vec{S}$  და  $\vec{S}'$ , ხოლო რეაქციის ძაღები -  $\vec{R}$  და  $\vec{R}'$ -ით (ნახ. 3.3).

იმ შემთხვევაში, როდესაც წონასწორობის ობიექტია კვანძი და არ ვიცით ღერო იჭიმება თუ იკუმშება, დაუშვებთ, რომ ღერო იჭიმება, მაშინ ღეროს რეაქციის ძაღები მიმართული იქნება კვანძებიდან შიგნით (ნახ. 3.3ა), ხოლო ძაღვები კი - გარეთ (რომელთაც ამოცანის ამოხსნისას ნახაზზე არ გამოგ-სახავთ). ამოხსნის შედეგად მიღებული რეაქციის უარყოფითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ ღერო იკუმშება. თუ დაუშვებთ, რომ ღერო იკუმშება (ნახ. 3.3ბ), მაშინ რეაქციის უარყოფითი ნიშანი გვიჩვენებს, რომ ღერო იჭიმება.



ნახ. 3.2



ნახ.3.3

დეროვანი სისტემის განხილვისას წინასწარ არ ვიცით რომელი დერო იჭიმება და რომელი იკუმშება. ამიტომ მიზანშეწონილად მიგვაჩნია იმის დაშვება, რომ ყველა დერო იჭიმება და რომელიმე დეროს რეაქციის უარყოფითი ნიშანი მიგვითითებს, რომ ეს დერო იკუმშება.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ამოცანას ვხსნით გრაფიკული ან გეომეტრიული მეთოდით, რეაქციის ძალის მიმართულებას გვაძლევს ძალთა სამკუთხედი.

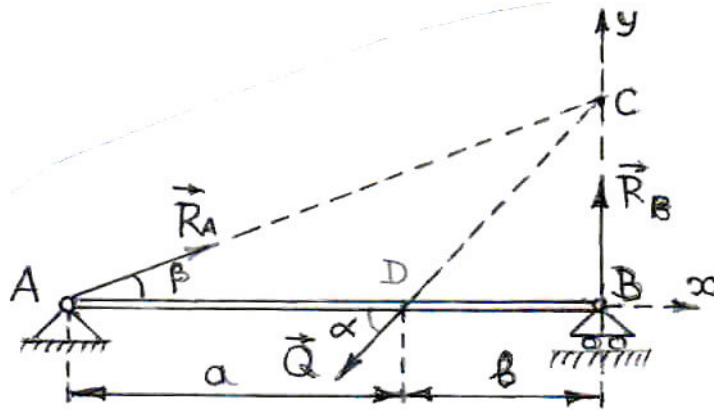
ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობის ამოცანის განხილვისას ყოველი წერტილისთვის ცალ-ცალკე შევადგენთ წონასწორობის განტოლებებს და ამოვხსნით მიღებულ განტოლებათა სისტემას.

**ამოცანა 3.1.**  $AB$  კოჭის ერთი  $A$  ბოლო ჩამაგრებულია უძრავი ცილინდრულ-სახსრით, ხოლო მეორე ბოლო ეყრდნობა  $B$  საგორავებს (ნახ. 3.4). კოჭის  $D$  წერტილში მოდებულია  $\vec{Q}$  ძალა, რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს  $\alpha$  კუთხეს. გაიგეთ საყრდენების რეაქციები ( $Q=100$  ნ,  $a=2l/3$ ,  $b=l/3$ ,  $\alpha=60^\circ$ ). [46]

ამოხსნა. კოჭზე მოქმედებს სამი ძალა:  $\vec{Q}$  ძალა და საყრდენთა  $\vec{R}_A$  და  $\vec{R}_B$  რეაქციები. ამ სამი ძალისთვის ცნობილია:  $\vec{Q}$  ძალის სიდიდე და მიმართულება, ხოლო  $\vec{R}_B$  ძალის მიმართულება. ამგვარად, გვაქვს სამი უცნობი:  $\vec{R}_B$  ძალის სიდიდე და  $\vec{R}_A$  ძალის სიდიდე და მიმართულება. წონასწორობის განტოლებები კი გვაქვს ორი (იხ. (2.5.2) განტოლებები). მივიღეთ, რომ ამოცანა სტატიკურად ურკვევია. მაგრამ კოჭი წონასწორობაშია ერთ სიბრტყეში მდებარე სამი ძალის მოქმედებით, რომელთაგან ორის ფუძე იკვეთება. მაშინ სამი ძალის თეორემის თანახმად, მესამე  $\vec{R}_A$  ძალის ფუძემაც უნდა გაიაროს  $\vec{R}_B$  და  $\vec{Q}$  ძალების ფუძეების გადაკვეთის  $C$  წერტილში (ნახ. 3.4). ამოცანაში მოცემული სიდიდეებით შეგვიძლია გავიგოთ  $\vec{R}_A$  ძალის მიერ ჰორიზონტთან შედგენილი  $\beta$  კუთხე. მართლაც,  $\triangle DCB$ -დან  $CB = b \operatorname{tg} \alpha$ .

$$\triangle ACB\text{-დან } \operatorname{tg} \beta = \frac{CB}{AB} = \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{a+b} \Rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{b \operatorname{tg} \alpha}{a+b} \right).$$

ამგვარად, სამი ძალის თეორემის გამოყენებით გავიგეთ  $\vec{R}_A$  ძალის მიმართულება, რის შედეგადაც უცნობთა რიცხვი ერთით შემცირდა და გახდა ორი, ამიტომ ამოცანა გახდა სტატიკურად რკვევადი.



ნახ. 3.4

ამოცანის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნებისმიერი ცნობილი მეთოდი. გამოვიყენოთ ანალიზური მეთოდი. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები, მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = R_A \cos \beta - Q \cos \alpha = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = R_A \sin \beta - Q + R_B = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} Q; \quad \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} Q \sin \beta - Q \sin \alpha + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} Q.$$

როცა  $a = \frac{2}{3}l, b = \frac{1}{3}l, \alpha = 60^\circ$ , მაშინ  $\beta = 30^\circ$ ,  $R_A = R_B = \frac{\sqrt{3}}{3} Q$ .

თუ  $Q = 100$  ნ, მაშინ  $R_A = R_B \approx 57,73$  ნ.

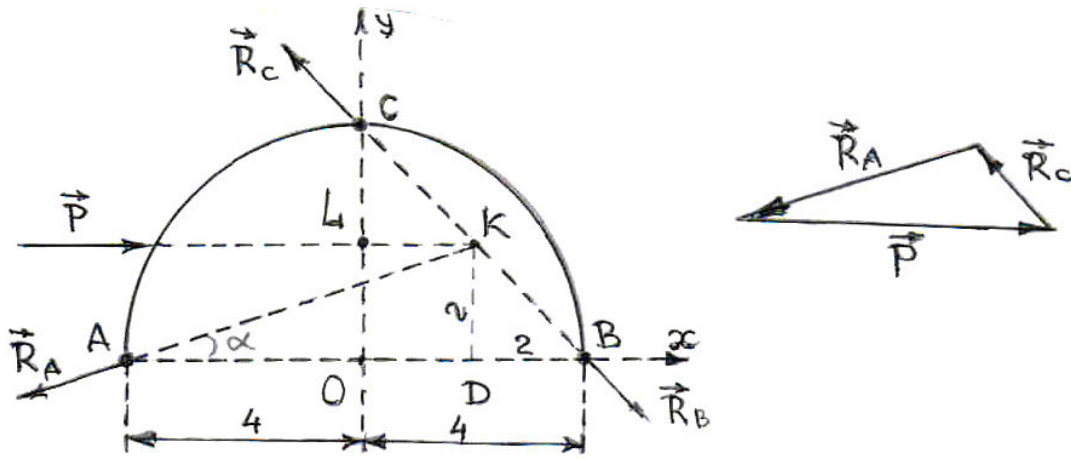
პასუხი.  $R_A = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} Q; \quad R_B = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} Q; \quad \beta = \arctg\left(\frac{b \operatorname{tg} \alpha}{a + b}\right)$ . (როცა  $Q = 100$  ნ,

$a = 2l/3, b = l/3, \alpha = 60^\circ$ , მაშინ  $R_A = R_B \approx 57,73$ ).

**ამოცანა 3.2.** იპოვეთ ნახ. 3.5-ზე მოცემული სამსახსროვანი ACB თაღის A, B და C სახსრების რეაქცია, რაც გამოწვეულია  $P = 4$  კნ სიდიდის პორიზნტალური ძალის მოქმედებით.

ამოხსნა. ACB თაღი შედგება ორი AC და BC ნახევართაგან. ფაქტიურად გვაქვს ორი სხეულისგან შემდგარი სისტემა, თუმცა ამოცანის ამოხსნა დაიყვანება სამი თავმოყრილი ძალის მიმართ წონასწორობის ამოცანის ამოხსნაზე. განვიხილოთ BC ნახევართაღის წონასწორობა. მასზე მოქმედებს მხოლოდ ორი

ძალა:  $B$  სახსრის  $\vec{R}_B$  რეაქციის ძალა და  $C$  შუალედური სახსრის  $\vec{R}_C$  რეაქცია. რადგანაც სხეული წონასწორობაშია ორი ძალის მოქმედებით, ამიტომ მეშვიდე აქსიომის თანახმად, ისინი პირდაპირთანაწინააღმდეგი ძალებია, ე.ი. მათი მოქმედების ფუძეა  $B$  და  $C$  წერტილებზე გამავალი წრფე და  $R_B = R_C$ .



ნახ. 3.5

ახლა განვიხილოთ  $AC$  ნახევარბრუნის წონასწორობის ამოცანა. მასზე მოქმედებს სამი ძალა:  $\vec{P}$  ძალა,  $A$  სახსრის  $\vec{R}_A$  რეაქციის ძალა და  $C$  სახსრის  $\vec{R}'_C = -\vec{R}_C$  (მეოთხე აქსიომის თანახმად) რეაქციის ძალა. ამათგან  $\vec{P}$  და  $\vec{R}_A$  ძალების ფუძეები იკვეთება  $K$  წერტილში. სამი ძალის თეორემის თანახმად,  $\vec{R}'_C$  ძალის ფუძემაც უნდა გაიაროს  $K$  წერტილზე. ადვილად გამოვთვლით  $\alpha$  კუთხეს.  $\triangle AKD$ -ში  $\sin \alpha = \frac{KD}{AK} = \frac{2}{40} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ,  $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ .

ამოცანა მარტივად იხსნება გეომეტრიული მეთოდით. ჩვენ გამოვიყენოთ ანალიზური მეთოდი და შევადგინოთ (3.1.1) სახის განტოლებები (მომენტების განტოლებები). მომენტთა ცენტრებად ავიღოთ  $A$  და  $B$  წერტილები, მივიღებთ:

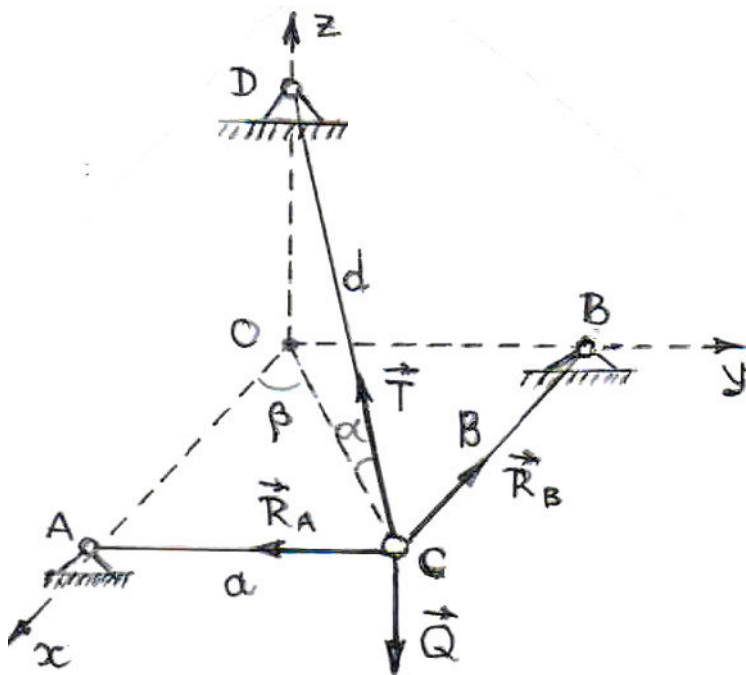
$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = -P \cdot KD + R'_C \cdot AC = 0 \Rightarrow R'_C = \frac{P \cdot KD}{AC} = \frac{4 \cdot 2}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ კნ};$$

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = -P \cdot KD - R_A \cdot AB \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{2P}{AB \sin \alpha} = -\frac{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{10}}{8 \cdot 1} = -\sqrt{10} \approx -3,16 \text{ კნ}.$$

პასუხი.  $R_A \approx 1,41$  კნ;  $R_B = R_C \approx -3,16$

**ამოცანა 3.3.**  $Q$  ტვირთი შეკავებულია  $CA$  და  $CB$  ღეროებით და  $CD$  ჯაჭვით (ნახ. 3.6). ღეროები ურთერთმართობულია და მდებარეობენ ჰორიზონტალურ სირტყეში. გაიგეთ ღეროებში აღძრული ძალები და ჯაჭვის დაჭიმულობა, თუ  $CA = a$ ,  $CB = b$ ,  $CD = d$ .

ამოხსნა. ცხადია, წონასწორობის ობიექტად უნდა ავიღოთ  $C$  სახსარი. მასზე მოქმედებს  $Q$  ტვირთის სიმძიმის ძალა, ღეროების  $\vec{R}_A$  და  $\vec{R}_B$  რეაქციების ძალები და  $\vec{T}$  ჯაჭვის დაჭიმულობის ძალა. დავუშვათ, რომ ღეროები იჭიმება.



ნახ. 3.6

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = -R_B - T \cos \alpha \cos \beta = 0. \quad (a)$$

$$\sum F_{ky} = -R_A - T \cos \alpha \sin \beta = 0, \quad (b)$$

$$\sum F_{kz} = T \sin \alpha - Q = 0. \quad (g)$$

(g) ტოლობიდან  $T = Q / \sin \alpha$ .

გამოვთვალოთ  $\sin \alpha$ .  $OACB$  მართკუთხედი.  $\triangle OBC$ -ში  $OC = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;  $\triangle DOC$ -ში  $OD = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2} \Rightarrow \sin \alpha = OD/DC = OD/d$ ,  $\cos \alpha = OC/d$ . მაშინ  $T = Q \cdot d / OD$ .

$\triangle AOC$ -ში  $\sin \beta = a/OC$ ,  $\cos \beta = b/OC$ .

$$(ბ)-დან \quad R_A = -\frac{d}{OD} \cdot Q \cdot \frac{OC}{d} \cdot \frac{a}{OC} = -\frac{a}{OD} Q,$$

$$(ა)-დან \quad R_B = -\frac{d}{OD} \cdot Q \cdot \frac{OC}{d} \cdot \frac{b}{OC} = -\frac{b}{OD} Q.$$

რეაქციის ძალის უარყოფითი ნიშანი იმაზე მიგვითითებს, რომ ღერო კი არ იჭიმება, არამედ იკუმშება, ე.ი. რეაქციის ძალა მიმართულია კვანძიდან (სახს-რიდან) გარეთ. მაშინ ქმედებისა და უკუქმედების აქსიომის თანახმად, ძალვა სი-დიდით რეაქციის ძალის ტოლია და მიმართულია მის საწინააღმდეგოდ. ძალვას, როგორც წესი,  $S$  ასოთი აღვნიშნავთ და ის თუ მკუმშავია, მის რიცხვით სიდი-დეს წინ დაეუწერთ 2–3 ნიშანს.

$$\text{პასუხი. } S_A = -\frac{a}{OD} Q; \quad S_B = -\frac{b}{OD} Q; \quad T = \frac{d}{OD} Q, \quad \text{სადაც } OD = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}.$$



## IV თავი

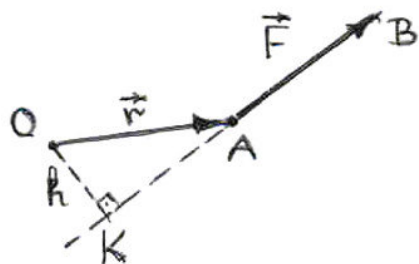
### ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემა

ამ თავში განვიხილავთ მყარ სხეულზე მოდებული ერთ სიბრტყეზე მდებარე ნებისმიერ ძალთა სისტემას. ასეთ ძალთა სისტემას ბრტყელ ძალთა სისტემასაც უწოდებენ.

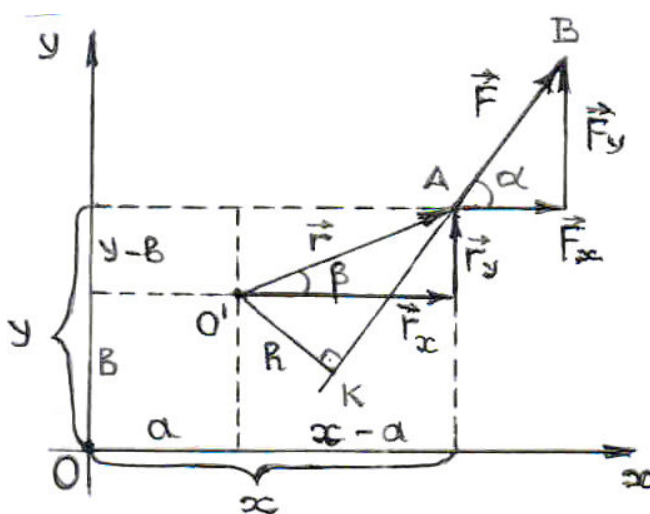
#### 4.1. ძალის სკალარული მომენტი

განვიხილოთ უძრავი  $O$  წერტილის მქონე მყარი სხეული, რომლის  $A$  წერტილში მოდებულია  $\vec{F}$  ძალა (ნახ. 4.1). დავუშვათ, რომ  $O$  წერტილი და  $\vec{F}$  ძალა ქაღალდის სიბრტყეში მდებარეობენ. ვინაიდან სხეულს აქვს უძრავი წერტილი, ამიტომ ძალას შეუძლია ის მხოლოდ მოაბრუნოს  $O$  წერტილზე გამავალი ქაღალდის სიბრტყის მართობი დერძის გარშემო.  $O$  წერტილიდან ძალის ფუძეზე დავუშვათ  $OK$  მართობი და მისი სიგრძე აღვნიშნოთ  $h$ -ით. ვუწოდოთ  $OK$  მართობს და მის  $h$  სიგრძესაც  $\vec{F}$  ძალის მხარი  $O$  წერტილის მიმართ.

**განსაზღვრა.** ძალის სკალარული მომენტი წერტილის მიმართ ეწოდება ძალის სიდიდისა და მხარის ნამრავლს, ადებულს 2+3 ნიშნით, თუ ძალა ცდილობს სხეული მოაბრუნოს დადებითი მიმართულებით; წინააღმდეგ შემთხვევაში აიღება 2-3 ნიშნით. ბრუნვის დადებით მიმართულებად მივიღოთ ბრუნვა საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 4.1



ნახ. 4.2

წერტილს, რომლის მიმართაც განისაზღვრება ძალის მომენტი, **მომენტის ცენტრი** ეწოდება.

$O$  წერტილის მიმართ  $\vec{F}$  ძალის სკალარული მომენტი აღვნიშნოთ  $M_o(\vec{F})$  ან  $M_o$  სიმბოლოთი.

განსაზღვრის თანახმად

$$M_o = \pm F \cdot h. \quad (4.1.1)$$

4.1 ნახაზიდან ადვილად მივიღებთ:

$$M_o = \pm 2 \text{ ფართ.} \triangle AOB. \quad (4.1.2)$$

ძალის სიდიდისა და მხარის ნამრავლი ახასიათებს ძალის მექანიკური მოქმედების ეფექტს, ნამრავლის წინ ნიშანი კი გვიჩვენებს ბრუნვის მიმართულებას. ამგვარად, ძალის სკალარული მომენტი სრულად ახასიათებს მომენტთა ცენტრსა და ძალის ფუძეზე გამავალი სიბრტყის მართობული ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვას.

ძალის სკალარული მომენტის ძირითადი თვისებებია:

1. ძალის ფუძეზე გასრიალებით მომენტი არ იცვლება;
2. თუ ძალას შევუცვლით მიმართულებას საწინააღმდეგოთი, მაშინ მომენტს შეეცვლება ნიშანი საპირისპიროთი;
3. თუ ძალის ფუძე გადის მომენტის ცენტრზე, მაშინ მომენტი ნულის ტოლია (ამ შემთხვევაში  $h=0$ ).

## 4.2. ძალის სკალარული მომენტის ანალიზური გამოსახვა

დავუშვათ, რომ მყარი სხეულის  $A$  წერტილში მოდებული  $\vec{F}$  ძალა მდებარეობს  $Oxy$  სიბრტყეში (ნახ. 4.2). ამ სიბრტყის ნებისმერი  $O'$  წერტილი ავირჩიოთ მომენტის ცენტრად. ვთქვათ, ძალის გეგმილებაა  $F_x, F_y$ , ხოლო  $A$  და  $O'$  წერტილების კოორდინატებია შესაბამისად  $x, y$  და  $a, b$ .  $\vec{F}$  ძალის მიერ  $Ox$  ღერძის დადებით მიმართულებასთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ  $\alpha$ -თი, ხოლო  $\vec{O'A} = \vec{r}$  ვექტორის მიერ შედგენილი კუთხე კი -  $\beta$ -თი.

ნახ. 4.2-დან ადვილად მივიღებთ:

$$\angle O'AK = \alpha - \beta, \quad F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \sin \alpha,$$

$$r_x = x - a = r \cos \beta, \quad r_y = y - b = r \sin \beta, \quad h = r \sin(\alpha - \beta). \quad (4.2.1)$$

ამ ტოლობების გათვალისწინებით (4.1.1) გვაძლევს:

$$M_o = M_o(\vec{F}) = F \cdot h = Fr \sin(\alpha - \beta) = Fr(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \\ = (r \cos \beta)(F \sin \alpha) - (r \sin \beta)(F \cos \alpha) = (x - a)F_y - (y - b)F_x.$$

მივიღეთ:

$$M_o = (x - a)F_y - (y - b)F_x. \quad (4.2.2)$$

აღანიშნავია, რომ (4.2.2) ფორმულაში  $x, y$  ძალის ფუძის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია (მომენტის პირველი თვისების თანახმად).

როდესაც  $O'$  მომენტის ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ე.ი.  $a = b = 0$ , მაშინ (4.2.2) ფორმულა ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$M_o = xF_y - yF_x. \quad (4.2.3)$$

### 4.3. ვარინიონის თეორემა ბრტყელი თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის მომენტის შესახებ

**თეორემა.** ნებისმიერი წერტილის მიმართ ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის სკალარული მომენტი უდრის იმავე წერტილის მიმართ ყველა ძალის სკალარული მომენტების ალგებრულ ჯამს.

**დამტკიცება.** ვთქვათ, მყარი სხეულის  $A_1, A_2, \dots, A_n$  წერტილებში მოდებულია  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ერთ სიბრტყეში მდებარე თავმოყრილი ძალები, რომელთა ტოლქმედია  $\vec{R}$ , ხოლო თავმოყრის ცენტრი -  $A$  წერტილი. დაუშვათ, რომ ძალები მდებარეობს  $Oxy$  სიბრტყეში. აღვნიშნოთ მათი გეგმილები  $(F_{1x}, F_{1y}), (F_{2x}, F_{2y}), \dots, (F_{nx}, F_{ny})$ -ით. ყოველი ძალა გავასრიალოთ ფუძის გასწვრივ, მოვდოთ  $A(x, y)$  წერტილში და გამოვთვალოთ მათი სკალარული მომენტები სიბრტყის რაიმე  $O'(a, b)$  წერტილის მიმართ. მომენტები ჩავწეროთ (4.2.2) ფორმულის საშუალებით:

$$M_{o'}(\vec{F}_1) = (x - a)F_{1y} - (y - b)F_{1x},$$

$$M_{o'}(\vec{F}_2) = (x - a)F_{2y} - (y - b)F_{2x},$$

-----

$$M_{o'}(\vec{F}_n) = (x - a)F_{ny} - (y - b)F_{nx}.$$

ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^n M_{o'}(\vec{F}_k) = (x-a)(F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx}) - (y-b)(F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny}).$$

გავიხსენოთ, რომ  $F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = R_x^*$ ,  $F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = R_y^*$  და მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^n M_{o'}(\vec{F}_k) = (x-a)R_y^* - (y-b)R_x^*.$$

(4.2.2) ფორმულის გათვალისწინება გვაძლევს:

$$\sum_{k=1}^n M_{o'}(\vec{F}_k) = M_{o'}(\vec{R}^*). \quad \text{რ. დ. გ.}$$

როგორც ვიცით  $\vec{R}^* = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$ , ამიტომ ვარინიონის თეორემა ასე ჩაიწერება:

$$\sum_{k=1}^n M_{o'}(\vec{F}_k) = M_{o'}\left(\sum_{k=1}^n \vec{F}_k\right)$$

**მივიღეთ:** მომენტების ჯამი უდრის ჯამის მომენტს.

#### 4.4. ნაკრები სკალარული მომენტი

დავუშვათ, რომ სხეულის  $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \dots, A_n(x_n, y_n)$  წერტილებში მოდებულია  $Oxy$  სიბრტყეში მდებარე  $\vec{F}_1(F_{1x}, F_{1y}), \vec{F}_2(F_{2x}, F_{2y}), \dots, \vec{F}_n(F_{nx}, F_{ny})$  ძალები. ამავე სიბრტყის ნებისმიერი  $O'(a, b)$  წერტილის მიმართ გამოვთვალოთ თითოეული ძალის სკალარული მომენტი და შეგკრიბოთ.

**განსაზღვრა.** სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალების **ნაკრები სკალარული მომენტი** ეწოდება ამავე წერტილის მიმართ ყველა ძალის მომენტების ალგებრულ ჯამს.

ნაკრები სკალარული მომენტი  $O'(a, b)$  წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ  $M_{o'}^*$  სიმბოლოთი და მივიღებთ:

$$M_{o'}^* = \sum_{k=1}^n M_{o'}(\vec{F}_k). \quad (4.4.1)$$

(4.2.2) ფორმულის გათვალისწინება გვაძლევს:

$$M_{o'}^* = \sum_{k=1}^n [(x_k - a)F_{ky} - (y_k - b)F_{kx}]. \quad (4.4.2)$$

$O'$  წერტილს ძალთა სისტემის მომენტთა ცენტრი ეწოდება. იმ შემთხვევაში, როცა მომენტთა ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ე.ი.  $a=b=0$ , მაშინ (4.4.2) ფორმულა ასეთი სახით ჩაიწერება:

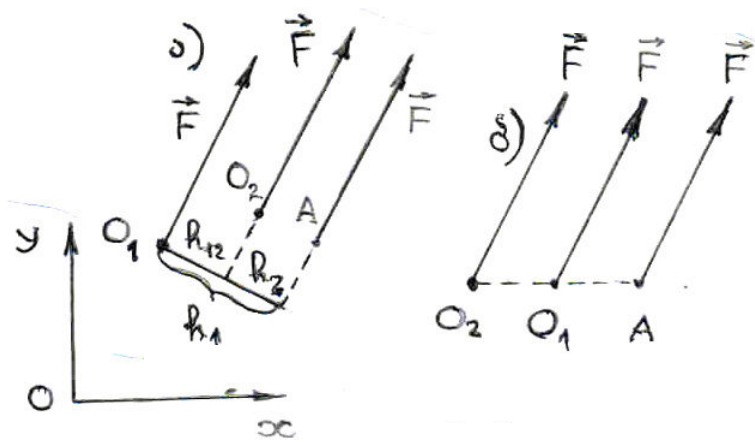
$$M_{o'} = \sum_{k=1}^n [x_k F_{ky} - y_k F_{kx}]. \quad (4.4.3)$$

#### 4.5. ძალის მომენტი და ნაკრები მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ

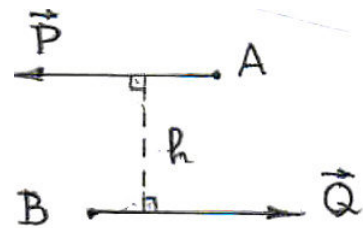
ვთქვათ, მყარი სხეულის რაიმე  $A(x, y)$  წერტილში მოდებულია  $\vec{F}(F_x, F_y)$  ძალა და  $Oxy$  სისტემის ნებისმიერი  $O_1(a_1, b_1)$  წერტილის მიმართ გამოთვლილი გვაქვს მისი  $M_{o_1}$  სკალარული მომენტი (ნახ. 4.3). გვინდა გამოვთვალოთ ამავე ძალის  $M_{o_2}$  სკალარული მომენტი  $O_2(a_2, b_2)$  წერტილის მიმართ. ვუწოდოთ  $O_1$  და  $O_2$  წერტილებს შესაბამისად ძველი და ახალი მომენტის ცენტრები.

განსაზღვრის თანახმად  $M_{o_2} = F \cdot h_2$ . ნახ. 4.3-დან ადვილად მივიღებთ:  $h_2 = h_1 - h_{12}$ , ამიტომ

$$M_{o_2} = F \cdot h_2 = F(h_1 - h_{12}) = F \cdot h_1 - F \cdot h_{12}. \quad (4.5.1)$$



ნახ. 4.3



ნახ. 4.4

მიღებულ გამოსახულებაში  $F \cdot h_1$  არის  $\vec{F}$  ძალის სკალარული მომენტი  $O_1$  ძველი ცენტრის მიმართ, ხოლო  $F \cdot h_{12}$  - იმავე ძალის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ, თუ ვიგულისხმებთ, რომ ძალა მოდებულია ახალ  $O_2$  მომენტის ცენტრში. ამ უკანასკნელი ფაქტის აღსანიშნავად შემოვიღოთ სიმბოლო  $M_{o_1}(\vec{F})_{o_2}$ , რაც ასე

წაიკითხება:  $2O_2$  წერტილზე მოდებული  $\vec{F}$  ძალის სკალარული მომენტი  $O_1$  წერტილის მიმართ. ამ აღნიშვნის გათვალისწინებით (4.5.1) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$M_{o_2} = M_{o_2}(\vec{F})_A = M_{o_1}(\vec{F})_A - M_{o_1}(\vec{F})_{o_2}, \quad (4.5.2)$$

ან რაც იგივეა

$$M_{o_2} = M_{o_1} - M_{o_1}(\vec{F})_{o_2}. \quad (4.5.3)$$

**მივიღეთ:** ძალის სკალარული მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ ტოლია მომენტს ძველი ცენტრის მიმართ გამოკლებული ახალ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ. ადვილად მივიღებთ, რომ

$$M_{o_2} = M_{o_1} + M_{o_2}(\vec{F})_{o_1}. \quad (4.5.4)$$

(4.2.2) ფორმულის გათვალისწინებით (4.5.3) და (4.5.4) ცალ-ცალკე გვაძლევს:

$$M_{o_2} = M_{o_1} - (a_2 - a_1)F_y + (b_2 - b_1)F_x. \quad (4.5.5)$$

როდესაც ძველი ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ე.ი.  $a_1 = b_1 = 0$  და ახალ ცენტრად აღებულია  $O'(a, b)$  წერტილი, მაშინ ბოლო სამი ფორმულა ცალ-ცალკე გვაძლევს:

$$M_{o'} = M_o - M_o(\vec{F})_{o'} = M_o + M_{o'}(\vec{F})_o = M_o - aF_y + bF_x. \quad (4.5.6)$$

გამოვთვალოთ ერთ სიბრტყეში მდებარე  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ. დავუშვათ, რომ  $O_1$  და  $O_2$  წერტილები შესაბამისად ძველი და ახალი მომენტთა ცენტრებია. ყოველი ძალისთვის შევადგინოთ (4.3.2) სახის ფორმულა და შევკრიბოთ. მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^n M_{o_2}(\vec{F}_k)_{A_k} = \sum_{k=1}^n M_{o_1}(\vec{F}_k)_{A_k} - \sum_{k=1}^n M_{o_1}(\vec{F}_k)_{o_2} \Leftrightarrow M_{o_2}^* = M_{o_1}^* - \sum_{k=1}^n M_{o_1}(\vec{F}_k)_{o_2}. \quad (4.5.7)$$

$\sum_{k=1}^n M_{o_1}(\vec{F}_k)_{o_2}$  გამოსახულებაში იგულისხმება, რომ ყველა ძალა მოდებულია  $O_2$

წერტილში, ამიტომ ვარინიონის თეორემის თანახმად

$$\sum_{k=1}^n M_{o_1}(\vec{F}_k)_{o_2} = M_{o_1} \left( \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \right) = M_{o_1}(\vec{F}^* )_{o_2}.$$

ამ გამოსახულების გათვალისწინებით (4.5.7)-დან ვღებულობთ:

$$M_{o_2}^* = M_{o_1}^* - M_{o_1}(\vec{F}^* )_{o_2}, \quad (4.5.8)$$

ან

$$M_{o_2}^* = M_{o_1}^* + M_{o_2}(\vec{F}^* )_{o_1}. \quad (4.5.9)$$

**მივიღეთ:** ბრტყელი ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ უდრის ძველი ცენტრის მიმართ ნაკრებ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ ან დამატებული ძველ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ.

იმ შემთხვევაში, როცა ძველი ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სისტემის სათავეს, ხოლო ახალი ცენტრი სიბრტყის ნებისმიერ  $O'$  წერტილს, მაშინ ბოლო ორი ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$M_{o'} = M_o - M_o(\vec{F}')_{o'} = M_o + M_o'(\vec{F}')_{o'}. \quad (4.5.10)$$

(4.5.10) ანალიზურად ასე ჩაიწერება:

$$M_{o'} = M_o - xF'_y + yF'_x, \quad (4.5.11)$$

სადაც  $x$  და  $y$  ნაკრები ვექტორის ფუძის ნებისმიერი წერტილის კოორდინატებია.

ვთქვათ, ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია, მაშინ ბოლო ოთხი ტოლობა ცალ-ცალკე ვვაძღვრება:

$$M_{o'} = M_o. \quad (4.5.12)$$

**მივიღეთ:** როდესაც ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, მაშინ ნაკრები მომენტის მნიშვნელობა არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე.

განხილულ მასალაში ჩვენ გავეცანით ბრტყელ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები სკალარული მომენტის ცნებებს, რომლებიც მჭიდრო კავშირში არიან ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობებთან. ამ უკანასკნელის განხილვამდე აუცილებლად უნდა გავეცნოთ ერთ მეტად მნიშვნელოვან მექანიკურ სიდიდეს – წყვილძალას.

#### 4.6. წყვილძალა და მისი მომენტი

§2.8-ში, წყვილძალა განვსაზღვრეთ როგორც ორი ძალა, რომელთა სიდიდეები ტოლია, პარალელურ ფუძეებზე მდებარეობენ და ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებები აქვთ. სიბრტყეს, რომელშიც წყვილძალა მდებარეობს, **წყვილძალის სიბრტყე** ეწოდება. ხშირად წყვილძალის ძალებს  $\vec{P}$  და  $\vec{Q}$  ასოებით აღნიშნავენ, ხოლო თვით წყვილძალას -  $(\vec{P}, \vec{Q})$  სიმბოლოთი. ცხადია, რომ  $\vec{P} = -\vec{Q}$ , ამიტომ წყვილძალის ნაკრები ვექტორი  $\vec{F}' = \vec{P} + \vec{Q} = -\vec{Q} + \vec{Q} = 0$ . ამგვარად, წყვილ-ძალის

ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე (იხ. § 4.5). მაშინ, თუ მომენტთა ცენტრად ავირჩევთ წყვილძალის ერთ-ერთი ძალის ფუძის ნებისმიერ წერტილს, მაგალითად,  $B$  წერტილს (ნახ. 4.4), მივიღებთ:  $M = M_B(\vec{P}, \vec{Q}) = M_B(\vec{P}) + M_B(\vec{Q})$ . მაგრამ  $M_B(\vec{Q}) = 0$ , ამიტომ  $M = M_B(\vec{P}, \vec{Q}) = M_B(\vec{P})$ .

ცხადია, რომ  $M = M_A(\vec{Q})$ . მივიღეთ, რომ წყვილძალის ნაკრები მომენტი უდრის მისი შემადგენელი ერთ-ერთი ძალის მომენტს მეორე ძალის ფუძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ.

წყვილძალის ძალების ფუძეების მართობულ მონაკვეთს და ამ მონაკვეთის სიგრძესაც ვუწოდოთ **წყვილძალის მხარი** (ნახ. 4.4). თუ მხარს აღვნიშნავთ  $h$ -ით, მივიღებთ:  $M = P \cdot h$ . თუ წყვილძალის ძალებს შევუცვლით მიმართულებებს საწინააღმდეგოზე, მაშინ  $M = -P \cdot h$ .

**განსაზღვრა.** წყვილძალის სკალარული მომენტი ეწოდება მის ნაკრებ სკალარულ მომენტს ან რაც იგივეა, მისი ერთ-ერთი ძალის სიდიდისა და მხარის ნამრავლს, აღებული „+“ ნიშნით, თუ წყვილძალა ცდილობს სხეული მოაბრუნოს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით, წინააღმდეგ შემთხვევაში აიღება „-“ ნიშანი.

შევნიშნოთ, რომ თუ წყვილძალის მომენტი ნულის ტოლია, მაშინ წყვილ-ძალა არ არსებობს. მართლაც, მომენტი ნულის ტოლია, როცა ან  $P=0$  ან  $h=0$ . პირველ შემთხვევაში წყვილძალის ძალები არ არსებობს, ხოლო მეორე შემთხვევაში – ძალები მდებარეობენ ერთ ფუძეზე.

აღსანიშნავია, რომ **წყვილძალა დამოუკიდებელი მექანიკური სიდიდეა**. მისი გაწონასწორება ძალით შეუძლებელია.

#### 4.7. ტოლფასი ძალთა სისტემები. ელემენტარული გარდაქმნები

ძირითადი ცნებების განხილვისას განვმარტეთ ტოლფასი ძალთა სისტემები: ისინი ერთსა და იმავე სხეულზე ცალ-ცალკე ერთნაირ მექანიკურ მოქმედებებს ახდენენ. ნათქვამიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ორი ძალთა სისტემა ცალ-ცალკე მესამე ძალთა სისტემის ტოლფასია, მაშინ ისინი ურთიერთტოლფასნიც არიან.

განვიხილოთ შემდეგი მოქმედებები:

1. ძალის გასრიალება ფუძის გასწვრივ;
2. ერთ წერტილზე მოდებული ძალების შეკრება;
3. ძალის დაშლა შემდგენებად;



4. პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალების დამატება ან ჩამოშორება.

ამ მოქმედებებს **ელემენტარული გარდაქმნები** ეწოდება. არც ერთი მათგანი არ ცვლის სხეულის მექანიკურ მდგომარეობას.

ორი ძალთა სისტემის, მაგალითად,  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  და  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m$  სისტემების, ტოლფასობა ასე ჩაიწერება:

$$\{\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n\} \sim \{\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_m\}.$$

#### 4.8. ერთ სიბრტყეზე მდებარე წყვილძალების ტოლფასობა

დავსვათ კითხვა: რა პირობები უნდა შესრულდეს იმისათვის, რომ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი წყვილძალა ერთმანეთის ტოლფასი იყოს?

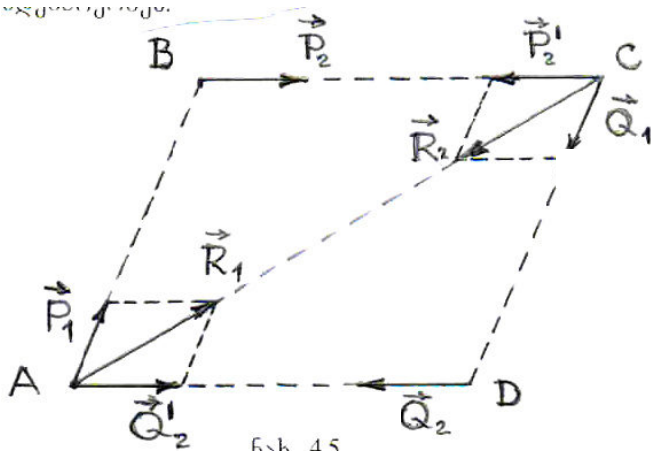
**თეორემა.** ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი წყვილძალა ტოლფასია, თუ მათი სკალარული მომენტები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, სხეულზე მოქმედებს  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$  წყვილძალა, რომლის მომენტი  $M_1$ -ის ტოლია. შევეცადოთ  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$  წყვილძალა მისსავე სიბრტყეში გარდაქმნათ  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$  წყვილძალად, თუ ამ უკანასკნელის მომენტი  $M_2 = M_1$ .

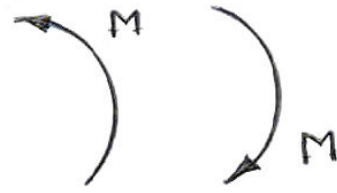
შესაძლებელია ორი შემთხვევა: 1. წყვილძალების ფუძეები იკვეთება და 2. წყვილძალების ფუძეები პარალელურია.

დავიწყოთ პირველი შემთხვევით. ვიცით  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$  წყვილძალა და  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$ -ის ფუძეები. გავაგრძელოთ ფუძეები გადაკვეთამდე. მივიღებთ პარალელლოგრამს, რომლის წვეროები აღვნიშნოთ  $A, B, C, D$  ასოებით (ნახ. 4.5). გავასრიალოთ  $\vec{P}_1$  და  $\vec{Q}_1$  ძალები და მოვდოთ შესაბამისად  $A$  და  $C$  წერტილებში. პარალელლოგრამის წვეროებში მოვდოთ სიდიდით ოთხი ტოლი  $\vec{P}_2, \vec{P}_2', \vec{Q}_2, \vec{Q}_2'$  ძალები ისე, როგორც ნახ. 4.5-ზეა ნაჩვენები. მივიღებთ  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$  და  $(\vec{P}_2', \vec{Q}_2')$  წყვილძალებს, რომელთა მომენტები ერთმანეთისგან განსხვავდება მხოლოდ ნიშნით.

შეგვრიბოთ  $A$  წერტილში მოდებული  $\vec{P}_1$  და  $\vec{Q}_2'$  ძალები და ჯამი აღვნიშნოთ  $\vec{R}'_1$ -ით. შეგვრიბოთ  $C$  წერტილში მოდებული  $\vec{Q}_1$  და  $\vec{P}_2'$  ძალები და ჯამი აღვნიშნოთ  $\vec{R}'_2$ -ით. ცხადია,  $|\vec{R}'_1| = |\vec{R}'_2|$ . ვაჩვენოთ, რომ ეს ძალები ერთ  $A$  ფუძეზე მდებარეობენ.



ნახ. 4.5



ნახ. 4.6

ვარინიონის თეორემის თანახმად

$$\begin{aligned}
 M_C(\vec{R}_1) &= M_C(\vec{P}_1) + M_C(\vec{Q}_1) = M(\vec{P}_1, \vec{Q}_1) + M_C(-\vec{Q}_2) = \\
 &= M_1 - M_C(\vec{Q}_2) = M_1 - M(\vec{P}_2, \vec{Q}_2) = M_1 - M_2, \\
 M_A(\vec{R}_2) &= M_A(\vec{Q}_1) + M_A(\vec{P}_2') = M(\vec{P}_1, \vec{Q}_1) + M_A(-\vec{P}_2) = \\
 &= M_1 - M_A(\vec{P}_2) = M_1 - M(\vec{P}_2, \vec{Q}_2) = M_1 - M_2.
 \end{aligned}$$

როდესაც  $M_2 = M_1$ , მაშინ  $M_C(\vec{R}_1) = 0$  და  $M_A(\vec{R}_2) = 0$ , რაც იმას ნიშნავს, რომ

$A$  წერტილზე მოდებული  $\vec{R}_1'$  ძალის ფუძე გადის  $C$  წერტილზე, ხოლო  $C$  წერტილზე მოდებული  $\vec{R}_2'$  ძალის გადის  $A$  წერტილზე. ამგვარად,  $\vec{R}_1'$  და  $\vec{R}_2'$  ძალები პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალებია, ამიტომ შეექმნება აქსიომის თანახმად შეგვიძლია სხეულს ჩამოვაშროთ და სხეულზე მოდებული იქნება მხოლოდ  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$  წყვილძალა. ამით თეორემა პირველი შემთხვევისთვის დამტკიცებულია.

მეორე შემთხვევის დასამტკიცებლად განვიხილოთ მესამე ისეთი  $(\vec{P}_3, \vec{Q}_3)$  წყვილძალა, რომლის ფუძეები კვეთს მოცემული წყვილძალების ფუძეებს და მისი მომენტი  $M_3 = M_2 = M_1$ . დამტკიცებული პირველი შემთხვევის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left. \begin{aligned}
 (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) \sim (\vec{P}_3, \vec{Q}_3) \\
 (\vec{P}_2, \vec{Q}_2) \sim (\vec{P}_3, \vec{Q}_3)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\vec{P}_1, \vec{Q}_1) \sim (\vec{P}_2, \vec{Q}_2).$$

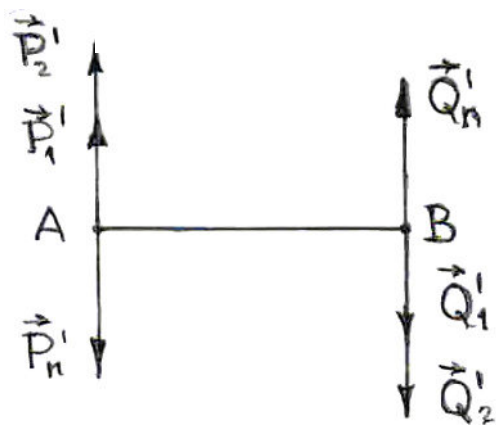
ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.  
 დამტკიცებული თეორემიდან გამომდინარეობს მეტად მნიშვნელოვანი შედეგი: წყვილძალა თავის სიბრტყეში შეგვიძლია შემოვაბრუნოთ, გადავიტანოთ სხვა

ადგილას, შევცვალოთ ძალის სიდიდე ან მხარის სიგრძე ისე, რომ მისი მომენტი არ შეიცვალოს. ამგვარად, წყვილძალის საცოდნელად საკმარისია ვიცოდეთ მისი მომენტი. ამასთან დაკავშირებით, ხშირად ნახაზზე წყვილძალას გამოსახავენ წრიული ისრით, რომელიც გვიჩვენებს თუ ის რა მიმართულებით ცდილობს მოაბ-რუნოს სხეული (ნახ. 4.6).

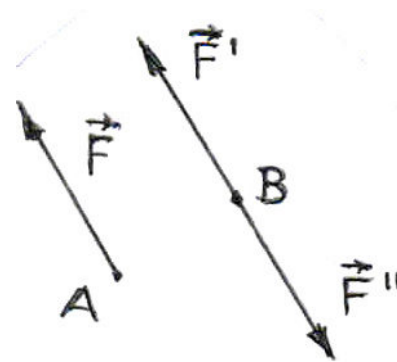
#### 4.9. ერთ სიბრტყეზე მდებარე წყვილძალების შეკრება

ვიხილავთ მყარ სხეულს, რომელზეც მოდებულია ერთ სიბრტყეზე მდებარე  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1), (\vec{P}_2, \vec{Q}_2), \dots, (\vec{P}_n, \vec{Q}_n)$  წყვილძალები შესაბამისად  $M_1, M_2, \dots, M_n$ -ის ტოლი მომენტებით.

დავამტკიცოთ შემდეგი თეორემა: ერთ სიბრტყეზე მდებარე რამდენიმე წყვილძალა ისეთი ერთი წყვილძალის ტოლფასია, რომლის სკალარული მომენტი წყვილძალების სკალარული მომენტების ჯამის ტოლია.



ნახ. 4.7



ნახ. 4.8

დამტკიცება. წყვილძალების სიბრტყეზე ავიღოთ რაიმე  $AB$  მონაკვეთი და თითოეული წყვილძალა შევცვალოთ თავისი ტოლფასი წყვილძალით ისე, რომ ყველას მხარი იყოს  $AB$  მონაკვეთი (ნახ. 4.7). მივიღებთ  $(\vec{P}'_1, \vec{Q}'_1), (\vec{P}'_2, \vec{Q}'_2), \dots, (\vec{P}'_n, \vec{Q}'_n)$  წყვილძალები, რომელთა მომენტები იქნება  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . შევკრიბოთ  $A$  და  $B$  წერტილებზე მოდებული ძალები და ჯამები აღვნიშნოთ  $\vec{P}'$  და  $\vec{Q}'$  ასოებით. მაშინ  $\vec{P}' = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2 + \dots + \vec{P}'_n$ ,  $\vec{Q}' = \vec{Q}'_1 + \vec{Q}'_2 + \dots + \vec{Q}'_n$ . ცხადია,  $\vec{P}'$  და  $\vec{Q}'$  ძალები შეადგენენ წყვილძალას. მას მოცემული წყვილძალების ტოლქმედი წყვილძალა ეწოდება. გამოვთვალოთ მისი მომენტი:

$$\begin{aligned}
M &= M(\vec{P}, \vec{Q}) = M(\vec{P}) + M(\vec{Q}) = M_A(\vec{Q}'_1) + M_A(\vec{Q}'_2) + \dots + M_A(\vec{Q}'_n) = \\
&= M(\vec{P}'_1, \vec{Q}'_1) + M(\vec{P}'_2, \vec{Q}'_2) + \dots + M(\vec{P}'_n, \vec{Q}'_n) = M_1 + M_2 + \dots + M_n. \quad \text{რ. დ. გ.}
\end{aligned}$$

#### 4.10. ერთ სიბრტყეზე მდებარე წვევილძალების წონასწორობა

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ერთ სიბრტყეზე მდებარე რამდენიმე წვევილძალა, რომელთა მომენტებია  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . შევცვალოთ ეს წვევილძალები ტოლქმედი წვევილძალით, რომლის მომენტი  $M^* = \sum_{k=1}^n M_k$ . თუ სხეულზე მხოლოდ წვევილძალები მოქმედებს, მაშინ მისი წონასწორობისათვის საჭიროა ტოლქმედი წვევილძალა ნულის ტოლფასი იყოს ანუ მისი მომენტი უნდა უდრიდეს ნულს. ამგვარად,

$$\sum_{k=1}^n M_k = 0. \quad (4.10.1)$$

**მივიღეთ:** ერთ სიბრტყეზე მდებარე რამდენიმე წვევილძალის წონასწორობისათვის მათი სკალარული მომენტების ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი.

#### 4.11. ძალის პარალელური გადატანა. მიკავშირებული წვევილძალა

**ლემა.** მყარი სხეულის რაიმე წერტილში მოდებული ნებისმიერი ძალა ტოლფასია სამი ძალის, რომელთაგან ერთი სხვა წერტილში მოდებული მისი ტოლი ძალაა, ხოლო ორი დანარჩენი შეადგენს წვევილძალას, რომლის მომენტი უდრის მოცემული ძალის მომენტს ახალი მოდების წერტილის მიმართ.

**დამტკიცება.** ვიხილათ მყარ სხეულს, რომლის  $A$  წერტილში მოდებულია  $\vec{F}$  ძალა. სხეულის ნებისმიერ  $B$  წერტილში მოვდოთ  $\vec{F}'$  და  $\vec{F}''$  პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები, რომელთაგან  $\vec{F}' = \vec{F}$  (ნახ. 4.8). მოდებული სამი ძალიდან  $\vec{F}$  და  $\vec{F}''$  შეადგენენ წვევილძალას, რომლის მომენტი  $M = M(\vec{F}, \vec{F}'') = M_B(\vec{F})$ . რ. დ. გ.

$(\vec{F}, \vec{F}'')$  წვევილძალას მიკავშირებული წვევილძალა ეწოდება.

4.12. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის დაყვანა  
ერთ ძალად და ერთ წყვილძალად

**თეორემა.** მყარ სხეულზე მოდებული ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემა, საზოგადოდ, ტოლფასია ნებისმიერ წერტილზე მოდებული ერთი ძალის და ერთი წყვილძალის. ძალა ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის, ხოლო წყვილძალის მომენტი – ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტისა ამ წერტილის მიმართ.

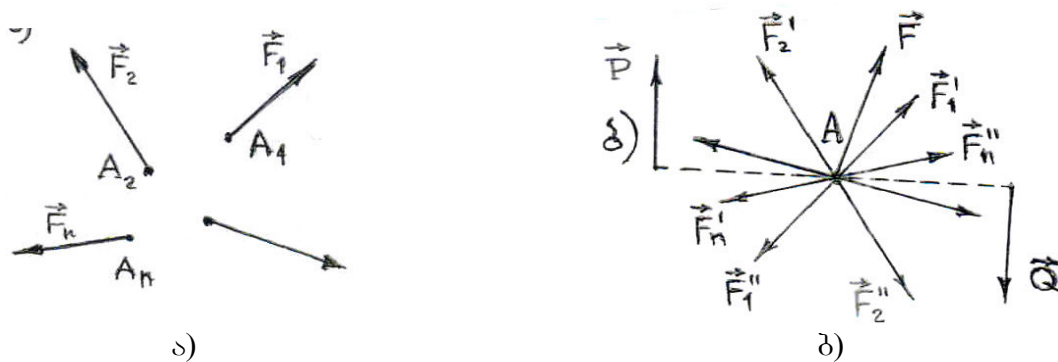
**დამტკიცება.** ვიხილავთ მყარ სხეულზე მოდებულ ერთ სიბრტყეში მდებარე  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალთა სისტემას (ნახ. 4.9,ა). სიბრტყეზე ავიღოთ ნებისმიერი  $A$  წერტილი და ყველა ძალა გადავიტანოთ თავის თავის პარალელურად ამ წერტილში (ნახ. 4.9,ბ). მივიღებთ  $A$  წერტილზე მოდებულ  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  ძალებს, რომლებიც შესაბამისად ტოლია  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალებისა და  $n$  ოდენობის მიკავშირებულ  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$  წყვილძალას.

შეგვრიბოთ  $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$  ძალები და მივიღებთ  $A$  წერტილზე მოდებულ ძალას, რომელიც ძალთა სისტემის  $\vec{F}^*$  ნაკრები ვექტორის ტოლია:

$$\vec{F}^* = \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2 + \dots + \vec{F}'_n = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (4.12.1)$$

შეგვრიბოთ მიკავშირებული წყვილძალებიც (იხ. §4.10). მივიღებთ ერთ წყვილძალას, რომლის მომენტი

$$M^* = M_A^* = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n). \quad \text{რ. დ. გ.}$$



ნახ. 4.9

$A$  წერტილს ძალთა სისტემის დაყვანის ცენტრი ეწოდება. ძალთა სისტემის შეცვლას ტოლფასი სისტემით, რომელიც  $A$  წერტილზე მოდებული ერთი ძალისა და ერთი წყვილძალისგან შედგება, ეწოდება ძალთა სისტემის დაყვანა  $A$  ცენტრამდე. დამტკიცებულ თეორემას პუანსოს თეორემა ეწოდება.

#### 4.13. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა (სტატიკის ძირითადი თეორემა)

**თეორემა.** ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები სკალარული მომენტი რაიმე ერთი წერტილის მიმართ იყოს ნულის ტოლი.

დამტკიცება. ვიხილავთ თავისუფალ მყარ სხეულზე მოქმედ ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემას. დავიყვანოთ ეს ძალთა სისტემა  $A$  ცენტრამდე. მივიღებთ  $A$  წერტილზე მოდებულ  $\vec{F}^*$  ნაკრებ ვექტორს და წყვილძალას, რომლის  $M_A^*$  მომენტი ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტია  $A$  ცენტრის მიმართ. უნდა დავამტკიცოთ, რომ სხეულის (და მასთან ერთად ძალთა სისტემის) წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია

$$\vec{F}^* = 0, M_A^* = 0 \quad (4.13.1)$$

(4.13.1) პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად დაეუშვათ, რომ სხეული წონასწორობაშია. როგორც ვიცით, ძალა და წყვილძალა დამოუკიდებელი მექანიკური სიდიდეებია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი ერთმანეთს ვერ გააწონასწორებენ. ამიტომ (4.13.1) პირობა აუცილებლად უნდა შესრულდეს. წინააღმდეგ შემთხვევაში სხეული იმოძრაავს.

საკმარისობის დასამტკიცებლად დაეუშვათ, რომ  $\vec{F}^* = 0, M_A^* = 0$ . ნებისმიერად ავირჩიოთ სიბრტყის  $B$  წერტილი და ძალთა სისტემა დავიყვანოთ ამ ახალ ცენტრამდე. მივიღებთ:  $\vec{F}^* = 0$ , ხოლო  $M_B^* = M_A^* - M_A(\vec{F}^*)_B$  (იხ. §4.5). ცხადია,  $M_B^* = 0$ . მივიღეთ, რომ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი სიბრტყის ყველა წერტილის მიმართ ( $B$  წერტილი ხომ ნებისმიერად ავირჩიეთ!) ნულის -, ე.ი. ძალთა სისტემა ნულის ტოლფასია, ამიტომ უძრავი სხეული ვერ ამოძრავდება. რ. დ. ბ.

#### 4.14. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები

სტატიკის ძირითადი თეორემის თანახმად ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მისი ნაკრები ვექტორი  $\vec{F} = 0$  და ნაკრები მომენტი  $M_A = 0$  ( $A$  დაყვანის ცენტრია) ან რაც იგივეა  $F_x = 0$ ,  $F_y = 0$ ,  $M_A = 0$ . ამ სიდიდეების ანალიზური გამოსახულებების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0. \end{cases} \quad (3.14.1)$$

(3.14.1) წარმოადგეს ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებს. პირველ ორს ეწოდება **გეგმილების განტოლებები**, ხოლო მესამეს – **მომენტების განტოლება**.

ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებების სხვა ფორმებიც არსებობს.

ძალის მომენტის გამოსათვლელად გამოვიყენებთ (4.1.1) ან (4.2.2) (ან (4.2.3)) ფორმულებს იმის მიხედვით, თუ რა არის ცნობილი: ძალის მხარი თუ მოდების წერტილის კოორდინატები. დამტკიცების გარეშე მოგვყავს ორი ფორმა.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_C(\vec{F}_k) = 0, \end{cases} \quad (4.14.2)$$

სადაც  $A$ ,  $B$  და  $C$  წერტილები ერთ წრფეზე არ უნდა მდებარეობდნენ.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_x = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \end{cases} \quad (4.14.3)$$

სადაც  $x$  ღერძი არ უნდა იყოს  $A$  და  $B$  წერტილებზე გამავალი წრფის მარ-თობი.

#### 4.15. ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის ტოლქმედი

განვიხილოთ მყარ სხეულზე მოდებული ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემა და დავიყვანოთ კოორდინატთა სათავის მიმართ ერთ ძალამდე, რომელიც ძალთა სისტემის  $\vec{F}$  ნაკრები ვექტორის ტოლია, და ერთ წყვილძალამდე, რომლის მომენტი უდრის სათავის მიმართ სისტემის  $M_o$  ნაკრებ მომენტს. თუ დაყვანის ცენტრად ავირჩევთ სხვა წერტილს, შეიცვლება ნაკრები მომენტი, ხოლო ნაკრები ვექტორი იგივე რჩება.

გავიხსენოთ ძალთა სისტემის ტოლქმედის განსზღვრა: ეს არის ერთად-ერთი ძალა, რომელიც ძალთა სისტემი ტოლფასია. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ დაყვანის ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე, მაშინ ეს ძალა არ არის ტოლქმედი; იმისათვის, რომ ძალთა სისტემას ჰქონდეს ტოლქმედი, საჭიროა დაყვანის დროს მივიღოთ მხოლოდ ძალა ე.ი. არ უნდა გვქონდეს წყვილძალა, რაც მისი მომენტის ნულთან ტოლობას ნიშნავს; წყვილძალის მომენტი კი დაყვანის ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტია. მივიღეთ: იმისათვის, რომ ძალთა სისტემა რაიმე წერტილის მიმართ დაიყვანებოდეს ტოლქმედზე, საჭიროა ამ წერტილის მიმართ მისი ნაკრები მომენტი იყოს ნულის ტოლი. დავსვათ კითხვა: არსებობს ბრტყელი ძალთა სისტემისთვის სიბრტყის ასეთი წერტილი?

**თეორემა.** თუ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, მაშინ სიბრტყეზე არსებობს მთელი წრფე, რომლის წერტილების მიმართ სისტემა ტოლქმედამდე დაიყვანება.

დამტკიცება. შევეცადოთ ვიპოვოთ ისეთი  $O'(x, y)$  წერტილი, რომლის მიმართაც ძალთა სისტემის  $M_o'$  ნაკრები სკალარული მომენტი იქნება ნულის ტოლი. (4.5.12)

$$\text{ფორმულის თანახმად } M_o' = M_o - xF_y + yF_x = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{F_y}{F_x} x - \frac{M_o}{F_x}. \quad (4.15.1)$$

(4.15.1) გამოსახულება  $Oxy$  სიბრტყეზე წარმოადგენს წრფის განტოლებას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებულმა თეორემამ პასუხი გასცა ზემოთ ჩვენს მიერ დასმულ კითხვას.



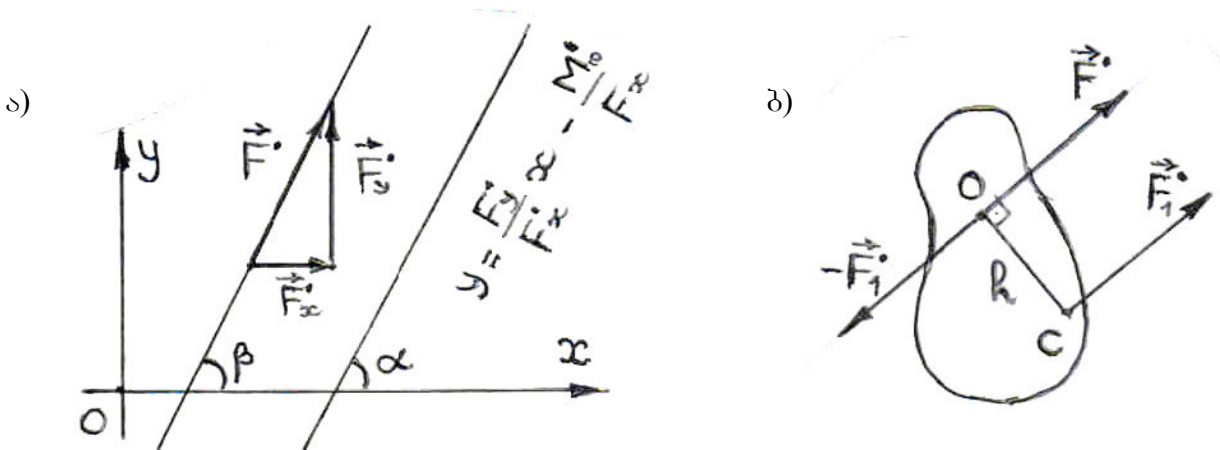
წრფეს, რომლის წერტილების მიმართაც ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედამდე, ცენტრალური ღერძი ეწოდება. (4.15.1) ცენტრალური ღერძის განტოლებაა.

აღსანიშნავია, რომ  $Oxy$  სიბრტყის ყველა იმ წერტილის მიმართ, რომელიც არ მდებარეობს ცენტრალურ ღერძზე, ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე.

(4.15.1) წრფის მიერ  $Ox$  ღერძთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ  $\alpha$  ასოთი (ნახ. 4.10, ა), მაშინ  $\operatorname{tg}\alpha = F_y^*/F_x^*$ . ტოლქმედის ფუძის მიერ  $Ox$  ღერძთან შედგენილი კუთხე აღვნიშნოთ  $\beta$  ასოთი, მაშინ  $\operatorname{tg}\beta = F_y^*/F_x^*$ . მივიღეთ, რომ ცენტრალური ღერძი პარალელურია ტოლქმედის ფუძის  $\Rightarrow$  ტოლქმედის ვექტორი მდებარეობს ცენტრალურ ღერძზე.

გთავაზობთ ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის ტოლქმედამდე დაყვანის თანმიმდევრობას:

1. მოცემული ძალთა სისტემა კოორდინატთა სათავეს მიმართ დაიყვანოთ ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე, რაც ფაქტიურად  $F_x^*, F_y^*, M_o^*$  სიდიდეების გაგებას ნიშნავს. თუ აღმოჩნდება, რომ  $\vec{F}^* \neq 0$  და  $M_o^* = 0$ , მაშინ ცენტრალური ღერძი გადის კოორდინატთა სათავეზე.



ნახ. 4.10

2.  $\vec{F}^* \neq 0$  და  $M_o^* \neq 0$ , მაშინ (4.15.1) ფორმულით ავაგებთ ცენტრალური ღერძს და მის ნებისმიერ წერტილში მოვდებთ ტოლქმედს.

მეორე შემთხვევაში ძალთა სისტემა ტოლქმედზე შეგვიძლია დაიყვანოთ სხვა გზითაც.  $M_o^*$  მომენტის მქონე წყვილძალა წარმოვადგინოთ  $(\vec{F}_1^*, -\vec{F}_1^*)$  წყვილძალის

სახით ისე, რომ  $-\vec{F}_1^* = -\vec{F}^*$  ძალა მოდებული იყოს  $O$  წერტილში და მხარი  $h = OC$  აკმაყოფილებდეს პირობას (ნახ. 4.10,ბ):

$$hF^* = M_0^* \Rightarrow h = OC = M_0^*/F^* . \quad (4.15.2)$$

მეექვსე აქსიომის თანახმად,  $\vec{F}^*$  და  $-\vec{F}_1^*$  ძალები შეგვიძლია სხეულს ჩამოვაცილოთ და დაგვრჩება  $C$  წერტილში მოდებული ერთად-ერთი ძალა.

ამგვარად,  $O$  წერტილიდან აღვმართავთ მართობს, მასზე გადავდებთ  $h = OC = M_0^*/F^*$  სიგრძის მონაკვეთს და  $C$  წერტილში მოვდებთ  $\vec{F}^*$ -ის ტოლ ძალას, რაც იქნება მოცემული ძალთა ტოლქმედი.  $C$  წერტილი ისე აიღება, რომ  $M_0(\vec{F}_1^*)$ -ის ნიშანი დაემთხვეს  $M_0^*$ -ის ნიშანს.

#### 4.16. ვარინიონის თეორემა ბრტყელი ძალთა სისტემის ტოლქმედის მომენტის შესახებ

**თეორემა.** რაიმე წერტილის მიმართ ბრტყელი ძალთა სისტემის ტოლქმედის სკალარული მომენტი უდრის იმავე წერტილის მიმართ შემდგენი ძალების სკალარული მომენტების ალგებრულ ჯამს.

**დამტკიცება.** მოცემულია მყარ სხეულზე მოდებული  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ბრტყელი ძალთა სისტემა, რომლის ნაკრები ვექტორი  $F^* \neq 0$ . წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ ამ შემთხვევაში ძალთა სისტემა დაიყენება ტოლქმედზე. ცნობილია, რომ ცენტრალური ღერძის ნებისმიერი  $B$  წერტილისთვის

$$\sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0 . \quad (4.16.1)$$

სიბრტყის ნებისმიერი  $A$  წერტილისთვის (4.5.9) ფორმულით გამოვთვალოთ ძალთა სისტემის ნაკრები სკალარული მომენტი. მივიღებთ:

$$\sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) + M_A(\vec{F}^*)_B .$$

(4.16.1) ტოლობის თანახმად

$$M_A(\vec{F}^*)_B = \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) .$$

$B$  წერტილი არის ცენტრალური ღერძის წერტილი, ამიტომ  $(\vec{F}^*)_B = \vec{R}^* \Rightarrow$

$$M_A(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k). \quad \text{რ.დ.გ.}$$

#### 4.17. ბრტყელი პარალელური ძალების წონასწორობის განტოლებები

ვიხილავთ მყარ სხეულზე მოდებულ ბრტყელ პარალელურ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალებს.  $Oxy$  სიბრტყეზე  $Oy$  ღერძი შევარჩიოთ მოცემული ძალების პარალელურად, მაშინ  $F_{kx} = 0$ ,  $F_{ky} = F_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). ამ შემთხვევაში ნებისმიერი ბრტყელი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{cases} F_1 + F_2 + \dots + F_n = 0, \\ x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n = 0. \end{cases} \quad (4.17.1)$$

ბრტყელი პარალელური ძალების წონასწორობის პირობა ასეთი ფორმითაც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_B(\vec{F}_k) = 0, \end{cases} \quad (4.17.2)$$

სადაც  $AB$  წრფე მოცემული ძალების პარალელური არ უნდა იყოს.

#### 4.18. ერთ სიბრტყეში მდებარე ორი ძალთა სისტემის ტოლფასობა

ვთქვათ, მოცემულია ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  და  $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \dots, \vec{Q}_n$  ძალთა სისტემა, რომელთა ნაკრები ვექტორები და რაიმე წერტილის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტები, აღნიშნული გვაქვს  $\vec{P}, M_1$  და  $\vec{Q}, M_2$ -ით.

**თეორემა.** ერთ სიბრტყეზე მდებარე ორი ძალთა სისტემის ტოლფასობი-სათვის აუცილებელი და საკმარისია მათ ტოლი ნაკრები ვექტორები და რაიმე წერტილის მიმართ ტოლი ნაკრები მომენტები ჰქონდეთ.

**დამტკიცება.** თეორემის პირობის თანახმად მოცემული ძალთა სისტემების ტოლფასობისათვის უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობები:

$$\vec{P} = \vec{Q}, \quad M_1 = M_2. \quad (4.18.1)$$

ამ პირობების აუცილებლობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ ეს სისტემები ტოლფასია და ვაჩვენოთ, რომ (4.18.1) პირობები სრულდება. განსაზღვრის

თანახმად ორი ძალთა სისტემის წონასწორობა ნიშნავს (§1.2): ისინი ერთსა და იმავე სხეულზე ერთნაირ მექანიკურ მოქმედებას ახდენენ (ანუ ერთნაირ მოძრაობებს ანიჭებენ). ეს გამონათქვამი ასე უნდა გვესმოდეს: ვინაიდან ძალა და წყვილ-ძალა დამოუკიდებელი მექანიკური სიდიდეებია და ისინი სხეულს ანიჭებენ ერთ-მანეთისგან განსხვავებულ მოძრაობებს (ძალა სხეულს გადაადგილებს, წყვილძალა კი აბრუნებს), ამიტომ ერთნაირი საბოლოო მოძრაობის მისაღებად ძალებმა ერთნაირი გადაადგილება და წყვილძალებმა ერთნაირი ბრუნვები უნდა მიანიჭონ ერთსა და იმავე სხეულს. ეს კი მაშინ მოხდება, როცა ძალები ტოლია ე.ი.  $\vec{P} = \vec{Q}$ , ხოლო წყვილძალები ტოლფასი, ე.ი. როცა  $M_1' = M_2'$  (იხ. §4.8). ამით (4.18.1)-ის აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობის დასამტკიცებლად დავუშვათ, რომ (4.18.1) პირობები სრულდება და დავამტკიცოთ, რომ ძალთა სისტემები ტოლფასია. აუცილებლობის დამტკიცების დროს აღვნიშნეთ, რომ ტოლი ძალები ერთსა და იმავე სხეულს ანიჭებენ ერთნაირ გადაადგილებებს, ხოლო ტოლფასი წყვილძალები – ერთნაირ ბრუნვებს, ამიტომ მოცემული ორი ძალთა სისტემა ერთსა და იმავე სხეულს ანიჭებს ერთნაირ საბოლოო მოძრაობას, რაც განსაზღვრის თანახმად ამ ძალთა სისტემების ტოლფასობას ნიშნავს. ამით თეორემა მთლიანად დამტკიცებულია.

მივიღეთ მეტად საინტერესო და, რაც მთავარია, მნიშვნელოვანი შედეგი: ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემისათვის არავითარი მნიშვნელობა არა აქვს სისტემაში ძალების ოდენობას, მათი მოდების წერტილებისა და მიმართულებების ცოდნას, თუ ვიცით ამ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და რაიმე წერტილის მიმართ ნაკრები სკალარული მომენტი. ამასთან დაკავშირებით  $\vec{F}$  ნაკრებ ვექტორსა და  $M$  ნაკრებ სკალარულ მომენტს ან უფრო ზუსტად,  $F_x, F_y, M$  სიდიდეებს, ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემის კოორდინატები ეწოდება.

#### 4.19. წონასწორობა ხახუნის გათვალისწინებით

ხახუნს ყოველდღიურ ცხოვრებასა და ტექნიკაში ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს. თუ ამოცანის ამოხსნისას ხახუნს არ გავითვალისწინებთ, მაშინ მიღებული შედეგი საძიებელი ამოხსნის პირველ მიახლოებად შეიძლება ჩაითვალოს. ზოგჯერ ხახუნის უგულებელყოფას მივეყვართ განსახილველი ამოცანისთვის არა-რეალურ შედეგამდე, რაც გვაიძულებს სხვა ძალებთან ერთად მხედველობაში მივიღოთ ეს ძალაც. ამ შემთხვევაში სხეულის წონასწორობის განხილვისას მხედველობაში

მივივიდებთ სხეულზე მოქმედ როგორც აქტიურ ძალებს, ასევე რეაქციის ძალებსაც. ამ უკანასკნელთა შორის იქნება ხახუნის ძალებიც.

#### **4.20. სტატიკურად განსაზღვრული (რკვევადი) და სტატიკურად განუსაზღვრელი (ურკვევი) ამოცანები**

ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალთა სისტემისთვის §4.14-ში მივიღეთ სამი წონასწორობის განტოლება. თუ ამოცანის ამოხსნისას აღმოჩნდება, რომ უცნობთა რიცხვი მეტია სამზე, მაშინ, როგორც აღგებრიდან ვიცით, ამოცანას არ ექნება ცალსახა ამონახსნი. ასეთ ამოცანას **სტატიკურად განუსაზღვრელი (ურკვევი)** ეწოდება. თუ უცნობთა რიცხვი სამის ტოლია, მაშინ ამოცანა **სტატიკურად განსაზღვრულია (რკვევადია)**.

#### **4.21. სხეულთა სისტემის წონასწორობა**

პრაქტიკაში ძალიან ხშირად საქმე გვაქვს სხეულთა სისტემასთან, რომლის წონასწორობისათვის საკმარისია თითოეული სხეული იყოს წონასწორობაში.

ამოცანის ამოხსნისას ცალკე უნდა გამოვყოთ თითოეული სხეული. იმის-ათვის, რომ გამოყოფილი სხეულის წონასწორობა არ დაირღვეს, მასთან უშუალო კავშირში მყოფი სხეულების მოქმედება უნდა შევცვალოთ შესაბამისი რეაქციის ძალებით (იხ. მესამე აქსიომა). ცხადია, გაითვალისწინება ის გარემოება, რომ ორი სხეულის დაკავშირების ადგილზე წარმოიშობა პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები, რომელთაგან ერთი მოდებულება ერთ სხეულზე, ხოლო მეორე – მეორეზე (იხ. მეოთხე აქსიომა). აღსანიშნავია, რომ განხილული ძალები სხეულთა სისტემისთვის შიგა ძალებია.

წონასწორობის განტოლების შესადგენად გვაქვს ორი ხერხი:

1. თითოეული სხეულისთვის ცალ-ცალკე შევადგენთ წონასწორობის განტოლებებს;

2. თუ გვაქვს  $n$  სხეული,  $n-1$  ოდენობის სხეულისათვის ცალ-ცალკე შევადგენთ წონასწორობის განტოლებებს, შემდეგ სხეულთა სისტემას გავამყარებთ (იხ. მერვე აქსიომა) და წონასწორობის განტოლებებს დავწერთ ერთი მთლიანი სხეულისთვის. ამ შემთხვევაში უკანასკნელ განტოლებებში არ შევა შიგა ძალები, რაც განტოლებათა სისტემას ძალიან ამარტივებს.

## 4.22. გორვის ხახუნი

§2.1 გავეცანით სრიალის ხახუნის კანონს. განვიხილოთ კიდევ ერთი სახის ხახუნი – გორვის ხახუნი. გორვის ხახუნი ეწოდება წინააღმდეგობას, რომელიც წარმოიშობა ერთი სხეულის გორვისას მეორე სხეულზე.

ვთქვათ,  $P$  წონისა და  $R$  რადიუსის მქონე ცილინდრული სატკეპნი ეყრდნობა ჰორიზონტალურ სიბრტყეს (ნახ. 4.11). სატკეპნის ცენტრზე მოვდოთ ჰორიზონტალური  $\vec{T}$  ძალა. თუ დავუშვებთ, რომ სატკეპნი და საყრდენი ზედაპირი დეფორმაციას არ განიცდიან, მაშინ მათ საერთო ექნებათ მხოლოდ ერთი წერტილი, კერძოდ შეხების წერტილი. მაგრამ რაეღურად როგორც სატკეპნი, ისე ზედაპირი, დეფორმირდებიან, რის გამოც მათ საერთო ექნებათ არა ერთი წერტილი, არამედ ზედაპირის გარკვეული ნაწილი. შედეგად  $\vec{N}$  ნორმალური რეაქციის ძალის  $C$  მოდების წერტილი რაღაც  $\delta$  მანძილით იქნება დაშორებული შეხების წერტილიდან. ხახუნის ძალა აღვნიშნოთ  $\vec{F}_b$  და შევადგინოთ სატკეპნზე მოქმედი ძალების წონასწორობის განტოლებები:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = T - F_b = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = N - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_A(\vec{F}_k) = M(\vec{T}) + M(\vec{P}) + M(\vec{N}) + M(\vec{F}_b) = 0. \quad \Rightarrow \\ F_b = T, \quad N = P, \quad M_A(\vec{N}) = -M_A(\vec{T}) = TR. \end{aligned} \quad (4.22.1)$$

**მივიღეთ:** წონასწორობისას სატკეპნზე მოქმედებს ორი გაწონასწორებული წყვილძალა, რომელთაგან  $(\vec{T}, \vec{F}_b)$  წყვილძალა ცდილობს სატკეპნი აამოძრავოს, ხოლო  $(\vec{P}, \vec{N})$  კი ეწინააღმდეგება მოძრაობას.  $(\vec{P}, \vec{N})$  წყვილძალის მომენტს გორვისას წინააღმდეგობის მომენტი ეწოდება. (4.22.1)-ის მესამე ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ  $M(\vec{P}, \vec{N}) = M_A(\vec{N}) = TR$ .

მოძრაობის დაწყების მომენტში წინააღმდეგობის მომენტი აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ცდებით დადგინდა, რომ

$$\left( M(\vec{P}, \vec{N}) \right)_{\max} = \delta N. \quad (4.22.2)$$

$\delta$ -ს გორვის ხახუნის კოეფიციენტი ეწოდება.

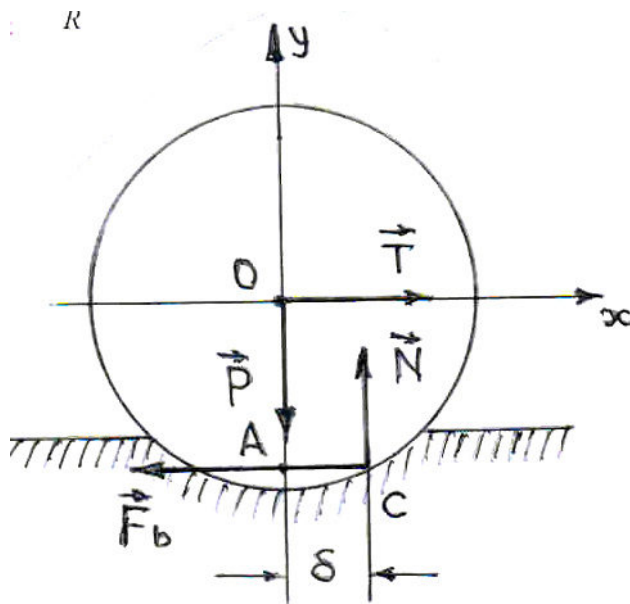
წონასწორობისას წინააღმდეგობის მომენტი არ აღემატება თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას, ამიტომ  $TR \leq \delta N \Rightarrow$

$$T \leq \frac{\delta}{R} N. \quad (4.22.3)$$

(4.22.3) არის იმის პირობა, რომ სატკეპნმა არ იგორაოს. §2.9-დან ცნობილია: იმისათვის, რომ სატკეპნმა არ ისრიალოს,  $\vec{T}$  ძალის სიდიდე ნაკლები უნდა იყოს ხახუნის ძალის მაქსიმალურ მნიშვნელობაზე, ე.ი. (იხ. (2.9.2))

$$T \leq fN.$$

$\delta/R$  ფარდობა, როგორც წესი, მნიშვნელოვნად მცირეა  $f$  სრიალის ხახუნის კოეფიციენტთან შედარებით, ამიტომ, სატკეპნის უძრაობის დარღვევისას სატკეპნი გაგორდება საყრდენ ზედაპირზე სრიალის გარეშე.



ნახ. 4.11

#### 4.23. მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

3.3 პარაგრაფში ჩამოვყალიბეთ წონასწორობაზე ამოცანების ამოსხნის მეთოდიკა. ბრტყელი ამოცანებისთვის (როცა სხეულზე მოქმედი ყველა ძალა ერთ სიბრტყეშია) მოგვყავს დამატებითი მითითებები.

ძალიან მნიშვნელოვანია მომენტთა ცენტრის შერჩევა. ცხადია, უმჯობესია ცენტრად ავირჩიოთ ისეთი წერტილი, რომელზეც გადის ყველაზე მეტი უცნობი ძალის ფუძე; ამით მომენტების განტოლებაში მცირდება უცნობთა რიცხვი.

მომენტის გამოთვლისას ხშირად ხელსაყრელია ძალა დაჯშალოთ ისეთ ორ შემდგენად, რომელთაგან ერთის ფუჟე გადიოდეს მომენტთა ცენტრზე, ხოლო მეორე იყოს ამ ფუჟის მართობი. ვარინიონის თეორემის თანახმად ტოლქმედის მომენტი უდრის შემდგენების მომენტების ჯამს.

გვახსოვდეს, რომ წყვილძალის მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე და ნებისმიერ ღერძზე მისი გეგმილების ჯამი უდრის ნულს, რის გამოც წყვილძალა არ შედის გეგმილების განტოლებებში.

**ამოცანა 4.1.**  $A(-5;12)$  წერტილში მოდებულია  $\vec{F}(3;-4)$  ძალა. იპოვე ძალის სკალარული მომენტი კოორდინატთა სათავისა და  $B(8;6)$  წერტილის მიმართ.

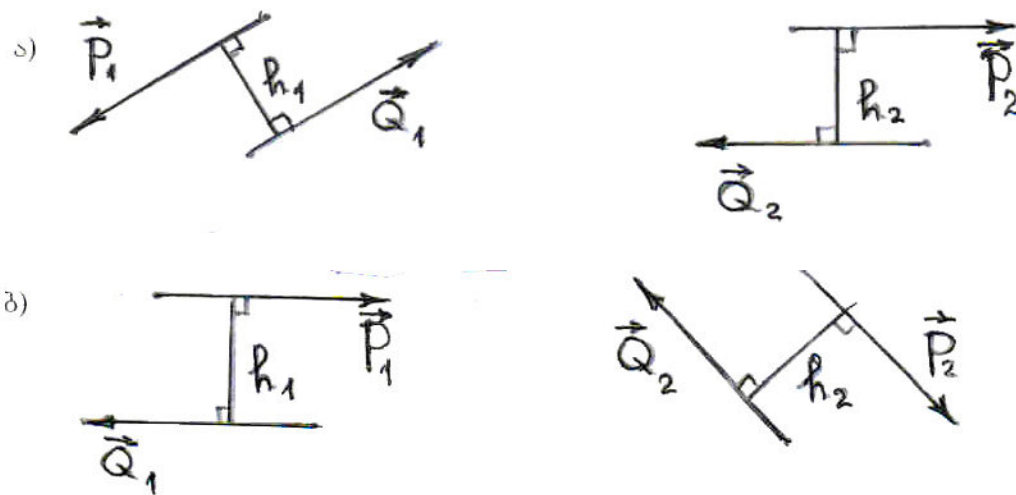
ამოხსნა. გვაქვს:  $x=-5$ ,  $y=12$ ,  $a=8$ ,  $b=6$ ,  $F_x=3$ ,  $F_y=-4$ . ამ სიდიდეების გათვალისწინებით, (4.3.3) და (4.3.2) ფორმულები გვაძლევს:

$$M_0 = -5 \cdot (-4) - 12 \cdot 3 = -16; \quad M_B = (-5-8)(-4) - (12-6) \cdot 3 = 34 \text{ ნმ.}$$

$M_B$ -ს გამოსათვლელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ (4.3.6) ფორმულა:

$$M_B = M_0 + aF_y - bF_x = -16 - 8 \cdot (-4) + 6 \cdot 3 = 34 \text{ ნმ.}$$

პასუხი.  $-16$  ნმ;  $34$  ნმ.



ნახ. 4.12

**ამოცანა 4.2.** ტოლფასია თუ არა  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$  და  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$  წყვილძალები, თუ ა)

$P_1 = Q_1 = 7$  ნ,  $h_1 = 1,2$  მ;  $P_2 = Q_2 = 4,16$  ნ,  $h_2 = 2$  მ (ნახ. 4.12, ა); ბ)  $P_1 = Q_1 = 15$  ნ,  $h_1 = 3,2$  მ;

$P_2 = Q_2 = 10$  ნ,  $h_2 = 4,8$  მ (ნახ. 4.12, ბ).

ამოხსნა. ადვილად მივიღებთ:



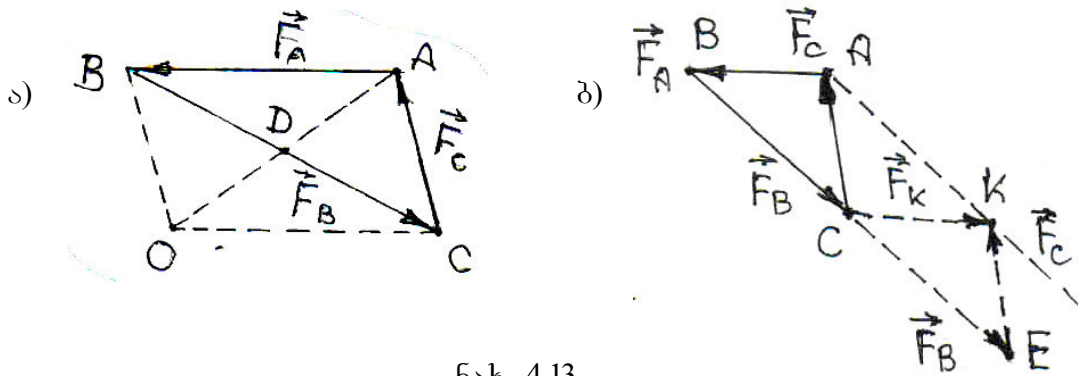
ა)  $M_1 = P_1 h_1 = 7 \cdot 1,2 = 8,4 \text{ მძ}$ ;  $M_2 = -P_2 h_2 = -4,1 \cdot 2 = -8,4 \text{ მძ}$

ბ)  $M_1 = P_1 h_1 = 15 \cdot 3,2 = 48 \text{ მძ}$ ;  $M_2 = P_2 h_2 = 10 \cdot 4,8 = 48 \text{ მძ}$

პასუხი. ა) არა; ბ) დიახ.

**ამოცანა 4.3.** მყარი სხეულის  $A, B, C$  წერტილებში მოღებული  $\vec{F}_A, \vec{F}_B, \vec{F}_C$  ძალები ქმნიან სამკუთხედს. რისი ტოლფასია მოცემული ძალთა სისტემა (ნახ. 4.13,ა)? [26]

ამოხსნა. ვინაიდან სამკუთხედი შეკრული ფიგურაა, ამიტომ მოცემული ძალების ნაკრები ვექტორი ნულის ტოლია (იხ. §2.1). როგორც ცნობილია, ამ შემთხვევაში ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე (იხ. §4.5). ამ ძალების ნაკრები მომენტი რომ მუდმივია, შეგვიძლია ვაჩვენოთ სხვა, ძალიან საინტერესო გზითაც. მომენტთა ცენტრად ავიღოთ სიბრტყის ნებისმიერი  $O$  წერტილი. (4.12) ფორმულის თანახმად,



ნახ. 4.13

$$\begin{aligned}
 M_0^* &= M_0(\vec{F}_A) + M_0(\vec{F}_B) + M_0(\vec{F}_C) = 2\sigma_{\triangle AOB} - 2\sigma_{\triangle BOC} + 2\sigma_{\triangle AOC} = \\
 &= 2\sigma_{\triangle ABD} + 2\sigma_{\triangle BOD} - 2\sigma_{\triangle BOD} - 2\sigma_{\triangle DOC} + 2\sigma_{\triangle ADC} + 2\sigma_{\triangle DOC} = \\
 &= 2\sigma_{\triangle ABD} + 2\sigma_{\triangle ADC} = 2\sigma_{\triangle ABC}.
 \end{aligned}$$

რადგანაც  $O$  წერტილი არჩეულია ნებისმიერად, ამიტომ მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები მომენტი მუდმივია და  $2\sigma_{\triangle ABC}$ -ს ტოლია.

**შენიშვნა.** იგივეს გვიმტკიცებს შემდეგი ტოლობებიც:

$$M_A^* = 2\sigma_{\triangle ABC}, \quad M_B^* = 2\sigma_{\triangle ABC}, \quad M_C^* = 2\sigma_{\triangle ABC}.$$

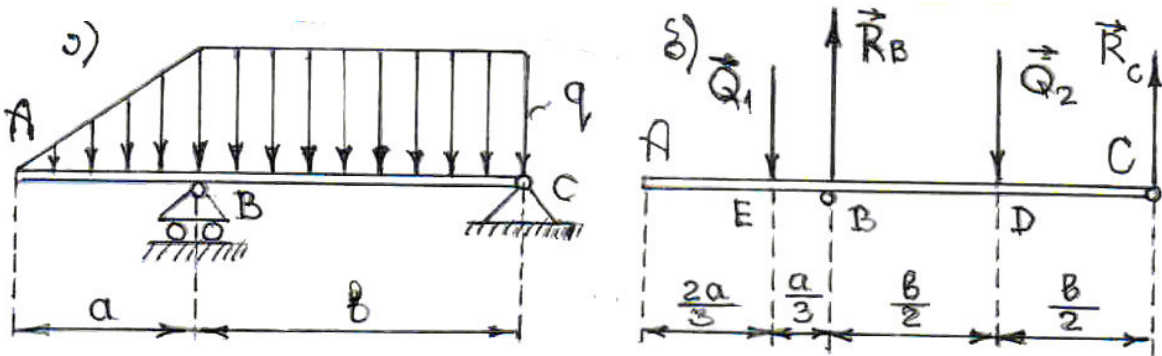
გავასრიალოთ  $\vec{F}_B$  ძალა თავის ფუძის გასწვრივ და მოვლოთ  $C$  წერტილში და შევეკრიბოთ  $\vec{F}_C$  ძალასთან. ჯამი აღვნიშნოთ  $CK$ -თი. ადვილად ვაჩვენებთ, რომ  $\triangle ABC = \triangle KCE \Rightarrow CK = AB$ . საბოლოოდ მივიღეთ:  $\vec{F}_K = -\vec{F}_A$ , ე.ი.  $\vec{F}_A$  და  $\vec{F}_K$  ძალები შეადგენენ წყვილძალას.

პასუხი. მოცემული ძალთა სისტემა ტოლფასია წყვილძალის, რომლის მო-მენტი უდრის  $2q\Delta ABC$ -სი.

**ამოცანა 4.4.** ჰორიზონტალური  $AC$  კოჭი, რომელიც  $B$  და  $C$  წერტილებში ეყრდნობა მოძრავ და უძრავ სახსროვან საყრდენებს, ამ წერტილებს შორის განიცდის თანაბარ დატვირთვას  $q$  ინტენსივობით, ხოლო  $AB$  მონაკვეთზე იტენსივ-ნობა მცირდება წრფივი კანონით ნულამდე (ნახ. 4.14,ა). გაიგეთ საყრდენების რე-აქციები, თუ კოჭის წონას მხედველობაში არ მივიღებთ. [64]

ამოხსნა. შევცვალოთ დატვირთვები  $Q_1 = \frac{1}{2}AB \cdot q = \frac{1}{2}a \cdot q$  და  $Q_2 = BC \cdot q = b \cdot q$

მოდულების მქონე ვერტიკალური ძალებით. მოძრავი სახსრის  $\vec{R}_B$  რეაქცია მიმართულია ზევით კოჭის მართობულად (ნახ. 4.14,ბ). ამგვარად, კოჭზე მოქმედი ოთხი ძალიდან სამი ერთმანეთის პარალელურია. ცხადია, მეოთხე  $\vec{R}_A$  ძალაც მათი პარალელური უნდა იყოს, წინააღმდეგ შემთხვევაში კოჭი არ იქნება წონასწო-რობაში. გასგები გვაქვს  $\vec{R}_A$  და  $\vec{R}_B$  ძალების მოდულები. გვჭირდება ორი წონას-წორობის განტოლება.



ნახ. 4.14

შევადგინოთ მომენტების გატოლებები  $B$  და  $C$  წერტილების მიმართ:

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = Q_1 \frac{1}{3}AB - Q_2 \frac{1}{2}BC + R_C BC = 0,$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = Q_1 \left( \frac{1}{3}AB + BC \right) - R_B BC + Q_2 \frac{1}{2}BC = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}qa \frac{1}{3} - qb \frac{b}{2} + R_C b = 0, \quad \frac{1}{2}qa \left( \frac{1}{3} + b \right) + qb \frac{b}{2} - R_B b = 0 \quad \Rightarrow$$

$$R_C = \frac{q}{b} \left( -\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{2} \right) = \frac{q}{6} \left( 3b - \frac{a^2}{b} \right), \quad R_B = \frac{q}{b} \left( \frac{a^2}{6} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{2} \right) = \frac{q}{6} \left( 3a + 3b + \frac{b^2}{b} \right).$$

$$\text{პასუხი. } R_B = \frac{q}{6} \left( 3a + 3b + \frac{b^2}{b} \right); \quad R_C = \frac{q}{6} \left( 3b - \frac{a^2}{b} \right).$$

**ამოცანა 4.5.**  $2l$  სიგრძისა და  $P$  წონის ჰორიზონტალური ერთგვაროვანი კოჭი  $A$  წერტილში დამაგრებულია სახსრით, ხოლო  $B$  ბოლოთი ეყრდნობა ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ გლუვ ზედაპირს (ნახ. 4.15). კოჭზე მოქმედებს წყვილძალა, რომლის მომენტი  $M$ -ის ტოლია. განსაზღვრეთ სახსრისა და ზედაპირის რეაქციები. [23]

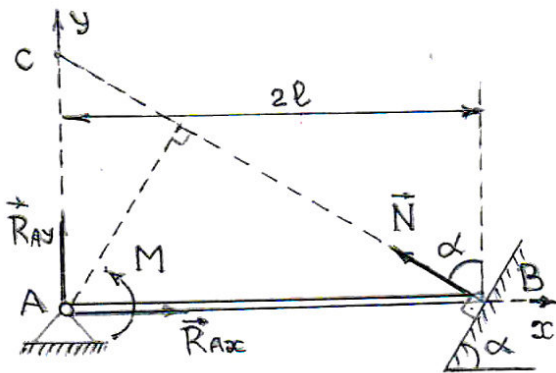
ამოხსნა. წონასწორობის ობიექტია  $AB$  კოჭი. მასზე მოქმედებს  $P$  სიმძიმის ძალა, წყვილძალა  $M$  მომენტით,  $\vec{N}$  ზედაპირის რეაქცია და სახსრის  $\vec{R}_A$  რეაქცია, რომელსაც დავშლით  $\vec{R}_{Ax}$  და  $\vec{R}_{Ay}$  შემდგენებად. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= R_{Ax} - N \cos(90^\circ - \alpha) = 0, \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - P + N \cos \alpha = 0, \\ \sum M_A(\vec{F}_k) &= -Pl + N \cdot 2l \sin(90^\circ - \alpha) + M = 0. \end{aligned}$$

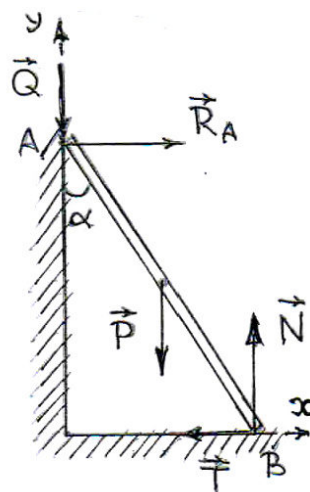
ამ განტოლებების ამოხსნა გვაძლევს:

$$R_{Ax} = \frac{Pl - M}{2l} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_{Ay} = \frac{Pl - M}{2l}, \quad N = \frac{Pl - M}{2l \cos \alpha}. \quad (5)$$

**შენიშვნა.** როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ გეგმილების განტოლებებში არ შედის წყვილძალის შემადგენელი ძალების გეგმილები, ვინაიდან წყვილძალის ძალების გეგმილები ნებისმიერ ღერძზე სიდიდით ტოლია და ნიშნით განსხვავებული, ამიტომ მათი ჯამი უდრის ნულს.



ნახ. 4.15



ნახ. 4.16

იმავე კოჭისთვის შევადგინოთ (4.14.2) სახის წონასწორობის განტოლებები ( $A, B$  და  $C$  წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ):

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Pl + N \cdot 2l \cos \alpha + M = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = Pl - R_{Ay} \cdot 2l + M = 0,$$

$$\sum M_C(\vec{F}_k) = -Pl + R_{Ax} \cdot 2l \operatorname{ctg} \alpha + M = 0.$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს იმავე (ა) ამონახსნებს.

ახლა შევადგინოთ (4.14.3) სახის წონასწორობის განტოლებები ( $x$  ღერძი არ უნდა იყოს  $AB$  წრფის მართობი):

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -Pl + N \cdot 2l \cos \alpha + M = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = Pl - R_{Ay} \cdot 2l + M = 0,$$

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - N \sin \alpha = 0.$$

ამ სისტემის ამოხსნითაც იმავე (ა) ამონახსნებს ვღებულობთ.

$$\text{პასუხი. } R_{Ax} = \frac{Pl - M}{2l} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_{Ay} = \frac{Pl - M}{2l}, \quad N = \frac{Pl - M}{2l \cos \alpha}.$$

**ამოცანა 4.6.** 120 ნ წონის ერთგვაროვანი  $AB$  კიბე ერთი ბოლოთი ეყრდნობა გლუვ ვერტიკალურ კედელს, ხოლო მეორე ბოლოთი – არაგლუვ ჰორიზონტალურ იატაკს (ნახ. 4.16). რას უნდა უდრიდეს ხახუნის კოეფიციენტის უმცირესი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც 700 ნ წონის ადამიანს შეეძლება ასვლა კიბეზე ბოლო საფეხურამდე ისე, რომ კიბე არ გასრიალდეს იატაკის გასწვრივ, თუ  $\alpha = 20^\circ$ ?

**ამოხსნა.** ვიხილავთ კიბის წონასწორობას. მასზე მოქმედებს  $\vec{P}$  სიმძიმის ძა-ლა,  $\vec{Q}$  ადამიანის სიმძიმის ძა-ლა, რომელიც უნდა მოვდოთ კიბის  $A$  წერტილში,  $\vec{R}_A$  გლუვი კედლის რეაქცია,  $\vec{N}$  იატაკის ნორმალური რეაქცია და  $\vec{T}$  იატაკის ხახუნის ძა-ლა.

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = R_A - T = 0, \quad \sum F_{ky} = -Q - P - N = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = Q \cdot AB \sin \alpha + P \frac{AB}{2} \sin \alpha - R_A \cdot AB \cos \alpha = 0.$$

ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ:

$$T = R_A = \frac{2Q + P}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad N = P + Q. \quad (\text{ა})$$

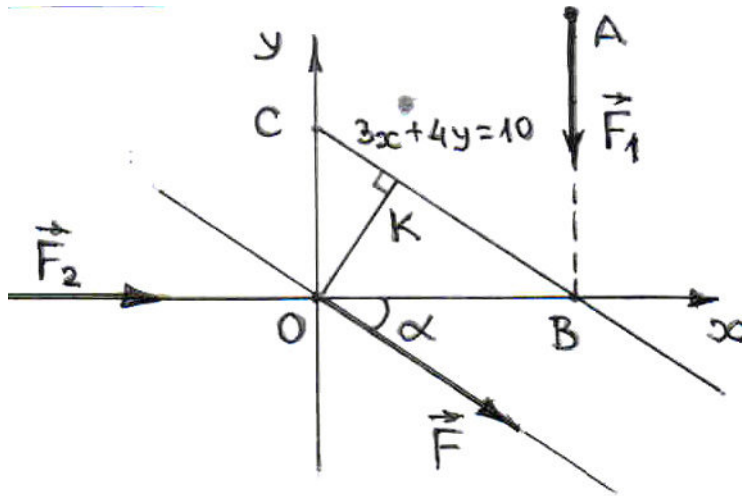
ცხადია, ადამიანს მხოლოდ მაშინ შეუძლია ავიდეს კიბეზე ბოლო საფეხურამდე, როცა იატაკის ხახუნის ძალის სიდიდე ნაკლები იქნება თავის მაქსი-მალურ მნიშვნელობაზე, ე.ი.  $T_{აქ} = fN$ -ზე, სადაც  $f$  ხახუნის კოეფიციენტი. (ა) ტოლობების გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$\frac{2Q+P}{2} \operatorname{tg} \alpha \leq f(P+Q) \quad \Rightarrow \quad f \geq \frac{2Q+P}{2(P+Q)} \operatorname{tg} \alpha.$$

როცა  $P=120$  ნ,  $Q=700$  ნ,  $\alpha = 20^\circ$ , მაშინ  $f_{აბ} = 0,34$ .

პასუხი.  $0,34 \leq f \leq 1$ .

**ამოცანა 4.7.** მყარი სხეულის  $A(x_1=10, y_1=4)$  წერტილზე მოდებულია ვერტიკალური  $F_1=3$  ნ მოდულის მქონე ძალა და ჰორიზონტალური  $F_2=4$  ნ მოდულის მქონე ძალა. კოორდინატა ღერძების მიმართულებები მოცემულია ნახ. 4.17-ზე. სიგრძე იზომება მეტრებით. დაიყვანეთ ძალთა სისტემა სათავის მიმართ (ე.ი.  $O$  წერტილის მიმართ გამოთვალეთ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები მომენტი). იპოვეთ ძალთა სისტემის ტოლქმედი. [26]



ნახ. 4.17

ამოხსნა. ძალთა სისტემა შედგება ორი  $\vec{F}_1(0;3)$  და  $\vec{F}_2(4;0)$  ძალისაგან, რომელთა მოდების წერტილებია:  $A_1(10;4)$  და  $O(0;0)$ .

(2.4.3) ფორმულის თანახმად,

$$F_x^* = F_{1x} + F_{2x} = 4+0 = 4 \text{ ნ}, \quad F_y^* = F_{1y} + F_{2y} = -3+0 = -3 \text{ ნ} \quad \Rightarrow \quad F^* = 5 \text{ ნ}, \quad \alpha = \arcsin 0,6.$$

(4.4.1) ფორმულის თანახმად,

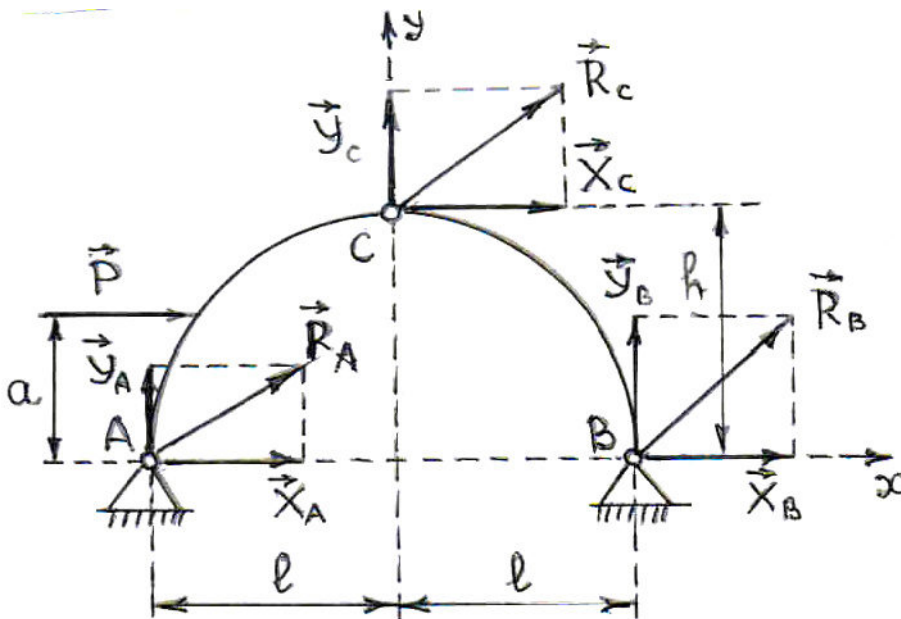
$$M_{0x}^* = -F_1 \cdot OB + F_2 \cdot 0 = -10 \cdot 3 = -30 \text{ ნმ}; \quad M_{0y}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0^* = 30 \text{ ნმ}.$$

ცენტრალური ღერძის განტოლება დავწეროთ (4.15.1) ფორმულის გამოყენე-

ბით:  $y = \frac{F_y^*}{F_x^*}x - \frac{M_o^*}{F_x^*} \Rightarrow y = \frac{-3}{4}x - \frac{-30}{4} \Rightarrow 3x + 4y = 30.$

პასუხი.  $F_x^* = 4$  ნ,  $F_y^* = -3$  ნ,  $M_{ox}^* = -30$  ნმ,  $M_{oy}^* = 0$ ,  $3x + 4y = 30.$

**ამოცანა 4.8.** იპოვეთ ნახ. 4.18-ზე მოცემული  $ACB$  თაღის  $A, B, C$  სახსრების რეაქციების შემდგენები, რაც გამოწვეულია  $P$  სიდიდის ჰორიზონტალური ძალის მოქმედებით.



ნახ. 4.18

**ამოხსნა.** ეს ამოცანა ჩვენ განვიხილეთ მე-3 თავში (იხ. ამოცანა 3.2). იმ შემთხვევაში, როცა  $l = h = 2a$ , განვსაზღვრეთ  $\vec{R}_A, \vec{R}_B$  და  $\vec{R}_C$  რეაქციები. ჩვენი მიზანია განვსაზღვროთ ამ რეაქციების გეგმილები:  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C.$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები მთლიანი თაღისთვის:

$$\sum X_k = X_A + X_B + P = 0,$$

$$\sum Y_k = Y_A + Y_B = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = -P \cdot a - Y_A \cdot 2l = 0.$$

შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები BC ნახევართაღისთვის:

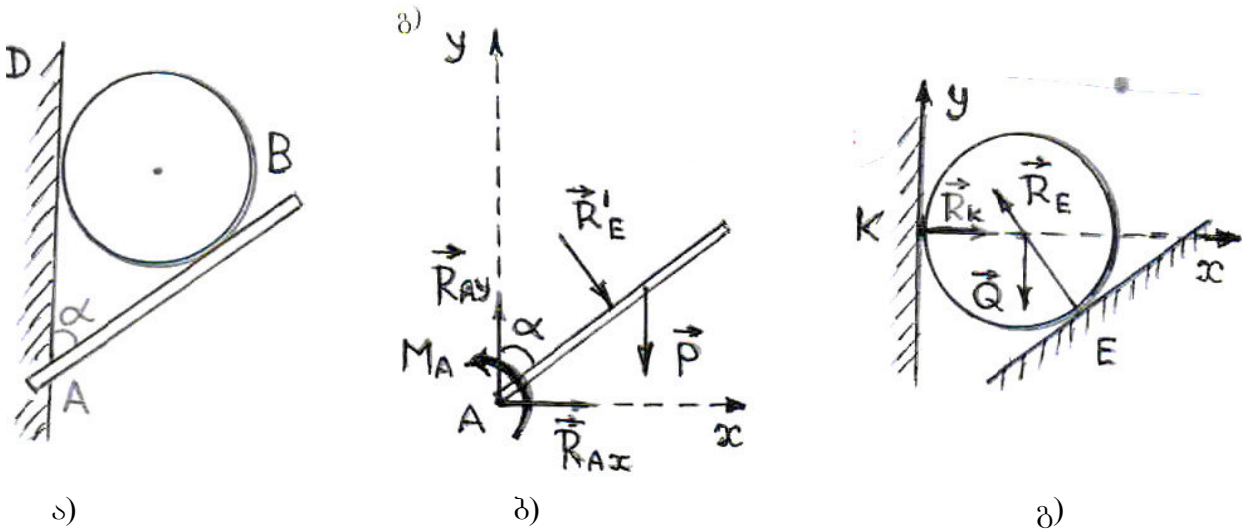
$$\sum X_k = Y_C + Y_B = 0,$$

$$\sum F_{ky} = F_{Cy} + F_{By} = 0,$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = -Y_C \cdot l - X_C \cdot a = 0.$$

მივიღოთ ექვსი განტოლება ექვსი უცნობით. ამ სისტემის ამოხსნით ვღებულობთ:  $X_A = \left(\frac{a}{2h} - 1\right)P$ ,  $X_B = -X_C = -\frac{a}{2h}P$ ,  $Y_A = -Y_B = Y_C = -\frac{a}{2l}P$ .

**ამოცანა 4.9.** ერთგვაროვანი ძელი ხისტად არის ჩამაგრებული კედელში, რომელთანაც ადგენს  $\alpha = 60^\circ$  კუთხეს (ნახ. 4.19). ძელის იმ ნაწილის, რომელიც კედლის გარეთაა, სიგრძე  $AB = b = 0,8$  მ, ხოლო წონა  $-P = 100$  ნ.  $DAB$  კუთხეში დევს  $Q = 180$  ნ წონის ცილინდრი, რომელიც ძელს ეხება  $E$  წერტილში, ამასთან  $AE = a = 0,3$  მ. განსაზღვრეთ ჩამაგრების რეაქცია. [26; 48]



ნახ. 4.19

ამოხსნა. გვაქვს ძელისა და ცილინდრისგან შედგენილი სხეულთა სისტემა. მისი წონასწორობისათვის ორივე სხეული უძრავი უნდა იყოს.

კედელში ხისტი ჩამაგრებისას ძელის ჩამაგრებული ნაწილის ყოველ წერტილზე მოქმედებს რეაქციის ძალა. ეს ძალთა სისტემა დაგვყავს  $A$  წერტილის მიმართ ერთ  $\vec{R}_A(R_{Ax}, R_{Ay})$  რეაქციის ძალამდე და ერთ რეაქციის წყვილძალამდე  $M_A$  მომენტით.

ვიხილავთ ძელის წონასწორობას. მასზე მოქმედებს  $\vec{P}$  სიმძიმის ძალა,  $\vec{R}'_E$  - ცილინდრის დაწოლა,  $\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}$  და  $M_A$  - კედლის რეაქციები.

დავწეროთ ძელის წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R'_E \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - P - R'_E = 0, \quad (ა)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = -R'_E \cdot a - P \cdot \frac{b}{2} \sin \alpha + M_A = 0.$$

ამ სისტემაში ოთხი უცნობია. ერთ მათგანს, კერძოდ  $R'_E$ -ს, გავიგებთ ცილინდრის წონასწორობიდან (ნახ. 4.19,ბ):

$$\sum F_{ky} = -Q + R_E \sin \alpha = 0 \Rightarrow R_E = Q / \sin \alpha. \quad (ბ)$$

ქმედებისა და უკუქმედების აქსიომის თანახმად,  $R'_E = R_E = Q / \sin \alpha$ .

(ბ) ტოლობის გათვალისწინებით (ა) სისტემიდან მივიღებთ:

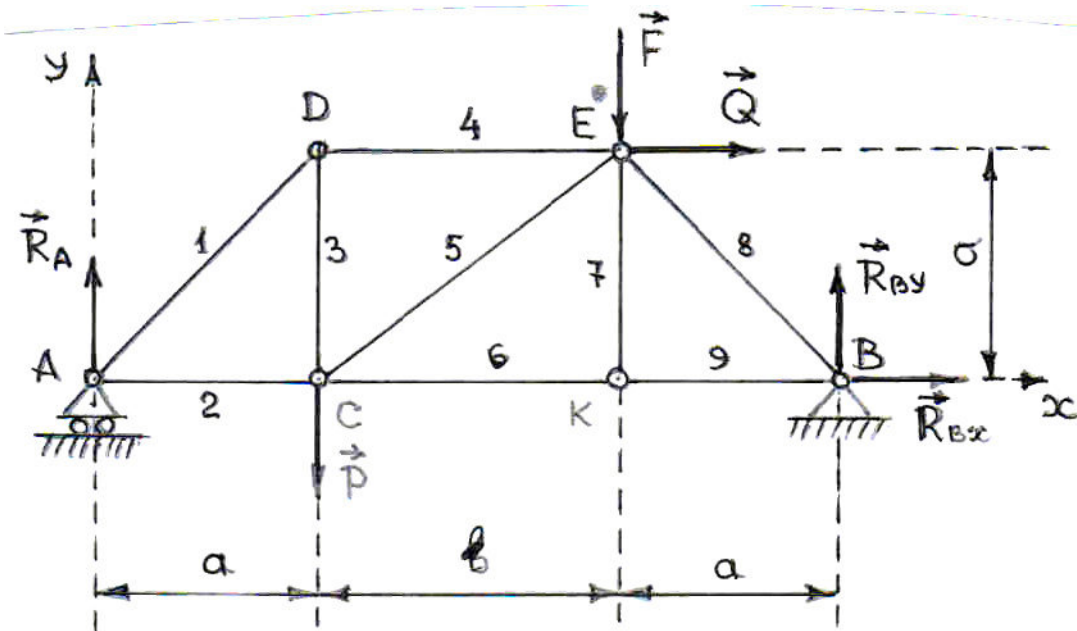
$$R_{Ax} = -Qctg\alpha, \quad R_{Ay} = P + Q, \quad M_A = \frac{a}{\sin \alpha} Q + \frac{b \sin \alpha}{2} P.$$

შევიტანოთ მოცემული სიდიდეები, მივიღებთ:

$$R_{Ax} \approx 103,93 \text{ ნ}; \quad R_{Ay} = 280 \text{ ნ}; \quad M_A \approx 97 \text{ ნ}.$$

**ამოცანა 4.10.** განსაზღვრეთ წამწის საყრდენების რეაქციები და ძალვა ყოველ ღეროში, თუ ცნობილია, რომ  $P=3$  კნ,  $Q=2$  კნ,  $F=2$  კნ,  $a=3$  მ,  $b=4$  მ (ნახ. 4.20.ა).

[64]



ნახ. 4.20,ა

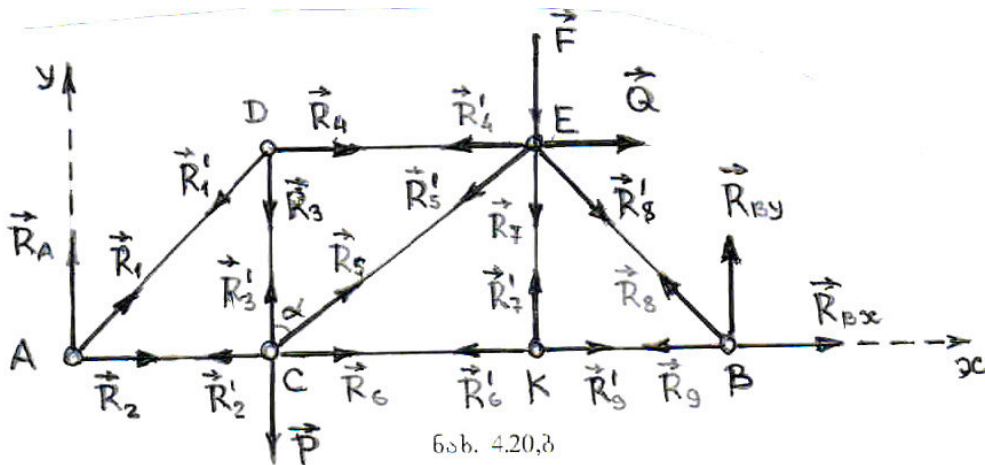


ამოხსნა. პირველ რიგში უნდა უნდა განვსაზღვროთ საყრდენთა რეაქციები. წამწვეზე მოქმედებს შემდეგი ძალები:  $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{F}, \vec{R}_A$  -  $A$  საყრდენის რეაქცია,  $\vec{R}_{Bx}$  და  $\vec{R}_{By}$  -  $B$  საყრდენის რეაქციის შემდეგნები. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = Q + R_{Bx} = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_k) = -R_A \cdot (2a + b) + P \cdot (a + b) + F \cdot a - Q \cdot a = 0.$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:  $R_A = 2,1$  კნ;  $R_{Bx} =$

გადავიდეთ ღეროებში ძალების განსაზღვრაზე. გამოვიყენოთ კვანძების ამოჭრის მეთოდი, რაც შემდეგში მდგომარეობს: ვიხილავთ ყოველი კვანძის წონასწორობას. ამისათვის კვანძს ჩამოვაშორებთ ღეროებს და მათ მაგივრად მოვდებთ შესაბამის რეაქციის ძალებს. ვიწყებთ იმ კვანძიდან, რომელშიც მხოლოდ ორი ღეროა შეერთებული (ვინაიდან ამ შემთხვევაში ორი წონასწორობის განტოლება გვაქვს). ასეთი გვაქვს ორი კვანძი:  $A$  და  $B$ . დავიწყოთ  $A$  კვანძიდან. დაეუშვათ, რომ ყველა ღერო იჭიმება. ღეროს გაჭიმვის დროს მასში წარმოშობილი ძალა ანუ ძალვა (კვანძის მოქმედებით აღძრული ძალა), მიმართულია კვანძიდან გარეთ, ხოლო ღეროს რეაქციის ძალა (ღეროს მოქმედება კვანძზე) - კვანძიდან შიგნით (ნახ. 4.20,ბ). ძალვას, როგორც წესი, აღვნიშნავთ  $S$  ასოთი.



ნახ. 4.20,ბ

ნახ. 4.20,ბ

$A$  კვანძზე მოქმედებს სამი ძალა:  $\vec{R}_A, \vec{R}_1, \vec{R}_2$ . ამ ძალებისთვის არ ვიცით მხოლოდ ბოლო ორის მოდული. მათი გაგება შეგვიძლია როგორც ანალიზური მეთოდით, ასევე გეომეტრიულით (ძალთა სამკუთხედის აგებით). შევადგინოთ ამ ძალებისთვის

წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum F_{kx} = R_2 + R_1 \cos 45^\circ = 0, \quad \sum F_{ky} = R_A + R_1 \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$R_1 = -R_A \sqrt{2} \approx -2,97 \text{ კნ}; \quad R_2 = 2,1 \text{ კნ}.$$

$R_1$ -ის უარყოფითი ნიშანი ნიშნავს, რომ ღერო 1 იკუმშება

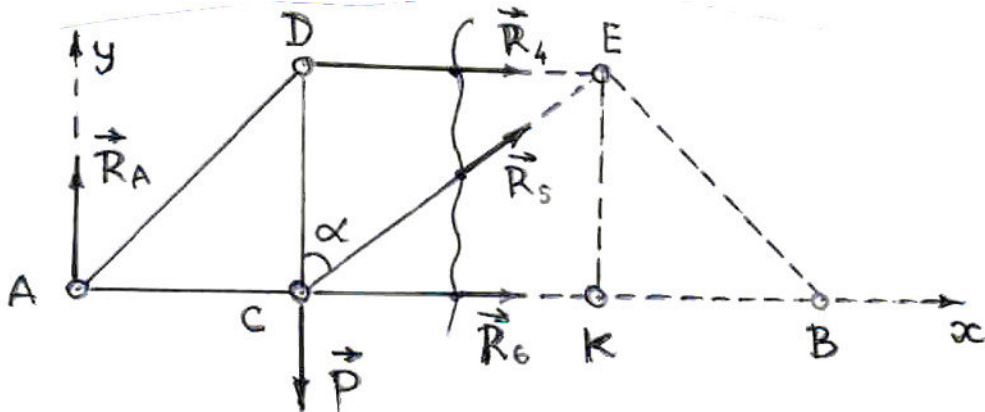
$A$  კვანძიდან უნდა გადავიყოს  $D$  კვანძზე, ვინაიდან ამ კვანძზე მოდებული სამი ძალიდან ერთი უკვე ვიცით რისი ტოლია. რაც შეეხება  $C$  კვანძს, მასზე მოდებული ოთხი ძალიდან მხოლოდ ერთი ვიცით, ამიტომ საქმე გვაქვს სტატიკურად ურკვევ ამოცანასთან.  $D$  კვანძის წონასწორობის ამოცანიდან ადვილად ვღებულობთ:  $R_3 = 2,1$  კნ;  $R_4 = -2,1$  კნ. ახლა შეგვიძლია  $C$  კვანძზე გადასვლა, ვინაიდან მასზე მოქმედი ოთხი ძალიდან უკვე ორის სიდიდე ვიცით. შემდეგ შეგვიძლია გადასვლა როგორც  $K$  კვანძზე, ასევე -  $E$ -ზე (ყოველ მათგანზე მოდებული ძალებისგან მხოლოდ ორის მოდულია უცნობი). ადვილად გავიგებთ:  $R_5 = 1,5$  კნ;  $R_6 = 0,9$  კნ;  $R_7 = 0$ ;  $R_8 \approx -4,1$  კნ;  $R_9 = 0,9$  კნ. როგორც ვხედავთ, ბოლო  $B$  კვანძის წონასწორობის განხილვა არ დაგვჭირდა.

მიღებული შედეგები გვიჩვენებს, რომ 9 ღეროდან 5 იჭიმება, 3 იკუმშება, ერთი კი საერთოდ არ განიცდის დატვირთვას.

ღეროებში ძალების განსაზღვრის კვანძების ამოჭრის მეთოდს ერთი დიდი ნაკლი აქვს: კვანძები უნდა განვიხილოთ თანმიმდევრობით და ვერც ერთს ვერ გამოვტოვებთ. როცა ბევრი კვანძია და გვინდა შუალედურ ღეროში (ან რამდენიმე ღეროში) ძალების გაგება, მაშინ გვიხდება ბევრი არასაჭირო გამოთვლის ჩატარება. ვთქვათ, გვინდა ძალების გაგება ღეროებში 4, 5 და 6. კვანძების ამოჭრის მეთოდის გამოყენებისას უნდა დავიწყოთ  $A$  კვანძიდან (ან  $B$ -დან), შემდეგ გადავიდეთ  $D$  კვანძზე და ა.შ.

ასეთ შემთხვევაში შეგვიძლია გამოვიყენოთ **რიტერის მეთოდი** (მას **გან-კვეთის მეთოდსაც** უწოდებენ), რომლის არსიც მდგომარეობს შემდეგში: გავიგებთ რა საყრდენების რეაქციებს, აღნიშნულ ღეროებში ძალების გასაგებად ვახდენთ წამწეს I-I განკვეთას და განვიხილავთ წამწის ერთ-ერთი ნაწილზე მოქმედი ძალების წონასწორობას (ნახ. 4.20,გ). აღსანიშნავია, რომ ეს მეთოდი გამოიყენება მაშინ, როცა ღეროთა რიცხვი სამზე მეტი არ არის, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება სამზე მეტი

უცნობი). ცხადია, ხელსაყრელია წამწის იმ ნაწილის წონასწორობის განხილვა, რომელზეც ნაკლები ძალა მოქმედებს.



ნახ. 4.20გ

განვიხილოთ წამწის მარცხენა ნაწილის წონასწორობა. მარჯვენა ნაწილის ჩამოშორების შედეგად მისი წონასწორობა რომ არ დაირღვეს, საჭიროა ჩამოშორებული დეროების ნაცვლად მარცხენა ნაწილს მოვდოთ შესაბამისი დეროების რეაქციები (ნახ. 4.20, გ). ამგვარად, სხეულზე მოქმედებს ხუთი ძალა, რომელთაგან სამის სიდიდე უცნობია. სასურველია, დერძი ან მომენტის ცენტრი ისე შევარჩიოთ, რომ ყოველ განტოლებაში გვექონდეს თითო უცნობი.

ყველა ძალა დავაგვიგმილოთ  $Ay$  დერძზე, მივიღებთ:

$$R_A - P + R_5 \cos \alpha = 0; \quad \triangle DCE \text{-ში } \cos \alpha = 3/5, \quad \text{მაშინ } R_5 = (P - R_A) / \cos \alpha = 1,5 \text{ კნ.}$$

მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ  $C$  წერტილი, მივიღებთ:

$$-R_A \cdot 3 - R_4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow R_4 = -R_A = -2,1 \text{ კნ.}$$

მომენტთა ცენტრად შევარჩიოთ  $E$  წერტილი, მივიღებთ:

$$-R_A \cdot 7 + P \cdot 4 + R_6 \cdot 3 = 0 \Rightarrow R_6 = 0,9.$$

მივიღეთ ზემოთ მიღებული შედეგები.

პასუხი.  $R_A = 2,1$  კნ;  $R_{Bx} = -2$  კნ;  $R_{By} = 2,9$  კნ;  $S_1 \approx 2,97$  კნ;  $S_2 = 2,1$  კნ;  $S_3 = 2,1$  კნ;

$S_4 = -2,1$  კნ;  $S_5 = 1,5$  კნ;  $S_6 = 0,9$  კნ;  $S_7 = 0$ ;  $S_8 \approx 4,1$  კნ;  $S_9 = 0,9$  კნ;

## V თავი

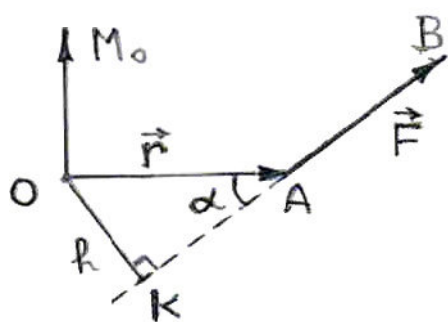
### სივრცითი ძალთა სისტემა

მყარ სხეულზე ერთ სიბრტყეში მდებარე ძალთა სისტემის მოქმედებისას ყოველი ძალა ცდილობს სხეული მოაბრუნოს ერთი და იმავე სიბრტყის მართობი ღერძის გარშემო, ამიტომ ძალის სკალარული მომენტი სავსებით ახასიათებს სხეულზე ძალის მექანიკურ მოქმედებას. მართლაც, ბრუნვის ეფექტს ახასიათებს მომენტის მოდული, ხოლო ბრუნვის მიმართულებას – მომენტის ნიშანი. სივრცითი ძალების შემთხვევაში ძალები მოქმედებს სხვადასხვა სიბრტყეებში, რომლებსაც სკალარული მომენტი ვერ განსაზღვრავს, ამიტომ საჭიროა ვექტორული სიდიდის შემოღება, რომელიც მიგვითითებს ძალის მოქმედების სიბრტყეზე.

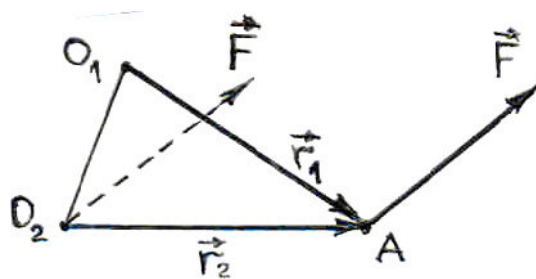
#### 5.1. ძალის ვექტორული მომენტი

ვიხილავთ მყარი სხეულის  $A$  წერტილზე მოდებულ  $\vec{F}$  ძალას. მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ  $O$  წერტილი (ნახ. 5.1).

**განსაზღვრა.** წერტილის მიმართ ძალის ვექტორული მომენტი ეწოდება ისეთ ვექტორს, რომლის მოდული უდრის ძალის სიდიდისა და მხარის სიგრძის ნამრავს, მოდებულია მომენტის ცენტრზე და მიმართულია ძალის ფუძესა და ცენტრზე გამავალი სიბრტყის მართობულად ისე, რომ ძალის მცდელობა სხეული მოაბრუნოს ცენტრის გარშემო, მისი ბოლოდან მოხანს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.



ნახ. 5.1



ნახ.5.2

$\vec{F}$  ძალის ვექტორული მომენტი  $O$  წერტილის მიმართ აღვნიშნოთ  $\vec{M}_o(\vec{F})$  ან  $\vec{M}_o$  სიმბოლოთი. განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ

$$|\vec{M}_o| = |\vec{F}| \cdot h = 2 \text{ ფართ. } \triangle AOB. \quad (5.1.1)$$

ვექტორული და სკალარული მომენტების განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ თუ რაიმე წერტილის მიმართ ვიციტ ძალის ვექტორული მომენტი, მაშინ ვიციტ ამ ძალის სკალარული მომენტიც.

უმაღლესი მათემატიკიდან გავიხსენოთ ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრა და ადვილად მივიღებთ (ნახ. 5.1):

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5.1.2)$$

ძალის ვექტორული მომენტის ძირითადი თვისებებია:

1. ძალის ფუძეზე გასრიალებით მომენტი არ იცვლება;
2. თუ ძალას შეეუცვლით მიმართულებას საწინააღმდეგოთი, მაშინ მომენტიც საწინააღმდეგოთი შეიცვლის მიმართულებას;
3. მომენტი უდრის ნულს, თუ ძალის ფუძე გადის მომენტის ცენტრზე.

## 5.2. ვექტორული მომენტის ანალიზური გამოსახვა

ვთქვათ,  $\vec{F}$  ძალა მოდებულია მყარი სხეულის  $A$  წერტილზე და მომენტთა ცენტრად არჩეულია რაიმე  $O'$  წერტილი. ავიღოთ დეკარტის მარჯვანა  $Oxyz$  კოორდინატთა სისტემა და მის მიმართ ძალის გეგმილები აღვნიშნოთ  $F_x, F_y, F_z$ -ით, ხოლო  $A$  და  $O'$  წერტილების კოორდინატები შესაბამისად -  $x, y, z$  და  $a, b, c$ - თი. მაშინ სათავეს მიმართ ძალის  $A$  მოდების წერტილის  $\vec{r} = \overline{O'A}$  რადიუს-ვექტორის გეგ-მილები იქნება:  $x = a, y = b, z = c$ .

ვექტორთა აღგებრიდან ცნობილია, რომ

$$\vec{M}_{o'} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-a & y-b & z-c \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow \quad (5.2.1)$$

$$M_{o'x} = (y-b)F_z - (z-c)F_y,$$

$$M_{o'y} = (z-c)F_x - (x-a)F_z, \quad (5.2.2)$$

$$M_{o'z} = (x-a)F_y - (y-b)F_x.$$

როდესაც მომენტის ცენტრი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, მაშინ  $a = b = c = 0$  და (5.2.2) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\begin{aligned}
M_{ox} &= bF_z - zF_y, \\
M_{oy} &= zF_x - xF_z, \\
M_{oz} &= xF_y - yF_x.
\end{aligned}
\tag{5.2.3}$$

### 5.3. ძალის ვექტორული მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ

ვთქვათ, გამოთვლილი გვაქვს მყარი სხეულის  $A$  წერტილზე მოდებული  $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$  ძალის ვექტორული მომენტი რაიმე  $O_1(a_1, b_1, c_1)$  წერტილის მიმართ და გვინდა გამოვთვალოთ მისი ვექტორული მომენტი ახალი  $O_2(a_2, b_2, c_2)$  წერტილის მიმართ (ნახ. 5.2). განსაზღვრის თანახმად,

$$\vec{M}_{o_2} = \vec{r}_2 \times \vec{F} \quad . \tag{5.3.1}$$

ნახ. 5.2-დან უშუალოდ ვღებულობთ, რომ  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \overline{O_1O_2} = \vec{r}_1 + \overline{O_2O_1}$ , რის გამოც  $\vec{M}_{o_2} = (\vec{r}_1 - \overline{O_1O_2}) \times \vec{F} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}) - (\overline{O_1O_2} \times \vec{F})$ . მაგრამ  $\vec{r}_1 \times \vec{F} = \vec{M}_{o_1}$ , ამიტომ

$$\vec{M}_{o_2} = \vec{M}_{o_1} - (\overline{O_1O_2} \times \vec{F}) = \vec{M}_{o_1} + (\overline{O_2O_1} \times \vec{F}). \tag{5.3.2}$$

(5.3.2) შეგვიძლია ასეც ჩავწეროთ:

$$\vec{M}_{o_2} = \vec{M}_{o_1} - \vec{M}_{o_1}(\vec{F})_{o_2} = \vec{M}_{o_1} + \vec{M}_{o_2}(\vec{F})_{o_1}. \tag{5.3.3}$$

**მივიღეთ:** ახალი ცენტრის მიმართ ძალის ვექტორული მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ ვექტორულ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ ან დამატებული ძველ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალის მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ.

დავაგეგმილოთ (5.3.2) კოორდინატთა ღერძებზე და მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
M_{o_2x} &= M_{o_1x} - (b_2 - b_1)F_z + (c_2 - c_1)F_y, \\
M_{o_2y} &= M_{o_1y} - (c_2 - c_1)F_x + (a_2 - a_1)F_z, \\
M_{o_2z} &= M_{o_1z} - (a_2 - a_1)F_y + (b_2 - b_1)F_x.
\end{aligned}
\tag{5.3.4}$$

როდესაც  $O_1$  წერტილი ემთხვევა კოორდინატთა სათავეს, ე.ი.  $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ ,  $O_2$  წერტილი კი -  $O'(a, b, c)$  წერტილს, მაშინ (5.3.4) ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned}
 M_{o_2x} &= M_{o_1x} - bF_z + cF_y, \\
 M_{o_2y} &= M_{o_1y} - cF_x + aF_z, \\
 M_{o_2z} &= M_{o_1z} - aF_y + bF_x.
 \end{aligned}
 \tag{5.3.5}$$

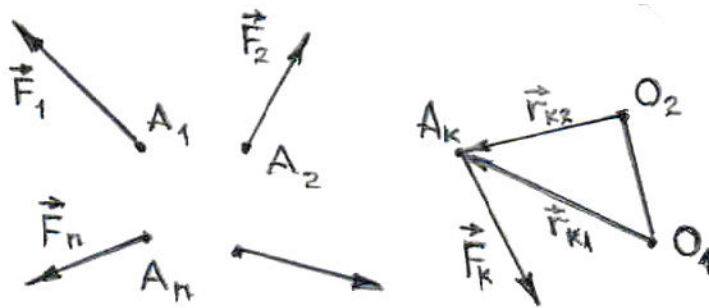
#### 5.4. ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი. ნაკრები მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ

ვიხილავთ მყარ სხეულზე მოდებული  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  სივრცით ძალთა სისტემას. მომენტი ცენტრად ავირჩიოთ რაიმე  $O_1(a_1, b_1, c_1)$  წერტილი (ნახ. 5.3).

**განსაზღვრა.** რაიმე წერტილის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი ეწოდება ამავე წერტილის მიმართ შემდგენი ძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიულ ჯამს.

$O_1$  წერტილის მიმართ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი აღვნიშნოთ  $\vec{M}_{o_1}$ -ით. მაშინ განსაზღვრის თანახმად

$$\vec{M}_{o_1} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ko_1} = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k \times \vec{F}_k).
 \tag{5.4.1}$$



ნახ. 5.3

გვინდა გამოვთვალოთ მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტი ახალი  $O_2(a_2, b_2, c_2)$  წერტილის მიმართ. თუ ყოველი ძალისთვის დავწერთ (5.3.3)-ის მსგავს ტოლობებს, შევკრიბავთ და ჩავატარებთ სათანადო მარტივ გარდაქმნებს, მივიღებთ:

$$\vec{M}_{o_2}^* = \vec{M}_{o_1}^* - \vec{M}_{o_1}^* (\vec{F}^*)_{o_2} . \quad (5.4.2)$$

ან 
$$\vec{M}_{o_2}^* = \vec{M}_{o_1}^* + \vec{M}_{o_2}^* (\vec{F}^*)_{o_1} . \quad (5.4.3)$$

**მივიღეთ:** ახალი ცენტრის მიმართ ძალის ვექტორული მომენტი უდრის ძველი ცენტრის მიმართ ვექტორულ მომენტს გამოკლებული ახალ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალის მომენტი ძველი ცენტრის მიმართ ან დამატებული ძველ ცენტრზე პირობითად მოდებული ძალის მომენტი ახალი ცენტრის მიმართ

(5.4.2) ტოლობის კოორდინატა ღერძებზე დაგვემიღებოთ გვექნება:

$$\begin{aligned} M_{o_2x}^* &= M_{o_1x}^* - (b_2 - b_1)F_z^* + (c_2 - c_1)F_y^* , \\ M_{o_2y}^* &= M_{o_1y}^* - (c_2 - c_1)F_x^* + (a_2 - a_1)F_z^* , \\ M_{o_2z}^* &= M_{o_1z}^* - (a_2 - a_1)F_y^* + (b_2 - b_1)F_x^* . \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

როდესაც  $O_1$  წერტილი ემთხვევა კოორდინატა სათავეს, ე.ი.  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $O_2$  წერტილი კი -  $O'(a, b, c)$  წერტილს, მაშინ (5.3.4) ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} M_{o'x}^* &= M_{ox}^* - bF_z^* + cF_y^* , \\ M_{o'y}^* &= M_{oy}^* - cF_x^* + aF_z^* , \\ M_{o'z}^* &= M_{oz}^* - aF_y^* + bF_x^* . \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

დავუშვათ, რომ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, მაშინ (5.4.2) გვაძლევს:

$$\vec{M}_{o_2}^* = \vec{M}_{o_1}^* . \quad (5.4.6)$$

მივიღეთ მეტად მნიშვნელოვანი შედეგი: როცა ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი უდრის ნულს, მაშინ ნაკრები ვექტორული მომენტი არ არის დამოკიდებული მომენტთა ცენტრის არჩევაზე.

### 5.5. ძალის მომენტი ღერძის მიმართ

ვთქვათ, მყარი სხეულის  $A$  წერტილზე მოდებული  $\vec{F}$  ძალა ცდილობს სხეული მოაბრუნოს მასთან უძრავად დაკავშირებული რაიმე  $\Delta$  ღერძის გარშემო.  $A$  წერტილზე გაგატართ ღერძისადმი მართობი  $\pi$  სიბრტყე და ძალა დაეშალათ ორ შემდგენად, რომელთაგან ერთი იქნება  $\Delta$  ღერძის პარალელური, ხოლო მეორე



მდებარეობდეს  $\pi$  სიბრტყეში (ნახ. 5.4). აღვნიშნოთ ეს შემდგენები შესაბამისად  $\vec{F}_\Delta$  და  $\vec{F}_\pi$ -თი. ადვილი მისახვედრია, რომ  $\vec{F}_\Delta$  ცდილობს სხეული გადაადგილოს ღერძის გასწვრივ, ხოლო  $\vec{F}_\pi$ - მოაბრუნოს მის გარშემო.

**განსაზღვრა.** ძალის მომენტი ღერძის მიმართ ეწოდება ამ ღერძის მართობ სიბრტყეში ძალის გეგმილის სკალარულ მომენტს ღერძისა და სიბრტყის გადაკვეთის წერტილის მიმართ.

თუ  $\vec{F}$  ძალის მომენტს  $\Delta$  ღერძის მიმართ აღვნიშნავთ  $M_\Delta$ -თი, მაშინ

$$M_\Delta = M_\Delta(\vec{F}) = M_o(\vec{F}_\pi) = \pm |\vec{F}_\pi| \cdot h = \pm 2 \text{ ფართ. } \Delta Oab. \quad (5.5.1)$$

მოგვეყავს ღერძის მიმართ ძალის მომენტის ძირითადი თვისებები:

1. ძალის ფუძის გასწვრივ გასრიალებით მომენტი არ იცვლება;
2. თუ ძალას შევუცვლით მიმართულებას საწინააღმდეგოთი, მაშინ მომენტი შეიცვლის ნიშანს;
3. თუ ძალა პარალელურია ღერძის ან მისი ფუძე კვეთს ღერძს (ანუ ძალის ფუძე და ღერძი ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ), მაშინ მომენტი უდრის ნულს.

### 5.6. დამოკიდებულება ვექტორულ მომენტსა და ღერძის მიმართ მომენტს შორის

ეთქვათ, უძრავი  $\Delta$  ღერძის მქონე მყარი სხეულის  $A$  წერტილზე მოდებულა  $\vec{F}$  ძალა (ნახ. 5.5).

**თეორემა.** ძალის მომენტი ღერძის მიმართ უდრის ღერძის ნებისმიერი წერტილის მიმართ ძალის ვექტორული მომენტის გეგმილს ამავე ღერძზე.

**დამტკიცება.** გავატაროთ  $A$  წერტილზე ღერძის მართობი  $\pi$  სიბრტყე. ღერძის ნებისმიერი  $C$  წერტილის მიმართ გამოვთვალოთ ძალის მომენტი:

$$\vec{M}_C = \vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{CA} \times \vec{F}. \quad (5.6.1)$$

დავშალოთ  $\vec{F}$  და  $\vec{CA}$  ვექტორები:  $\vec{F} = \vec{F}_\Delta + \vec{F}_\pi$  და  $\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA}$ . შევიტანოთ ეს გამოსახულებები (5.6.1)-ში და მივიღებთ:

$$\vec{M}_C = (\vec{CB} + \vec{BA}) \times (\vec{F}_\Delta + \vec{F}_\pi) = \vec{CB} \times \vec{F}_\Delta + \vec{CB} \times \vec{F}_\pi + \vec{BA} \times \vec{F}_\Delta + \vec{BA} \times \vec{F}_\pi. \quad (5.6.2)$$

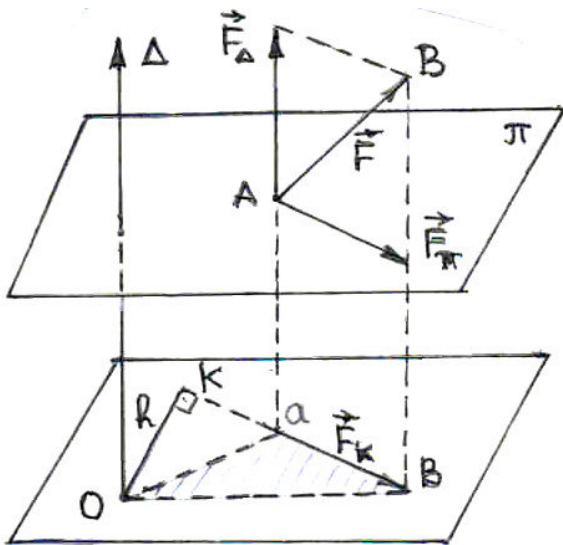
ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლის განსაზღვრის თანახმად  $\overline{CB} \times \vec{F}_\Delta = 0$ ,  $\overline{CB} \times \vec{F}_\pi$  და  $\overline{BA} \times \vec{F}_\Delta$  ვექტორები მართობია  $\Delta$  დერძის, ხოლო  $\overline{BA} \times \vec{F}_\pi$  - პარალელური. ამ შედეგების გათვალისწინებით (5.6.2) ტოლობის დერძზე დაგეგმილება გვაძლევს:

$$\text{გეგმ}_\Delta(\vec{M}_C) = \pm |\overline{BA} \times \vec{F}_\pi| = \pm |\overline{BA}| \cdot |\vec{F}_\pi| \cdot \sin \alpha,$$

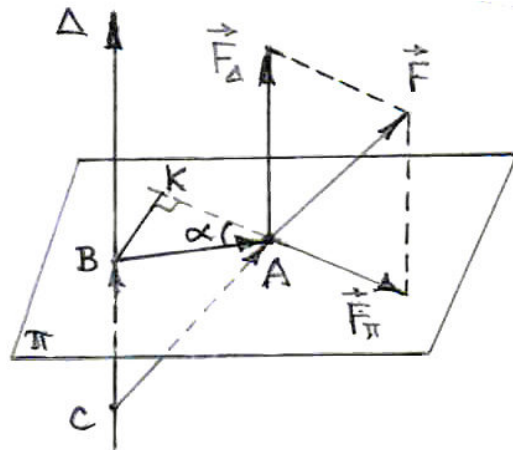
სადაც  $\alpha$  კუთხეა  $\overline{BA}$  და  $\vec{F}_\pi$  ვექტორებს შორის.  $ABK$  სამკუთხედში  $|\overline{BA}| \cdot \sin \alpha = h$  და თუ გავისვენებთ დერძის მიმართ ძალის მომენტის განსაზღვრას, მივიღებთ:

$$\text{გეგმ}_\Delta(\vec{M}_C) = \pm |\vec{F}_\pi| \cdot h = M_B(\vec{F}_\pi) = M_\Delta(\vec{F}) = M_\Delta.$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 5.4



ნახ. 5.5

### 5.7. ძალის მომენტები კოორდინატთა დერძების მიმართ

დაუშვათ, რომ მყარი სხეულის  $A$  წერტილზე მოღებულია  $\vec{F}$  ძალა. ავიღოთ  $Oxyz$  კოორდინატთა სისტემა და გამოვთვალოთ  $\vec{M}_o = \vec{M}_o(\vec{F})$ .  $O$  წერტილი ეკუთვნის სამივე დერძს, ამიტომ წინა პარაგრაფის თეორემა გვაძლევს:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x(\vec{F}) = \text{გეგმ}_x \vec{M}_o = M_{ox} = yF_z - zF_y, \\ M_y &= M_y(\vec{F}) = \text{გეგმ}_y \vec{M}_o = M_{oy} = zF_x - xF_z, \\ M_z &= M_z(\vec{F}) = \text{გეგმ}_z \vec{M}_o = M_{oz} = xF_y - yF_x. \end{aligned} \tag{5.7.1}$$

## 5.8. ვარინიონის თეორემა სივრცითი ძალებისათვის

4.3 და 4.16 პარაგრაფებში ჩვენ დავამტკიცეთ ვარინიონის თეორემა შესაბამისად ერთ სიბრტყეზე მდებარე თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის და ნებისმიერი ძალთა სისტემის ტოლქმედის მომენტის შესახებ. ანალოგიურ თეორემებს ადგილი აქვს სივრცითი ძალთა სისტემის შემთხვევაშიც. მოგვყავს ეს თეორემები დამტკიცების გარეშე.

**თეორემა.** ნებისმიერი წერტილის მიმართ თავმოყრილი ძალების ტოლქმედის ვექტორული მომენტი უდრის იმავე წერტილის მიმართ ყველა ძალის ვექტორული მომენტების გეომეტრიულ ჯამს.

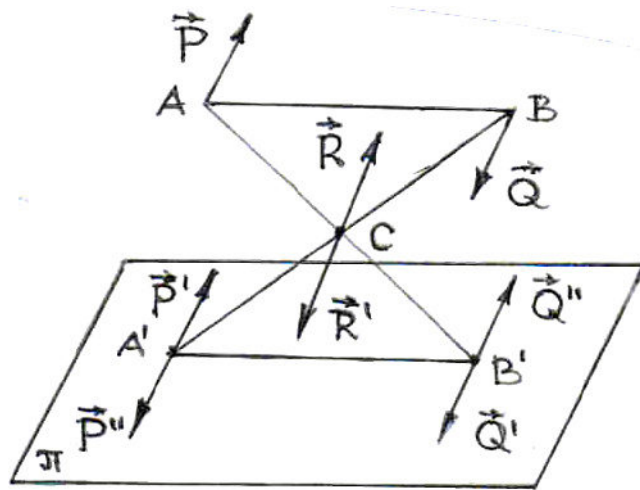
**თეორემა.** რაიმე წერტილის მიმართ სივრცითი ძალთა სისტემის ტოლქმედის ვექტორული მომენტი უდრის იმავე წერტილის მიმართ შემდგენი ძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიულ ჯამს.

## 5.9. წყვილძალის ვექტორული მომენტი

**განსაზღვრა.** წყვილძალის ვექტორული მომენტი ეწოდება ისეთ თავისუფალ ვექტორს, რომლის სიგრძე უდრის წყვილძალის ერთ-ერთი ძალის მოდულისა და მხარის სიგრძის ნამრავლს და მიმართულია წყვილძალის სიბრტყის მართობულად ისე, რომ წყვილძალის მცდელობა მოაბრუნოს სხეული მისი ბოლოდან მოჩანს საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

### 5.10. წვეილძალის გადატანა პარალელურ სიბრტყეში

დავუშვათ, რომ მყარ სხეულზე მოქმედებს  $\alpha$  სიბრტყეში მდებარე  $(\vec{P}, \vec{Q})$  წვეილძალა, რომლის მხარია  $AB$  მონაკვეთი (ნახ. 5.6).



ნახ. 5.6

**თეორემა.** წვეილძალა შეგვიძლია უცვლელად გადავიტანოთ მისი სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეში.

**დამტკიცება.** გავატაროთ  $\alpha$  სიბრტყის პარალელური  $\beta$  სიბრტყე და მასზე ავიღოთ  $AB$  მონაკვეთის ტოლი და პარალელური  $A'B'$  მონაკვეთი. ამ მონაკვეთის ბოლოებში მოვდოთ  $\vec{P}', \vec{P}''$  და  $\vec{Q}', \vec{Q}''$  ძალები ისე, რომ  $\vec{P}' = \vec{Q}' = \vec{P}$  და  $\vec{P}'' = \vec{Q}'' = \vec{Q}$ . შევეკრიბოთ ტოლი  $\vec{P}$  და  $\vec{Q}''$  ძალები. მათი  $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}''$  ჯამში მოდებული იქნება  $AB'$  მონაკვეთის შუა  $C$  წერტილში. ასევე  $\vec{R}' = \vec{Q}' + \vec{P}''$  ჯამშიც მოდებული იქნება იმავე  $C$  წერტილში და მიმართული იქნება  $\vec{R}$ -ის საწინააღმდეგოდ. ცხადია, რომ  $|\vec{R}| = |\vec{R}'|$ , ამიტომ  $\vec{R}$  და  $\vec{R}'$  პირდაპირ თანაწინააღმდეგე ძალებია და მეექვსე აქსიომის თანახმად შეგვიძლია ჩამოვაშუროთ სხეულს. დაგვრჩება მხოლოდ  $\beta$  სიბრტყეში მდებარე  $(\vec{P}', \vec{Q}')$  წვეილძალის ტოლი  $(\vec{P}, \vec{Q})$  წვეილძალა. რ. დ. გ.

### 5.11. წვეილძალების ტოლფასობა სივრცეში

ვთქვათ, მყარ სხეულზე მოქმედებს ორი  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$  და  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$  წვეილძალა, რომელთა ვექტორული მომენტები შესაბამისად  $\vec{M}_1$ -ისა და  $\vec{M}_2$ -ის ტოლია.

თეორემა. სივრცეში მდებარე ორი წყვილძალა ტოლფასია, თუ მათ ტოლი ვექტორული მომენტები აქვთ.

დამტკიცება. როდესაც  $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$ , მაშინ შესაძლებელია წყვილძალების განლაგების მხოლოდ ორი შემთხვევა: 1) წყვილძალები ერთ სიბრტყეშია და 2) წყვილძალები პარალელურ სიბრტყეებშია.

ვექტორული მომენტების ტოლობიდან გამომდინარეობს სკალარული მომენტების ტოლობა, ამიტომ პირველი შემთხვევა უკვე დამტკიცებული გვაქვს (იხ. §4.8).

წინა პარაგრაფში დავამტკიცეთ, რომ წყვილძალა შეგვიძლია გადავიტანოთ თავისი სიბრტყის ნებისმიერ პარალელურ სიბრტყეში. გადავიტანოთ რა ერთ-ერთ წყვილძალას მეორის სიბრტყეში, მივიღებთ პირველ შემთხვევას. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

## 5.12. წყვილძალების შეკრება სივრცეში

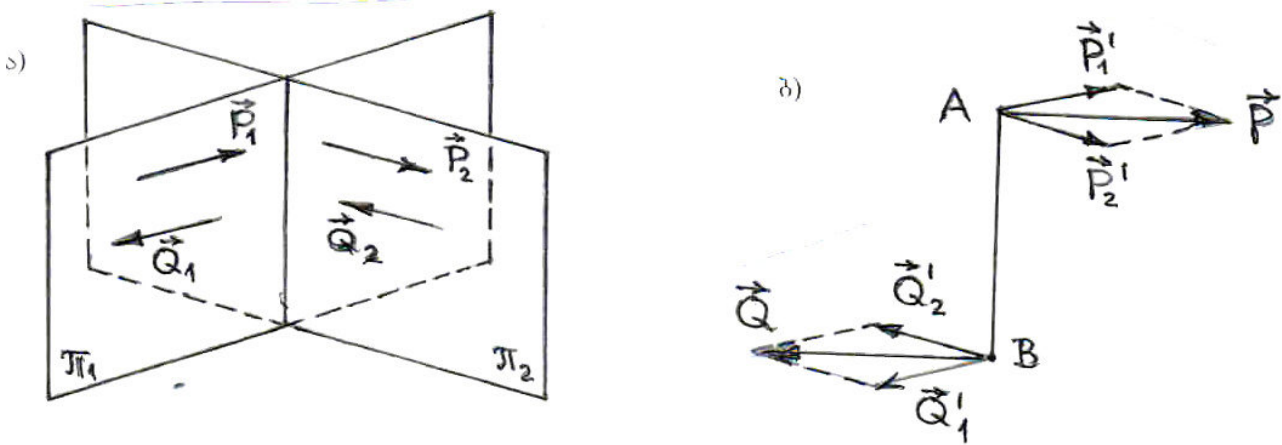
ვთქვთ, მყარ სხეულზე მოქმედებს წყვილძალების ერთობლიობა.

თეორემა. სივრცეში ნებისმიერად განლაგებული წყვილძალების ერთობლიობა ერთი ისეთი წყვილძალის ტოლფასია, რომლის ვექტორული მომენტი მოცემული წყვილძალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. შესაძლებელია სამი შემთხვევა: 1) ყველა წყვილძალა ერთ სიბრტყეშია; 2) წყვილძალები პარალელურ სიბრტყეებშია; 3) წყვილძალები ურთიერთგადასაწყვეთ სიბრტყეებშია.

პირველი შემთხვევა განვიხილეთ §4.9-ში. მეორე შემთხვევა დაიყვანება პირველ შემთხვევაზე, გადავიტანოთ რა ყველა წყვილძალას ერთ სიბრტყეში. დაგვრჩა განსახილველი მესამე შემთხვევა.

ჯერ განვიხილოთ ორი  $(\vec{P}_1, \vec{Q}_1)$  და  $(\vec{P}_2, \vec{Q}_2)$  წყვილძალა, რომელთა მომენტებია  $\vec{M}_1$  და  $\vec{M}_2$ . ვთქვათ, ეს წყვილძალები, ორ ურთიერთგადასაწყვეთ სიბრტყეებში მდებარეობენ (ნახ. 5.7,ა). გავასრიალოთ წყვილძალების ძალები თავიანთი ფუძეების გასწვრივ და მოვდოთ ამ სიბრტყეების გადაკვეთის წრფის წერტილებში.



ნახ. 5.7

ავიღოთ ამ წრფეზე რაიმე  $AB$  მონაკვეთი და დავიყვანოთ ორივე წვევილდალა საერთო  $AB$  მხარზე. მივიღებთ მოცემული წვევილდალების ტოლფას  $(\vec{P}'_1, \vec{Q}'_1)$  და  $(\vec{P}'_2, \vec{Q}'_2)$  წვევილდალებს, ამასთან  $A$  და  $B$  წერტილებზე მოდებული იქნება ორ-ორი დალა (ნახ. 5.7,ბ). ამ დალების შეკრებით მიღებული  $\vec{P} = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2$  და  $\vec{Q} = \vec{Q}'_1 + \vec{Q}'_2$  დალები ქმნიან წვევილდალას. ვარინიონის თეორემის გათვალისწინებით,  $(\vec{P}, \vec{Q})$  წვევილდალისთვის მივიღებთ:

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{P}, \vec{Q}) = \vec{M}_B(\vec{P}) = \vec{M}_B(\vec{P}'_1) + \vec{M}_B(\vec{P}'_2) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2.$$

ამით თეორემა ორი წვევილდალის შემთხვევისათვის დამტკიცებულია.

როცა წვევილდალების ოდენობა ორზე მეტია, მაშინ ჯერ შევკრიბავთ ორ წვევილდალას, შემდეგ ამათ ჯამს მივუმატებთ მესამეს და ა.შ. სანამ არ მივიღებთ ერთ წვევილდალას, რომლის ვექტორული მომენტი ტოლი იქნება მოცემული წვევილდალების ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამის. რ. დ. გ.

შეკრების შედეგად მიღებულ წვევილდალას ტოლქმედი წვევილდალა ეწოდება.

### 5.13. სივრცეში წვევილდალთა სისტემის წონასწორობა

ვიხილავთ მყარ სხეულზე მოქმედ წვევილდალებს, რომელთა ვექტორული მომენტებია  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ . შევცვალოთ წვევილდალების ერთობლიობა ტოლქმედი წვევილდალით, რომლის ვექტორული მომენტი  $\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k$ . როცა სხეულზე მხოლოდ

წყვილძალა მოქმედებს, მაშინ მისი წონასწორობისათვის წყვილძალა უნდა იყოს ნულის ტოლფასი, ე.ი. მისი მომენტი უნდა იყოს ნულის ტოლი. ამგვარად,

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_k = 0.$$

**მივიღეთ:** სივრცეში წყვილძალთა სისტემის წონასწორობისათვის მათი ვექტორული მომენტების გეომეტრიული ჯამი უნდა იყოს ნულის ტოლი.

#### 5.14. ძალის პარალელური გადატანა სივრცეში

**ლემა.** მყარი სხეულის რაიმე წერტილში მოდებული ყოველი ძალა ტოლ-ფასია სამი ძალისა, რომელთაგან ერთი მისი ტოლია, ოდონდ მოდებულია სხვა წერტილში, ხოლო ორი დანარჩენი შეადგენს წყვილძალას, რომლის ვექტორული მომენტი უდრის ძალის ვექტორულ მომენტს ახალი მოდების ცენტრის მიმართ.

ლემა მტკიცდება ბრტყელი ძალთა სისტემისთვის მსგავსი ლემის დამტკიცების ანალოგიურად, ოდონდ ერთი განსხვავებით: სკალარული მომენტის ნაცვლად გვექნება ვექტორული მომენტი.

#### 4.15. სივრცითი ძალთა სისტემის დაყვანა ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე

**თეორემა (პუანსოს თეორემა).** ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემა შეიძლება დაყვანილ იქნას ნებისმიერ წერტილში მოდებულ ერთ ძალამდე და ერთ წყვილძალამდე. ძალა ტოლია ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა, ხოლო წყვილძალის ვექტორული მომენტი - ამ წერტილის მიმართ სისტემის ნაკრები ვექტორული მომენტისა.

თეორემა მტკიცდება ბრტყელი ძალთა სისტემისთვის მსგავსი თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად, ოდონდ ერთი განსხვავებით: სკალარული მომენტის ნაცვლად გვექნება ვექტორული მომენტი.

#### 5.16. სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობის პირობა

**თეორემა.** ნებისმიერი სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ერთი რომელიმე წერტილის მიმართ იყოს ნულის ტოლი.

თეორემა მტკიცდება ბრტყელი ძალთა სისტემისთვის მსგავსი თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად, ოდონდ სკალარული მომენტის ნაცვლად გვექნება ვექტორული მომენტი.

### 5.17. სივრცითი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებები.

#### არათავისუფალი მყარი სხეულის წონასწორობა

დავუშვათ, რომ სხეულზე მოქმედებს  $\vec{F}_1(F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}), \vec{F}_2(F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}), \dots, \vec{F}_n(F_{nx}, F_{ny}, F_{nz})$  ნებისმიერი ძალები, რომელთა მოდების წერტილებია  $A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2), \dots, A_n(x_n, y_n, z_n)$  წერტილები. წინა პარაგრაფიდან ვიცით, რომ ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობისთვის მისი ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ერთი რაიმე წერტილის მიმართ უნდა უდრიდეს ნულს. მომენტთა ცენტრად ავირჩიოთ კოორდინატთა სათავე და გვექნება:

$$\vec{F}^* = 0, \vec{M}_o^* = 0 \Rightarrow \quad (5.17.1)$$

$$F_x^* = F_y^* = F_z^* = M_{ox}^* = M_{oy}^* = M_{oz}^* = 0, \quad (5.17.2)$$

ან რაც იგივეა

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \\ \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \quad (5.17.3)$$

(5.17.3) წარმოადგენს ნებისმიერი ძალთა სისტემის წონასწორობის განტოლებებს, რომელთაგან პირველ სამს **გვეგილებს**, ხოლო მეორე სამს – **მომენტების განტოლებები** ეწოდება.

(5.17.3) განტოლებები ანალიზურად ასე ჩაიწერება:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (y_k F_{kz} - z_k F_{yk}) = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (z_k F_{kx} - x_k F_{kz}) = 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (x_k F_{ky} - y_k F_{kx}) = 0. \end{aligned} \quad (5.17.4)$$

აღსანიშნავია, რომ მომენტების განტოლებების შესადგენად შეგვიძლია ვისარგებლოთ ღერძის მიმართ ძალის მომენტის განსაზღვრითაც.



თუ აღმოჩნდა, რომ სივრცით ამოცანაში უცნობთა რიცხვი ექვსზე მეტია, მაშინ თეორიული მექანიკა ასეთ ამოცანას ცალსახად ვერ ხსნის და მას **სტატი-კურად განუსაზღვრელი (ურკვევი) ამოცანა** ეწოდება (იხ. § 4.20).

განვიხილოთ მყარი სხეულის წონასწორობის სამი საინტერესო კერძო შემთხვევა.

**1. ორი ჩამაგრებული წერტილის მქონე მყარი სხეულის წონასწორობა.**

ვთქვათ, მყარი სხეული ჩამაგრებულია ორ  $A$  და  $B$  წერტილში სფერული სახსრების საშუალებით (ნახ. 5.8,ა). ცხადია, სხეულს მხოლოდ ბრუნვა შეუძლია ამ წერტილებზე გამავალი დერძის გარშემო. კოორდინატთა სისტემის სათავე ავიღოთ  $A$  წერტილში, დავამთხვიოთ  $Oz$  დერძი ბრუნვის დერძს და სახსრების მოქმედება შევცვალოთ  $\vec{R}_A(R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az})$  და  $\vec{R}_B(R_{Bx}, R_{By}, R_{Bz})$  რეაქციებით.

დავუშვათ, რომ სხეული წონასწორობაშია  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალთა სისტემის მოქმედებით. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} + R_{Ax} + R_{Bx} = 0,$$

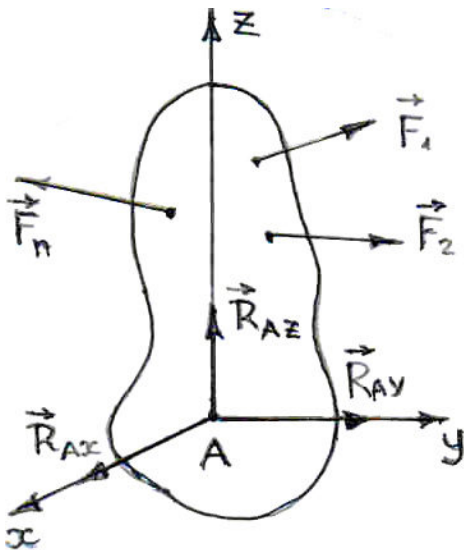
$$\sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) - R_{By} \cdot h = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} + R_{Ay} + R_{By} = 0,$$

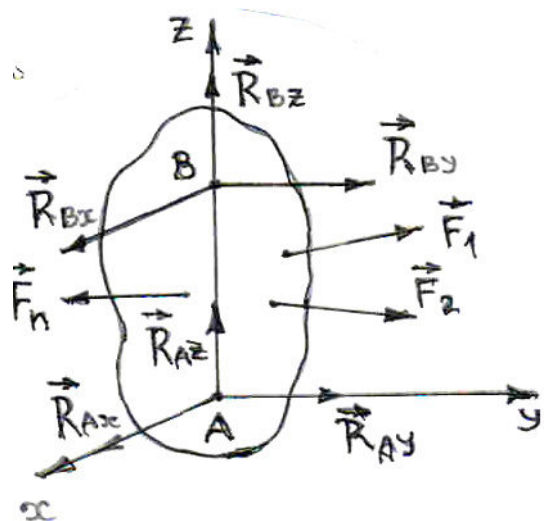
$$\sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) + R_{Bx} \cdot h = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} + R_{Az} + R_{Bz} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) = 0.$$



ა)



ბ)

ნახ. 5.8,ა,ბ

პირველი ხუთი განტოლება შეიცავს ჩამაგრებული წერტილების უცნობ რეაქციებს, ამიტომ მათ უწოდებენ **წონასწორობის განტოლებებს**. მეექვსე (ბოლო) განტოლება შეიცავს მხოლოდ მოცემულ ძალებს. მას **წონასწორობის პირობა** ეწოდება.

ხუთი განტოლებიდან ექვს უცნობს ვერ განვსაზღვრავთ, ამიტომ ამოცანა სტატიკურად ურკვევია. კერძოდ, მესამე განტოლებიდან შეგვიძლია გავიგოთ მხოლოდ  $R_{Az} + R_{Bz}$  ჯამი. თუ ერთ-ერთ სფერულ სახსარს შევცვლით ცილინდრული სახსრით, მაგალითად,  $A$  წერტილში, მაშინ  $R_{Az} = 0$  და დაგვრჩება ხუთი უცნობი, ე.ი. ამოცანა გახდება სტატიკურად რკვევადი.

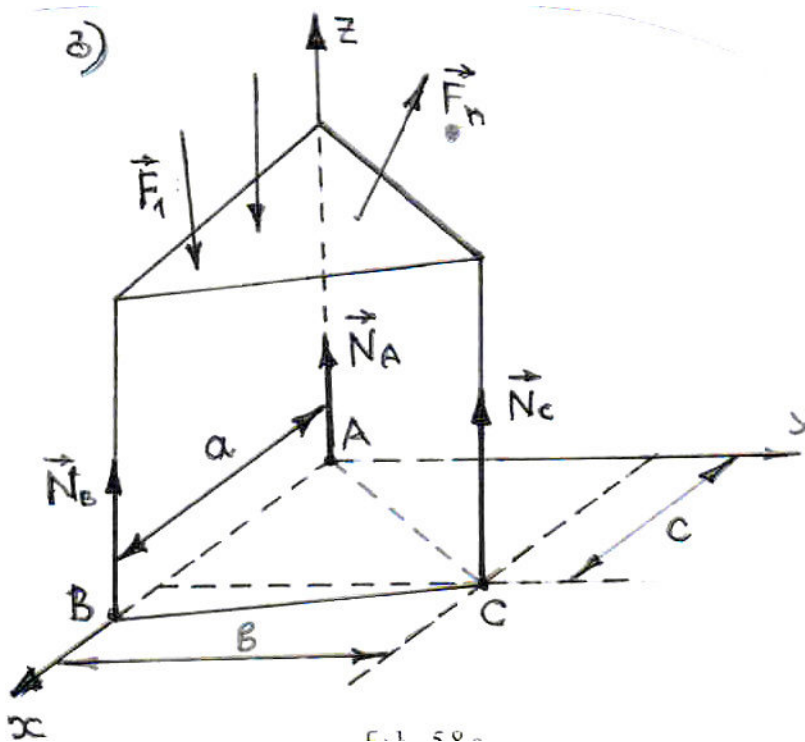
### 2.1. ერთი ჩამაგრებული წერტილის მქონე მყარი სხეულის წონასწორობა.

ვთქვათ, მყარი სხეული ჩამაგრებულია  $A$  წერტილში სფერული სახსრის საშუალებით (ნახ. 5.8,ბ). ცხადია, სხეულს მხოლოდ ბრუნვა შეუძლია ამ წერტილის გარშემო. კოორდინატთა სისტემის სათავე ავიღოთ  $A$  წერტილში, სახსრის მოქმედება შევცვალოთ  $\vec{R}_A(R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Az})$  რეაქციით. დავუშვათ, რომ სხეული წონასწორობაშია  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალთა სისტემის მოქმედებით. შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} + R_{Ax} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_x(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} + R_{Ay} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_y(\vec{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{kz} + R_{Az} &= 0, & \sum_{k=1}^n M_z(\vec{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

სამი განტოლება (წონასწორობის განტოლებები) შეიცავს სამ უცნობს, ამიტომ ამოცანა სტატიკურად რკვევადია. დანარჩენი სამი განტოლება არის წონასწორობის პირობა.

**3. სხეული ეყრდნობა გლუვ ზედაპირს არაერთ წრფეზე მდებარე სამ წერტილში.** ვთქვათ, სხეული ზედაპირს ეყრდნობა  $A, B$  და  $C$  წერტილებში. კოორდინატთა სისტემის სათავე ავიღოთ  $A$  წერტილში, დავამთხოვოთ  $Axy$  სიბრტყე  $ABC$  სიბრტყეს, ბმების მოქმედება შევცვალოთ შესაბამისი  $\vec{N}_A, \vec{N}_B$  და  $\vec{N}_C$  რეაქციებით და შევადგინოთ წონასწორობის განტოლებები (ნახ. 5.8,გ):



ნახ. 5.8გ

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} + N_A + N_B + N_C = 0, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Ax}(\vec{F}_k) - b N_C = 0, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Ay}(\vec{F}_k) - a N_B - c N_C = 0, \quad (5)$$

$$\sum_{k=1}^n M_{Az}(\vec{F}_k) = 0. \quad (6)$$

მიღებულ სისტემაში მესამე, მეოთხე და მეხუთე განტოლებები წონასწორობის განტოლებებია, ხოლო პირველი, მეორე და მეექვსე – წონასწორობის პირობა. უცნობთა რიცხვი სამია, წონასწორობის განტოლებებიც სამი, ამიტომ ამოცანა სტატიკურად რკვევადია. თუ საყრდენ წერტილთა ოდენობა სამზე მეტია, მაშინ ამოცანა სტატიკურად ურკვევია, ვინაიდან გაიზარდა უცნობთა რიცხვი, ხოლო განტოლებათა რიცხვი კი ისევ სამი გვაქვს.

### 5.18. პარალელური ძალების წონასწორობა სივრცეში

ვიხილავთ მყარ სხეულზე მოდებული  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  პარალელურ ძალთა სისტემას. შევარჩიოთ  $Oxyz$  კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ ერთ-ერთი ღერძი, მაგალითად  $Oz$  ღერძი, იყოს მოცემული ძალების პარალელური, მაშინ (5.17.4) წონასწორობის განტოლებები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\sum_{k=1}^n F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n y_k F_k = 0, \quad \sum_{k=1}^n x_k F_k = 0. \quad (5.18.1)$$

### 5.19. ორი ძალთა სისტემის ტოლფასობა. ძალთა სისტემის კოორდინატები

**თეორემა.** ორი ძალთა სისტემის ტოლფასობისათვის აუცილებელი და საკმარისია მათ ჰქონდეთ ტოლი ნაკრები ვექტორები და ტოლი ნაკრები ვექტორული მომენტები.

თეორემა მტკიცდება ბრტყელი ძალთა სისტემისთვის მსგავსი თეორემის დამტკიცების ანალოგიურად, ოღონდ სკალარული მომენტის ნაცვლად გვექნება ვექტორული მომენტი. ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერი ძალთა სისტემა სავსებით ხასიათდება ნაკრები ვექტორითა და რაიმე წერტილის მიმართ ნაკრები ვექტორული მომენტით. ამ ვექტორების  $F_x', F_y', F_z', M_x', M_y', M_z'$  გეგმილებს **ნებისმიერი ძალთა სისტემის კოორდინატები** ეწოდება.

### 5.20. ძალთა სისტემის ინვარიანტები, ძალთხრახნი

ნებისმიერი  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალთა სისტემის  $F_x', F_y', F_z', M_x', M_y', M_z'$  კოორდინატების მნიშვნელობები დამოკიდებულია კოორდინატთა სისტემის არჩევაზე. შევეცადოთ ძალთა სისტემის დასახასიათებლად შემოვიტანოთ ისეთი სიდიდეები, რომელთა მნიშვნელობები არ იქნება დამოკიდებული ღერძების არჩევაზე. ასეთ სიდიდეებს **ძალთა სისტემის ინვარიანტები** ეწოდება.

ძალთა სისტემის პირველ ინვარიანტად მიღებულია მისი ნაკრები ვექტორის მოდული (მართალია, ღერძების შეცვლით ვექტორის გეგმილები ამ ღერძებზე, საზოგადოდ, იცვლება, მაგრამ ვექტორის სიგრძე იგივე რჩება). აღვნიშნოთ პირველი ინვარიანტი  $I_1$ -ით და გვექნება:

$$I_1 = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (5.20.1)$$

ძალთა სისტემის მეორე ინვარიანტად მიღებულია მისი ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები ვექტორული მომენტის სკალარული ნამრავლი და, თუ მას აღვნიშნავთ  $I_2$ -ით, მივიღებთ:

$$I_2 = (\vec{F} \cdot \vec{M}) = F_x M_x + F_y M_y + F_z M_z. \quad (5.20.2)$$

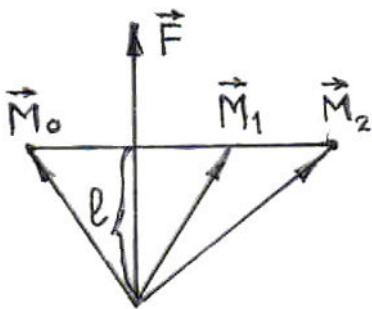
გამოვთვალოთ ნაკრები ვექტორული მომენტის გეგმილი ნაკრები ვექტორის ფუძეზე. აღვნიშნოთ იგი  $l$ -ით და გვქვინება:

$$l = \text{გეგმ}_{\vec{F}} \vec{M} = |\vec{M}| \cdot \cos \alpha = \frac{|\vec{F}| |\vec{M}| \cdot \cos \alpha}{|\vec{F}|} = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{M})}{I_1} = \frac{I_2}{I_1}. \quad (5.20.3)$$

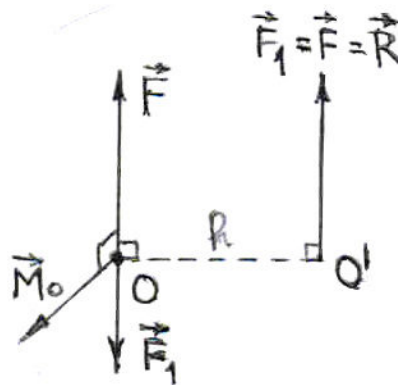
მივიღეთ, რომ  $l$ -იც ინვარიანტია (როგორც ორი ინვარიანტის ფარდობა), ე.ი. კოორდინატთა ღერძების ცვლილებით ნაკრები ვექტორული მომენტი იცვლება, მაგრამ მისი გეგმილი ნაკრები ვექტორის ფუძეზე მუდმივი სიდიდეა (ნახ. 5.9).

აღვილი მისახვედრია, რომ ნაკრები ვექტორული მომენტის მოდული მაშინ არის  $l$ -ის ტოლი, როცა ნაკრები ვექტორი პარალელურია ნაკრები მომენტის.

**განსაზღვრა.** ურთიერთპარალელური ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის ერთობლიობას, ძალთა სისტემის ძალთხრახნი ეწოდება. ხრახნს ეწოდება მარცხენა, თუ  $\vec{F}$  და  $\vec{M}$  ვექტორებს ერთნაირი მიმართულებები აქვთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში ძალთხრახნი მარჯვენაა.



ნახ. 5.9



ნახ.5.10

ჩატარებული მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ ნაკრები ვექტორული მომენტის მოდულს მინიმალური მნიშვნელობა აქვს ძალთხრახნის შემთხვევაში და უდრის  $l$ -ს.

## 5.21. ნებისმიერი ძალთა სისტემის ტოლქმედი

საინტერესოა, რა შემთხვევაში აქვს სივრცით ძალთა სისტემას ტოლქმედი.

**თეორემა.** თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი არ უდრის ნულს, ხოლო ნაკრები ვექტორული მომენტი ან უდრის ნულს ან ნაკრები ვექტორის მართობია, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე.

**დამტკიცება.** დავიყვანოთ ძალთა სისტემა რაიმე  $O$  ცენტრამდე. მივიღებთ  $\vec{F}$  ნაკრები ვექტორის ტოლ ძალას და წყვილძალას, რომლის ვექტორული მომენტი  $\vec{M}_o$  ნაკრები ვექტორული მომენტის ტოლია. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

1.  $\vec{F} \neq 0$ ,  $\vec{M} = 0$ . ამ შემთხვევაში ძალთა სისტემა შეიცვალა ერთი ძალით, ამიტომ ეს ძალა არის ტოლქმედი და მისი ფუძე გადის  $O$  ცენტრზე.

2.  $\vec{F} \neq 0$ ,  $\vec{M} = 0$ ,  $\vec{F} \perp \vec{M}_o$  (ნახ. 5.10). შევცვალოთ წყვილძალა მისი ისეთი ტოლფასი წყვილძალით, რომლის ერთ-ერთი შემდგენი  $\vec{F}_1'$  ძალა მდებარეობდეს  $\vec{F}$  ძალის ფუძეზე, ჰქონდეს მისი საწინააღმდეგო მიმართულება და  $|\vec{F}_1'| = |\vec{F}|$ . მივიღებთ, რომ  $\vec{F}_1'$  და  $\vec{F}$  ძალები პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები იქნებიან და მათ ჩამოვაშორებთ სხეულს. დაგვრჩება მხოლოდ წყვილძალის მეორე  $\vec{F}_2'$  ძალა. ამგვარად, ძალთა სისტემა დაიყვანეთ ერთ ძალაზე, ე.ი. ტოლქმედზე. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

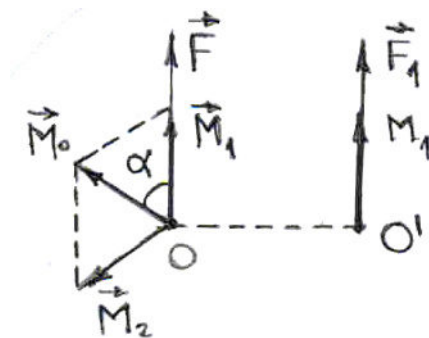
აღსანიშნავია, რომ ორივე შემთხვევაში პირველი ინვარიანტი არ უდრის ნულს, ხოლო მეორე ინვარიანტი ნულის ტოლია. ამასთან დაკავშირებით განხილული თეორემა შეიძლება ასეც ჩამოვაყალიბოთ: თუ ძალთა სისტემის პირველი ინვარიანტი არ უდრის ნულს, ხოლო მეორე ინვარიანტი ნულის, ტოლია, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე.

ტოლქმედის ფუძის  $OO'$  დაშორება  $O$  დაყვანის ცენტრიდან აღვნიშნოთ  $h$ -ით, მაშინ  $M_o = F \cdot h \Rightarrow$

$$h = M_o / F. \quad (5.21.1)$$

## 5.22. ნებისმიერი ძალთა სისტემის დაყვანა ძალთხრახნზე

**თეორემა.** თუ ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორი და ნაკრები ვექტორული მომენტი ცალ-ცალკე არ უდრის ნულს და არც ურთიერთმართობულია (ე.ი. მეორე ინვარიანტი არ უდრის ნულს), მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნზე.



ნახ. 5.11

დამტკიცება. მყარ სხეულზე მოდებული  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  ძალთა სისტემა და-  
 ვიყვანოთ კოორდინატთა სათავის მიმართ  $\vec{F}^*$  ძალაზე და  $\vec{M}_o^*$  მომენტის მქონე  
 წყვილძალაზე, ამასთან  $\vec{F}^*$  არ არის მართობი  $\vec{M}_o^*$  ვექტორისა. მივიღეთ, რომ  $O$   
 წერტილზე მოდებულია ორი  $\vec{F}^*$  და  $\vec{M}_o^*$  ვექტორი (ნახ. 5.11).

$\vec{M}_o^*$  ვექტორი დავშალოთ ორ ურთიერთმართობ  $\vec{M}_1^*$  და  $\vec{M}_2^*$  შემდგენებად ისე,  
 რომ ერთ-ერთი, კერძოდ  $\vec{M}_1^*$ , მიმართული იყოს  $\vec{F}^*$  ვექტორის გასწვრივ. ადვილად  
 მივიღებთ:

$$M_1^* = M_o^* \cos \alpha, \quad M_2^* = M_o^* \sin \alpha, \quad (5.22.1) \quad \text{სადაც}$$

$\alpha$  კუთხეა  $\vec{F}^*$  და  $\vec{M}_o^*$  ვექტორებს შორის.

ცხადია, რომ  $\vec{M}_2^*$  ვექტორი მართობია  $\vec{F}^*$  ნაკრები ვექტორისა. წინა პარაგ-  
 რაფში ვახევენთ, რომ ასეთი ძალა და მომენტი შეგვიძლია დავიყვანოთ ერთ  $\vec{F}_1^* = \vec{F}^*$   
 ძალაზე, რომლის ფუძე  $O$  დაყვანის ცენტრიდან დაშორებულია (იხ. (5.21.1)  
 ფორმულა)

$$h = M_2^*/F^* = M_o^* \sin \alpha / F^* \quad (5.22.2)$$

მანძილით. ამგვარად, მოცემული ძალთა სისტემა შეიცვალა  $\vec{F}_1^* = \vec{F}^*$  ძალით, რო-  
 მელიც  $O$  წერტილიდან დაშორებულია  $h = M_o^* \sin \alpha / F^*$  მანძილით, და  $\vec{M}_1^*$  მომენტის  
 მქონე წყვილძალით, ამასთან  $\vec{M}_1^* \parallel \vec{F}^*$ . ვინაიდან წყვილძალის ვექტორული მომენტი  
 თავისუფალი ვექტორია, შეგვიძლია ის მოვდოთ  $\vec{F}_1^*$  ძალის  $O'$  მოდების წერტილში

და მივიღებთ  $\vec{F}_1$  ძალისა და  $\vec{M}_1$  მომენტისგან შედგენილ ძალთხრახნს. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ძალთხრახნის ელემენტებია:  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  ძალა და წყვილძალის  $M_1 = M_o \cos \alpha$  მომენტი, სადაც

$$\cos \alpha = \frac{F_x M_{ox} + F_y M_{oy} + F_z M_{oz}}{F M_o}. \quad (5.22.3)$$

### 5.23. ცენტრალური ღერძის განტოლება

**განსაზღვრა.** წრფეს, რომლის გასწვრივაც მოქმედებს ძალთხრახნის  $\vec{F}_1 = \vec{F}$  ძალა, ძალთხრახნის ღერძი ან ცენტრალური ღერძი ეწოდება. ამ ღერძის ყოველი წერტილის მიმართ მოცემული ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთსა და იმავე ძალთხრახნზე. დაყვანის ცენტრიდან ღერძამდე მანძილი გამოითვლება (5.22.2) ფორმულით.

გამოვიყვანოთ ცენტრალური ღერძის განტოლება. ამისათვის ვიპოვოთ ისეთი  $O'(x, y, z)$  წერტილი, რომლის მიმართაც ძალთა სისტემის დაყვანის შედეგად მივიღებთ:  $(\vec{F}_1 = \vec{F}) \parallel (\vec{M}_o = \vec{M}_1)$ . კოლინეარობის პირობის თანახმად,

$$\frac{M_{o'x}}{F_x} = \frac{M_{o'y}}{F_y} = \frac{M_{o'z}}{F_z} = p, \quad (5.23.1)$$

სადაც  $p$  ძალთხრახნის პარამეტრია. (5.3.5) ფორმულების თანახმად (5.23.1) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\frac{M_{0x} - yF_z + zF_y}{F_x} = \frac{M_{0y} - zF_x + xF_z}{F_y} = \frac{M_{0z} - xF_y + yF_x}{F_z} = p. \quad (5.23.2)$$

(5.23.2) არის სივრცეში წრფის განტოლება, რომლის წერტილების მიმართ ძალთა სისტემა დაიყვანება ერთსა და იმავე ძალთხრახნზე. ამ განტოლებას **ცენტრალური ღერძის განტოლება** ეწოდება.

განვიხილოთ შემთხვევები, როცა ნაკრები ვექტორის გეგმილებიდან ერთი ან ორი ნულის ტოლია. ვთქვათ,  $F_z = 0$ , მაშინ (5.23.2) განტოლების ნაცვლად გვექნება:

$$\frac{M_{0x} + zF_y}{F_x} = \frac{M_{0y} - zF_x}{F_y}, \quad M_{0z} - xF_y + yF_x = 0. \quad (5.23.3)$$

თუ ყველა ძალა ერთ  $Oxy$  სიბრტყეშია (ე.ი.  $z = 0$ ), მაშინ გვექნება ( $M_{0z} = M_0$ ):

$$M_0 - xF_y + yF_x = 0 \Rightarrow y = \frac{F_y}{F_x} x - \frac{M_0}{F_x}. \quad (5.23.4)$$



როცა  $F_x^* = 0, F_y^* = 0$ , მაშინ (5.23.2)-დან მივიღებთ:

$$M_{0x}^* - yF_z^* = 0, \quad M_{0y}^* + yF_z^* = 0. \quad (5.23.5)$$

5.20 პარაგრაფში მივიღეთ, რომ ძალთხრახნის შემთხვევაში წყვილძალის მომენტი

$$l = \frac{I_2}{I_1} = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{M}_o^*)}{F^*} = \frac{F^* \cdot M_o^* \cos \alpha}{F^*} = M_o^* \cos \alpha. \quad (5.23.6)$$

როცა  $p > 0$ , მაშინ ძალთხრახნი მარცხენაა, ხოლო როცა  $p < 0$  - მარჯვენა.

გავიგოთ, რისი ტოლია ძალთხრახნის  $p$  პარამეტრი. (5.23.1)-ის თანხმად

$$l_x = M_{ox}^* = pF_x^*, \quad l_y = M_{oy}^* = pF_y^*, \quad l_z = M_{oz}^* = pF_z^* \Rightarrow l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = \\ = p^2 (F_x^{*2} + F_y^{*2} + F_z^{*2}) = p^2 F^{*2} \Rightarrow p = l/F^*. \quad (5.23.7)$$

#### 5.24. ძალთა სისტემის უმარტივეს სახეზე დაყვანის კერძო შემთხვევები

ნებისმიერი ძალთა სისტემის ერთ ძალასა და ერთ წყვილძალაზე დაყვანი-სას შესაძლებელია შემდეგი კერძო შემთხვევები:

1.  $\vec{F}^* = 0, \vec{M}^* = 0$ . ძალთა სისტემა წონასწორობაშია (იხ §5.16).
2.  $\vec{F}^* \neq 0, \vec{M}^* = 0$ . დაყვანის ცენტრის მიმართ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე (იხ. §5.21, პირველი შემთხვევა.)
3.  $\vec{F}^* = 0, \vec{M}^* \neq 0$ . ძალთა სისტემა დაიყვანება წყვილძალაზე.
4.  $\vec{F}^* \neq 0, \vec{M}^* \neq 0$ . ა) როცა  $\vec{F}^* \neq 0, (\vec{F}^* \cdot \vec{M}^*) = 0$ , მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე (იხ. §5.21, მეორე შემთხვევა); ბ) როცა  $(\vec{F}^* \cdot \vec{M}^*) \neq 0$ , მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნზე (იხ. §5.22).

#### 5.25. მეთოდური მითითებები ამოცანების ამოსახსნელად

3.3 და 4.22 პარაგრაფებში მოცემულია ამოცანების ამოსხნის მეთოდთა დამატებით მოგვეყავს შემდეგი მითითებები:

სივრცითი ამოცანების ამოსხნისას ძირითადად გამოიყენება ანალიზური მეთოდი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც ცნობილია წყვილძალის  $\vec{M}$  ვექტორულ მომენტი, ე.ი. ვიცით მისი მოდული და მის მიერ კოორდინატთა ღერძებთან შედგენილი  $\alpha, \beta, \gamma$  კუთხეები, მაშინ წყვილძალის ვექტორული მომენტი წონასწორობის მომენტების განტოლებებში შედის ღერძებზე  $\vec{M}$  ვექტორის

$$M_x = M \cos \alpha, \quad M_y = M \cos \beta, \quad M_z = M \cos \gamma \quad (5.25.1)$$

გეგმილების სახით.

**ამოცანა 5.1.** განსაზღვრეთ ფილის  $D$  წერტილში მოდებული  $\vec{P}$  ძალის მომენტები კოორდინატთა ღერძების მიმართ, თუ ცნობილია ფილის  $h$  სისქე და  $\alpha$  კუთხე (ნახ. 5.12). [48]

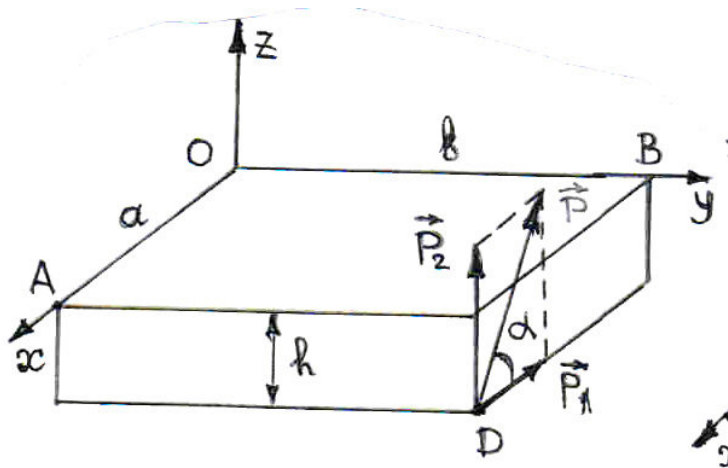
ამოხსნა. გამოვიყენოთ ვარინიონის თეორემა. დავშალოთ ძალა ისე, რომ  $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = -\vec{i} P \cos \alpha + \vec{k} P \sin \alpha$ . ამ დაშლის სიკეთე იმაში მდგომარეობს, რომ ორივე შემდგენი რომელიმე საკოორდინატო ღერძის პარალელურია ან მართობი, რასაც დიდი მნიშვნელობა აქვს ღერძის მიმართ მომენტის განსაზღვრისას.

ადვილად მივიღებთ:

$$M_x(\vec{P}) = M_x(\vec{P}_1) + M_x(\vec{P}_2) = P_2 \cdot b = bP \sin \alpha \quad (M_x(\vec{P}_1) = 0, \text{ ვინაიდან } \vec{P}_1 \parallel Ox),$$

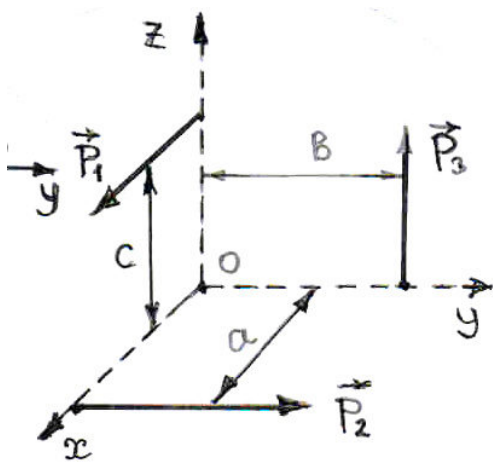
$$M_y(\vec{P}) = M_y(\vec{P}_1) + M_y(\vec{P}_2) = P_1 h - P_2 \cdot a = hP \cos \alpha - aP \sin \alpha = P(h \cos \alpha - a \sin \alpha),$$

$$M_z(\vec{P}) = M_z(\vec{P}_1) + M_z(\vec{P}_2) = P_1 \cdot b = bP \cos \alpha \quad (M_z(\vec{P}_2) = 0, \text{ ვინაიდან } \vec{P}_2 \parallel Oz).$$

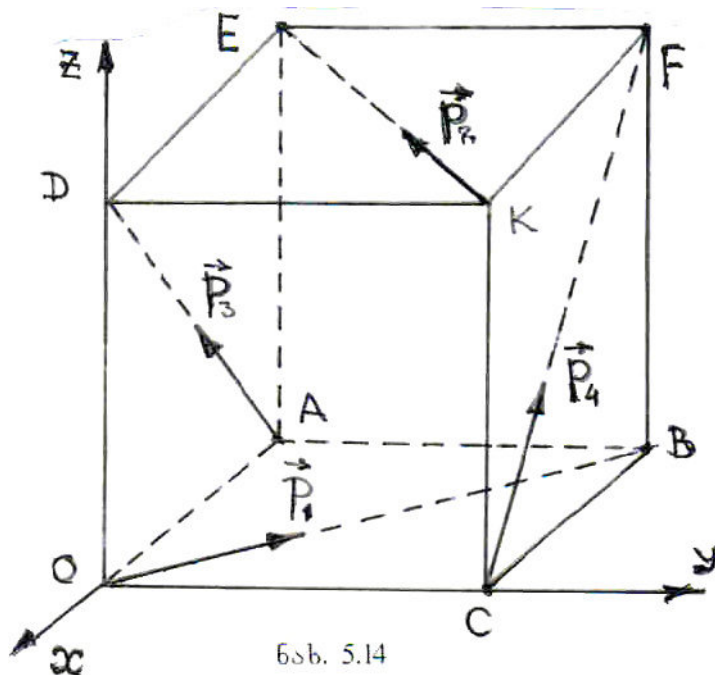


ნახ. 5.12

**ამოცანა 5.2.** სამი  $\vec{P}_1, \vec{P}_2$  და  $\vec{P}_3$  ძალა მდებარეობს საკოორდინატო სიბრტყეებში და პარალელური არიან საკოორდინატო ღერძებისა, მაგრამ შეიძლება მიმართული იყვნენ როგორც ერთ მხარეს, ისე მეორე მხარეს (ნახ. 5.13). მათი  $A, B$  და  $C$  მოდების წერტილები კოორდინატა სათავიდან დაშორებული არიან შესაბამისად  $a, b$  და  $c$  მანძილებით. რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული ძალების მოდულები, რომ ძალთა სისტემა ტოლფასი იყოს ერთი ძალის, ე.ი. სისტემა დაიყვანებოდეს ტოლქმედზე? რა პირობებს უნდა აკმაყოფილებდეს მოცემული ძალების მოდულები, რომ ძალთა სისტემა დაიყვანებოდეს კოორდინატა სათავეზე გამავალ ძალთხრახნზე? [64]



ნახ. 5.13



ნახ. 5.14

ამოხსნა. გამოვთვალოთ მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორის და ნაკრები მომენტის გეგმილები კოორდინატა ღერძებზე:

$$F_x^* = P_1, \quad F_y^* = P_2, \quad F_z^* = 0, \quad (ა)$$

$$M_x^* = P_3 b, \quad M_y^* = P_1 c, \quad M_z^* = P_2 a. \quad (ბ)$$

ცნობილია, რომ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე, როცა  $F^* \neq 0$ ,  $M_0^* \neq 0$  და მეორე ინვარიანტი უდრის ნულს (იხ. §5.21). ამ პირობის თანახმად,

$$(\vec{F}^* \cdot \vec{M}^*) = F_x^* M_x^* + F_y^* M_y^* + F_z^* M_z^* = P_1 \cdot P_3 b + P_2 \cdot P_1 c + P_3 \cdot P_2 a = 0.$$

მიღებული ტოლობა გავეყოთ  $P_1 P_2 P_3$ , მივიღებთ:  $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$ .

დავუშვათ, რომ მეორე ინვარიანტი არ უდრის ნულს და  $\vec{F}^*$  არ არის მართობი  $M_0^*$ -ის, მაშინ ძალთა სისტემა დაიყვანება ძალთხრახნზე (იხ. §5.23), რომლის ფუძის (ე.ი. ცენტრალური ღერძის) განტოლება მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$\frac{M_{0x}^* - y F_z^* + z F_y^*}{F_x^*} = \frac{M_{0y}^* - z F_x^* + x F_z^*}{F_y^*} = \frac{M_{0z}^* - x F_y^* + y F_x^*}{F_z^*}. \quad (5.23.2)$$

იმისათვის, რომ (5.23.2) წრფე გადაოდეს კოორდინატთა სათავეზე, მასში უნდა შევიტანოთ  $x = y = z = 0$  და მივიღებთ:

$$\frac{P_3 b}{P_1} = \frac{P_1 c}{P_2} = \frac{P_2 a}{P_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P_1}{b P_3} = \frac{P_2}{c P_1} = \frac{P_3}{a P_2}.$$

პასუხი.  $\frac{a}{P_1} + \frac{b}{P_2} + \frac{c}{P_3} = 0$ ;  $\frac{P_1}{b P_3} = \frac{P_2}{c P_1} = \frac{P_3}{a P_2}$ .

**ამოცანა 5.3.**  $a$  სიგრძის მქონე კუბის ოთხ წვეროზე მოდებულია ოთხი სიდიდით ტოლი ( $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P$ ) ძალა (ნახ. 5.14). დაიყვანეთ ძალთა სისტემა უმარტივეს სახეზე. [64]

ამოხსნა. (2.4.2) და (4.4.1) ან (4.4.3) ფორმულებით განვსაზღვროთ მოცემული ძალთა სისტემის ნაკრები ვექტორისა და ნაკრები მომენტის გვემილები კოორდინატთა ღერძებზე, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} F_x^* &= -P_1 \cos 45^\circ - P_2 \cos 45^\circ = -\sqrt{2} P, \\ F_y^* &= P_1 \cos 45^\circ - P_2 \cos 45^\circ = 0, \\ F_z^* &= P_3 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ = \sqrt{2} P, \\ M_{0x}^* &= a P_2 \cos 45^\circ + a P_4 \cos 45^\circ = \sqrt{2} a P, \\ M_{0y}^* &= -a P_2 \cos 45^\circ + a P_3 \cos 45^\circ = 0, \\ M_{0z}^* &= a P_2 \cos 45^\circ + a P_3 \cos 45^\circ = \sqrt{2} a P. \end{aligned}$$

ადვილად მივიღებთ:

$$F^* = 2P, \quad \vec{F}^* = 2P(-\vec{i} + \vec{k}), \quad M_0^* = 2Pa, \quad \vec{M}_0^* = 2aP(\vec{i} + \vec{k}). \quad (5)$$

გამოვთვალოთ მოცემული ძალთა სისტემის მეორე ინვარიანტი:

$$I_2 = (\vec{F}^* \cdot \vec{M}_0^*) = F_x^* M_{0x}^* + F_y^* M_{0y}^* + F_z^* M_{0z}^* = -\sqrt{2} P \cdot \sqrt{2} a P + 0 \cdot 0 + \sqrt{2} P \cdot \sqrt{2} a P = 0.$$

მივიღეთ, რომ მოცემული ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე. ნაკრები ვექტორი განსაზღვრული გვაქვს, საჭიროა ვიპოვოთ მისი ფუძე.

(ა) ტოლობებიდანაც ჩანს, რომ  $\vec{F}^*$  და  $\vec{M}_0^*$  ვექტორები ერთ ( $Oxz$ ) სიბრტყეში მდებარეობენ, ამიტომ მოცემული ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე.

ადვილი მისახვედრია, რომ  $\vec{F}^*$  ვექტორი მიმართულია  $OD$  ბისექტრისის გასწვრივ, ხოლო  $\vec{M}_0^*$  ვექტორი მისი მართობია. ტოლქმედის ფუძის დასადგენად (4.5.12) ფორმულით გამოვთვალოთ  $h = M_0^*/F^* = 2aP/2P = a$ .

მივიღეთ: მოცემული ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომლის ფუძე არის  $CF$  ბისექტრისა, მოღული  $2aP$ -ს ტოლია და მიმართულია  $C$ -დან  $F$ -სკენ.

იგივე შედეგს მივიღებთ, თუ ტოლქმედის ფუძეს, ე.ი. ცენტრალური ღერძის განტოლებას გავიგებთ (5.23.2) ფორმულებით. შევიტანოთ განსაზღვრული სიდიდეები ამ ფორმულებში ( $p=0$ , ამიტომ თითოეული მრიცხველი უნდა გაუუტოლოთ ნულს) და მივიღებთ ტოლქმედის განტოლებას. გამოთვლები გვაძლევს:  $y=a$ ,  $x=z$ , ეს კი  $CF$  წრფის განტოლებაა.

პასუხი. ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც გამოისახება  $2P(-\vec{i} + \vec{k})$  ვექტორით, ხოლო ფუძის განტოლებაა  $y=a$ ,  $x=z$ .

**ამოცანა 5.4.** მართკუთხედის ფორმის მქონე ყუთის 120 ნ-ის წონის  $ABCD$  სახურავი ერთი მხრიდან შეკავებულია  $DE$  ჯოხით.  $AD = AE$ ;  $\angle DAE = 60^\circ$  (ნახ. 5.15). განსაზღვრეთ  $A$  და  $B$  სახსრების რეაქციები, აგრეთვე, ძალვა ღეროში, რომლის წონაც მხედველობაში არ მიიღება. [64]

ამოხსნა. წონასწორობის ობიექტია სახურავი. მასზე მოქმედებს შემდეგი ძალები:  $\vec{P}$  - მისი სიმძიმის ძალა,  $\vec{R}_D$  - ჯოხის რეაქცია,  $A$  სახსრის  $\vec{R}_{Ax}$  და  $\vec{R}_{Az}$  და  $B$  სახსრის  $\vec{R}_{Bx}$  და  $\vec{R}_{Bz}$  რეაქციები (იგულისხმება, რომ სახსრები ცილინდრულია). თუ გავითვალისწინებთ, რომ სამკუთხედი  $ADE$  ტოლგვერდაა და ყველა ძალა  $y$  ღერძის მართობია, მაშინ წონასწორობის განტოლებები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} - R_D \cos 60^\circ = 0, \quad (ა)$$

$$\sum F_{kz} = R_{Az} + R_{Bz} - P + R_D \sin 60^\circ = 0, \quad (ბ)$$

$$\sum M_x(\vec{F}_k) = -0,5 P \cdot AB + R_{Bz} \cdot AB = 0, \quad (გ)$$

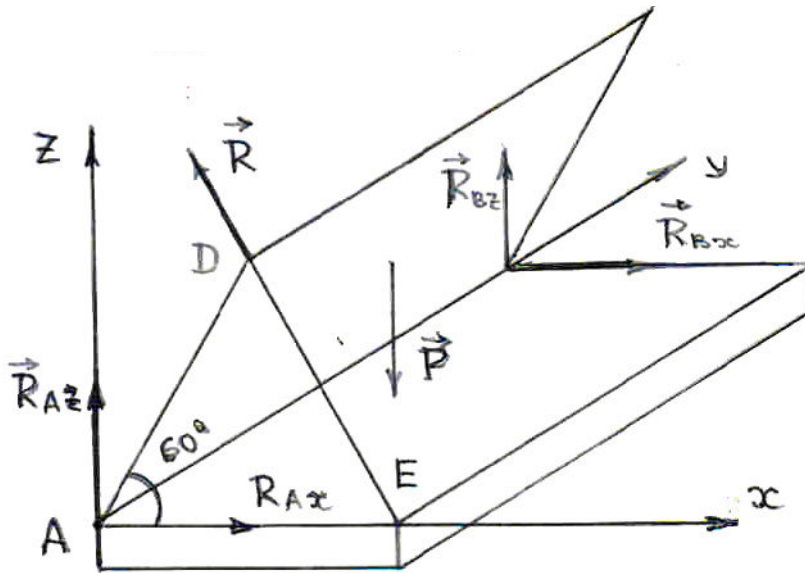
$$\sum M_y(\vec{F}_k) = 0,5 P \cdot AD \cos 60^\circ - R_D \cdot AD \sin 60^\circ = 0, \quad (დ)$$

$$\sum M_z(\vec{F}_k) = -R_{Bx} \cdot AB = 0. \quad (ე)$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:  $R_{Ax} = 17,34 \text{ ნ}$ ;  $R_{Az} = 30 \text{ ნ}$ ;  $R_{Bx} = 0$ ;

$R_{Bz} = 60 \text{ ნ}$ ;  $R_D = 34,68 \text{ ნ}$ .

ქმედებისა და უკუქმედების აქსიომის თანახმად, ჯოხში აღძრული ძალვა სი-  
დით  $\vec{R}_D$  რეაქციის ტოლია და მის საწინააღმდეგოდ არის მიმართული.



ნახ. 5.15

**ამოცანა 5.5.** მართკუთხედის ფორმის ერთგვაროვანი  $P$  წონის ფირფიტა სა-მი-  
ფეხით ეყრდნობა გლუვ იატაკს. ზომები მოცემულია ნახ. 5.16-ზე.  $x$  და  $y$  კო-  
ორდინატების მქონე წერტილში მოდებულია  $\vec{Q}$  ვერტიკალური ძალა. განსაზღვრეთ  
ფირფიტის ზედაპირზე ის არე, რომლის ნებისმიერ შიგა წერტილზე მოდებული  $\vec{Q}$   
ძალა ვერ გადააყირავეს ფირფიტას. გაიგეთ, აგრეთვე,  $\vec{P}$  და  $\vec{Q}$  ძალების მო-  
დულების როგორი თანაფარდობისას ფირფიტის მთელი ზედაპირი იქნება უსაფრ-  
თხო. [21]

ამოხსნა. შევცვალოთ გლუვი იატაკის ქმედება ფირფიტაზე შესაბამისი  $\vec{N}_A$ ,  $\vec{N}_B$   
და  $\vec{N}_D$  ნორმალური რეაქციებით. ფირფიტაზე მოქმედებს პარალელური ძალები და  
წონასწორობის განტოლებების შესადგენად გამოვიყენოთ (5.18.1) ფორმულებით:

$$\sum_{k=1}^n F_k = N_A + N_B + N_D - P - Q = 0,$$

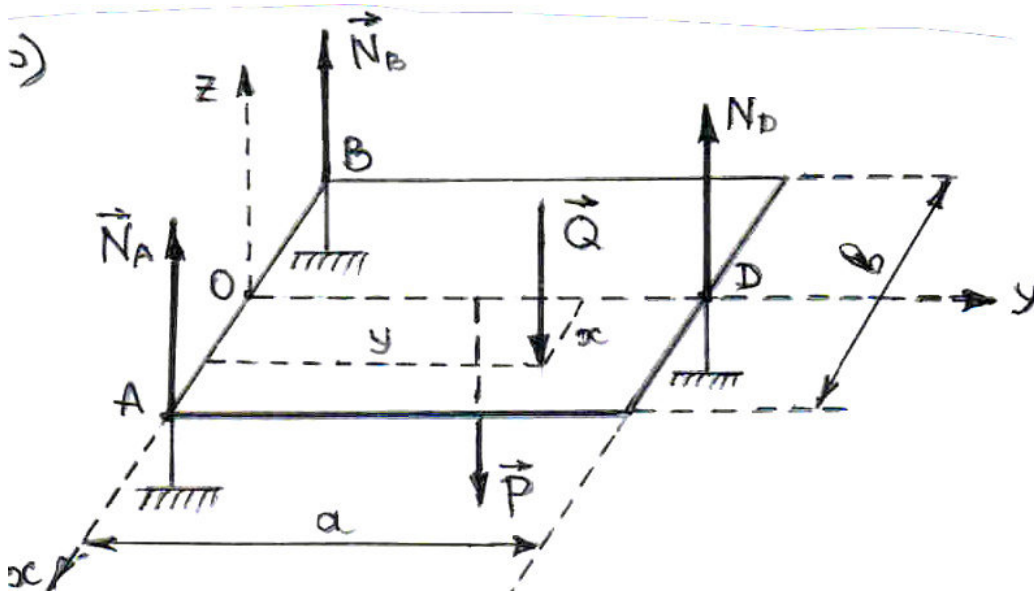
$$\sum_{k=1}^n y_k F_k = -P \frac{a}{2} - Q y + N_D a = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n x_k F_k = -N_A \frac{b}{2} + Qx + N_B \frac{b}{2} = 0.$$

მიღებული სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:

$$N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2}, \quad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2}, \quad N_D = \frac{Q}{a}y + \frac{P}{2}.$$

იმისათვის, რომ ფორფიტა არ გადავირავდეს, აუცილებლად უნდა შესრულდეს პირობა:  $N_A \geq 0, N_B \geq 0$ .



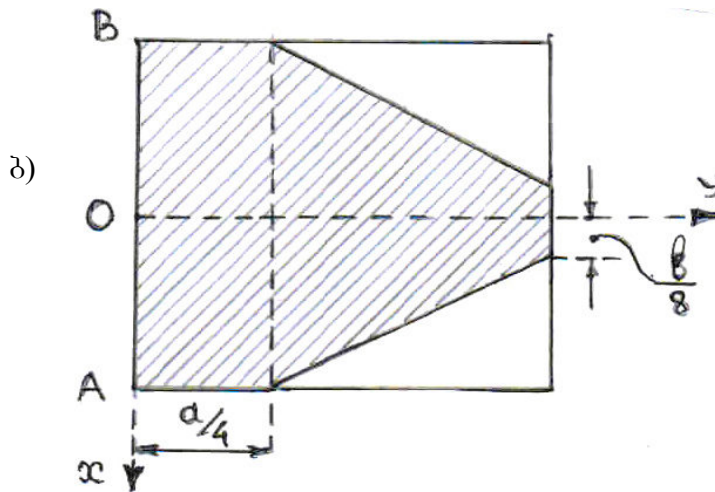
ნახ. 5.16,ა

საძიებელი არეს საზღვრები დავადგინოთ შემდეგი პირობით:

$$N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2} = 0, \quad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a, \quad y = -\frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a. \quad (ა)$$

$$(ა)-ს უნდა დაემატოს პირობები: \quad -0,5b \leq x \leq 0,5b, \quad 0 \leq y \leq a. \quad (ბ)$$



ნახ. 5.16,ბ

(ა) არეს წერტილები,  $\vec{Q}$  ძალის მოდების შემთხვევაში, ფირფიტის გადაყირავების თვალსაზრისით უსაფრთხოა. განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა  $Q = 2P$ , მაშინ

$$y = \frac{2a}{b}x + \frac{5}{4}a, \quad y = -\frac{2a}{b}x + \frac{5}{4}a. \quad (გ)$$

(გ) ტოლობები (ბ) პირობებთან ერთად, როცა  $Q = 2P$ , გვაძლევს ნახ. 5.16,ბ-ზე დაშტრისულ არეს.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $P = 2Q$ . მაშინ (ა) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$y = \frac{2a}{b}x + 2a, \quad y = -\frac{2a}{b}x + 2a. \quad (დ)$$

$x = -b/2$  და  $x = b/2$  საზღვრებისთვის ვღებულობთ, რომ  $y = a$ . მივიღეთ, რომ, როცა  $P \geq 2Q$ , მაშინ ფირფიტის ზედაპირის ყველა წერტილი  $\vec{Q}$  ძალის მოდების თვალსაზრისით უსაფრთხოა (ანუ ფირფიტა არ გადაყირავდება).

პასუხი.  $N_A = \frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2}, \quad N_B = -\frac{Q}{b}x - \frac{Q}{2a}y + \frac{P}{4} + \frac{Q}{2}, \quad N_D = \frac{Q}{a}y + \frac{P}{2};$

$$y = \frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a, \quad y = -\frac{2a}{b}x + \frac{aP}{2Q} + a, \quad -0,5b \leq x \leq 0,5b, \quad 0 \leq y \leq a; \quad P \geq 2Q.$$



## VI თავი

### პარალელური ძალების შეკრება. სიმძიმის ცენტრი

ვიხილავთ მყარ სხეულზე მოდებულ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  პარალელურ ძალთა სისტემას. შევარჩიოთ  $Oxyz$  კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ ერთ-ერთი ღერძი, მაგალითად  $Oz$  ღერძი, იყოს მოცემული ძალების პარალელური, მაშინ  $F_x^* = 0, F_y^* = 0, F_z^* \neq 0, M_x^* \neq 0, M_y^* \neq 0, M_z^* = 0 \Rightarrow I_2 = (\vec{F}^* \vec{M}^*) = 0 \Rightarrow \vec{F}^* \perp \vec{M}^*$ . ამ შემთხვევაში, როგორც ვიცით, ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე (იხ §5.21).

**მივიღეთ:** პარალელურ ძალთა სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე.

სახოგადოდ, პარალელური ძალების უმარტივეს სახეზე დაყვანისას შეიძლება გვქონდეს შემდეგი შემთხვევები:

1.  $\vec{F}^* = 0, \vec{M}^* \neq 0$  - ძალთა სისტემა დაიყვანება წყვილძალაზე;
2.  $\vec{F}^* \neq 0, \vec{M}^* = 0$  ან  $\vec{F}^* \neq 0, \vec{M}^* \neq 0$  - სისტემა დაიყვანება ტოლქმედზე;
3.  $\vec{F}^* = 0, \vec{M}^* = 0$  - ძალთა სისტემა წონასწორობაშია.

#### 6.1. პარალელური ძალების შეკრება

ვიხილავთ მყარ სხეულს, რომლის  $A$  და  $B$  წერტილებში მოდებულია ერთ მხარეს მიმართული ვერტიკალური  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალები (ნახ. 6.1). ამავე წერტილებში მოვდოთ პერიზონტალური  $\vec{T}_1$  და  $\vec{T}_2$  ძალები. შევეკრიბოთ  $A$  წერტილში მოდებული  $\vec{F}_1$  და  $\vec{T}_1$  ძალები და ჯამი აღვნიშნოთ  $\vec{R}_1$ -ით. ასევე შევეკრიბოთ  $B$  წერტილში მოდებული  $\vec{F}_2$  და  $\vec{T}_2$  ძალები და ჯამი აღვნიშნოთ  $\vec{R}_2$ -ით. გავასრი-ალოთ  $\vec{R}_1$  და  $\vec{R}_2$  ძალები ფუძეების გასწვრივ და მოვდოთ ისინი თავმოყრის  $K$  წერტილში. დავშალოთ  $\vec{R}_1$  და  $\vec{R}_2$  იმავე  $\vec{F}_1, \vec{T}_1$  და  $\vec{F}_2, \vec{T}_2$  ძალებად და  $\vec{T}_1$  და  $\vec{T}_2$ , როგორც პირდაპირ თანაწინააღმდეგი ძალები, ჩამოვაშოროთ სხეულს. დაგვრჩება  $K$  წერტილში მოდებული ერთ მხარეს მიმართული ორი  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  პარალელური ძალა. მეორე აქსიომის თანახმად ეს ორი ძალა შეგვკვლია შევცვალოთ  $\vec{R}$  ტოლ-

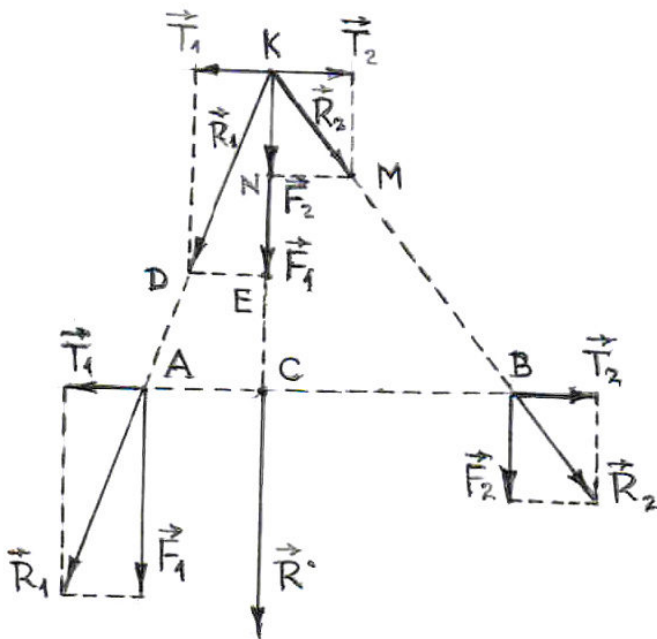
ქმედით, რომელიც ძალების მიმართულება აქვს, ხოლო მოდული  $R' = F_1 + F_2$ . ვინაიდან აბსოლუტურად მყარ სხეულზე მოდებული ძალა სრიალა ვექტორია (იხ. §2.3), ამიტომ  $\vec{R}'$  შეგვიძლია მოვდოთ მისი ფუძისა და  $AB$  მონაკვეთის გადაკვეთის  $C$  წერტილში.

6.1 ნახ-დან ვღებულობთ:

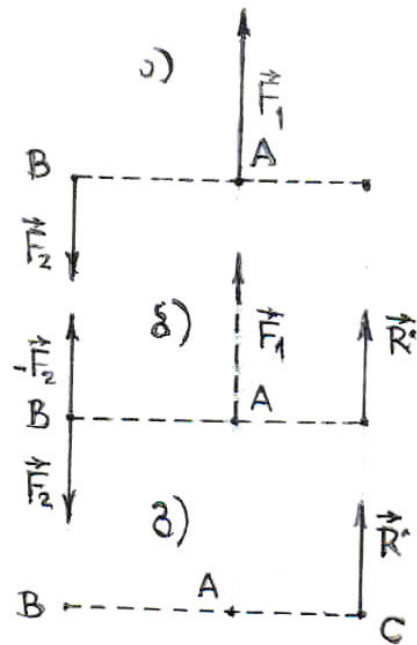
$$\triangle AKC \sim \triangle DKE \Rightarrow \frac{CA}{ED} = \frac{KC}{KE}, \quad \triangle BKC \sim \triangle MKN \Rightarrow \frac{CB}{NM} = \frac{KC}{KN}.$$

გავყოთ პირველი ტოლობა მეორეზე და თუ გავითვალისწინებთ  $ED = MN$ ,  $KE = F_1$ ,  $KN = F_2$  ტოლობებს, მივიღებთ:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{6.1.1}$$



ნახ. 6.1



ნახ. 6.2

**მივიღეთ:** ორი ერთმხრივ მიმართული პარალელური ძალა დაიყვანება ტოლქმედზე, რომელიც ძალების პარალელურია და მიმართულია იმავე მხარეს. ტოლქმედის მოდული უდრის ძალების მოდულების ჯამს და მისი ფუძე გადის წერტილზე, რომელიც მოდების წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს ძალების მოდულების უკუპროპორციულ ნაწილებად ყოფს.

ახლა შევკრიბოთ მყარი სხეულის  $A$  და  $B$  წერტილებში მოდებული სხვადასხვა მხარეს მიმართული ორი პარალელური  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალა (ანტიპარალელუ-

რი ძალები) (ნახ. 6.2,ა). დავეუშვათ, რომ  $F_1 > F_2$  და დავშალოთ  $\vec{F}_1$  ძალა ერთმხრივ მიმართულ ორ ძალად ისე, რომ ერთ-ერთი მოდებული იყოს  $B$  წერტილში და ტოლი იყოს  $-\vec{F}_2$ -ის (ნახ 6.2,ბ).  $\vec{F}_2$  და  $-\vec{F}_2$  პირდაპირ თანაწინააღმდეგე ძალებია, ამიტომ შეგვიძლია ჩამოვაშოროთ სხეულს და დაგვრჩება გარკვეულ  $C$  წერტილ-ში მოდებული მეორე ძალა, რომელიც არის მოცემული ძალების ტოლქმედი (ნახ. 6.2,გ). თუ მას აღვნიშნავთ  $\vec{R}$ -ით, გვექნება:  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  და  $R = F_1 - F_2$ . დაგვრჩა  $C$  წერტილის მდებარეობის გაგება.

ერთ სიბრტყეზე მდებარე ძალების ტოლქმედის არსებობის საკითხის განხილვისას (იხ. §4.15) ვნახეთ, რომ ძალთა სისტემა ტოლქმედზე დაიყვანება იმ წერტილის მიმართ, რომლის მიმართაც ნაკრები სკალარული მომენტი არის ნულის ტოლი. ამგვარად,  $M_c(\vec{R}) = 0 \Leftrightarrow M_c(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = 0 \Leftrightarrow M_c(\vec{F}_1) + M_c(\vec{F}_2) = 0$ . დავეუშვათ, რომ  $AB$  მონაკვეთი ძალების ფუძეების მართობია და გვექნება:  $-F_1 \cdot AC + F_2 \cdot BC = 0$   
 $\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{F_2}{F_1}$ .

მივიღეთ (6.1.1) ფორმულა. განსხვავება წინა შემთხვევისაგან ის არის, რომ ანტიპარალელური ძალების შემთხვევაში ტოლქმედის ფუძის  $C$  წერტილი მდებარეობს  $AB$  მონაკვეთის გარეთ სიდიდით დიდი ძალის მხარეს.

იმ შემთხვევაში, როცა სხეულზე მოქმედებს ორზე მეტი პარალელური ძალა, მათ დავეყოთ ორ ჯგუფად: ერთმხრივ მიმართულ და მათ საწინააღმდეგოდ მიმართულ ძალებად. შევკრიბავთ რა ორ-ორად ყველა ძალას, ბოლოს დაგვრჩება ორი ანტიპარალელური ძალა. შესაძლებელია სამი შემთხვევა: ა) ძალები დაიყვანება ტოლქმედზე; ბ) ძალები დაიყვანება წყვილძალაზე; გ) ძალები ნულის ტოლ-ფასია.

## 6.2. პარალელური ძალების ცენტრი

(6.1.1) ფორმულა გვიჩვენებს, რომ პარალელური ძალების ტოლქმედის ფუძისა და  $AB$  წრფის გადაკვეთის  $C$  წერტილის მდებარეობა დამოკიდებულია მხოლოდ ძალების სიდიდეებზე და მათ შორის მანძილზე. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ ყველა ძალას მოვაბრუნებთ თავის მოდების წერტილებს გარშემო ერთი და იმავე კუთხით,  $C$  წერტილის მდებარეობა არ შეიცვლება. ცხადია, იმავე კუთხით მობრუნდება ტოლქმედიც.

**განსაზღვრა.** პარალელური ძალების ცენტრი ეწოდება წერტილს, რომლის მდებარეობა დამოკიდებულია ძალების სიდიდეებზე, მათი მოდების წერტილებზე და არ არის დამოკიდებული იმაზე, თუ როგორ მოვაბრუნებთ ძალებს მათი მოდების წერტილების გარშემო.

დავადგინოთ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  პარალელური ძალების ცენტრის კოორდინატების განმსაზღვრელი ფორმულები. დავუშვათ, რომ  $\vec{e}$  ერთეულოვანი ვექტორი პარალელურია მოცემული ძალების, მაშინ  $\vec{F}_k = F_k \cdot \vec{e}$ , სადაც  $F_k = \pm |\vec{F}_k|$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) და  $\vec{R}$  ტოლქმედისთვის გვექნება:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \left( \sum_{k=1}^n F_k \right) \cdot \vec{e} = R \cdot \vec{e}.$$

ვარინიონის თეორემის თანახმად (იხ. §5.8),

$$M_o(\vec{R}) = \sum_{k=1}^n M_o(\vec{F}_k). \quad (6.2.1)$$

მაგრამ  $M_o(\vec{R}) = \vec{r}_c \times \vec{R} = \vec{r}_c \times R \cdot \vec{e} = R \cdot \vec{r}_c \times \vec{e},$

$$M_o(\vec{F}_k) = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{r}_k \times F_k \cdot \vec{e} = F_k \cdot \vec{r}_k \times \vec{e},$$

სადაც  $\vec{r}_c$  და  $\vec{r}_k$  შესაბამისად პარალელური ძალების  $C$  ცენტრისა და ძალის მოდების წერტილის რადიუს-ვექტორებია  $O$  კოორდინატთა სისტემის სათავის მი-მართ. შევიტანოთ ეს გამოსახულებები (6.2.1) ტოლობაში და მივიღებთ:  $R \cdot \vec{r}_c \times \vec{e} =$

$$= \sum_{k=1}^n F_k \cdot \vec{r}_k \times \vec{e} \Rightarrow \left( R \cdot \vec{r}_c - \sum_{k=1}^n F_k \cdot \vec{r}_k \right) \times \vec{e} = 0. \text{ ვინაიდან } \vec{e} \text{ ვექტორი არ არის ნულის ტოლი,}$$

ამიტომ  $R \cdot \vec{r}_c - \sum_{k=1}^n F_k \cdot \vec{r}_k = 0 \Rightarrow$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot \vec{r}_k}{R}. \quad (6.2.2)$$

ამ ტოლობის კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot x_k}{R}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot y_k}{R}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot z_k}{R}. \quad (6.2.3)$$

(6.2.3) ფორმულებით გამოითვლება პარალელური ძალების ცენტრის კოორდინატები, თუ ვიცით მათი მოდების წერტილების  $x_k, y_k, z_k$  კოორდინატები.

$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \vec{r}_k$  სიდიდეს პარალელური ძალების **სტატიკური მომენტი** ეწოდება  $O$

სათავის მიმართ, ხოლო

$$S_x = \sum_{k=1}^n F_k x_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^n F_k y_k, \quad S_z = \sum_{k=1}^n F_k z_k \quad (6.2.4)$$

სიდიდეებს - **სტატიკური მომენტები** კოორდინატთა სიბრტყეების მიმართ.

### 6.3. ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრი

ძალას, რომლითაც დედამიწა იზიდავს ნივთიერ ობიექტს, ამ ობიექტის **სიმძიმის ძალა** ეწოდება. სიმძიმის ძალის ფუძე გადის დედამიწის ცენტრზე. გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ კუთხე ორი ნივთიერი წერტილის სიმძიმის ძალების ფუძეებს შორის, რომლებიც დედამიწის ზედაპირზე ერთმანეთისგან დაშორებულია 31 მ-ით, შეადგენს 1 წამს. აქედან გამომდინარეობს, რომ ერთმანეთის ახლოს მდებარე ნივთიერი წერტილების სიმძიმის ძალები პრაქტიკულად პარალელური ძალებია.

აღვნიშნოთ  $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), \dots, M_n(x_n, y_n, z_n)$  ნივთიერი წერტილების სიმძიმის ძალები შესაბამისად  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ -ით. ამ ძალების ტოლქმედი აღვნიშნოთ  $\vec{P}$ -ით და ვუწოდოთ მას **ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ძალა**.  $\vec{P}$  ძალა მოდებულია  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  პარალელური ძალების ცენტრში, რომელსაც **ნივთიერ წერტილთა სისტემის სიმძიმის ცენტრი** ეწოდება. აღვნიშნოთ ამ წერტილის კოორდინატები  $x_c, y_c, z_c$ -თი და (6.2.3) ფორმულების გათვალისწინებით გვექნება:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k}{P}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot y_k}{P}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k}{P}. \quad (6.3.1)$$

$C$  სიმძიმის ცენტრის  $\vec{r}_c$  რადიუს-ვექტორისთვის (6.2.2) ფორმულა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot \vec{r}_k}{P}. \quad (6.3.2)$$

#### 6.4. მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი

გავავლოთ  $Oxyz$  კოორდინატთა სისტემის სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები ისე, რომ მათ გადაკვეთონ მოცემული მყარი სხეული. ვთქვათ, მივიღეთ  $n$  ოდენობის პარალელეპიპედი, რომელთაგან ზოგიერთის წახნაგი მრუდე ზედაპირებია. დავუშვათ, რომ  $n$  იმდენად დიდი რიცხვია (ე.ი. პარალელეპიპედების ზომები ძალიან მცირეა), რომ პარალელეპიპედები შეგვიძლია ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილებად, რომელთა  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$  სიმძიმის ძალები პარალელური ძალებია. ამ ძალების ცენტრს ეწოდება **მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრი** და მისი კოორდინატების გამოსათვლელად გამოიყენება (6.3.1) ფორმულები. აღსანიშნავია, რომ რაც უფრო დიდია  $n$  რიცხვი, მით უფრო რეალურ შედეგებს მოგვცემენ (6.3.1) ფორმულები.

$k$ -ური ნაწილაკის  $\vec{P}_k$  სიმძიმის ძალის სიდიდე (წონა) წარმოვადგინოთ  $P_k = \rho_k V_k$  სახით, სადაც  $\rho_k$  და  $V_k$  შესაბამისად ნაწილაკის სიმკვრივე და მოცულობაა, და (6.3.1) ფორმულები ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k V_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^n \rho_k V_k}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k V_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^n \rho_k V_k}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k V_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^n \rho_k V_k}. \quad (6.4.1)$$

თუ სხეული ერთგვაროვანია და  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_n = \rho$ , მაშინ (6.4.1) ასეთი სახით ჩაიწერება:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n V_k \cdot x_k}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n V_k \cdot y_k}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n V_k \cdot z_k}{V}, \quad (6.4.2)$$

სადაც  $V = \sum_{k=1}^n V_k$ .

იმ შემთხვევაში, როცა ერთგვაროვანი სხეული თხელი ბრტყელი ფირფიტაა, მაშინ (6.4.2) ფორმულებში მოცულობის ნაცვლად გვქნება  $S$  ფართობი:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k \cdot x_k}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n S_k \cdot y_k}{S}, \quad (6.4.3)$$

სადაც  $S = \sum_{k=1}^n S_k$  და  $Oxy$  კოორდინატთა სიბრტყე ემთხვევა ფირფიტის სიბრტყეს.

როცა ერთგვაროვანი სხეული გრძელი წვრილი სხეულია, მაშინ (6.4.2) ასეთ სახეს მიიღებს:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^n l_k \cdot x_k}{L}, \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^n l_k \cdot y_k}{L}, \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^n l_k \cdot z_k}{L}, \quad (6.4.4)$$

სადაც  $l_k$  სხეულის  $k$ -ური ნაწილის სიგრძეა, ხოლო  $L = \sum_{k=1}^n l_k$ .

ცხადია, რომ (6.4.1)-(6.4.4) ფორმულები მიახლოებით გამოსახავს სიმძიმის ცენტრის კოორდინატებს. რაც უფრო დიდია  $n$  რიცხვი, მით უფრო რეალურ შედეგებს მოგვცემენ ეს ფორმულები. ზუსტი ფორმულების მისაღებად  $n \rightarrow \infty$ -კენ. მაშინ მოყვანილ ფორმულებში ჯამი შეიცვლება ინტეგრალით.

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n \text{ სიმძიმის ძალების ტოლქმედი აღვნიშნოთ } \vec{P}\text{-თი, ე.ი. } \vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k. \vec{P}\text{-ს}$$

მოდულს **სხეულის წონა** ეწოდება და

$$P = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (6.4.5)$$

## 6.5. სიმძიმის ცენტრის პოვნის მეთოდები

მყარი სხეულის სიმძიმის ცენტრის განსაზღვრის რამდენიმე მეთოდი არსებობს. ვიხილავთ ერთგვაროვან სხეულებს.

**1. სიმეტრიის მეთოდი.** მტკიცდება, რომ

ა) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ სიბრტყეზე;

ბ) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის ღერძი, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძზე;

გ) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს ორი სიმეტრიის ღერძი, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძების გადაკვეთის წერტილში;

დ) თუ ერთგვაროვან სხეულს აქვს სიმეტრიის ცენტრი, მაშინ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ცენტრში;

ე) ერთგვაროვანი ბრუნვითი სხეულის სიმძიმის ცენტრი ბრუნვის ღერძზე მდებარეობს.

**2. ნაწილებად დაყოფის მეთოდი.** როცა სხეულს რთული ფორმა აქვს, მაშინ ის დაყოფა რამდენიმე ისეთ ნაწილად, რომელთა სიმძიმის ძალები და სიმძიმის

ცენტრები ცნობილია ან ადვილად განისაზღვრება. მოცემული სხეულის სიმძიმის ცენტრის გასაგებად გამოიყენება (6.4.1) ფორმულები. გამოთვლების გაადვილების მიზნით, ხელსაყრელია დანაყოფთა რიცხვი იყოს უმცირესი.

ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატების გასაგებად, როდესაც მოცემულია (ან გამოითვლება) მოცულობა (ფართობი ან სიგრძე), გამოიყენება (6.4.2)-(6.4.4) ფორმულები.

**3. უარყოფითი მასების მეთოდი.** როდესაც სხეულს აქვს ღრუ, რომელსაც მასა არა აქვს, მისი სიმძიმის ცენტრის გასაგებად ვიქცევით შემდეგნაირად: მთლიან სხეულსა და ღრუს ჩავთვლით სხადასხვა სხეულებად და მათ მიმართ გამოვიყენებთ ნაწილებად დაყოფის მეთოდს, ოღონდ ღრუს მოცულობა უნდა ავიღოთ უარყოფითი ნიშნით. თუ მთლიანი სხეულის მოცულობას და მისი სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორს აღვნიშნავთ შესაბამისად  $V_1$ -ითა და  $\vec{r}_1$ -ით, ღრუს მოცულობასა და რადიუს-ვექტორს -  $V_2$ -ითა და  $\vec{r}_2$ -ით, მოცემული სხეულის მოცულობასა და სიმძიმის ცენტრის რადიუს-ვექტორს -  $V$  და  $\vec{r}_c$ -თი და გამოვიყენებთ ნაწილებად დაყოფის მეთოდს, მივიღებთ:  $\vec{r}_1 = (V \cdot \vec{r}_c + V_2 \cdot \vec{r}_2) / V$ ,  $V_1 = V + V_2 \Rightarrow$

$$\vec{r}_c = \frac{V_1 \vec{r}_1 + (-V_2) \vec{r}_2}{V_1 + (-V_2)}. \quad (6.5.1)$$

(6.5.1)-ის კოორდინატთა ღერძებზე დაგვემიღებთ მივიღებთ:

$$x_c = \frac{V_1 x_1 + (-V_2) x_2}{V_1 + (-V_2)}, \quad y_c = \frac{V_1 y_1 + (-V_2) y_2}{V_1 + (-V_2)}, \quad z_c = \frac{V_1 z_1 + (-V_2) z_2}{V_1 + (-V_2)}. \quad (6.5.2)$$

არსებობს სხვა მეთოდებიც. არაერთგვაროვანი დიდი ზომის სხეულების სიმძიმის ცენტრის საპოვნელად გამოიყენება ე.წ. ექსპერიმენტული, ასევე აწონვის მეთოდი.

## 6.6. ზოგიერთი მარტივი ფორმის ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრი

დამტკიცების გარეშე მოგვყავს ზოგიერთი მარტივი ფორმის ერთგვაროვანი სხეულის სიმძიმის ცენტრის მდებარეობის განმსაზღვრელი ფორმულები.

**1. სამკუთხედის პერიმეტრის სიმძიმის ცენტრი.** ვიხილავთ  $ABC$  სამკუთხედს, რომლის გვერდების სიგრძეებია  $a, b$  და  $c$ . გვერდების შუა წერტილები აღვნიშნოთ  $D, E$  და  $F$  ასოებით. სამკუთხედის პერიმეტრის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა



$DEF$  სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრს. სიმძიმის ცენტრიდან გვერდებამდე  $d_a$ ,  $d_b$  და  $d_c$  მანძილების გასაგებად გვაქვს შემდეგი ფორმულები:

$$d_a = \frac{h_a}{2} \frac{b+c}{a+b+c}, \quad d_b = \frac{h_b}{2} \frac{a+c}{a+b+c}, \quad d_c = \frac{h_c}{2} \frac{a+b}{a+b+c}, \quad (6.6.1)$$

სადაც  $h_a$ ,  $h_b$  და  $h_c$  შესაბამის გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეებია.

**2. წრიული რკალის სიმძიმის ცენტრი.** რკალის  $C$  სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს  $O$  წრის ცენტრსა და რკალის შუა წერტილზე გამავალ სხივზე და ცენტრიდან დაშორებულია

$$OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (6.6.2)$$

მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია, ხოლო  $\alpha$  - რკალის შესაბამისი ცენტრული კუთხის ნახევარი.

**3. სამკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი.** საძიებელი წერტილი ემთხვევა სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილს და მდებარეობს ფუძიდან მედიანის  $1/3$  მანძილზე. თუ სამკუთხედის წვეროების კოორდინატებია  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  და  $(x_3, y_3)$ , მაშინ სიმძიმის ცენტრის  $x_c$  და  $y_c$  კოორდინატები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \quad y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3). \quad (6.6.3)$$

**4. წრიული სექტორის ფართობის სიმძიმის ცენტრი.** საძიებელი  $C$  წერტილი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და  $O$  ცენტრიდან დაშორებულია

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (6.6.4)$$

მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია, ხოლო  $\alpha$  - ცენტრული კუთხის ნახევარი.

**5. წრიული სეგმენტის ფართობის სიმძიმის ცენტრი.** საძიებელი  $C$  წერტილი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და  $O$  ცენტრიდან დაშორებულია

$$OC = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \quad (6.6.5)$$

მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია, ხოლო  $\alpha$  - ცენტრული კუთხის ნახევარი.

**6. ნახევარწრის ფართობის სიმძიმის ცენტრი.** საძიებელი  $C$  წერტილი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და  $O$  ცენტრიდან დაშორებულია

$$OC = \frac{4R}{3\pi} \quad (6.6.6)$$

მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია.

7. ტრაპეციის ფართობის სიმძიმის ცენტრი. საძიებელი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ფუძეების შუა წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთზე და ქვედა ფუძიდან დაშორებულია

$$h = \frac{H}{3} \frac{a+2b}{a+b} \quad (6.6.7)$$

მანძილით, სადაც  $a$  და  $b$  შესაბამისად ქვედა და ზედა ფუძეების სიგრძეებია, ხოლო  $H$  - ტრაპეციის სიმაღლე.

8. ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობის სიმძიმის ცენტრი. ვიხილავთ ნებისმიერ  $ABCD$  ოთხკუთხედს. თუ  $ABD$ ,  $BCD$ ,  $ABC$  და  $ACD$  სამკუთხედების სიმძიმის ცენტრებს შესაბამისად აღვნიშნავთ  $C_1, C_2, C_3$  და  $C_4$ -ით, მაშინ ოთხკუთხედის სიმძიმის ცენტრი ემთხვევა  $C_1C_2$  და  $C_3C_4$  მონაკვეთების გადაკვეთის წერტილს.

9. პრიზმის ან ცილინდრის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. საძიებელი წერტილი მდებარეობს ფუძეების სიმძიმის ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთის შუაში.

10. პირამიდის ან კონუსის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. თუ  $C_1$  ფუძის სიმძიმის ცენტრია,  $A$  წვეროა და  $C$  პირამიდის ან კონუსის სიმძიმის ცენტრი, მაშინ

$$C_1C = \frac{1}{4} AC_1. \quad (6.6.8)$$

11. წაკვეთილი კონუსის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს კონუსის ღერძზე ქვედა ფუძიდან შემდეგ მანძილზე:

$$\frac{1}{4} \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}, \quad (6.6.9)$$

სადაც  $R$  და  $r$  შესაბამისად ქვედა და ზედა ფუძეების რადიუსებია.

12. სფერული სექტორის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. საძიებელი წერტილი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და ცენტრიდან დაშორებულია

$$\frac{3}{8}(2R - h) \quad (6.6.10)$$

მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია, ხოლო  $h$  - სეგმენტის სიმაღლე.

13. სფერული სეგმენტის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი. საძიებელი წერტილი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და ცენტრიდან დაშორებულია

$$\frac{3}{4} \frac{(2R-h)^2}{3R-h} \quad (6.6.11)$$

მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია, ხოლო  $h$  - სეგმენტის სიმაღლე.

**14. ნახევარბირთვის მოცულობის სიმძიმის ცენტრი.** საძიებელი წერტილი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და ფუძიდან დაშორებულია

$$3R/8 \quad (6.6.12)$$

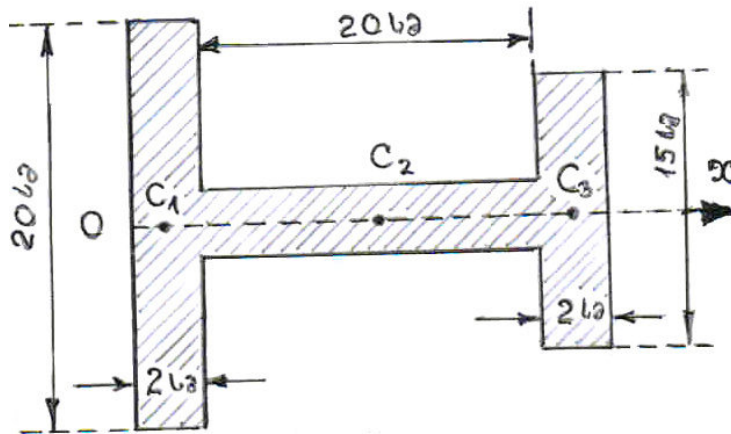
მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია.

**ამოცანა 6.1.** განსაზღვრეთ ნახ. 6.3-ზე მოცემული ერთგვაროვანი ორტესებრი პროფილის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

ამოხსნა. სხეულს აქვს სიმეტრიის ღერძი, ამიტომ მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძზე, რის გამოც არჩეულ  $Oxy$  კოორდინატთა სისტემის მიმართ  $y_c = 0$ . გავიგოთ  $x_c$ .

დავეოთ პროფილი სამ მართკუთხედად, რომელთა სიმძიმის ცენტრების და მათთან დაკავშირებული სიდიდეები აღვნიშნოთ 1, 2 და 3 ინდექსებით. მაშინ (6.4.3) ფორმულის თანახმად,

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} \quad (ა)$$



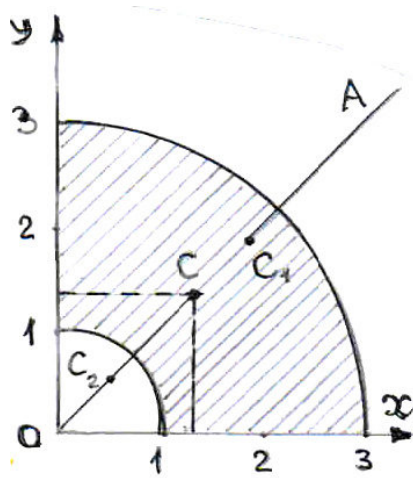
ნახ. 6.3

აღვიღად მივიღებთ:  $x_1 = 1$  სმ,  $x_2 = 12$  სმ,  $x_3 = 23$  სმ,  $S_1 = 40$  სმ<sup>2</sup>,  $S_2 = 40$  სმ<sup>2</sup>,  $S_3 = 30$  სმ<sup>2</sup>. შევიტანოთ ეს სიდიდეები (ა) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$x_c = (1 \cdot 40 + 12 \cdot 40 + 23 \cdot 30) / (40 + 40 + 30) = 11 \text{ სმ.}$$

პასუხი.  $x_c = 11$  სმ;  $y_c = 0$ .

**ამოცანა 6.2.** განსაზღვრეთ ნახ. 6.4-ზე მოცემული ერთგვაროვანი რგოლის მეოთხედის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.



ნახ. 6.4.

**ამოხსნა.** რგოლის მეოთხედს აქვს  $OA$  ( $\angle AOx = 45^\circ$ ) სიმეტრიის ღერძი, ამიტომ მისი სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ ღერძზე და

$$x_c = y_c = OC \cos 45^\circ. \quad (ა)$$

გამოვთვალოთ  $OC$ -ს სიგრძე. გამოვიყენოთ უარყოფითი მასების მეთოდი. დიდ რგოლთან დაკავშირებული სიდიდეების ინდექსები აღვნიშნოთ ციფრით 1, ხოლო პატარა რგოლთან დაკავშირებული სიდიდეების ინდექსები – 2-ით. მაშინ

$$OC = \frac{OC_1 \cdot S_1 + OC_2 \cdot (-S_2)}{S_1 + (-S_2)}. \quad (ბ)$$

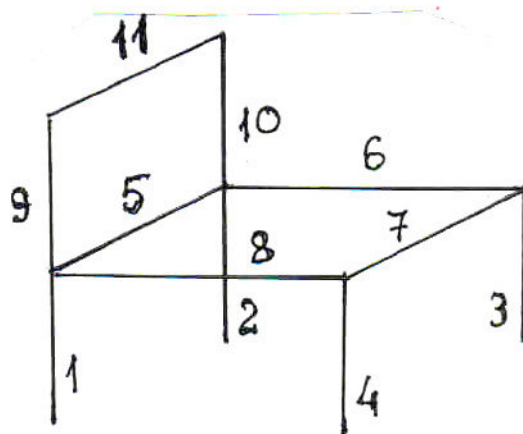
ცნობილია, რომ ერთგვაროვანი წრიული სექტორის ფართობის სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს სიმეტრიის ღერძზე და ცენტრიდან დაშორებულია  $\frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  მანძილით, სადაც  $R$  რადიუსია, ხოლო  $\alpha$  - ცენტრული კუთხის ნახევარი. ჩვენ შემთხვევაში  $R_1 = 3$  სმ,  $R_2 = 1$  სმ,  $\alpha = 45^\circ = \pi/4$ . ადვილად მივიღებთ:  $OC_1 = 4\sqrt{2}/\pi$  და  $OC_2 = 4\sqrt{2}/3\pi$ . წრიული სექტორის ფართობი გამოითვლება  $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$  ფორმულით, სადაც  $\alpha$  - ცენტრული კუთხეა. ჩვენ შემთხვევაში გვაქვს:  $S_1 = 9\pi/4$  და  $S_2 = \pi/4$ . მიღებული სიდიდეები შევიტანოთ (ბ) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$OC = \left[ (4\sqrt{2}/\pi)(9\pi/4) + (4\sqrt{2}/3\pi)(-\pi/4) \right] / \left[ (9\pi/4) + (-\pi/4) \right] = 13\sqrt{2}/3\pi.$$

მაშინ (ა) ტოლობა გვაძლევს:  $x_c = y_c = \frac{13\sqrt{2}}{3\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{13}{3\pi} \approx 1,38$  სმ.

პასუხი.  $x_c = y_c \approx 1,38$  სმ.

**ამოცანა 6.3.** განსაზღვრეთ ნახ. 6.5-ზე მოცემული სკამის ფორმის მქონე სხეულის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, თუ თითოეული ღეროს სიგრძე  $l=44$  სმ-ის ტოლია.



ნახ. 6.5

ამოხსნა. სხეულს აქვს სიმეტრიის სიბრტყე, ამიტომ სიმძიმის ცენტრი მდებარეობს ამ სიბრტყეში, ე.ი.  $x_c = -22$  სმ.

$y_c$  და  $z_c$  კოორდინატების გასაგებად გამოვიყენოთ (6.4.4) რომლებიც ჩვენ შემთხვევაში ასეთ სახეს მიიღებენ:

$$y_c = \sum_{k=1}^{11} \frac{y_k \cdot l}{11 \cdot l} = \sum_{k=1}^{11} \frac{y_k}{11}, \quad z_c = \sum_{k=1}^{11} \frac{z_k \cdot l}{11 \cdot l} = \sum_{k=1}^{11} \frac{z_k}{11}. \quad (ა)$$

ნახ. 6.5-დან ადვილად ვღებულობთ:  $y_1 = y_2 = y_5 = y_9 = y_{10} = y_{11} = 0$ ,  $y_3 = y_4 = y_5 = 44$  სმ,  $y_6 = y_8 = 22$  სმ;  $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = -22$  სმ,  $z_5 = z_6 = z_7 = z_8 = 0$ ,  $z_9 = z_{10} = 22$  სმ,  $z_{11} = 44$  სმ. შევიტანოთ ეს სიდიდეები (ა)-ში, მივიღებთ:  $y_c = 16$  სმ,  $z_c = 0$ .

პასუხი.  $x_c = -22$  სმ,  $y_c = 16$  სმ,  $z_c = 0$ .