ზაურ ჯაბუა

პრაქტიკუმი

ექსპერიმენტის შედეგების მათემატიკური დამუშავების მეთოდები

თბილისი 2015

წიგნში მოყვანილია ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების ფართოდ გავრცელებული მეთოდები კონკრეტული მაგალითების საფუძველზე. ყოველ მაგალითს წინ ერთვის შესაბამისი თეორიული ნაწილი, რომელიც მკითხველს ხელს შეუწყობს უკეთესად გაიაზროს ამა თუ იმ მეთოდის შესაძლებლობები და გამოყენების არეალი.

წიგნი განკუთვნილია ბაკალავრიატის კურსის სტუდენტებისათვის. ის სარგებლობას მოუტანს ექსპერიმენტული ფიზიკით დაკავებულ მაგისტრატურისა და დოქტორანტურის კურსის სტუდენტებსაც.

სულ 92 გვერდი

ცხრილი 26

დანართის ცხრილი 11

ნახაზი 11

რეცენზენტი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
სრული პროფესორი თეიმურაზ ფაღავა

სარჩევი

შესავალი

ექსპერიმენტული მონაცემების მათემატიკური დამუშავების მეთოდებისა და ანალიზის არასაკმარისი ცოდნა ხშირად იწვევს სერიოზულ სიძნელეებს თუნდაც ტექნიკურად მაღალ დონეზე ჩატარებული ფიზიკური ექსპერიმენტის შედეგებიდან სწორი დასკვნების გაკეთების საქმეში.

წინამდებარე პრაქტიკუმის მიზანია მკითხველს გააცნოს ექსპერიმენტული მონაცემების მათემატიკური დამუშავების ზოგიერთი ფართოდ გამოყენებული მეთოდები კონკრეტული მაგალითების საფუძველზე. იგულისხმება, რომ მკითხველი ფლობს უმაღლესი მათემატიკის საფუძვლებს საინჟინრო სპეციალობებისათვის გათვალისწინებული პროგრამის ფარგლებში.

პრაქტიკუმი განკუთვნილია საინჟინრო ფიზიკის პროგრამის ბაკალავრიატის სტუდენტებისათვის. ის გარკვეულ სარგებლობას მოუტანს ექსპერიმენტული ფიზიკით დაინტერესებულ მკითხველებსაც

1. გაზომვათა ცდომილებები საშუალო მნიშვნელობები და მათი შეფასება

1.1. მონაცემთა ინტერვალური რიგის საშუალოს გამოთვლა

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული ეწოდება ამ რიცხვების ჯამს გაყოფილს მათ რაოდენობაზე, და ასე ჩაიწერება

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots,+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (1.1)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ სიდიდეების საშუალო კვადრატული გადახრა მათი საშუალო მნიშვნელობიდან $\bar{x}$ ეწოდება გამოსახულებას

$$S^* = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (1.2)$$

ნებისმიერი a რიცხვიდან საშუალო კვადრატული გადახრის საპოვნელად სამართლიანია ფორმულა

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{a})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + (\bar{x}-a^2)^2$$

იმ შემთხვევაში, როდესაც გაზომვის შედეგებს შორის გვხვდება ტოლი სიდიდის რიცხვები, (1.1) და (1.2) ფორმულაში შესაბამისი სიდიდეები შეიძლება გავაერთიანოთ. ვთქვათ x_1 მონაცემი გვხვდება m_1 - ჯერ, x_2 - m_2 – ჯერ, ⋯, x_k - m_k – ჯერ $(m_1+m_2+\cdots+m_k=n)$.

მაშინ (1.1) და (1.2) და ფორმულები შესაბამისად მიიღებენ სახეს:

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_kx_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_ix_i \qquad (1.3)$$

$$S^* = \sqrt{\frac{m_1(x_1-\bar{x})^2+m_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+m_k(x_k-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i-\bar{x})^2} \quad (1.4).$$

ზემოთმოყვანილი ფორმულები სამართლიანია იმ შემთხვევაში, როდესაც გაზომვები თანაბარი სიზუსტითაა ჩატარებული.

თანაბარი სიზუსტის გაზომვები ეწოდებათ ისეთ გაზომვებს, რომლებიც ჩატარებულია ერთნაირი სიზუსტის მქონე გასაზომი საშუალებებით, ერთნაირ პირობებში.

არათანაბარი სიზუსტის გაზომვები ისეთი გაზომვებია, რომლებიც ჩატარებულია ერთმანეთისაგან განსხვავებული სიზუსტის საშუალებებით ან (და) სხვადახვა პირობებში. მაგალითად ერთი და იგივე კუთხე შეიძლება გავზომოთ ზუსტი თეოდოლიტით ან ტექნიკური თეოდოლიტით (თეოდოლიტი კუთხის გამზომი ხელსაწყოა. ტექნიკური თეოდოლიტის სიზუსტე გაცილებით ნაკლებია ზუსტი თეოდოლიტის სიზუსტეზე) ამ შემთხვევაში გაზომვის შედეგები არ იქნება თანაბარი სიზუსტის.

არათანაბარი სიზუსტის გაზომვის შედეგების შესადარებლად იყენებენ ე.წ. გაზომვის შედეგის წონას ან სხვანაირად გაზომვის წონას. რაც უფრო საიმედოა გაზომვის შედეგი მით მეტია წონა. წონა წარმოადგენს საშუალო კვადრატული ცდომილების კვადრატის შებრუნებულ სიდიდეს

$$p = \frac{1}{S^2} \ .$$

ცალკეული შედეგის საშუალო კვადრატული ცდომილება S თავის მხრივ იანგარიშება ფორმულით

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}$$

ის ახასიათებს ყოველი ცალკეული გაზომვის ცდომილებას და როდესაც გაზომვათა რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება $(n \to \infty)$ S მიისწრაფვის მუდმივი ზღვრისაკენ σ, რომელსაც ნამდვილი საშუალო კვდრატული ცდომილება ეწოდება

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} S$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ სიდიდეს σ^2, ეწოდება დისპერსია და ის ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდეების გაბნევას.

σ-ის გაზრდით იზრდება გაბნევა ანუ გაზომვის სიზუსტე მცირდება.

საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება ეწოდება სიდიდეს

$$S_{საშ} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ეს უკანასკნელი წარმოადგენს გაზომვის სიზუსტის გაზრდის ფუნდამენტურ კანონს გაზომვათა რიცხვის გაზრდისას.

ვთქვათ რაღაც ღეროს სიგრძე გაზომილია სხვადასხვა ცდომილებით: $220{,}35 \pm 0{,}1$ მ და $220{,}35 \pm 0{,}2$ მ, მაშინ გაზომვათა წონები იქნება

$$p_1 = \frac{1}{(0{,}1)^2} = \frac{1}{0{,}01} = 100$$

და

$$p_2 = \frac{1}{(0{,}2)^2} = \frac{1}{0{,}04} = 25$$

მიღებული მონაცემების შედარებიდან ჩანს, რომ პირველი გაზომვა უფრო ზუსტადაა ჩატარებული ვიდრე მეორე.

შეწონილი საშუალო მნიშვნელობა იანგარიშება ფორმულით

$$\bar{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} p_i}$$

ხოლო შეწონილი საშუალო კვადრატული მნიშვნელობისათვის სამართლიანია ფორმულა

$$S^* = \sqrt{\frac{p_1(x_1-\bar{x})^2 + p_2(x_2-\bar{x})^2 + \cdots + m_k(x_k-\bar{x})^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} p_i (x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} p_i}}.$$

საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლა ძალიან მარტივდება თუ x_i მნიშვნელობების ათვლას დავიწყებთ სათანადოდ შერჩეული ათვლის სათავიდან სათანადო მასშტაბით. პაქტიკულად ესაა წრფივი ჩანაცლება

$$x_i = a + hb \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, k) \quad (1.5)$$

მოყვანილი ცვლილების გათვალისწინებით საანგარიშო ფორმულები მიიღებენ სახეს

$$\bar{x} = a + h\bar{b} \quad (1.6) \text{ სადაც } \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h} m_i b_i \qquad (1.7)$$

$$s^* = h\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h} m_i \left(b_i - \bar{b}\right)^2} = h\sqrt{\overline{b^2} - \left(\bar{b}\right)^2} \qquad (1.8) \text{ სადაც}$$

$$\overline{b^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i\, b_i^2 \qquad (1.9)$$

კონტროლის მიზნით ყველა გათვლას იმეორებენ ათვლის სხვა a_1საწყისის მიმართ: მიღებული შედეგები უნდა დაემთხვეს დამრგვალების სიზუსტით.

მაგალითი. ცხრილ 1 - ში პირველ ორ სვეტში მოყვანილია რაღაც სიდიდის 10 გაზომვის შედეგი ($x-$ გაზომვის შედეგებია, $m-$ გაზომვათა რაოდენობა). ავირჩიოთ ათვლის სათავედ $a = 36{,}0$ დავუშვათ, რომ $h = 0{,}1$. გამოვთვალოთ მნიშვნელობები

$$b_i = \frac{x_i - a}{h} = \frac{x_i - 36{,}0}{0{,}1}$$

მესამე სვეტისათვის. მეოთხე და მეხუთე სვეტების რიცხვების ჯამი გვაძლევს ყველა მონაცემს $\bar{x}$ და s^* გამოსათვლელად. ბოლო სამ სვეტში მოცემულია საკონტროლო გათვლები ათვლის სათავისათვის $a = 36{,}1$, რაც შეესაბამება წანაცვლებას $b = b_1 + 1$.

ცხრილი 1

საწყისი მონაცემები		ანგარიში			კონტროლი		
x	m	b	mb	mb^2	b_1	b_1m	mb_1^2
35,6	1	-4	-4	16	-5	-5	25
35,9	3	-1	-3	3	-2	-6	12
36,1	3	1	3	3	0	0	0
36,2	2	2	4	8	1	2	2
36,6	1	6	6	36	5	5	25
ჯამი	10	–	6	66	–	-4	64

მიღებული ჯამებით გამოვთვალოთ საშუალოები:

$$\bar{b} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad \text{(1.7 ფორმულის ძალით)}$$

$$\bar{x} = 36{,}0 + 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 36{,}06 \quad \text{(1.6 ფორმულის ძალით)}$$

$$s^* = 0{,}1\sqrt{\frac{66}{10} - (0{,}6)^2} = 0{,}1\sqrt{6{,}24} = 0{,}25 \quad \text{(1.8, 1.9 ფორმულების ძალით)}$$

საკონტროლო გათვლები იძლევა იგივე შედეგებს

$$\overline{b_1} = \frac{-4}{10} = -0{,}4, \qquad \bar{x} = 36{,}1 + 0{,}1 \cdot (-0{,}4) = 36{,}06$$

$$s^* = 0,1\sqrt{\frac{64}{10} - (-0,4)^2} = 0,1\sqrt{6,24} = 0,25$$

გათვლის მოყვანილი მეთოდიკა განსაკუთრებით მოსახერხებელია საშუალოების გამოსათვლელად იმ შემთხვევისათვის როდესაც გაზომვის ყველა მონაცემი დაჯგუფებულია ერთნაირი სიგრძის ინტერვალებად (მონაცემთა ინტერვალური რიგი, დაჯგუფებული მონაცემები). ამ შემთხვევაში x_i აღნიშნავენ ინტერვალების საშუალოს, ათვლის a საწყისად იღებენ შუა ინტერვალის შუა მონაცემს (ან ერთ-ერთი საშუალო ინტერვალის შუა მონაცემს), ხოლო h სიდიდედ იღებენ ინტერვალის სიგრძეს. ამასთან b_i მნიშვნელობები ტოლია ინტერვალების ნომრების, რომლებიც ათვლილია არჩეული შუა ინტერვალიდან, როგორც ეს ქვემოთ მოყვანილი მაგალითიდან ჩანს.

ცხრილ 2–ში მოყვანილია საშუალო მნიშვნელობებისა და საშუალო კვადრატული გადახრის მნიშვნელობების გამოთვლის შედეგები ინტერვალური რიგისათვის.

აქ ინტერვალის სიგრძე შეადგენს $h = 0{,}050$. ათვლის არჩეული სათავისთვის $c = 8{,}600$ და ანგარიში გვაძლევს:

$$u = \frac{x - 8{,}600}{0.050}, \;\; \bar{u} = \frac{60}{100} = 0.6,$$

$$\bar{x} = 8{,}600 + 0.050 \cdot 0{,}6 = 8{,}630,$$

$$s^* = 6{,}050\sqrt{6{,}94 - (0{,}6)^2} = 0{,}050\sqrt{6{,}58} = 0{,}128.$$

საკონტროლო ათვლის სათავისათვის $c_1 = 8{,}650$ გვაქვს

$$v = \frac{x - 8{,}650}{0.050}, \;\; \bar{u} = \frac{-40}{100} = -0{,}4, \bar{x} = 8{,}650 + 0{,}50(-0{,}4) = 8{,}630$$

$$s^* = 6{,}050\sqrt{6{,}74 - (-0{,}4)^2} = 0{,}050\sqrt{6{,}58} = 0{,}128$$

როგორც ვხედავთ გათვლები სწორადაა ჩატარებული.

ცხრილი 2

საწყისი მონაცემები			ანგარიში			კონტროლი		
ინტერვალი	x	m	b	mb	mb^2	b_1	b_1m	mb_1^2
$8{,}275-8{,}325$	$8{,}30$	1	-6	-6	36	-7	-7	49
$8{,}325-8{,}375$	$8{,}35$	2	-5	-10	50	-6	-12	72
$8{,}375-8{,}425$	$8{,}40$	4	-4	-16	64	-5	-20	100
$8{,}425-8{,}475$	$8{,}45$	5	-3	-15	45	-4	-20	80
$8{,}475-8{,}525$	$8{,}50$	8	-2	-16	32	-3	-24	72
$8{,}525-8{,}775$	$8{,}55$	10	-1	-10	10	-2	-20	40
$8{,}575-8{,}625$	$8{,}60$	18	0	0	0	-1	-18	18
$8{,}625-8{,}675$	$8{,}65$	17	1	17	17	0	0	0
$8{,}675-8{,}725$	$8{,}70$	12	2	24	48	1	12	12
$8{,}725-8{,}775$	$8{,}75$	9	3	27	81	2	18	36
$8{,}525-8{,}775$	$8{,}80$	7	4	28	112	3	21	63
$8{,}775-8{,}825$	$8{,}85$	6	5	30	150	4	24	96
$8{,}825-8{,}875$	$8{,}90$	0	6	0	0	5	0	0
$8{,}875-8{,}925$	$8{,}95$	1	7	7	49	6	6	36
$8{,}925-8{,}975$								
ჯამი	–	100	–	60	694	–	-40	674

1.2. თეორიული საშუალოს გამოთვლა

გაზომვის შემთხვევითი ცდომილებები ემორჩილებიან განაწილების გარკვეულ კანონებს, რომლებსაც აღმოვაჩენთ თუ ჩავატარებთ რაღაც გაზომვებს უცვლელ პირობებში და ვიანგარიშებთ იმ შედეგების m

რაოდენობას, რომლებიც მოხვდებიან ნებისმიერ გამოყოფილ ინტერვალში. ამ რიცხვის შეფარდება ჩატარებულ გაზოვათა n რაოდენობასთან, რომელსაც ეწოდება გამოყოფილ ინტერვალში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე, გაზომვათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის პირობებში ახლოს იქნება გარკვეულ მუდმივ რიცხვთან. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს შემთხვევითი ცდომილების შესასწავლად გამოვიყენოთ ალბათობის თეორიის ელემენტები. თეორიულ ალბათურ მოდელში შემთხვევითი ცდომილებები $z = x - a$ (z შემთხვევითი ცდომილებაა, x გაზომვის შედეგი, ხოლო a - გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა) და თვით გაზომვის შედეგი $x = z + a$ განიხილებიან, როგორც შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებიც იღებენ ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას, ამასთან თითოეულ (z_1, z_2) ინტერვალს შეესაბამება სრულებით გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ეწოდება z შემთხვევითი სიდიდის ამ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა და აღინიშნება ასე: $\boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2)$ ან $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{z} \in (\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2))$. პრაქტიკულად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მოცემულ ინტერვალში z სიდიდის მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე ტოლია ზემოთ ნახსენები ალბათობის:

$$\frac{m}{n} \approx \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2).$$

წესი, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი (z_1, z_2) ინტერვალისათვის მოიძებნოს $\boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2)$ ალბათობა, ატარებს შემთხვევითი z სიდიდის განაწილების ალბათობის კანონის სახელს. ეს კანონი ჩაიწერება შემდეგი ინტეგრალის სახით

$$\boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2) = \int_{\mathrm{z}_1}^{\mathrm{z}_2} p(z)dz$$

სადაც $p(z)$ - რაღაც არაუარყოფითი ფუნქციაა, რომელიც ნორმირებულია პირობით

$$\int_{\mathrm{z}_1}^{\mathrm{z}_2} p(z)dz = 1$$

ეს ფუნქცია სრულიად აკმაყოფილებს ალბათობების განაწილების შესაბამის კანონს და მას ეწოდება განაწილების სიმკვრივე.

შემთხვევითი სიდიდის ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელია მათემატიკური მოლოდინი, რომელსაც თეორიული საშუალო ეწოდება.

მათემატიკურ მოლოდინს გააჩნია მარტივი ფიზიკური არსი: თუ რაღაც წრფეზე შემთხვევით განვათავსებთ ერთეულ მასას, ისე რომ თითოეულ i - ურ წერტილში განლაგდება i – ური მასა (დისკრეტული განაწილება) ან უწყვეტად "წავუსვამთ" ამ მასას (აბსულუტურად უწყვეტი განაწილება), მაშინ მათემატიკური მოლოდინი გვიჩვენებს წრფის "სიმძიმის ცენტრის" კოორდინატას. სხვანაირად მათემატიკური მოლოდინი არის რიცხვი რომლის გარშემოც თავმოყრილია შემთხვევითი მნიშვნელობის მონაცემები.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის X (რომელიც მოცემულია მნიშვნელობებით $x_1, x_2, \cdots, x_n$ და ამ მნიშვნელობების შესაბამისი ალბათობებით $p_1, p_2, \cdots, p_n$ მაშინ მათემატიკური მოლოდინი MX იანგარიშება ფორმულით

$$MX = x_1p_1, + x_2p_2 + \cdots + x_np_n \quad (1.10)$$

ხოლო, თუ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია უწყვეტად $P(x)$ - ის ალბათობის განაწილების სიმკვრივით, მაშინ მათემატიკური მოლოდინის საანგარიშო ფორმულას აქვს სახე

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)\, dx$$

განვიხილოთ მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ ვაგორებთ კამათელს, შემთხვევითი სიდიდე ტოლი იყოს იმ ქულების რაოდენობის რომელიც მოვა კამათელის ერთი გაგორებისას. როგორც ცნობილია კამათელის ერთხელ გაგორებისას სულ არსებული 6 რიცხვიდან თითოეულის მოსვლის ალბათობა 1/6 - ის ტოლია, ამიტომ (1.10) ფორმულის თანახმად

$$MX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 21 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

მაშასადამე კამათლის ერთი გაგორებისას საშუალოდ მოვა 3,5 ქულა.

მაგალითი 2. ვთქვათ ავტომატური იარაღიდან ისვრიან 5-ჯერ და მიზანში ერთხელ მოხვედრის ალბათობაა 0,4 ამასთან ალბათობა გასროლიდან გასროლამდე არ იცვლება. ვიანგარიშოთ მიზანში მოხვედრის მათემატიკური მოლოდინი

$$MX = 5 \cdot 0.4 = 2$$

მაშასადამე გასროლათა დიდი რაოდენობის სერიებისას, როდესაც თითოეულ სერიაში შედის 5 გასროლა, თითოეულ სერიაზე საშუალოდ მოვა 2 მოხვედრა მიზანში.

მაგალითი 3. ვთქვათ X შემთხვევით სიდიდეს წარმოადგენს წერტილის კოორდინატი, რომელიც გააჩნია $[a, b]$ მონაკვეთზე შემთხვევით დასმულ წერტილს, მაშინ მათემატიკური მოლოდინი იანგარიშება ფორმულით

$$MX = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = x^2 \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

მაშასადამე თანაბარი განაწილების ცენტრი ძევს $[a, b]$ მონაკვეთის შუა წერტილში.

მაგალითი 4. ვთქვათ მოცემული გვაქვს დისკრეტული შემთხვევითი მონაცემები შესაბამისი ალბათობებით

ცხრილი 3

X	− 4	6	10
P	0,2	0,3	0,5

ვიპოვოთ X შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი.

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = -0{,}4 \ \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}5 =$$
$$= -2 + 1{,}8 + 5 = 6.$$

მაგალითი 5. გამოვთვალოთ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინი თუ მისი განაწილების სიმკვრივეს აქვს სახე

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2x, & 0 < x \le 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

$$MX = \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x2xdx = 2\int_1^2 x^2\, dx = \frac{2}{3}x^3 = \frac{2}{3}$$

1.3. წერტილოვანი შეფასებები

ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაღაც სიდიდის დამოუკიდებელი გაზომვის n შედეგი და დავუშვათ, რომ ეს $x_1, x_2, \cdots, x_n$ შედეგები არ შეიცავენ სისტემატურ და უხეშ ცდომილებებს, ანუ ყველა უხეში ცდომილება ამოღებულია და სისტემატურ ცდომილებებზე შეყვანილია შესწორება. შეფასდეს გასაზომი a პარამეტრის ნამდვილი მნიშვნელობა ნიშნავს:

ა) გაზომვის შედეგებზე დაყრდნობით მიეთითოს ისეთი ფუნქცია $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, რომელიც იძლევა საკმაოდ კარგ მიახლოებას $a -$ თან (ასეთ ფუნქციას წერტილოვანი ან სხვანაირად a შეფასება ეწოდება);

ბ) ნაჩვენები იქნას ინტერვალის საზღვრები $(g - \varepsilon_1, g + \varepsilon_2)$, რომელიც მოცემული P ალბათობით დაფარავს a ნამდვილი სიდიდეს (ასეთ შეფასებას სანდოობითი შეფასება ეწოდება, ხოლო P ალბათობას – ნდობის ალბათობა ან შეფასების საიმედოობა, $(g - \varepsilon_1, g + \varepsilon_2)$ -ს ეწოდება ნდობის ინტერვალი, ხოლო მის საზღვრებს – ნდობის საზღვრები). იმისათვის, რომ მიღწეულ იქნას a ნამდვილ მნიშვნელობასთან საკმარისად კარგი მიახლოება, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ შეფასებას შეძლებისდაგვარად უნდა გააჩნდეს შემდეგი თვისებები:

1) წაუნაცვლებლობა. შეფასებას ეწოდება წაუნაცვლებელი თუ მისი თეორიული საშუალო (მათემატიკური მოლოდინი) ემთხვევა a.

2) შემდგრადობა. შეფასებას ეწოდება შემდგარი თუ გაზომვების რიცხვის n უსასრულოდ გაზრდით ის ალბათურად მიისწრაფვის a-კენ.

3) ეფექტურობა. წაუნაცვლებელ შეფასებას ეწოდება ეფექტური თუ, მას გააჩნია გაზომვის შედეგების მიხედვით უმცირესი გაფანტვა a წაუნაცვლებელ შეფასებებს შორის.

წერტილოვანი შეფასებები. თუ a სიდიდის ყველა n გაზომვა ჩატარებულია ერთნაირი სიზუსტით (თანაბარწერტილოვანი გაზომვები), მაშინ ნამდვილი მნიშვნელობის შესაფასებლად გამოიყენება გაზომვის შედეგების საშუალო არითმეტიკული:

$$a \approx \bar{x} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (1.11)$$

ეს შედეგი წაუნაცვლებელი და შემდგარია. თუ დამატებით დავუშვებთ, რომ გაზომვის ცდომილებები ემორჩილება ალბათობების განაწილების ნორმალურ კანონს, ეს შეფასება ეფექტურიცაა.

თუ გაზომვები არაა თანაბარი სიზუსტისაა, მაგრამ ცნობილია გაზომვის წონები, ანუ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ (რიცხვები, რომლებიც უკუპროპორციულია ცდომილებების დისპერსიის $\sigma_1^2, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}; \frac{1}{\sigma_2^2}; \cdots, \frac{1}{\sigma_n^2}$) მაშინ ნამდვილი a სიდიდის ნამდვილი ნიშვნელობის შესაფასებლად იყენებენ შეწონილ საშუალო არითმეტიკულ მნიშვნელობას

$$a \approx \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_1} \quad (1.12)$$

ამ შეფასებას იგივე თვისება აქვს რაც (1.11). სასარგებლოა ყურადღება მიექცეს იმას, რომ შეწონილი არითმეტიკული მნიშვნელობა (1.12) დამოკიდებულია არა წონებზე $p_1, p_2, \cdots, p_n$ არამედ მხოლოდ მათ თანაფარდობაზე. (σ არის საშუალო კვადრატული ცდომილება)

შევეხოთ თანაბარი სიზუსტის გაზომვების სანდოობის შეფასებას. ქვემოთ მოყვანილი გასაზომი a სიდიდის ნამდვილი მნიშვლობის სანდოობის შეფასება მოცემულია იმ დაშვებით, რომ გაზომვის შემთხვევითი მნიშვნელობები ემორჩილება ალბათობების განაწილების ნორმალურ კანონს. აქ განხილულია მხოლოდ სიმეტრიული სანდოობის შეფასებები, რომლბსაც გააჩნიათ შემდეგი უტოლობის სახე

$$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$$

ან

$$|a - \bar{x}| < \varepsilon \quad (1.13)$$

სადაც $\bar{x}$ საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობაა (1.11).

ε სიდიდე განისაზღვრება მოცემული სანდოობის ალბათობით (შეფასების საიმედოობა) P; ჩვეულებრივ საიმედოობა P აიღება ერთ-ერთი სამი დონიდან 0,95, 0,99, 0,999.

სანდოობის შეფასება გაზომვის ცნობილი მნიშვნელობის შემთხვევაში. თუ წინასწარ ცნობილია საშუალო კვადრატული ცდომილება σ (ან სხვა რომელიმე

მასთან დაკავშირებული სიზუსტის მახასიათებელი) მაშინ სანდოობის შეფასებას (1.13) აქვს შემდეგი სახე

$$|a - \bar{x}| < t(P)\sigma/\sqrt{n} \quad (1.14)$$

სადაც n გაზომვების რიცხვია, ხოლო $t(P)$ განისაზღვრება დასახული სანდოობის P ალბათობით, პირობიდან

$$2\varphi(t) = P \quad (1.15)$$

ანუ მოიძებნება დანართის I ცხრილიდან, ამრიგად აქ

$$\varepsilon = \; t(P)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

განვიხილოთ მაგალითი 1. ვთქვათ რაღაც სიდიდე გაზომილია 10 – ჯერ შედეგები მოცემულია ცხრილში 4. $\sigma = 0{,}28$ და გვინდა შევაფასოთ გასაზომი a სიდიდის ნამდვილი მნიშნელობა საიმედოობით $\mathcal{P} = 0{,}99$.

ამოხსნა. დანართის I ცხრილიდან $\mathcal{P} = 2\varphi(t) = 0.99$ მნიშვნელობისათვის ე.ი. $1 - \mathcal{P} = 0{,}01$ - თვის ვპოულობთ $t = 2{,}576$. ცხრილის მონაცემების მიხედვით

ცხრილი 4

x	m
35,6	1
35,9	3
36,1	3
36,2	2
36,6	1
ჯამი	10

გათვლილი საშუალო მნიშვნელობა $\bar{x} = 36{,}06$ და შესაბამისად საიმედოობით $0{,}99$ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ

$$|a - \bar{x}| = |a - 36{,}06| < 2{,}576 \cdot \frac{0{,}28}{\sqrt{10}} = 0{,}23$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ a სიდიდე განთავსებულია ინტერვალში

$$(36{,}06 - 0{,}23; 36{,}06 + 0{,}23) = (35{,}83; 36{,}29).$$

1.4.აუცილებელ გაზომვათა რაოდენობა

გაზომვის n რაოდენობის გაზრდით, იმ შემთხვევაშიც კი როდესაც გაზომვის სიზუსტე უცვლელია, შესაძლებელია გაიზარდოს სანდოობის შეფასების საიმედოობა ან შემოკლდეს სანდოობის ინტერვალი გასაზომი სიდიდის ნამდვილ მნიშვნელობამდე. გაზომვის აუცილებელი რაოდენობა, რომელიც საჭიროა ε სიზუსტისა და $\mathcal{P}$ საიმედოობის მისაღწევად შეიძლება წინასწარ გაითვალოს მაშინ, როდესაც ცნობილია გაზომვების საშუალო კვადრატული ცდომილება (იგულისხმება, რომ გაზომვები თანაბარწერტილოვანია და დამოუკიდებელი). ამ შემთხვევაში გაზომვათა რაოდენობა, რომელიც საჭიროა ε სიზუსტის სანდოობის შესაფასებლად

$$|a-\bar{x}| < \varepsilon$$

დასახული საიმედოობით, გამოითვლება ფორმულით (1.14)

$$n \geq \left[\frac{t(\mathcal{P})}{\varepsilon}\right]^2 \sigma^2$$

სადაც $t = t(\mathcal{P})$ სიდიდე გამოითვლება ტოლობით $2\varphi(t) = \mathcal{P}$, დანართის I ცხრილიდან.

თუ საშუალო კვადრატული ცდომილება წინასწარ ცნობილი არაა, მაგრამ ცნობილია თუნდაც მისი რიგი, გააზომვის აუცილებელი რაოდენობა შესაძლებელია განისაზღვროს $\mathcal{P}$ საიმედოობისაგან და თანაფარდობისაგან $q = \varepsilon/s$, სადაც s წარმოადგენს ცდომილების მომავალ ემპირიულ სტანდარტს. გაზომვის $n-$ ის $\mathcal{P}$ და q -გან დამოკიდებულების დასადგენად გამოიყენება ცხრილი 5.

მაგალითად, იმისათვის, რომ გარანტირებულ იქნას სანდოობის შეფასება $\mathcal{P} = 0{,}99$ საიმედოობითა და სიზუსტით $0{,}1s$ - მდე საჭიროა 668 გაზომვა. პრაქტიკულად შეიძლება შემოვიფარგლოთ უფრო ნაკლები გაზომვათა რაოდენობით თუ გამოვიყენებთ შემდეგ მარტივ ხერხს. ჯერ საჭიროა შედარებით ნაკლები რაოდენობის გაზომვების ჩატარება (3-4 ჯერ ნაკლები ვიდრე ეს ცხრილშია მოყვანილი). გაზომვების ამ შედეგებით უნდა გავთვალოთ ნდობის ინტერვალი. შემდეგ კი დავაზუსტოთ გაზომვათა საჭირო რაოდენობა იმ

ცხრილი 5

$\mathcal{P}$ / q	0.90	0.95	0.98	0.99	0.999
1,0	5	7	9	11	17
0,5	13	18	25	31	50
0,4	19	27	37	46	74
0,3	32	46	64	78	127
0,2	70	99	139	171	277
0,1	273	387	545	668	1089
0,05	1084	1540	2168	2659	4338

მოსაზრებით, რომ ნდობის ინტერვალის შემცირება λ ჯერ მიიღწევა გაზომვების რაოდენობის გაზრდით λ^2 ჯერ (მაგალითად ნდობის ინტერვალის შემცირება 2-ჯერ მიიღწევა გაზომვათა რაოდენობის გაზრდით 4-ჯერ).

მაგალითი 1. ვთქვათ რაღაც a სიდიდე გაზომილია $n = 10$ - ჯერ და მან მოგვცა სიზუსტე 0,27 საიმედოობით 0,99. თუ ჩვენ გვსურს იმავე საიმედოობით a სიდიდე შევაფასოთ 0,1 სიზუსტით, ანუ ნდობის ინტერვალი შევამციროთ 2,7 – ჯერ, მაშინ გაზომვათა რაოდენობა უნდა გავზარდოთ $10 \cdot 2{,}7^2 = 73$ - მდე.

1.5.საშუალო კვადრატული ცდომილება

საშუალო კვადრატული ცდომილება იზომება იმავე ერთეულებში რა ერთეულებშიც იზომება თვითონ შემთხვევითი ცდომილება და გამოიყენება საშუალო არითმეტიკულის სტანდარტული ცდომილების დასადგენად და იანგარიშება ფორმულით

$$.\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

სადაც x_i გაზომვის თითოეული შედეგია, ხოლო $\bar{x}$ გაზომვის შედეგების საშუალო მნიშვნელობა.

შევეხოთ საშუალო კვადრატული ცდომილების ინტერპრეტაციას. ამ სიდიდის მაღალი მნიშვნელობა მეტყველებს იმაზე, რომ მოცემულ სიმრავლეში მონაცემები დიდადაა გაფანტულია საშუალო მნიშვნელობასთან შედარებით და

პირიქით დაბალი მნიშვნელობა მიუთითებს იმაზე, რომ მოცემულ სიმრავლეში მონაცემები დაჯგუფებულია საშუალო მნიშვნელობის სიახლოვეს. ვთქვათ მოცემული გვაქვს სამი რიცხვითი სიმრავლე $\{0, 0, 14, 14\}$, $\{0, 6, 8, 14\}$ და $\{6, 6, 8, 8\}$. თითოეული ამ სიმრავლის საშუალო მნიშვნელობაა 7, ხოლო საშუალო კვდრატული გადახრები შესაბამისად ტოლია 7, 5 და 1. ბოლო სიმრავლის საშუალო კვადრატული გადახრა ყველაზე მცირეა, ვინაიდან მისი მონაცემები თავმოყრილია საშუალო მნიშვნელობასთან ახლოს. პირველი სიმრავლის საშუალო კვადრატული გადახრა ყველაზე დიდია და მასში მონაცემები საშუალოსგან საკმაოდ დაშორებულია. ზოგადად საშუალო კვადრატული გადახრა შეიძლება მივიჩნიოთ განუზღვრელობის საზომად. ფიზიკაში საშუალო კვადრატული გადახრა გამოიყენება რაიმე გასაზომი სიდიდის ცდომილების ზომად. ეს სიდიდე ძალიან მნიშვნელოვანია იმის დასადგენად თუ რამდენად არის შესასწავლი სიდიდის მნიშვნელობა თეორიის მიერ ნაწინასწარმეტყველებ სიდიდესთან ახლოს; თუ გაზომილი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა ძალიან განსხვავებულია თეორიისაგან ნაწინასწარმეტყველებისაგან (საშუალო კვადრატული ცდომილების მაღალი მნიშვნელობა) მაშინ მიღებული მნიშვნელობების ან მათი მიღების მეთოდი უნდა გადამოწმდეს.

ვთქვათ არსებობს ორი ქალაქი, დღისით ერთნაირი მაქსიმალური ტემპერატურით, მაგრამ ერთი მათგანი მდებარეობს ზღვის სანაპიროსთან ხოლო მეორე ზღვისგან მოშორებით. ცნობილია, რომ ზღვის სანაპიროსთან მდებარე ქალაქის ტემპერატურის მნიშვნელობები დღის განმავლობაში ერთმანეთისაგან ნაკლებად განსხვავდება ვიდრე კონტინენტის შიგნით მდებარე ქალაქების ტემპერატურები დღის განმავლობაში. აქედან გამომდინარე სანაპიროსთან მდებარე ქალაქის ტემპერატურების საშუალო კვადრატული გადახრები უფრო ნაკლები იქნება ვიდრე კონტინენტის შიგნით მდებარე ქალაქების. პრაქტიკაში კი ეს იმას ნიშნავს, რომ ალბათობა იმისა, რომ ყოველი კონკრეტული დღის ჰაერის მაქსიმალური ტემპერატურა მნიშვნელოვნად იქნება განსხვავებული საშუალო ტემპერატურისაგან კონტინენტის შიგნით მდებარე ქალაქისათვის უფრო მაღალია სანაპიროსთან მდებარევ ქალაქთან შედარებით.

1.6.ლოგარითმული ნორმალური განაწილება

შემთხვევითი უწყვეტი სიდიდეების განაწილების ყველაზე გავრცელებული კანონია ნორმალური განაწილების კანონი. შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით თუ თუ მისი ალბათობის სიმკვრივეს გააჩნია შემდეგი სახე:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

შადაც α შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინია, ხოლო σ - საშუალო კვადრატული გადახრა.

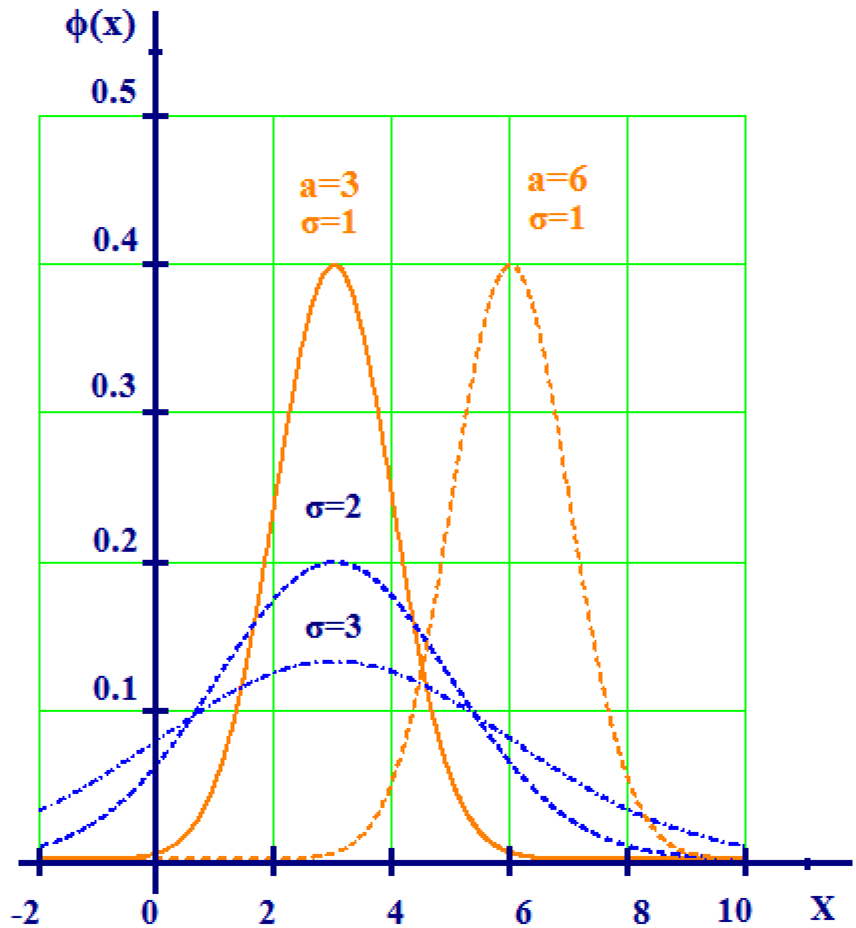
ალბათობის სიმკვრივის ნორმლური განაწილების გრაფიკი სიმეტრიულია $x = \alpha$ წრფის, ე. ი. მათემატიკური მოლოდინის – x-ის. მრიგად, თუ $x = \alpha$, მრუდს გააჩნია მაქსიმუმი, რომელის ტოლია

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}3989}{\sigma}$$

მათემატიკური მოლოდინის გაზრდისას წირი წაინაცვლებს x ღერძის გასწვრივ. ნახ.1-დან ჩანს, რომ როდესაც $x = 3$, წირს გააჩნია მაქსიმუმი, ვინაიდან, მათემატიკური მოლოდინი 3-ის ტოლია.თუ მათემატიკური მოლოდინი მიიღებს სხვა მნიშვნელობას, მაგალითად, $x = 6$, მაშინ წირს ექნება მაქსიმუმი, როცა $x = 6$. თუ ვილაპარაკებთ საშუალო კვადრატულ გადახრაზე, როგორც გრაფიკიდან ჩანს, რაც მეტია მისი მნიშვნელობა, მით ნაკლებია ალბათობის სიმკვრივის მაქსიმალური მნიშვნელობა.

ზოგჯერ ჰიპოთეზა ნორმალური განაწილების შესახებ ეწინააღმდეგება ექსპერიმენტალურ მონაცემებს. მაგრამ ზოგჯერ შესაძლებელია ექსპერიმენტალური X_i მონაცემები გარდაიქმნას ისე, რომ გარდაქმნილი სიდიდეები $Y_i(X_i)$ შეიძლება დაემორჩილნონ ნორმალური განაწილების კანონს.

მაგალითად, ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც ნორმალურ განაწილებას ემორჩილება არა თვით გაზომვის შედეგები, არამედ მათი ლოგარითმი. ეს ხდება მაშინ, როდესაც ის ფაქტორები, რომლებიც ამახინჯებენ გაზომვის შედეგებს, იწვევენ ეფექტებს, რომლებიც პროპორციულია თვით გაზომვის შედეგების (ანუ როდესაც საშუალოდ უცვლელია არა გაზომვის



ნახ.1. ალბათობის სიმკვრივის ნორმალური განაწილება

აბსოლუტური ცდომილებები, არამედ ფარდობითი ცდომილებები). ამ დროს ამბობენ, რომ თვით გაზომვის შედეგი X ემორჩილება ლოგარითმულ ნორმალურ განაწილებას.

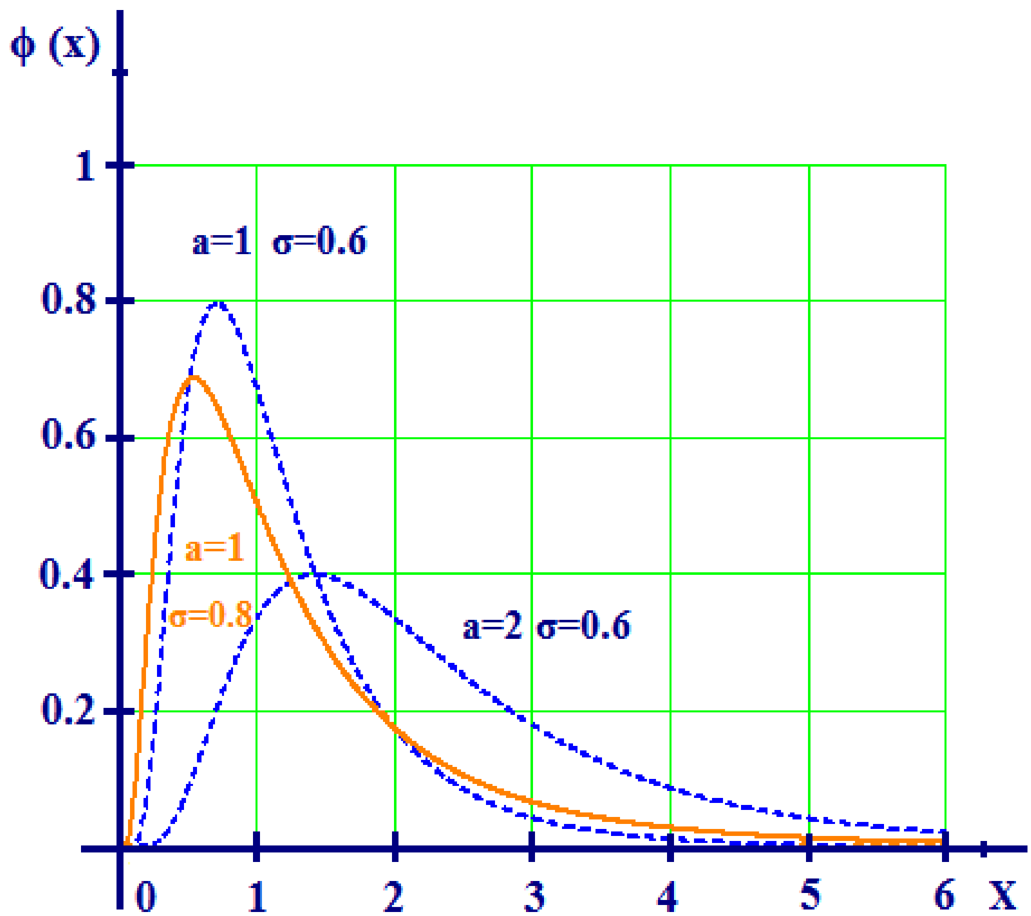
თუ შემთხვევითი სიდიდის ლოგარითმი განაწილებულია ნორმალურად, მაშინ ამბობენ, რომ შემთხვევითი სიდიდე ხასიათდება ნორმალური ლოგარითმული განაწილებით. ლოგარითმულად ნორმალურად განაწილების ფუნქციას გააჩნია შემდეგი სახე:

$$P(Lnx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Lnx} e^{-\frac{(Lnx - Lna)^2}{2\sigma^2}} d(Lnx)$$

ლოგარითმული ნორმალური განაწილების ალბათური სიმკვრივის განაწილების ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(Ln\,(x)-Lna\,)^2}{2\sigma^2}}$$

ქვემოთ მოყვანილი ნორმალური ლოგარითმული განაწილების მრუდიდან (ნახ. 2) ჩანს, რომ რაც ნაკლებია σ და მეტია მათემატიკური მოლოდინი a, მით უფრო მრუდი ნაკლებად ციცაბოა და მიისწრაფის სიმეტრიისაკენ. მოცემული კანონი ხშირად გამოიყენება ხელსაწყოს ცვეთის, საბანკო შემოსავლების და სხვა ამოცანების აღწერისათვის.



ნახ.2. ალბათობის სიმკვრივის ნორმალური ლოგარითმული განაწილება

მაგალითი 1. შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალურად მათემატიკური მოლოდინით $\mu = 10$ და საშუალო კვადრატული გადახრით $\sigma = 5$. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე მიიღებს მნიშვნელობას, რომელიც ეკუთვნის ინტერვალს (5, 25).

ამოხსნა. პირობის ძალით გვაქვს: $\mu = 10, \sigma = 5, \alpha = 5, \eta = 25$. საანგარიშო ფორმულას აქვს სახე $P(\alpha < x < \eta) = \Phi\left(\frac{\eta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$. ფორმულაში ჩასმა გვაძლევს $P(5 < x < 25) = \Phi\left(\frac{25-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-10}{5}\right) = \Phi(3) - \Phi(-1)$. დანართში მოყვანილი ინტეგრალების ცხრილიდან (ცხრილი XI) ვპოულობთ $\Phi(3) - \Phi(-1) = 0{,}99865 - 0{,}1587 = 0{,}83995$

და საბოლოოდ

$$P(5 < x < 25) = 0{,}83995$$

მაგალითი 2. ვიანგარიშოთ ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითი სიდიდე ლოგარითმული განაწილებით $\mu = 1$, $\sigma = 5$, მიიღებს მნიშვნელობებს (2, 5) ინტერვალში.

ამოხსნა. $P(2 < x < 5) = P(ln2 < x < ln5)$. ლოგარითმების ცხრილიდან ვპოულობთ $Ln2 = 0{,}6932$, $Ln5 = 1{,}6094$, ანუ გვაქვს $P(0{,}6932 < x < 1{,}6094) =$ $\Phi\left(\frac{1{,}6094-1}{0{,}5}\right) - \Phi\left(\frac{0{,}6932-1}{0{,}5}\right) = \Phi(1{,}2188) - \Phi(-0{,}6126)$.

დანართში მოყვანილი ინტეგრალების ცხრილიდან (ცხრილი XI) ვპოულობთ $\Phi(1{,}2188) - \Phi(-0{,}6126) = 0{,}618$ და საბოლოოდ

$$P(ln2 < x < ln5) = 0{,}618.$$

1. ემპირიული ფორმულების პარამეტრების დადგენა

2.1. საშუალოების მეთოდი

ზოგჯერ $Y = aX + b$ (2.1) ფორმულის პარამეტრების დადგენისას აუცილებელი არაა მაღალი სიზუსტე (მაგალითად როდესაც ეს პარამეტრები საჭიროა მხოლოდ პირველი მიახლოებისათვის, ან როდესაც მოცემული

წერტილების რაოდენობა საკმარისად ბევრი არაა) მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ გამარტივებული მეთოდები.

დაჭიმული ძაფის მეთოდი. ეს მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: გაზომვის შედეგები დააქვთ ე.წ. მილიმეტრულაზე და გამჭვირვალე სახაზავით გაატარებენ ისეთ წრფეს, რომ მის ზემოთ და ქვემოთ აღმოჩნდეს წერტილების ერთნაირი რაოდენობა. ამ წრფის პარამეტრებს განსაზღვრავენ ორი წერტილით. იმის ნაცვლად, რომ ჩვეულებრივ მილიმეტრულ ქაღალდზე დაიტანონ გაზომვის გადათვლილი შედეგები, შეიძლება ვისარგებლოთ სპეციალური ქაღალდით ფუნქციონალური ბადით, რომელიც შეესაბამება კოორდინატთა გამოყენებულ გარდაქმნებს: ასეთ ქაღალდზე მოცემული წერტილები დაიტანება გადაანგარიშების გარეშე და საძებნი პარამეტრი ასევე განისაზღვრება ორი წერტილით.

ვთქვათ გვაქვს ხარისხოვანი ფუნქცია $y = ax^b$ (2.2) და გვინდა ვიპოვოთ მისი პარამეტრები. ამისათვის საჭიროა (2.2) გამოსახულება გავალოგარითმოთ. მივიღებთ: $lgy = lga + blgx$ (2.3), შემოვიტანოთ აღნიშვნები აღნიშვნები $X = lgx$, $Y = lgy$ (2.4) რაც იძლევა გამოსახულებას $Y = a_1X + b_1$ (2.5) , სადაც $a_1 = b$ და $b_1 = lga$.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის $y = ae^{bx}$ (2.6) პარამეტრების მოსაძებნად ასევე იყენებენ ლოგარითმულ გარდაქმნას: $lgy = lga + xblge$ (2.7) და აღნიშვნებს $X = x$, $Y = lgy$ რაც ასევე იძლევა წრფივ დამოკიდებულებას მნიშვნელობებით $a_1 = blge$ (2.8), $b_1 = lga$(2.9).

შესაბამისი გრაფიკების აგებითა და მარტივი გაანგარიშებებით ადვილად მიიღება (2.6) და (2.7) ფორმულებში შემავალი პარამეტრები და ფუნქციონალური დამოკიდებულებების შესატყვისი ფორმულები.

განვიხილოთ კონკრეტული მაგალითები.

მაგალითი 1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ფიზიკური ექსპერიმენტის მონაცემები და წინასწარ ცნობილია, რომ გაზომვის x და y შედეგებს შორის დამოკიდებულებას ხარისხოვანი ფუნქციის $y = ax^b$ სახე აქვს. ვიპოვოთ a და b პარამეტრები

ამოხსნა.

ცხრილი 6

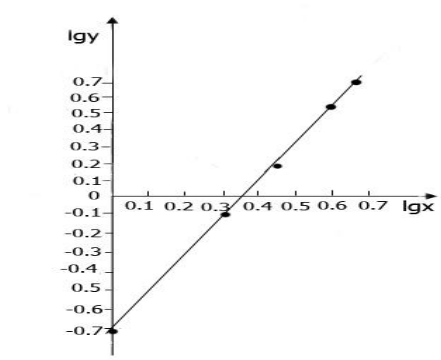
x	y
1	0,2
2	0,8
3	1,6
4	3,2
5	5,0

გავალოგარითმოთ x და y მნიშვნელობები და მონაცემები შევიტანოთ ცხრილში

ცხრილი 7

lgx	lgy
0	− 0,70
0,30	− 0,10
0,48	0,20
0,60	0,51
0,70	0,70

ავაგოთ lgy –ის lgx –ზე დამოკიდებულების გრაფიკი. მივიღებთ (2.3) ფორმულის შესაბამის წრფეს, რომელიც გამოსახულია ნახ. 3–ზე



ნახ.3. lgy –ის lgx –ზე დამოკიდებულების გრაფიკი

ვიპოვოთ $a-$ ს მნიშვნელობა, მისი ლოგარითმი წარმოადგენს იმ წერტილის ორდინატას, რომელსაც გრაფიკი მოჰკვეთს ორდინატთა ღერძს. გრაფიკის მიხედვით $lga = -0{,}70$, აქედან $a = 10^{-0{,}70} = \frac{1}{10^{0{,}70}} = \frac{1}{5{,}01} = 0{,}2$. ახლა ვიპოვოთ $b-$ს მნიშვნელობა. ამისათვის ვიპოვოთ გრაფიკის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისა. ის ტოლია $lgx = 0{,}35$. ვინაიდან გრაფიკის აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერილის ორდინატა 0–ის ტოლია გვაქვს

$$0 = lga + blgx$$ აქედან

$$blgx = -lga = 0{,}70$$ ან

$$b \cdot 0{,}35 = 0{,}70$$ და

$$b = 2$$

საბოლოოდ ცხრილში მოყვანილი მონაცემების მიხედვით x და y სიდიდეებს შორის დამოკიდებულებას აქვს შემდეგი სახე

$$y = 0.2x^2$$

მაგალითი 2. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ფიზიკური ექსპერიმენტის მონაცემები და წინასწარ ცნობილია, რომ გაზომვის x და y შედეგებს შორის დამოკიდებულებას აქვს მაჩვენებლიანი $y = ae^{bx}$ ფუნქციის სახე აქვს. ვიპოვოთ a და b პარამეტრები.

ამოხსნა.

ცხრილი 8

x	y
0	3,00
1	1,83
2	1,10
3	0,66
4	0,40
5	0,24
6	0,15

ვიპოვოთ y სიდიდეების ლოგარითმები. გვაქვს

ცხრილი 9

y	3,00	1,83	1,10	0,66	0,40	0,24	0,15
lgy	0,48	0,26	0,04	–0,18	–0,40	–0,62	–0,82

$$lge = 0{,}43$$

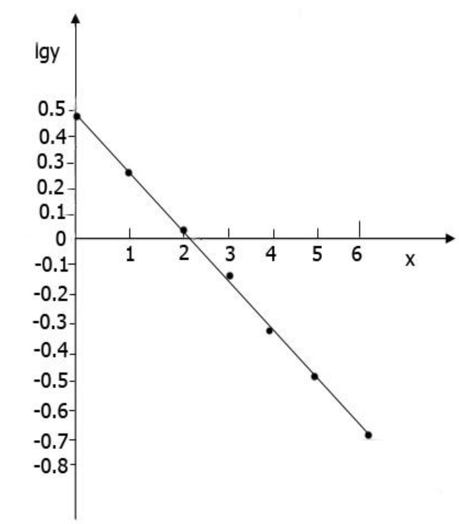
ავაგოთ lgy – ის x –ზე დამოკიდებულების გრაფიკი. (2.7) ფორმულის თანახმად ის წარმოადგენს ნახ.4 – ზე გამოსახულ წრფეს. ამ წრფის ორდინატთა ღერძთან გადაკვეთის წერტლის ორდინატა, როგორც გრაფიკიდან ჩანს ტოლია $lga = 0{,}48$, საიდანაც $a = 10^{0{,}48} = 3{,}02$. ახლა ვიპოვოთ b. გრაფიკიდან ჩანს, რომ მისი აბსცისთა ღერძთან გადაკვეთის წერტილის აბსცისა $x = 2{,}2$. ამ შემთხვევაში $lgy = 0$ და (2.7) ფორმულის ძალით, ვწერთ

$$0 = 0{,}48 + 2{,}2 \cdot b \cdot 0{,}43 \text{ აქედან}$$

$$b = \frac{-0{,}48}{2{,}2 \cdot 0{,}43} = \frac{-0{,}48}{0{,}95} = -0{,}51.$$

მაშასადამე საძებნ ფუნქციას აქვს სახე

$$y = 3{,}02e^{-0{,}51x}$$



ნახ.4. lgy დამოკიდებულება x -ზე

საშუალოების მეთოდი. მეთოდის არსი იმაშია, რომ ექსპერიმენტულ წერტილებს ყოფენ ორ დაახლოებით ტოლ ნაწილად და თითოეული ჯგუფისათვის გადახრათა ჯამს უტოლებენ ნულს

$$\sum(Y_k - aX_k - b) = 0; \quad (2.9)$$

ეს იძლევა ორი წრფივი განტოლებისაგან შემდგარ სისტემას a და b პარამეტრის დასადგენად;

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{L} X_k + Lb = \sum_{i=1}^{L} Y_k \\ a\sum_{k=L+1}^{N} X_k + (N-L)b = \sum_{k=L+1}^{L} Y_k \end{cases} \quad (2.10)$$

სადაც $L = N/2$ როდესაც N ლუწია და $L = (N+1)/2$ როდესაც N კენტია.

ორივე განტოლების შეკრება გვაძლევს

$$b = \bar{Y} - a\bar{X} \quad (2.11)$$

სადაც $\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$ (2.12),

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \quad (2.13),$$

a პარამეტრი კი გამოითვლება ფორმულით

$$a = \frac{\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{N} Y_k - \bar{Y}}{\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{N} X_k - \bar{X}} \quad (2.14)$$

ცხრილი 10

x	y	lgx	lgy
1	0,2	0	– 0,70
2	0,8	0,30	– 0,10
3	1,6	0,48	0,20
4	3,2	0,60	0,51
5	5,0	0,70	0,70

მაგალითი 3. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ექსპერიმენტის შედეგები ქვემოთ მოყვანილი ცხრილის სახით.

ცხრილი 11

x	y
1,1	1,4
1,8	1,7
3,5	2,3
4,6	2,2
6,2	2,6
6,8	2,9
7,5	3,0
8,4	3,2
9,5	3,4
10,6	3,7
11,5	4,1

საშუალოების მეთოდით ავაგოთ შესაბამისი წრფის განტოლება

ამოხსნა. დავყოთ მონაცემები ორ ნაწილად: პირველში შევიტანოთ 6 მონაცემი ($L = (N+1)/2 = (11+1)/2 = 6$), ხოლო მეორეში – დანარჩენი ხუთი. (2.10) ფორმულების ძალით გვაქვს:

$$\begin{cases} a(1{,}1+1{,}8+3{,}5+4{,}6+6{,}2+6{,}8)+6b = 1{,}4+1{,}7+2{,}3+2{,}2+2{,}6+2{,}9 \\ \quad a(7{,}5+8{,}4+9{,}5+10{,}6+11{,}7)+5b = 3{,}0+3{,}2+3{,}4+3{,}7+4{,}1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24{,}0a+6b = 13{,}1 \\ 47{,}7a+5b = 17{,}4 \end{cases}$$

(2.10) ფორმულების შეკრება გვაძლევს

$$b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

სადაც

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k = \frac{1}{11}\cdot(24{,}0+47{,}7) = 6{,}5,$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k = \frac{1}{11}\cdot(13{,}1+17{,}4) = 2{,}8$$

ასე რომ საშუალოების მეთოდშიც წრფივ დამოკიდებულებას აქვს სტანდარტული სახე:

$$Y - \bar{Y} = a\,(X - \bar{X})$$

მაგრამ a პარამეტრი გამოითვლება (2.14) ფორმულით.

$$a = \frac{\frac{1}{6} \cdot 13{,}1 - 2{,}8}{\frac{1}{6} \cdot 24{,}0 - 6{,}5} = \frac{2{,}2 - 2{,}8}{4{,}0 - 6{,}5} = 0{,}2$$

და საბოლოოდ წრფის განტოლებას აქვს სახე

$$Y - 2{,}8 = 0{,}2(X - 6{,}5)$$

ან

$$Y - 2{,}8 = 0{,}2X - 1{,}3$$

და საბოლოოდ

$$Y = 0{,}2X + 1{,}5.$$

აუცილებლად უნდა შევნიშნოთ, ზემოთ მოყვანილ მაგალითებში გამოყენებული მეთოდები იძლევა პარამეტრების საკმაოდ უხეშ შეფასებას.

2.2. მრავალწევრის ოპტიმალური ხარისხის დადგენა

ექსპერიმენტის მონაცემებით მრავალწევრის ოპტიმალური ხარისხის დადგენა ემყარება დაშვებას, რომ საძებნი დამოკიდებულება ზუსტად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას რაღაც n_0 ხარისხის მრავაწევრით:

$$y = \sum_{i=0}^{n_0} a_i\, x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^{n_0} \quad (2.15)$$

და, რომ ფუნქციის y_k გაზომილი სიდიდეები შეიცავენ მხოლოდ შემთხვევით ცდომილებებს $\square_k$, რომლებიც დამოუკიდებელნი არიან და ემორჩილებიან განაწილების ნორმალურ კანონს ერთნაირი σ^2 დისპერსიით თანაბარი სიზუსტით გაზომვებისას, ან დისპერსიებს σ^2/w_k , არათანაბარი სიზუსტით გაზომვებისას (w_k - გაზომვების წონების მნიშვნელობებია, $k = 1, 2, 3, \cdots, N$.

ძირითადი ცნებები ფორმულირებულია (2.15) სიდიდის დაშლის ტერმინებით ჩებიშევის ორთოგონალური მრავაწევრით;

$$y = \sum_{i=0}^{n_0} b_i\, p_i(x) \quad (2.16)$$

სადაც

$\sum_{k=1}^{N} p_i(x_k)p_j(x_k)w_k = 0$ როდესაც $i \neq k$. b_j პარამეტრების შეფასება ხდება

$$b_j = \frac{1}{H_j}\sum_{k=1}^{N} y_k\, p_j(x_k)w_k,\ H_j = \sum_{k=1}^{N} pf(x_k)w_k \quad (2.17)$$

ფორმულებით.

თანმიმდევრობით გამოვთვალოთ $b_0, b_1, b_3, \cdots$ პარამეტრები (2.17) ფორმულებით: ყოველი მორიგი b_n შეფასების შემდეგ გამოვთვალოთ გადახრების კვადრატების ჯამი

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} w_k\left[y_k - \sum_{j=0}^{n}\left(b_j\right)_0 p_j(x_k)\right]^2,$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა მოსახერხებელია წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} w_k y_k^2 - (b_0^2 H_0 + b_1^2 H_1 + \cdots + b_n^2 H_n \quad (2.18)$$

ყოველი ახალი $b_{n+1}p_{n+1}(x)$ წევრის დამატება y მრავალწევრის დაშლაში ორთოგონალური მრავალწევრით $p_j(x)$ ამცირებს S_n გადახრების კვადრატების ჯამის მნიშვნელობას სიდიდით $b_{n+1}^2 H_{n+1}$.

ასეთნაირად გამოთვლილი S_n ყოველი მნიშვნელობა უნდა გავყოთ $N-n-1$ რიცხვზე და მიღებული მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ წინა მნიშვნელობას. შესარჩევი მრავალწევრის ხარისხი უნდა გავზარდოთ მანამ, სანამ (2.19) თანაფადობა არ დაიწყებს შესამჩნევად შემცირებას.

$$\frac{S_n}{N-n-1} = \frac{S_n}{N-n-1}\sum_{k=1}^{N} w_k\left[y_k - \sum_{j=0}^{n}\left(b_j\right)_0 p_j(x_k)\right]^2 \quad (2.19)$$

$n = n_0$ ის მნიშვნელობა, რომლის შემდგომაც (2.19) ფარდობა პრაქტიკულად შეწყვეტს ზრდას, იძლევა მრავალწევრის ოპტიმალურ ხარისხს.

განვიხილოთ მაგალითი 1. 12 ცხრილის პირველ და მეორე სვეტებში მოცემულია რაღაც გაზომვის შედეგები, რომელიც შეიცავს შემთხვევით ცდომილებებს σ^2 დისპერსიით. ჩვენი ამოცანაა შევარჩიოთ ამ მონაცემებით ოპტიმალური ხარისხის მრავალწევრი.

ამოხსნა. ვინაიდან არგუმენტი მოცემულია $h = 0{,}1$ ბიჯით, $b_0, b_1, b_3, \cdots$ პარამეტრების შესაფასებლად გამოვიყენოთ დანართში მოყვანილი ოთოგონალური მრავალწევრების ცხრილი II $N = 9$ – თვის (გაზომვების რაოდენობა 9 –ის ტოლია).

ამასთან ერთად დანართის II ცხრილის შესაბამისად, აქ გამოთვლილია დაყვანილი მრავალწევრის მნიშვნელობები p_j^* ($j = 1,2,3,4,5$). ამიტომ H_j ნაცვლად გამოყენებულია γ_j სიდიდეები, ისე, რომ b_j პარამეტრების შესაფასებელ ფორმულებს აქვთ სახე

$$b_j = \frac{1}{\gamma_j}\sum_{k=1}^{n} y_k p_i(u_k), \ \ u_k = \frac{x_k - 0{,}5}{0{,}1}$$

თვალსაჩინოებისათვის 12 ცხრილში მოყვანილია ორი ორი სვეტი ნამრავლებისათვის $y \cdot p_1^*$ და $y \cdot p_2^*$. ბოლო სვეტებში მოყვანილია p_3^*, p_4^*, p_5^*, რომლებიც წარმოადგენენ თანამამრავლებს y_k შესაბამისი მნიშვნელობებისათვის.

ცხრილი 12

x	y	$(y-b_0)^2$	$p_1^* = u$	$u \cdot p_1^*$	p_2^*	$u \cdot p_2^*$	p_2^*	p_4^*	p_5^*
0,1	5,1234	3,4419	-4	-20,4936	28	143,4552	-14	14	-4
0,2	5,3057	2,7987	-3	-15,9171	7	37,1399	7	-21	11
0,3	5,5687	1,9879	-2	-11,1374	-8	-44,5496	13	-11	-4
0,4	5,9378	1,0833	-1	-5,9378	-17	-100,9426	9	9	-9
0,5	6,4370	0,2933	0	0	-20	-128,7400	0	18	0
0,6	7,0978	0,0142	1	7,0978	-17	-120,6626	-9	9	9
0,7	7,9493	0,9422	2	15,8986	-8	-63,5944	-13	-11	4
0,8	9,0253	4,1888	3	27,0759	7	63,1771	-7	-21	-11
0,9	10,3627	11,4519	4	41,4508	28	290,1556	14	14	4
ჯამი	62,8077	26,2022	-	38,0372	-	75,4386	-	-	-
γ			60		924		11,88	34,32	3120

მიღებული ჯამებით ვპოულობთ

$$b_0 = \bar{y} = \frac{1}{9} \cdot 62{,}8077 = 6{,}97863$$

$$b_1 = \frac{1}{60} \cdot 38{,}0372 = 0{,}63395$$

$$b_2 = \frac{75{,}4386}{924} = 0{,}081644$$

$$b_3 = \frac{5,9252}{1188} = 0,0049876$$

$$b_4 = \frac{0,3429}{3432} = 0,00009991$$

$$b_5 = \frac{0,0042}{3120} = 0,00000134$$

ახლა დავთვალოთ ცდისეული მონაცემების გამოთვლილი მონაცემებიდან გადახრების კვადრატების ჯამი (2.19) ფორმულით $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ მნიშვნელობებისათვის:

$$S_0 = \sum_{k=1}^{n}(y_k - b_0)^2 = 26,2022, \quad S_0/8 = 3,2559$$

$$S_1 = S_0 - b_1^2 H_1 = 26,2022 - 0,63396^2 \cdot 60 = 2,0866, \quad S_1/7 = 0,2984$$

$$S_2 = S_0 - b_2^2 H_2 = 2,0886 - 0,081644^2 \cdot 308 = 0,355, \quad S_2/7 = 0,2984$$

$$S_3 = S_0 - b_3^2 H_3 = 0,0355 - 0,049876^2 \cdot \frac{7128}{5} = 0,000059, \quad S_3/5 = 0,000012$$

შემდგომი გათვლები მეტ სიზუსტეს მოითხოვენ. მოვიყვანოთ მხოლოდ საბოლოო შედეგები.

$$S_4 = 0,0000049 \qquad S_4/4 = 0,000012$$

$$S_5 = 0,0000045 \qquad S_5/4 = 0,000015$$

ვხედავთ, რომ (41-4) თანაფარდობა პრაქტიკულად წყვეტს შემცირებას $n = 4$ - დან. მრიგად საძებნი ემპირიული ფორმულაა

$$y = \sum_{j=0}^{4} b_j x_j\,(u) = b_0 + b_1 u + b_2\left(u^2 - \frac{20}{3}\right) + b_3\left(u^2 - \frac{59}{5}u\right) + b_4\left(u^4 - \frac{115}{7}u^2 + \frac{216}{7}\right) =$$

$$= 0,9991 \cdot 10^{-4}u^4 + 4,9876 \cdot 10^{-3}u^3 + 8,0003 \cdot 10^{-2}u^2 + 5,7510 \cdot 10^{-1}u + \\ +\ 6,43742$$

ამასთან

$$u = \frac{x - 0,5}{0,1} = 10(x - 0,5).$$

მიღებული ემპირიული ფორმულა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$y = 0,00991(x - 0,5)^4 + 4,9876(x - 0,5)^3 + 8,0003(x - 0,5)^2 + 5,7510(x - 0,5) + \\ +\ 6,43742$$

ან

$$y = 0{,}00991x^4 + 2{,}9894x^3 + 2{,}0176x^2 + 0{,}9919x + 5{,}0010$$

ამასთან ერთად სანამ ჩავწერთ ემპირიულ ფორმულას საბოლოო სახით, მიზანშეწონილია შევაფასოთ ცდომილებები, რომლებიც დაშვებულ იქნა მისი პარამეტრების დადგენისას და ამის გათვალისწინებით დავამრგვალოთ მიღებული სიდიდეები. განხილულ შემთხვევაში გაზომვის შედეგების დისპერსია σ^2 შეიძლება შეფასდეს სიდიდით

$$\sigma^2 \approx S_4/4 = 12 \cdot 10^{-8}.$$

b_0, b_1, b_3, b_4 პარამეტრების განსაზღვრის საშუალო კვადრატული ცდომილებები შეიძლება შეფასდეს შემდეგი თანაფარდობებით

$$\sigma(b_0) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{9}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma(b_1) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{60}} \approx 4{,}5 \cdot 10^{-5},$$

$$\sigma(b_2) = \sqrt{\tfrac{\sigma^2}{308}} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-5}, \quad \sigma(b_3) = \sqrt{\tfrac{\sigma^2}{1425{,}6}} \approx 9{,}3 \cdot 10^{-6}$$

$$\sigma(b_4) = \sqrt{\tfrac{\sigma^2}{5883{,}6}} \approx 4{,}5 \cdot 6.$$

ზემოთ მოყვანილი პარამეტრების მნივნელობები დავამრგვალოთ, ამასთან შევინარჩუნოთ ერთი საეჭვო ნიშანი;

$$b_0 = 6{,}9786, \; b_1 = 0{,}63395, \; b_2 = 0{,}08164, \quad b_3 = 0{,}00499, \; b_4 = 0{,}000100.$$

ჩავსვათ მიღებული მნიშვნელობები ემპირიულ ფორმულაში, გავხსანათ ფრჩხილები, საბოლოო ფორმულაში მოვაშოროთ საეჭვო ნიშნები, მივიღებთ

$$y = 1{,}00(x-0{,}5)^4 + 4{,}99(x-0{,}5)^3 + 8{,}000(x-0{,}5)^2 + 5{,}751(x-0{,}5) + 6{,}4374 \approx$$
$$\approx 1{,}0x^4 + 3{,}0x^3 + 2{,}0x^2 + 1{,}0x + 5{,}00.$$

ამრიგად საძებნ მრავალწევრს გააჩნია სხე

$$y = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 5.$$

2.3. ხარისხოვანი და მაჩვენებლიანი ფუნქციები

ზოგჯერ ემპირიული ფორმულის შერჩევისას საჭირო ხდება არჩევანის გაკეთება ხარისხოვან და მაჩვენებლიან ფუნქციებს შორის. ამ შემთხვევაში საჭიროა ექსპერიმენტული წერტილები (გადაანგარიშების გარეშე) დავსვათ ლოგარითმულ და ნახევრადლოგარითმულ ქაღალდებზე; თუ წერტილები კარგად

დალაგდა წრფეზე ლოგარითმულ ქაღალდზე, მაშინ ვირჩევთ ხარისხოვან ფუნქციას $y = ax^b$, ხოლო თუ წერტილები კარგად დალაგდა ნახევრადლოგარითმულ ქაღალდზე ვირჩევთ მაჩვენებლიან ფუნქციას $y = ae^{bx}$. შესაბამისი ფუნქციის არჩევის შემდეგ მისი პარამეტრების a და b დადგენა ხდება მიღებული წრფის ორი წერტილის მეშვეობით.

თუ არა გვაქვს მითითებული ქაღალდები შეიძლება ვისარგებლოთ იმ გარემოებით, რომ ხარისხოვანი ფუნქციის მნიშვნელობები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, ხოლო მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. ამიტომ დასახელებულ ფუნქციებს შორის არჩევანის გაკეთებისას აწარმოებენ გაზომვების ორ რიგს; თანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის $x_{k+1} = x_k + h$ და წერტილებისათვის, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას $x_{k+1} = x_k q$. ამის შემდეგ თითოეული ამ რიგისათვის ანგარიშობენ თანაფარდობებს

$$\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \frac{y_4}{y_3}, \cdots$$

და ირჩევენ იმ რიგს, რომლისთვისაც ეს თანაფარდობები უფრო მუდმივია. ამით ირჩევენ ემპირიული ფორმულის სახესაც: თუ უფრო მუდმივია ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის თანაბრად დაშორებული მნიშვნელობებისათვის ირჩევენ მაჩვენებლიან ფუნქციას, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ხარისხოვანს.

მაგალითი 1. ცხრილ 13 – ში მოყვანილი მონაცემებით გავაკეთოთ არჩევანი მაჩვენებლიან და ხარისხოვან ფუნქციებს შორის.

ამოხსნა. ვიანგარიშოთ y_k მნიშვნელობების შეფარდება თანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის

ცხრილი 13

k	x	y	k	x	y	k	x	y
1	0,4	0,043	5	1,2	1,068	9	2,0	4,981
2	0,6	0,139	6	1,4	1,699	10	2,2	6,664
3	0,8	0,311	7	1,6	2,572	11	2,4	8,595
4	1,0	0,637	8	1,8	3,646			

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{0,139}{0,043} = 3,23,\ \ \frac{y_3}{y_2} = \frac{0,311}{0,139} = 2,24,\ \frac{y_4}{y_3} = \frac{0,637}{0,311} = 2,05 \cdots,\ \ \frac{y_{10}}{y_9} = \frac{6,664}{4,981} = 1,34\ ,\frac{y_{11}}{y_{10}} = \frac{8,595}{6,664} = 1,29$

როგორც ვხედავთ ეს თანაფარდობები თანდათან მცირდება და ბოლო მონაცემი სამჯერ ნაკლებია პირველზე, შესაბამისად მაჩვენებლიანი ფუნქცია არ გამოგვადგება.

ახლა ვიანგარიშოთ y_k ფარდობები x_k წერტილებისათვის, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას მნიშვნელით $q = 2$ (ე.ი. წერტილებისათვის რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $x_k/x_i = 2$);

$\frac{y_3}{y_1} = \frac{0,311}{0,043} = 7,68,\ \frac{y_5}{y_2} = \frac{1,068}{0,139} = 8,27,\ \frac{y_7}{y_3} = \frac{2,572}{0,311} = 8,27, \frac{y_9}{y_4} = \frac{4,981}{0,637} = 7,83, \frac{y_{11}}{y_5} = \frac{8,595}{1,068} = 8,06.$

ეს თანაფარდობები თითქმის მუდმივია. ანალოგიური სიტუაციაა მაშინაც როდესაც გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი $q = 3$:

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{1,068}{0,043} = 24,8, \qquad \frac{y_8}{y_2} = \frac{3,646}{0,139} = 28,4, \qquad \frac{y_{11}}{y_3} = \frac{8,595}{0,311} = 27,6$$

აქაც თანაფარდობები მუდმივია და უპირატესობა უნდა მიენიჭოს ხარისხოვან ფუნქციას $y = ax^b$.

გავასაშუალოებთ რა განხილულ თანაფარდობებს, შეგვიძლია გამოვთვალოთ $y = ax^b$ ხარისხოვანი ფუნქციის b პარამეტრის მიახლოებითი მნიშვნელობა ფორმულით

$$b = \frac{lg\left(\overline{y_{k+1}/y_k}\right)}{lgq}$$

სადაც $\overline{y_{k+1}/y_k}$ წარმოადგენს განსახილველი თანაფარდობების საშუალო მნიშვნელობებს წერტილებისათვის რომლებიც ქმნიან გეომეტრიულ პროგრესიას მნიშვნელით q.

ასე მაგალითად მოყვანილი მაგალითისათვის, როცა $q = 2$ ვღებულობთ

$$\overline{y_{k+1}/y_k} = \frac{7,68 + 8,27 + 8,27 + 7,83 + 8,06}{5} = 8,02$$

და

$$b = \frac{lg\,8,02}{lg\,2} = 3,$$

ხოლო, როცა $q = 3$

$$\overline{y_{k+1}/y_k} = \frac{24{,}8 + 28{,}48 + 27{,}6}{3} = 26{,}9$$

და

$$b = \frac{lg26{,}9}{lg3} = 3{,}00.$$

ამრიგად პირველი მიახლოებით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ემპირიული ფორმულას აქვს სახე $y = ax^3$; ახლა საჭიროა შეირჩეს a პარამეტრი, რომელიც უკვე წრფივად შედის მასში.

სრულიად ანალოგიურად y_{k+1}/y_k თანაფარდობების თითქმის მუდმივი მნიშვნელობებისათვის თანაბრად შორებული წერტილებისათვის $x_{k+1} = x_k + h$ შეიძლება ამ სიდიდეების გასაშუალოება და $y = ae^{bx}$ მაჩვენებლიან ფუნქციაში საწყისი მიახლოებით b პარამეტრის გამოთვლა ფორმულით

$$b = \frac{lg\left(\overline{y_{k+1}/y_k}\right)}{hlge}.$$

3. კორელაციური დამოკიდებულები

3.1. კორელაციის კოეფიციენტი და მისი გამოთვლა

განვიხილოთ კორელაციის კოეფიციენტის შეფასების მარტივი მაგალითი.

ლაბორატორიულ სამუშაოში “მათემატიკური ქანქარა” თავისუფალი ვარდნის აჩქარების g დასადგენად იყენებენ დამოკიდებულებას ქანქარის რხევის პერიოდს T და ქანქარის სიგრძეს L შორის. თეორია იძლევა შემდეგ თანაფარდობას:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3.1)$$

ამრიგად, თეორიის მიხედვით L და T^2 სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. შევამოწმოთ ეს მტკიცება, ამისათვის კორელაციის კოეფიციენტი R გამოვთვალოთ ფორმულით:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2}} \quad (3.2)$$

ვთქვათ პერიოდის გაზომვის ექსპერიმენტი ჩატარდა ქანქარის ხუთი სხვადასხვა სიგრძისათვის. შედეგები მოყვანილია ცხრილ 14 - ში. ცხადია ქანქარის თითოეული სიგრძისათვის პერიოდი გაზომილ იქნა რამოდენიმეჯერ და ცხრილში შეტანილ იქნა პერიოდის კვადრატის გასაშუალებული მნიშვნელობები.

ცხრილი 14

ცდის ნომერი	1	2	3	4	5
ძაფის სიგრძე, L, სმ	10	17	24	31	38
პერიოდის კვადრატი, T^2, წმ^2	0,4132	0,6954	0,9801	1,2618	15460

ჯერ გამოვთვალოთ ძაფის სიგრძის და პერიოდის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობები.

$$\bar{L} = 24 \text{ სმ}, \ \overline{T^2} = 0{,}9793 \text{ წმ}^2.$$

ამის შემდეგ გამოვთვალოთ (1) ფორმულაში შემავალი სამი ჯამი:

$$\sum_{i=1}^{5} (L_i - \bar{L})^2 = 490 \text{ სმ}^2,$$

$$\sum_{i=1}^{5} \left(T_i^2 - \overline{T^2}\right)^2 = 0{,}802 \text{ წმ}^4.$$

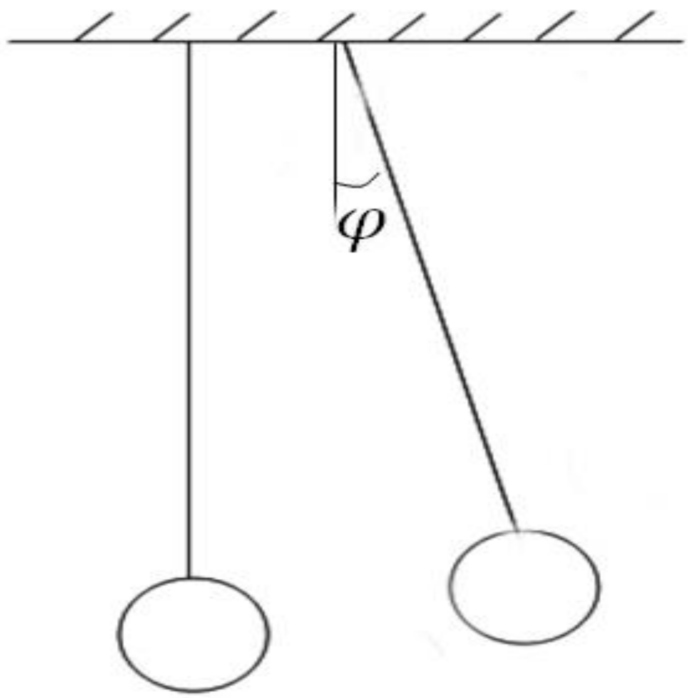
ჩავსვამთ რა მიღებულ მნიშვნელობებს (1) ფორმულაში მივიღებთ კორელაციის კოეფიციენტის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$R = 0{,}999999$$

კორელაციის ერთთან ასე ახლოს მყოფი მნიშვნელობა დამაჯერებლად მეტყველებს იმაზე, რომ L და T^2 სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება და ექსპერიმენტალურად ადასტურებს თეორიულ (3.2) ფორმულას. R სიდიდის ერთისგან უმნიშვნელო გადახრა გამოწვეულია ძაფის სიგრძისა და პერიოდის გაზომვის ცდომილებით.

განვიხილოთ სხვა მაგალითი. ვთქვათ ერთმანეთს ეჯახება ერთნაირი სიგრძის ძაფზე დაკიდებული ორი ფოლადის ბურთულა (ნახ.5). პირველი

ბურთულა გადახრილია ისე, რომ მისი ძაფი ვერტიკალთან ადგენს φ კუთხეს და მას ხელს ვუშვებთ ნულოვანი საწყისი სიჩქარით.



ნახ.5. ორი დრეკადი ბურთულას შეჯახების სქემა

ვუპასუხოთ კითხვას: დამოკიდებულია თუ არა შეჯახების დრო გადახრის კუთხეზე? შეჯახების დროის ქვეშ იგულისხმება ის დრო, რომლის განმავლობაშიც დრეკადად დეფორმირებული ბურთულები ერთმანეთთან კონტაქტში იმყოფებიან. შესაბამისი ლაბორატორიული მოწყობილობა საშუალებას იძლევა დროის ეს ინტერვალი გაიზომოს მიკროწამების სიზუსტით.

ვთქვათ ექსპერიმენტში დროის ინტერვალი გაიზომა კუთხეების φ ინტერვალისათვის 5^0 –დან 15^0 –მდე. თითოეული φ კუთხისათვის დაჯახების T დრო გაიზომა 6–ჯერ და გაანგარიშებულ იქნა მიღებული შედეგის საშუალო არითმეტიკული. შედეგები შეტანილია ცხრილ 15–ში.

ერთი შეხედვით φ კუთხის შემცირებით შეჯახების დრო საკმაოდ ქაოტურად იცვლება. φ და T სიდიდეებს შორის ურთიერთკავშირის არსებობის

ან არარსებობის შესახებ უპირველეს ყოვლისა საჭიროა გავთვალოთ კორელაციის კოეფიციენტი.

ცხრილი 15

გადახრის საწყისი კუთხე, φ გრად	შეჯახების დრო, მკწმ
15	133,2
14	134
13	143,7
12	135,8
11	134,2
10	135,4
9	139,3
8	125
7	110,7
6	130,7
5	110

ჯერ ცხრილ 15 – ის მონაცემებით გამოვთვალოთ φ კუთხის და შეჯახების T დროის საშუალო მნიშვნელობა:

$$\bar{\varphi} = 10 \text{ გრად}, \ \bar{T} = 129{,}3 \text{ მკწმ},$$

შემდეგ–სამი ჯამი, რომლებიც საჭიროა (3.1) ფორმულის გამოსაყენებლად.

$$\sum_{i=1}^{11} [(\varphi_i - \bar{\varphi})\,(T_i - \bar{T})] = 294{,}7 \text{ გრად.მკწმ}$$

$$\sum_{i=1}^{11} \left((\varphi_i - \bar{\varphi})\right)^2 = 110 \ \ გრად^2,$$

$$\sum_{i=1}^{11} \left(T_i^2 - \overline{T^2}\right)^2 = 1673 \ \ წმ^2$$

გამოთვლილი ჯამების ჩასმით (3.1) ფორმულაში მივიღებთ კორელაციის კოეფიციენტის მიახლოებით მნიშვნელობას:

$$R = 0{,}687$$

მიღებული მნიშვნელობა არსებითად განსხვავდება ნულისაგან. შესაბამისად შეიძლება დავასკვნათ, რომ საკვლევ სიდიდეებს შორის არსებობს

ურთიერთკავშირი, მაგრამ ის შესაძლებელია შორს იყოს წრფივისაგან. გადახრის კუთხისა და შეჯახების დროის ურთიერთკავშირის კონკრეტული კანონის დასადგენად საჭიროა მოცემული პრობლემის უფრო დეტალური ექსპერიმენტული და თეორიული კვლევა

3.2. პირდაპირი რეგრესიები

რეგრესია (ლათ. regression – უკუმოძრაობა, უკანდახევა) ალბათობის თეორიისა და მათემატიკურ სტატისტიკაში რაღაც სიდიდის საშუალო მნიშვნელობის დამოკიდებულება რაღაც სხვა სიდიდეზე ან სიდიდეებზე. წმინდა ფუნქციონალური დამოკიდებულებისაგან - $y = f(x)$ განსხვავებით, როდესაც დამოუკიდებელი x ცვლადის თოთოეულ მნიშვნელობას შეესაბამება დამოკიდებული ცვლადის - y - ის ერთი და მხოლოდ ერთი მნიშვნელობა, რეგრესიული კავშირის დროს x - ის ერთიდაიმავე მნიშვნელობას, სხვადასხვა შემთხვევისაგან დამოკიდებულებით შეესაბამება y -- ის სხვადასხვა მნიშვნელობა.

ეს ტერმინი სტატისტიკაში პირველად გამოიყენა ფრენსის ჰამილტონმა (1886 წ) ადამიანის ფიზიკური მახასიათებლების შთამომავლობით გადაცემის საკითხების შესწავლასთან დაკავშირებით. ერთ-ერთ მახასიათებლად აღებულ იქნა ადამიანის სიმაღლე; ამასთან აღმოჩენილი იქნა, რომ მთლიანობაში მაღალი მამების შვილები, როგორც ეს მოსალოდნელი იყო უფრო მაღლები იყვნენ ვიდრე დაბალი სიმაღლის მქონე მამების შვილები. უფრო საინტერესო კი ის იყო, რომ შვილების სიმაღლეებს შორის განსხვავება უფრო ნაკლები იყო ვიდრე მამების სიმაღლეებს შორის განსხვავება.

ვთქვათ ჩატარებულია n ექსპერიმენტი, რომლის შედეგადაც მიღებულია (X, Y) სიდიდეების შემდეგი მნიშვნელობები (x_i, y_i) სადაც $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. მაშინ y - ის x – ზე რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე

$$y - \bar{y} = \rho \cdot \frac{\widehat{\sigma_2}^2}{\widehat{\sigma_1}^2} (x - \bar{x})$$

ხოლო x- ის y – ზე რეგრესიის განტოლებას - სახე

$$x-\bar{x}=\rho\cdot\frac{\widehat{\sigma_1}^2}{\widehat{\sigma_2}^2}\,(y-\bar{y})$$

სადაც $\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n},\ \bar{y}=\frac{\sum y_i}{n}$

$$\widehat{\sigma_1}^2=\overline{x^2}-(\bar{x})^2$$

$$\widehat{\sigma_2}^2=\overline{y^2}-(\bar{y})^2$$

$$\mu_e=\overline{xy}-\bar{x}\bar{y}$$

კორელაციის კოეფიციენტი

$$\rho\approx\frac{\mu_e}{\widehat{\sigma_1}\widehat{\sigma_2}}$$

კორელაციის კოეფიციენტი აკმაყოფილებს პირობას $|\rho|\le 1$

ნახ. 6 – ზე ნაჩვენებია თუ როგორი გადახრები იგულისხმება. y - ის x – ზე და პირიქით x - ის y – ზე პირდაპირი რეგრესიებისას.

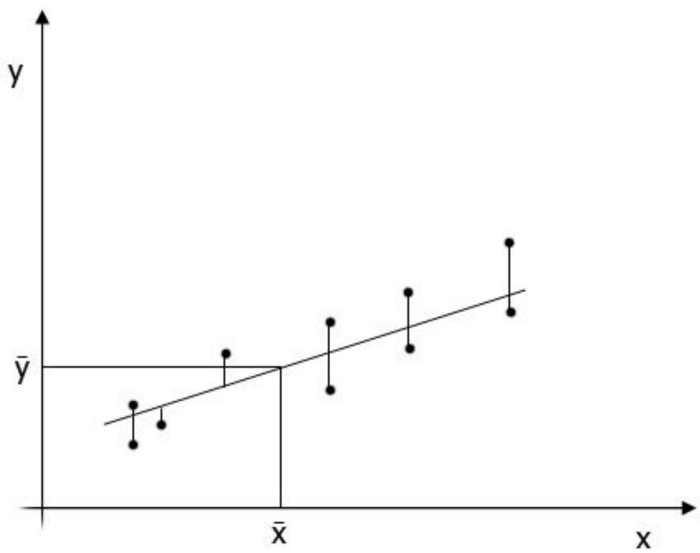
ორივე ემპირიული წრფე გადის ემპირიული განაწილების ცენტრზე - $(\bar{x},\bar{y})$ წერტილი. x - ის y – ზე რეგრესიის წრფის დახრა x ღერძის მიმართ ყოველთვის მეტია ვიდრე y - ის x – ზე წრფის.

განვიხილოთ კონკრეტული მონაცემები, რომლებიც მოყვანილია ცხრილში 16.

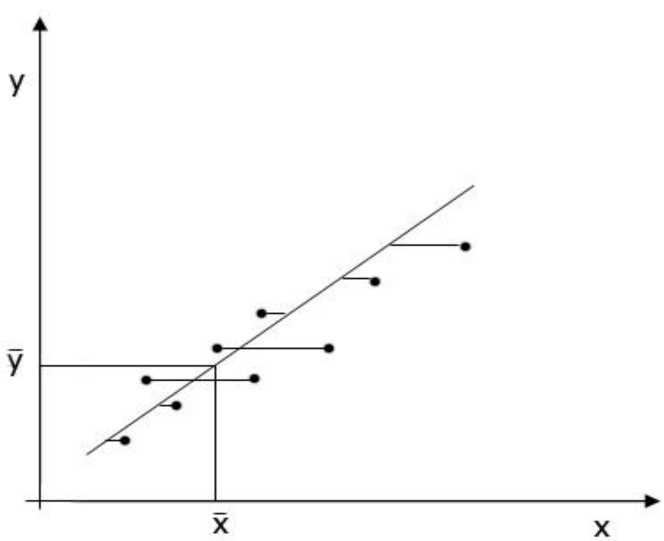
ცხრილი 16

x_i	23	24	24,5	24,5	25	25,5	26	26	26,5	26,5	27	27	28
y_i	0,48	0,50	0,49	0,50	0,51	0,52	0,51	0,53	0,50	0,52	0,54	0,52	0,53

ვიპოვოთ y - ის x – ზე და x- ის y – ზე პირდაპირი რეგრესიის განტოლებები.



ნახ.6. y - ის x – ზე პირდაპირი რეგრესიის გადახრის სახე



ნახ.7. x - ის y – ზე პირდაპირი რეგრესიის გადახრის სახე

ანგარიშის გასამარტივებლად შევავსოთ ცხრილი დამატებითი მონაცემებით

ზემოთ მოყვანილი მონაცემებით მივიღებთ შემდეგ მ,ნიშვნელობებს:

$$\bar{x} = \frac{333,5}{13} \approx 26,65; \quad \bar{y} = \frac{6,65}{13} \approx 0,51; \quad \overline{x^2} = \frac{8579}{13} \approx 659,9; \quad \overline{y^2} = \frac{3,405}{13} \approx 0,261$$

$$\widehat{\sigma_1}^2 \approx 659,9 - 25,65^2 \approx 1,822; \quad \widehat{\sigma_2}^2 \approx 0,261 - -0,51^2 \approx 0,000275;$$

$$\mu_e \approx \frac{170{,}8}{13} - 25{,}5 \cdot 25{,}65 \approx 0{,}018; \;\; \rho = \frac{0{,}0485}{1{,}41 \cdot 0{,}031} \approx 0{,}815$$

და y - ის x – ზე რგრესიის წრფის განტოლებას აქვს სახე

$$y = 0{,}81 \cdot \tfrac{0{,}016}{1{,}35}(x - 25{,}65) + 0{,}51 \text{ ან}$$

$$y = 0{,}01x + 0{,}255$$

ცხრილი 17

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	xy
	23	0,48	529	0,23	11
	24	0,50	576	0,25	12
	24,5	0,49	600,25	0,2401	12,005
	24,5	0,50	600,3	0,25	12,25
	25	0,51	625	0,26	12,8
	25,5	0,52	650,3	0,27	13,26
	26	0,51	676	0,26	13,3
	26	0,53	676	0,28	13,8
	26,5	0,50	702,3	0,25	13,25
	26,5	0,52	702,3	0,27	13,78
	27	0,54	729	0,292	14,58
	27	0,52	729	0,27	14
	28	0,54	784	0,28	14,8
ჯამი	333,5	6,65	8579	3,406	170,8

და x - ის y – ზე რეგრესიის წრფის განტოლებას კი აქვს სახე

$$x = 0{,}815 \cdot \frac{1{,}35}{0{,}016}(y - 0{,}51) + 25{,}65$$

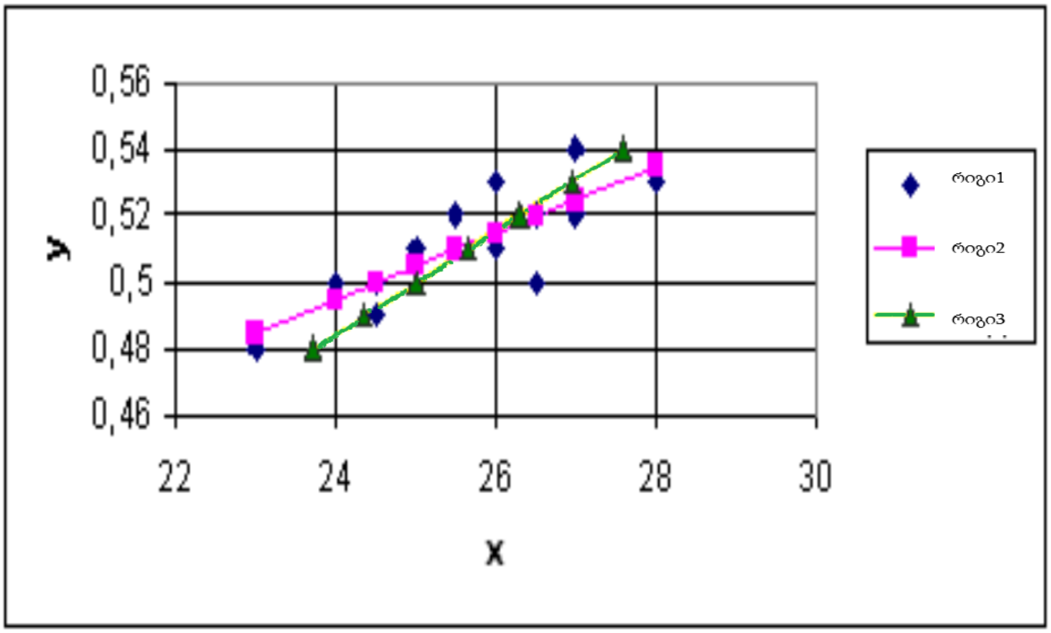
ან

$$x = 68{,}7y - 9{,}4.$$

ავაგოთ მოცემული წერტილები და რეგრესიის წრფეები.

კორელაციის კოეფიციენტი ნულის ტოლი არაა, რაც იმას ნიშნავს, რომ არსებობს კავშირი x და y სიდიდეებს შორის, და ვინაიდან კორელაციის

კოეფიციენტი ერთთან ახლოსაა შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ ეს დამოკიდებულება წრფივია. ამ ვარაუდს ამართლებს საწყისი წერტილების და რეგრესიის შედეგად მიღებული წერტილების განლაგება: რეგრესიის წრფეებს შორის კუთხე მცირეა და წერტილები განთავსებულია რეგრესიის წრფეებთან ახლოს (ნახ.7).



ნახ.8. რიგი 1 მოცემული წერტილები, რიგი – 2 – y-ის x-ზე პირდაპირი რეგრესია, რიგი – 3 x-ის y-ზე პირდაპირი რეგრესია

4. ექსპერიმენტული მონაცემების ანალიზის ზოგიერთი ამოცანები

4.1. რიცხვითი ინტეგრირება. ტრაპეციის წესი

რიცხვითი ინტეგრირების ქვეშ იგულისხმება განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის რიცხვითი მეთოდების ერთობლიობა და ის გამოიყენება მაშინ როდესაც ფუნქცია მოცემულია არა ანალიზურად, არამედ ცხრილის სახით ანდა, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მოცემულია მაგრამ მისი პირველყოფილი არ გამოისახება ანალიზური ფუნქციით მაგალითად $f(x) =$

$exp(-x^2)$. ამ ორ შემთხვევაში შეუძლებელია ინტეგრალის გამოთვლა ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით. ასევე შესაძლებელია შეიქმნას ისეთი სიტუაცია, რომ პირველყოფილი იმდენად რთულია, რომ ინტეგრალი შეიძლება გამოითვალოს უფრო სწრაფად რიცხვითი მეთოდებით.

განვიხილოთ ინტეგრალის გამოთვლის ტრაპეციის მეთოდი. ის ჩვეულებრივ გამოიყენება მაშინ როდესაც ფუნქციის მნიშვნელობები გაზომილია თანაბრად დაშორებული არგუმენტებისათვის, ანუ როდესაც წარმოდგენილია ცხრილით მუდმივი h_i ბიჯით (ცხრილი 18):

ცხრილი 18

x	$y = f(x)$
$x_0 = a$	y_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1
$x_2 = x_1 + h$	y_2
…	…
$x_n = b = x_{n-1} + h$	y_n

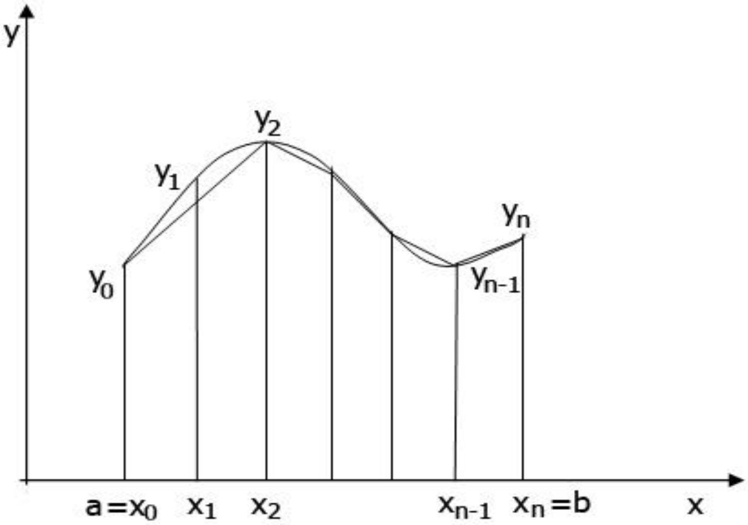
ტრაპეციის წესის მიხედვით $I = \int_a^b f(x)\,dx$ (4.1) ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობად აიღება სიდიდე

$$T_k \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \quad (4.2)$$

ან $$T_k \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

ანუ ითვლება, რომ $I \approx T_k$. ტრაპეციის წესის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია ნახ.8-ზე. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი შეცვლილია მართკუთხა ტრაპეციის ფართობებით. ამასთან, როგორც ნახაზიდან ვხედავთ ფუნქციის გაზომილი მნიშვნელობები y_k შეიძლება არ ემთხვეოდეს ფუნქციის $f(x)$ მნიშვნელობებს x_k წერტილებში, ვინაიდან ფუნქციის გაზომილი მნიშვნელობები შეიცავენ ექსპერიმენტულ ცდომილებებს.

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ $\int_{-1}^{2}(3-x^2)(1-x)dx.$ დავყოთ მონაკვეთი $[-1,2]$ 10 ტოლ ნაწილად ანუ $h=(2-(-1))/10=3/10=0{,}3.$



ნახ. 9. მრუდწირული ტრაპეცია

მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი შეცვლილია მართკუთხა ტრაპეციის ფართობებით. ამასთან, როგორც ნახაზიდან ვხედავთ ფუნქციის გაზომილი მნიშვნელობები y_k შეიძლება არ ემთხვეოდეს ფუნქციის $f(x)$ მნიშვნელობებს x_k წერტილებში, ვინაიდან ფუნქციის გაზომილი მნიშვნელობები შეიცავენ ექსპერიმენტულ ცდომილებებს.

განვიხილოთ მაგალითი. ვიპოვოთ $\int_{-1}^{2}(3-x^2)(1-x)dx.$ დავყოთ მონაკვეთი $[-1,2]$ 10 ტოლ ნაწილად ანუ $h=(2-(-1))/10=3/10=0{,}3.$

შევადგინოთ ცხრილი 19:

ცხრილი 19

x_i	-1	- 0,7	- 0,4	-0,1	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7	2
$f(x_i)$	4	4,267	3,976	3,289	2,368	1,375	0,472	-0,179	-0,416	-0,077	1

ტრაპეციის ფორმულით გვაქვს:

$$T_k = 0{,}3(\frac{4}{2} + 4{,}267 + 3{,}976 + 3{,}289 + 2{,}368 + 1{,}375 + 0{,}472 + (-0{,}179) + (-0{,}416) +$$

$$+(-0{,}077)+1)=5{,}2725$$

თუ იგივე ინტეგრალს გამოვთვლით ანალიზურად მივიღებთ 5,25 ანუ როგორც ვხედავთ მიახლოება საკმაოდ კარგია.

ტრაპეციის მეთოდით ინტეგრალის გამოთვლისას მთლიანი ცდომილება ტოლია ორი ცდომილების ჯამის: ცდომილების, რომელიც გამოწვეულია მრუდწირული ტრაპეციის შეცვლით სწორხაზოვანი ტრაპეციით ((ანალიტიკური ცდომილება) და დამრგვალების ცდომილებით, რომელიც გამოწვეულია გაზომვის ცდომილებით (ემპირიული ცდომილება.

4.2. რომბერგის მეთოდი

რომბერგის მეთოდი გამოიყენება მხოლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობები გაზომილია არგუმენტის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც $[a,\, b]$ ინტერვალს ყოფენ n ტოლ ნაწილად, ამასთან n ჯერადია 2 – ის გარკვეული ხარისხის: $n=m\cdot 2^k$ $(m.k$ - ნატურალური რიცხვებია). რომბერგის მეთოდი მდგომარეობს რაღაც h ბიჯით ტრაპეციის მეთოდით გამოთვლილი ინტეგრალის თანმიმდევრობით დაზუსტებაში, იმავე წესით ორმაგი $2h$ ბიჯის გამოყენებით. ის საშუალებას იძლევა ამოღებულ იქნას მაქსიმალური ინფორმაცია მოცემული მონაცემებიდან და გამოითვალოს ინტეგრალი გაცილებით მაღალი სიზუსტით, ვიდრე ამის საშუალებას იძლევა ტრაპეციის მეთოდი იმავე ბიჯით.

4.1 პარაგრაფისაგან განსხვავებით აქ შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

T_i წარმოადგენს $T_k\approx h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$ სახის სიდიდეს ბიჯით h_i;

$$h_0=(b-a)/m \text{ (საწყისი ბიჯი)};$$

$$h_{i+1}=h/2 \ \ (i=0,1,\cdots,k-1).$$

ჯერ ტრაპეციის წესით გამოთვლიან ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობას h_0 ბიჯით:

$$T_0=h_0\left[\frac{f(h_0)}{2}+f(a+h_0)+\cdots+f\left(a+(m-1)h_1+\frac{f(b)}{2}\right)\right]=$$

$$= h_0\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{m-1} f(a+jh_0)\right] \text{ 6.1-7}$$

შემდეგ გამოთვლიან სიდიდეს

$T_1 = h_1\left[\frac{f(a)}{2}+f(a+h_1)+\cdots+f\left(a+(2m-1)h_2+\frac{f(b)}{2}\right)\right]$ ისე, რომ იყენებენ საშუალო წერტილებში $a+h_1, a+3h_1, \cdots, a+(2m-1)h_1$ $f(x)-$ ის მხოლოდ დამატებით მნიშვნელობებს.

ამ მიზნით გამოითვლიან შემასწორებელ წევრს

$$V_0 = h_0\sum_{i=1}^{m} j\left[a+\left(j-\frac{1}{2}\right)h_0\right] \text{ (4.3)}$$

და შემდეგ პოულობენ

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_0+V_0) \text{ (4.4)}$$

ინტეგრალის ორი მოძებნილი მიახლოებითი მნიშვნელობით (T_1 ბიჯით h_1 და T_0 ორმაგი ბიჯით $h_0 = 2h_1$) გამოთვლიან უკეთეს მიახლოებას

$$S_1 = T_1+\frac{1}{3}(T_1-T_0) = \frac{1}{3}(4T_1-T_0). \quad \text{(4.5)} \quad \text{6.1-10}$$

S_1 მიახლოება განსაზღვრავს სიმპსონის წესს $I \approx S_1$; S_1 სიდიდეს ჩეულებრივ ჩაწერენ შემდეგი სახით

$$S_1 = \frac{1}{3}h_1[f(a)+4f(a+h_1)+2f(a+2h_1)+\cdots+4f(a+(2m-1)h_1)+f(b)] \text{6.1-11}$$

მაგალითი 1. $y = f(x)$ ფუნქცია მოცემულია პირველი ორი სვეტით, 13 ტოლად დაშორებული წერტილით $[0,4; 1,6]$ მონაკვეთზე; ფუნქციის მნიშვნელობის ცდომილება არ აღემატება 10^{-4}. გამოვთვალოთ $f(x)$ ინტეგრალი 10^{-4} სიზუსტით.

ამოხსნა. ვინაიდან ინტეგრების მონაკვეთი დაყოფილია 12 ტოლ ნაწილად $h = 0,1$ ბიჯით, საწყის ბიჯად ავიღოთ $h_0 = 0,4$. ტრაპეციის წესით გამოვთვალოთ საწყისი მიახლოება

$$T_0 = 0,4(0,2471+1,6542+1,9866+0,5868) = 1,78988.$$

შესწორების წევრი

$$V_0 = 0,4(1,0523+2,0817+1,6193) = 1,88132.$$

შემდეგი მიახლოება ტრაპეციის წესით, ბიჯით $h_1 = 0,2.$

$$T_1 = \frac{1}{2}(1,78968 + 1,88132) = 1,83560$$

ცხრილი 20

x	y	T_0-თვის	V_0-თვის	V_1-თვის
0,4	0,4942	0,2471		
0,5	0,7655	…	…	→0,7556
0,6	1,0523	…	→1,0523	
0,7	1,3625	…	…	→1,3625
0,8	1,6542	1,6542		
0,9	1,8990	…		→1,8890
1,0	2,0817	…	→2,0817	
1,1	2,0629	…	…	→2,0629
1,2	1,9866	1,9866		
1,3	1,8274	…	…	→1,8274
1,4	1,6193	…	→1,6193	
1,5	1,3937	…	…	→1,3987
1,6	1,1736	0,5868		

ამ მონაცემებით გამოვთვალ;ოთ პირველი მიახლოება სიმპსონის წესით

$$S_1 = 1,83560 + \frac{1}{3} \cdot 0,04572 = 1,85084$$

ვინაიდან საჭირო სიზუსტე ჯერ აშკარად მიღწეული არაა, გამოვთვალოთ შესწორების ახალი წევრი

$$V_1 = 0,2(0,7555 + 1,3625 + 1,8890 + 2,0629 + 1,8274 + 1,3937) = 1,85820$$

და ახალი მიახლოება, ტრაპეციის წესით, $h_2 = 0,1$ ბიჯით იქნება

$$T_2 = \frac{1}{2}(1{,}83560 + 1{,}88820) = 1{,}84690.$$

ანგარიშის გაგრძელება რომბერგის მეთოდით მოყვანილია ცხრილში 21

ცხრილი 21

h	T	S	R
0,4	1,78988		
0,2	1,83560	1,85084	
0,1	1,84690	1,85067	1,85066

ორი უკანასკნელი შედეგის სხვაობა შეადგენს მხოლოდ 10^{-5} , რაც გვაძლევს საბაბს ვთქვათ, რომ წაკვეთის ცდომილება ნაკლებია 10^{-5} – ზე. აქვე შევნიშნოთ, რომ განხილულ მაგალითში შეუძლებელია სიზუსტის გაზრდა, ვინაიდან ყველა მონაცემი ამოწურულია.

შევაფასოთ დამრგვალების ცდომილება. ვინაიდან პირობის თანახმად ფუნქციის მნიშვნელობაში ცდომილება არ აღემატება 10^{-4}, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $3\sigma = 10^{-4}$. ინტეგრების მონაკვეთის სიგრძე $h = 0{,}1$ ბიჯისათვის ტოლია 1,2-ის ინტერვალების რაოდენობისათვის $n = 12$, ამიტომ დამრგვალების ცდომილება შეადგენს $\frac{3(b-a)\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}35 \cdot 10^{-4}$ ტრაპეციის წესისათვის T; სიმპსონის წესისათვის $0{,}37 \cdot 10^{-4}$ S; $0{,}40 \cdot 10^{-4}$ რომბერგის წესისათვის R , რაც ასევე დაშვების ფარგლებში ჯდება.

ამრიგად 10^{-4} - მდე სიზუსტით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ

$$\int_{0,4}^{1,2} f(x)\,dx = 1{,}8507$$

4.3. რიცხვითი დიფერენცირება

ხშირად საინჟინრო-ტექნიკური და სხვა გამოყენებითი ამოცანების გადასაწყვეტად საჭირო ხდება გარკვეული რიგის ცხრილის სახით მოცემული $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნა. გარდა ამისა, ზოგჯერ $y = f(x)$ ანალიზური სახე რთულია და მისი უშუალო დიფერენცირება ძალიან

გაძნელებულია. ამ შემთხვევებში იყენებენ რიცხვით დიფერენცირებას. ზოგადად რიცხვითი დიფერენცირების ამოცანას წარმოადგენს ცხრილში გარკვეული h ბიჯით მოცემული ფუნქციის წარმოებულის პოვნა იმავე h ბიჯით. არსებობს ასეთი დიფერენცირების მრავალი მეთოდი.

პირველ რიგში ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ თუ რიცხვითი ინტეგრირება მოასწორებს საწყისი მონაცემების ცდომილებებს, ამცირებს ექსპერიმენტის “ხმაურს”, რიცხვითი დიფერენცირების შედეგზე ეს “ხმაური” დიდ გავლენას ახდენს: საწყისმა მცირე ცდომილებებმა შეიძლება მნიშვნელოვნად დაამახინჯოს რიცხვითი დიფერენცირების შედეგები. ამიტომ საჭიროა ჯერ მოსწორდეს საწყისი მონაცემები და მხოლოდ შემდეგ იქნას გამოყენებული რიცხვითი დიფერენცირების მეთოდები..

$y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ყველაზე მარტივი ფორმულაა წარმოებულის გამოთვლა თანაბრად დაშორებული კვანძებით.

$$f_k^I(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} \quad (4.6)$$

სადაც $h = x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k$

ზოგჯერ მოცემულ $y = f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ მონაკვეთზე ცვლიან მაინტერპოლირებელი ფუნქციით $y = P(x)$, ყველაზე ხშირად პოლინომით და თვლიან რომ $f'(x) = P'(x)$ (4.7) სადაც $a \le x \le b$. ანალოგიურად გამოითვლება უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები. თუ ცნობილია მაინტერპოლირებელი $y = P(x)$ ფუნქციის ცდომილება

$$R(x) = f(x) - P(x) \quad (4.8)$$

მაშინ $P'(x)$ წარმოებულის ცდომილება

$$r(x) = R'(x) = f'(x) - P'(x) \quad (4.9)$$

ანუ მაინტერპოლირებელი ფუნქციის წარმოებულის ცდომილება ტოლია ამ ფუნქციის ცდომილების წარმოებულის. ზოგადად, რომ ვთქვათ რიცხვითი დიფერენცირება ნაკლებად ზუსტი ოპერაციაა ვიდრე ინტერპოლირება, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ და $P(x)$ ფუნქციების სიახლოვე $[a, b]$ შუალედზე არ იძლევა ამავე შუალედზე მათი წარმოებულების სიახლოვის გარანტიას.

მოვიყვანოთ რიცხვითი დიფერენცირების ფორმულები სტირლინგის მაინტერპოლირებელი ფორმულების საფუძველზე. ვთქვათ

$\cdots x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$ წარმოადგენენ თანაბრდ დაშორებულ წერტილების სისტემას, ბიჯით $h = h_{i-1} - h_i$ და $y_i = f(x_i)$ წარმოადგენს $y = f(x)$ შესაბამის მნიშვნელობებს. ვთქვათ $q = \frac{x - x_0}{h}$ და შევცვლით რა $y = f(x)$ ფუნქციას სტირლინგის ინტერპოლაციური პოლინომით, მივიღებთ:

$$y = y_0 + q\Delta y_{-1/2} + \frac{q^2}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-5/2} + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \cdots \quad (4.10)$$

სიმოკლისათვის შემოტანილია შემდეგი შემოკლებები:

$$\Delta y_{-1/2} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2},$$

$$\Delta^3 y_{-3/2} = \frac{\Delta y_{-2} + \Delta y_{-1}}{2}$$

$$\Delta^5 y_{-5/2} = \frac{\Delta^3 y_{-3} + \Delta^3 y_{-2}}{2} \text{ და ა.შ.}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$ შეიძლება ჩავწეროთ.

$$y' = \frac{1}{h}(\Delta y_{-1/2} + q\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6} \cdot \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{2q^3-q}{12} \cdot \Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{5q^4-15q^2+4}{120} \cdot \Delta^5 y_{-5/2} + \frac{3q^5-10q^3+4q}{360} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \cdots) \quad (4.11)$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-3/2} + \frac{6q^2-1}{6} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \frac{2q^3-3q}{12} \cdot \Delta^5 y_{-5/2} +$$

$$+ \frac{15q^4-30q^2+4}{360} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \cdots)$$

მაგალითი 1. ვიპოვოთ $y = f(x)$ ფუნქციის პირველი და მეორე რიგის წარმოებულები y' და y'' ცხრილურად მოცემული ფუნქციისათვის.

ცხრილის შესაბამისად $h = 0{,}02, x = 1\,, x_0 = 1$ და $q = 0$

მონაცემები ჩავსვათ (4.11) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$y'(1) = \frac{1}{0{,}02}\left(-\frac{87355+88656}{2} \cdot 10^{-7} - \frac{1}{6} \cdot \frac{25+26}{2} \cdot 10^{-7} + \frac{1}{30} \cdot 10^{-7}\right) = -0{,}4400485$$

$$y^{II}(1)=\frac{1}{0{,}02^2}\left(-1301\cdot 10^{-7}-\frac{1}{12}\cdot 1\cdot 10^{-7}\right)=-0{,}325$$

ცხრილი 22

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,96	0,7825361				
		-86029			
0,98	0.7739332		-1326		
		– 87355		25	
1,00	0.7651977		-1301		1
		– 88656		26	
1,02	0.7563321		-1275		
		– 89931			
1,04	0.7473390				

შევნიშნოთ, რომ ცხრილში მოყვანილი ფუნქცია წარმოადგენს ბესელის ფუნქციას $y=J_0(x)$, რომლისთვისაც $x=1$ წერტილში პირველი რიგის წარმოებული ტოლია 0,4400506 ხოლო მეორე რიგის წარმოებული - 0,325147. როგორც ვხედავთ მეორე რიგის წარმოებული იძლევა მეტ ცდომილებას პირველი რიგის წარმოებულთან შედარებით.

4.4. ინტერპოლაცია

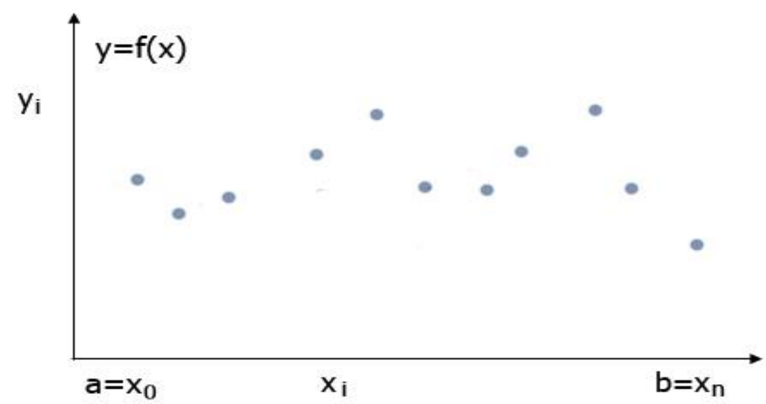
ხშირად პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას გვხვდება შემდეგი სიტუაცია: თეორიული მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ რაღაც y სიდიდე წარმოადგენს უწყვეტი x არგუმენტის $y=f(x)$ ფუნქციას, ამასთან $f(x)$ ფუნქციის სახე უცნობია. ამასთან არგუმენტის შემოსაზღვრულ ინტერვალში $x\in[a,b]$ $x_i(i=1{,}0{,}2,\cdots,i)$ წერტილებში ცნობილია ფუნქციის სასრული რაოდენობის მნიშვნელობები y_i. $x_i(i=1{,}0{,}2,\cdots,n)$ წერტილებს ეწოდებათ კვანძები. სხვანაირად, რომ ვთქვათ გამოსაკვლევი ფუნქციის საწყისი მონაცემები

შეიძლება ჩაიწეროს ცხრილის სახით, რომელიც შეიცავს რიცხვთა $n+1$ დალაგებულ წყვილს.

ცხრილი 23

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y_0 = f(x_0)$	$y_1 = f(x_1)$	$\cdots$	$y_n = f(x_n)$

23 ცხრილის საწყისი მონაცემები გრაფიკულად მოყვანილია ნახ.9-ზე.



ნახ.10. ინტერპოლაციისათვის განკუთვნილი საწყსი მონაცემების გრაფიკის მაგალითები. შავი წერტილებით მონიშნულია $f(x)$ ფუნქციის y_i მნიშვნელობების ინტერპოლაციის კვანძებში $x_i(0,1,2,\cdots,n)$

პრობლემა მდგომარეობს $[a,b]$ ინტერვალიდან აღებული $x_i(i=1,0,2,\cdots,n)$ - ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ისეთი $y=f(x)$ ფუნქციის, რომელიც არ ემთხვევა არცერთ კვანძს. დასმული პრობლემის გადაწყვეტა ორ ნაწილად შეიძლება დაიყოს, რომლებსაც ეწოდებათ ინტერპოლაცია და ექსტრაპოლაცია. რა არის ინტერპოლაცია და ექსტრაპოლაცია? ინტერპოლაცია არის აღდგენა იმისა რაც არის მეზობელ სიდიდეებს შორის - ხერხი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოძებნილ იქნას საშუალედო სიდიდეები, როდესაც მოცემულია ცნობილი სიდიდეების დისკრეტული მნიშვნელობები. მაგალითად გვაქვს ცხრილი რომელშიც მოცემულია ელექტრული დენის ძალის მნიშვნელობების დამოკიდებულება ძაბვისაგან $I(U)$, ძაბვებისათვის $U=0,1,2,\cdots,10$ ვ და გვინდა ვიპოვოთ დენის ძალის მნიშვნელობა მაგალითად ძაბვის

$U = 1{,}372$ ვ მნიშვნელობისათვის. სასარგებლოა აქვე განვმარტოთ ფართოდ გამოყენებული ტერმინი აპროქსიმაცია. აპროქსიმაცია – მიახლოება, წარმოადგენს მეცნიერულ მეთოდს, რომელიც მდგომარეობს ერთი ობიექტის მეორე გარკვეული კუთხით მასთან ახლოს მდგომი, მაგრამ უფრო მარტივი ობიექტით, მაგალითად ირაციონალური რიცხვების შეცვლა რაციონალურით. თუ ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ამოცანად დავისახავთ ფუნქციის სახის პოვნას, რომელიც მიახლოებით განსაზღვრავს დენის ძალასა და ძაბვას შორის დამოკიდებულებას ეს იქნება აპროქსიმაციის ამოცნა. ანუ ინტერპოლაციისაგან განსხვავებით ვპოულობთ არა რაღაც სიდიდეს მეზობელი სიდიდეების მეშვეობით არამედ ფუნქციის სახეს ყველა მოცემული მონაცემების მეშვეობით.

როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, ინტერპოლაცია მდგომარეობს ახალი $F(x)$ ფუნქციის პოვნაში, რომელსაც მაინტერპოლირებელი ფუნქცია ან ინტერპოლანტი ეწოდება. $F(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის გარკვეულ კლასს და $x_i (i = 1,0,2, \cdots, n)$ წერტილებში იღებს იმავე მნიშვნელობებს, რასაც $f(x)$ ფუნქცია

$$F(x_i) = y_i = f(x_i), \quad i = 1,0,2, \cdots, n \quad (4.12)$$

არგუმენტის $x_i (i = 0,1,2, \cdots, n)$ მნიშვნელობებს ინტერპოლაციის კვანძები ეწოდებათ.

შევნიშნოთ, რომ თავისთავად 23 ცხრილის მონაცემები ვერ განსაზღვრავენ მაინტერპოლირებელი ფუნქციის კონკრეტულ სახეს. მაგალითად, ნახ. 9 გრაფიკის წერტილები შეიძლება მიმდევრობით შევაერთოთ წრფის მონაკვეთებით. მეორეს მხრივ ყოველთვის შესაძლებელია მოიძებნოს n - ური რიგის ალგებრული პოლინომი ნამდვილი კოეფიციენტებით, რომლის გრაფიკიც ზუსტად გაივლის $n+1$ რაოდენობის მოცემულ წერტილზე, თუ 23 ცხრილის ყველა კვანძი სხვადასხვაა.. ზოგადად არსებობს უსასრულო რაოდენობის $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს 23 პირობას. პრაქტიკაში მაინტერპოლირებელ ფუნქციად ხშირად იყენებენ ალგებრულ პოლინომებს, ექსპონენტების ჯამებს, ფურიე-ჯამებს და ა.შ. ინტერპოლანტის სახის შერჩევაზე გავლენას ახდენს ნებისმიერი ინფორმაცია, რომელიც ეხება x და y ცვლადებს შორის კავშირს.

მეორეს მხრივ უნდა შევნიშნოთ, რომ ინტერპოლანტმა 4.12 კვანძებში უნდა მიიღოს საინტერპოლაციო ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობები. თუ ცხრილში მოყვანილი y_i მონაცემები შეიცავენ არსებით ცდომილებებს, მაშინ 4.12 პირობის ზუსტი შესრულება შეუძლებელია. მაშინ $f(x)$ - ის იმ მნიშვნელობების საპოვნელად, რომლებიც არ ემთხვევიან კვანძებს მიზანშეწონილია გამოყენებულ იქნას აპროქსიმაციის მეთოდები.

განვიხილოთ ლაგრანჟის ინტერპოლაციური პოლინომი. ნამდვილი კოეფიციენტის მქონე პოლინომები წარმოადგენენ კარგად შესწავლილ ფუნქციებს, რომელთა გათვლებიც მარტივია. ისინი კარგად ემორჩილებიან შეკრებას, გადამრავლებას, დიფერენცირებას და ინტეგრებას. მათ ხშირად იყნებენ ინტერპოლანტებად.

ვთქვათ საწყის ინფორმაციას წარმოადგენს 23 ცხრილში მოყვანილი მონაცემები ანუ გვაქვს $n+1$ რაოდენობის (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ რიცხვების წყვილი. ავაგოთ მაინტერპოლირებელი ფუნქცია ალგებრული პოლინომის სახით.

ფუნქციათა თეორიიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მდებარე $n+1$ რაოდენობის წერტილზე, მოცემული კოორდინატებით (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,n)$, შეიძლება გავავლოთ ალგებრული პოლინომის გრაფიკი ნამდვილი კოეფიციენტებით, თუ $x_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ რიცხვები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. თუ პოლინომის ხარისხი $m = n$ მაშინ ზოგადად ეს პოლინომი ერთადერთია. (4.12) მოთხოვნის თანახმად ინტერპოლაციის კვანძებში $x_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ ამ პოლონომის მნიშვნელობები $P_m(x)$ ზუსტად ემთხვევა საინტერპოლაციო $f(x)$ ფუნქციის მოცემულ $y_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ მნიშვნელობებს:

$$P_m(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n) \text{ (4.13).}$$

ამრიგად ყოველთვის მოიძებნება $m = n$ ხარისხის $P_m(x)$ პოლინომი, რომელიც წარმოადგენს მაინტერპოლირებელ პოლინომს.

სპეციალურ შემთხვევებში, როდესაც (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ წერტილები განლაგებულია განსაკუთრებული წესრიგით, პოლინომის ხარისხი შესაძლებელია n - ზე ნაკლებიც იყოს. მაგალითად როდესაც წერტილები განლაგებულია ერთ წრფეზე, მათზე, მიუხედავად წერტილების რაოდენობისა, გაივლის წრფივი ფუნქციის გრაფიკი (პირველი ხარისხის პოლინომი).

თუ $m > n$ მაშინ იმ პოლინომების რაოდენობა, რომლებიც გაივლიან მოცემულ წერილებზე უსასრულოდ დიდი რაოდენობისაა.

შევეხოთ იმ შემთხვევას, როდესაც კვანძებს შორის მანძილები ერთნაირი არაა. ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია ლაგრანჟის პოლინომის აგება. ეს პოლინომი აიგება შემდეგი ჯამის სახით:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i\,(x) \cdot y_i, \ (4.14)$$

სადაც $l_i(x)$ - ლაგრანჟის კოეფიციენტებია და ისინი წარმოადგენენ ფუნქციის არგუმენტის x ფუნქციას $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ (4.15)

(4.15) პირობის შესასრულებლად ლაგრანჟის კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას:

$$l_i\left(x_j\right) = \delta_{ij} \quad (i,j = 0,1,2,\cdots,n) \quad (4.16)$$

სადაც δ_{ij} - კრონეკერის სიმბოლოა $\left(\delta_{ij} = 0 \text{ თუ } i \neq j \text{ და } \delta_{ij} = 1 \text{ თუ } i = j\right)$.

(4.16) პირობის შესასრულებლად ლაგრანჟის კოეფიციენტები წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით:

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) \quad (4.17)$$

სადაც c_i ჯერ-ჯერობით უცნობი მუდმივი სიდიდეებია.

ლაგრანჟის i - ურ კოეფიციენტში არ შედის მამრავლი $(x - x_i)$, ამიტომ ყოველი (4.17) მე- i -ე ნამრავლი შეიცავს n რაოდენობის ფრჩხილს და ლაგრანჟის ყოველი კოეფიციენტი n რიგის პოლინომია.

მუდმივი c_i სიდიდეების ცხადის სახით წარმოდგენისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ პირობა $l_i(x_i) = 1 \ (i = 0,1,2,\cdots,n)$, (4.16) მოთხოვნის ძალით. მაშინ (4.17) – დან მაშინათვე გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{c_i} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n}\left(x_i - x_j\right).$$

ამრიგად, ლაგრანჟის კოეფიციენტები წარმოადგენენ შეფარდებათა ნამრავლს:

$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \ (4.18).$$

უშუალო ჩასმებით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (4.18) (2.7) კოეფიციენტისთვის სრულდება (4.16) პირობა.

ინტერპოლაციური პოლინომი ლაგრანჟის ფორმაში მიიღება მოძიებული კოეფიციენტების (4.18) ჩასმით (4.14) გამოსახულებაში:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i \cdot \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right) \quad (4.19)$$

მეტი თვალსაჩინოებისათვის მესამე ხარისხის პოლინომი ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$L_3(x) = y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + +y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

განვიხილოთ მაგალითი.

ცხრილი 24

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	1,2	3,5	5
y_i	-4	0	3,8	-2	7

ვინაიდან ცხრილი 24 შეიცავს 5 კვანძს, ინტერპოლაციური პოლინომი იქნება მე-4 ხარისხის. ჩავსვამთ რა ცხრილურ მონაცემებს ზოგად ფორმულაში (4.19), ვიპოვით ლაგრანჟის პოლინომის ცხად სახეს.

$$L_4(x) = -4\frac{(x+1)(x-1{,}2)(x-3{,}5)(x-5)}{(-2+1)(-2-1{,}2)(-2-3{,}5)(-2-5)} +$$

$$+3{,}8\frac{(x+2)(x+1)(x-3{,}5)(x-5)}{(1{,}2+2)(1{,}2+1)(1{,}2-3{,}5)(1{,}2-5)} +$$

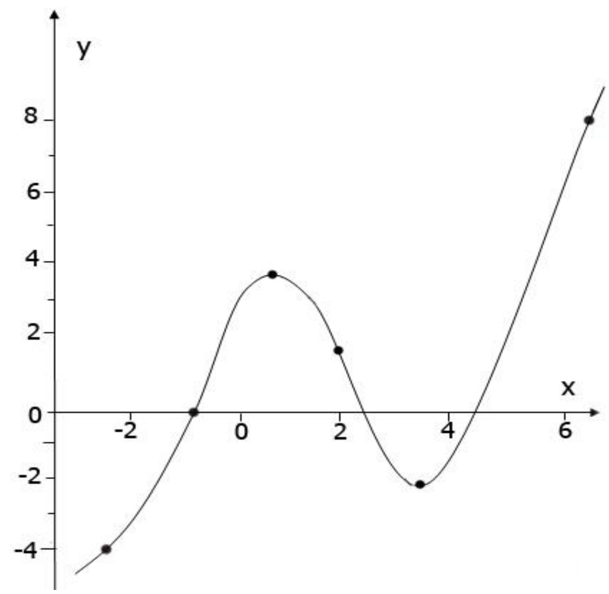
$$-2\frac{(x+2)(x+1)(x-1{,}2)(x-5)}{(3{,}5+2)(3{,}5+1)(3{,}5-1{,}2)(3{,}5-5)} +$$

$$+7\frac{(x+2)(x+1)(x-1{,}2)(x-3{,}5)}{(5+2)(5+1)(5-1{,}2)(5-3{,}5)}$$

ჯამი მხოლოდ 4 შესაკრებს შეიცავს, ვინაიდან ლაგრანჟის კოეფიციენტი მრავლდება ნულოვან მნიშვნელობაზე $y_1 = 0$. პოლინომს თუ დავიყვანთ სტანდარტულ სახემდე მას ექნება შემდეგი სახე:

$$L_4(x) = 0{,}0819538x^4 - 0{,}181866x^3 - 1{,}43424x^2 + 2{,}19964x + 3{,}37007.$$

აგებული პოლინომის გრაფიკს აქვს სახე, რომელიც მოყვანილია ნახ.10 - ზე.



ნახ.11. ცხრილი 24 -ის 6 წერტილზე გამავალი ლაგრანჟის ინტერპოლაციური პოლინომი

როგორც დასაწყისში იყო მითითებული, ლაგრანჟის პოლინომის აგება ხდება კვანძების ნებისმიერი რაოდენობისათვის. მაგრამ მოცემული x არგუმენტისათვის (4.19) ფორმულით ლაგრანჟის პოლინომი მოითხოვს დიდი რაოდენობით გათვლების ჩატარებას, კერძოდ $2n(n+1)+n$ რაოდენობის შეკრება და გამოკლებას, და აგრეთვე $2n(n+1)$ გამრავლება და გაყოფას.

პოლინომები, რომლებიც მუდმივი ბიჯის მქონე ცხრილების ინტერპოლაციას აწარმოებენ შეიძლება გამოთვლილ იქნან უფრო სწრაფად ლაგრანჟის უნივერსალური პოლინომის გამოყენებით.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც ცნობილია საინტერპოლირებელი $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები თანაბრად დაშორებულ კვანძებში. ამ დროს ინტერპოლაციის კვანძები x_i გამოსახებიან ფორმულებით:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,2,\cdots,n \qquad (4.20)$$

მუდმივ h პარამეტრს ეწოდება ინერპოლაციური ნაბიჯი.

ასეთ ამოცანაში საწყისი მონაცემების რაოდენობაა $(n+3)$: ინტერპოლაციის საწყისი კვანძი x_0, ინტერპოლაციის ბიჯი h და ინტერპოლაციის კვანძებში უცნობი ფუნქციის $(n+1)$ რაოდენობის მნიშვნელობები: $y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$.

ავაგოთ n ხარისხის $P_n(x)$ პოლინომი, რომელსაც გააჩნია (4.13) (2.2) თვისება

$$P_n(x_i)=y_i \;\; (i=0,1,2,\cdots,n) \quad (4.21)$$

სადაც x_i მნიშვნელობები მოცემულია (4.20) ფორმულით.

თანაბრად დაშორებული კვნძებისათვის ინტერპოლაციური პოლინომი პირველად აგებულ იქნა ნიუტონის მიერ.

ნიუტონის პირველი პოლინომი აიგება შემდეგი ფორმით:

$$P_n(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n}\left(a_j\cdot\prod_{j=1}^{i-1}\left(x-x_j\right)\right) \;\; (4.22)$$

ან გაშლილი სახით:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots$$
$$+a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

პოლინომის კოეფიციენტები უნდა გამოისახოს ცნობილი სიდიდეებით $x_0,h,n,y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ (4.21) მოთხოვნის გამოყენებით ანუ პოლინომის გრაფიკმა უნდა გაიაროს მოცემული სისტემის ყველა წერტილში. აქვე შევნიშნოთ, რომ (4.22) (2.11) –ში ჩასმა $x=x_0$ იძლევა საძებნი პოლინომის თავისუფალ წევრს

$$a_0=y_0 \;\; (4.23)$$

პოლინომის დანარჩენი კოეფიციენტები შეიძლება გამოსახოს საბოლოო სხვაობებით, რომელიც აღწერილია ზემოთ (იგულისხმება Δ,Δ^2, ...)

მტკიცდება, რომ (4.21) და (2.10) პირობა ექვივალენტურია

$$\Delta^k P_n(x_0)=\Delta^k y_0 \quad (k=0,1,2,\cdots,n) \;\; (4.24)$$

ავაგოთ საბოლოო სხვაობები $\Delta^i P_n(x)$ სადაც $(i=0,1,2,\cdots,n)$, ინტერპოლაციის ნებისმიერი წერტილისათვის მოცემული h ბიჯით.

პირველი კოეფიციენტის a_1 მოსაძებნად შევადგინოთ პოლინომის პირველი საბოლოო სხვაობა (4.22):

$$\Delta^1 P_n(x)=P_n(x+hx)-P_n(x) \;\; (4.25).$$

ვისარგებლოთ იმ გარემოებით, რომ საბოლოო სხვაობები წრფივია და გამოვთვალოთ ისინი ცალკეული (4.22) შესაკრებებისათვის ისე, რომ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ მამრავლები $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$:

$$i = 0 \qquad a_0 - a = 0$$

$$i = 1 \quad a_1[(x + h - x_0) - (x - x_0)] = ah$$

$$i = 2 \qquad a_2[(x + h - x_0)(x + h - x_1) - (x - x_0)(x - x_1)] =$$

$$= a_2[(x + h - x_0)(x - x_0) - (x - x_0)(x - x_{0-h})] = a_2 2h(x - x_0)$$

ოლო გარდაქმნებში გამოყენებული იყო, რომ $x_1 = x_0 + h$.

შემდგომი გამოთვლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ დანარჩენი $a_i(i > 2)$ კოეფიციენტების თანამამრავლები აუცილებლად შეიცავენ $(x - x_0)$ სხვაობას. საბოლოოდ საწყისი პოლინომის პირველი სხვაობისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\Delta^1 P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)h + 3a_3(x - x_0)(x - x_1)h +$$

$$+na_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-2})h \quad (4.26)$$

ხლა თუ (4.26) –ში დავუშვებთ, რომ $x = x_0$, მივიღებთ:

$$\Delta^1 P_n(x_0) = a_1 h.$$

მეორეს მხრივ, (4.24) – დან და (4.21) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta^1 P_n(x_0) = y_1 - y_0.$$

ამ ორი გამოსახულების შედარებიდან $\Delta^1 P_n(x_0)$ - თვის ვიღებთ, რომ საძებნი პოლინომის პირველი კოეფიციენტი ცნობილი სიდიდეების მეშვეობით ასე გამოისახება:

$$a_1 = (y_1 - y_0)/h \qquad (4.27)$$

მეორე კოეფიციენტის a_2 საანგარიშოდ განიხილება (4.22) პოლინომის მეორე საბოლოო სხვაობა:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta^1 P_n(x + h) - \Delta^1 P_n(x).$$

ცხადია ის არ შეიცავს შესაკრებს a_1 კოეფიციენტით, ვინაიდან ეს კოეფიციენტი წარმოადგენს მამრავლს მუდმივასი, რომელიც შედის ჯამში $\Delta^1 P_n(x)$ (4.26) თანახმად. თუ შევასრულებთ გარდაქმნებს, რომლებიც ანალოგიურია გარდაქმნებისა, რომლებიც ჩატარდა საწყისი პოლინომის პირველი საბოლოო სხვაობის საანგარიშოდ მეორე პოლინომის $\Delta^2 P_n(x)$

თავისუფალი წევრი იქნება $2a_2h^2$, ხოლო დანარჩენი წევრები სეიცავენ თანამამრავლებს $(x - x_0)$. ცხადია $x = x_0$ წერტილში მივიღებთ::

$$\Delta^2 P_n(x_0) = 2a_2h^2.$$

მეორეს მხრივ თეორიიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = P_n(x_2) - 2P_n(x_1) + P_n(x_0),$$

(4.21) პირობის ძალით:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = y_2 - 2y_1 - y_0.$$

შედარება საძებნი პოლინომის მეორე კოეფიციენტისათვის იძლევა შემდეგ გამოსახულებას:

$$a_2 = (y_2 - 2y_1 - y_0)/(2h^2) \text{ (4.28).}$$

ანალოგიურად, საძებნი (4.22) პოლინომის სხვა კოეფიციენტების მისაღებად საჭიროა გავიმეოროთ აღწერილი პროცედურა უმაღლესი საბოლოო სხვაობებისათვის. შედეგად ჩვენ მივიღებთ ნიუტონის ინტერპოლაციური პოლინომის კოეფიციენტების ზოგადი სახის შემდეგ გამოსახულებას:

$$a_i = \frac{\Delta^i(y_0)}{i!h^i} \quad \text{(4.29)}$$

შესაბამისად ნულოვან კვანძში x_0, $1, 2, \cdots, n$ რიგის საბოლოო სხვაობების მეშვეობით გამოთვლილი ნიუტონის მაინტერპოლირებელი პოლინომი გამოსახება შემდეგი ფორმულით:

$$P_x(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\Delta^i(y_0)}{i!h^i} \prod_{k=0}^{i-1} (x - x_k) \right] \quad \text{(4.30).}$$

მტკიცდება, რომ აგებული პოლინომი აკმაყოფილებს პირობას (4.21).

პრაქტიკული მიზნებისათვის ნიუტონის პოლინომის (4.20) (2.19) ანგარიში უმჯობესია ჩავატაროთ ახალ ცვლადის შემოტანით:

$$q = (x - x_0)/h \qquad \text{(4.21)}$$

მაშინ ნიუტონის მაიტერპოლირებელ პოლინომს ექნება შემდეგი სახე:

$$P_n(x) = y_0 + q \cdot \Delta^1 y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$+ \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!} \cdot \Delta^n y_0 \text{ (4.22).}$$

(4.22) ფორმულის ანალიზი აჩვენებს, რომ აგებული ნიუტონის ინტერპოლანტის ცდომილება მინიმალურ მნიშვნელობებს იღებს მაშინ როდესაც არგუმენტის მნიშვნელობები ახლოსაა x_0 კვანძთან. ზემოთ ლაგრანჟის პოლინომისათვის მოყვანილი მაგალითი აჩვენებს, რომ ყოველთვის მიზანშეწონილი არაა პოლინომის აგება ყოველი კვანძისათვის, ვინაიდან ამ შემთხვევაში შეიძლება გაჩნდნენ დაუსაბუთებელი გადახრები. პრაქტიკული გაანგარიშებებისას ხშირად წინასწარ ირჩევენ მაინტერპოლირებელი მრავალწევრის ხარისხს. შემდეგ ნულოვან x_0 კვანძად ირჩევენ იმ კვანძს, რომელიც მარცხნიდან უახლოესია x არგუმენტთან, რომლისთვისაც გამოთვლილ უნდა იქნას უცნობი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა. n -ური ხარისხის ინტერპოლანტი (4.22) აიგება x არგუმენტის მარჯვნივ განლაგებულ x_0 და n კვანძებში ფუნქციის y_i მნიშვნელობების დახმარებით. ფუნქციის მნიშვნელობები x_0 კვანძის მარცხნივ არ გამოიყენება.

ცხრილი 25

x_i	3.0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
y_i	0,550	0,450	0,365	0,293	0,234	0,185	0,146

ვთქვათ გვინდა გამოვთვალოთ $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა წერტილში არგუმენტის მნიშვნელობისათვის $x = 3{,}22$. კვანძები 25 ცხრილში თანაბრად დაშორებულია ბიჯით $h = 1$, ამიტომ მიზანშეწონილია ნიუტონის ინტერპოლანტის გამოყენება.

შემოვიფარგლოთ მესამე ხარისხის პოლინომით. ნულოვან კვანძად, როგორც ზემოთ იყო რეკომენდებული ავიღოთ $x = 3{,}22$ მარცხნიდან უახლოესი კვანძი, ესაა $x_0 = 3{,}2$. პოლინომი ავაგოთ ოთხი კვანძით $x_i \geq 3{,}2$. შევადგინოთ საბოლოო სხვაობების ცხრილი $\Delta^k y_i (k = 1{,}2{,}3)$, რომელიც აუცილებელია (4.22) პოლინომის ასაგებად $n = 3$ – თვის. ავაგოთ ცხრილი, ამასთან გავითვალისწინოთ, რომ პირველზე უფრო მაღალი რიგის სხვაობები აიგება, როგორც ცხრილის მეზობელ მარცხენა სვეტებში მდგომი წინა რიგის სხვაობის სხვაობები.

ცხრილი 26

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	3,2	0,365	-0,072	0,013	-0,003
1	3,3	0,293	-0,059	0,01	
2	3,4	0,234	-0,049		
3	3,5	0,185			

$x = 3{,}22$ და $x_0 = 3{,}2$ მნიშვნელობებისათვის და გამოვთვალოთ პარამეტრი $q = (3{,}22 - 3{,}2)/0{,}1 = 0{,}2$ და ყველა საჭირო რიცხვი ჩავსვათ (4.22) ფორმულაში:

$$f(3{,}22) = P_3(x = 3{,}22) = 0{,}365 + 0{,}2(-0{,}072) + \frac{0{,}2(0{,}2-1)}{2}0{,}013 +$$

$$+\frac{0{,}2(0{,}2-1)(0{,}2-2)}{3!} = 0{,}349.$$

ფუნქციის საწყისი მნიშვნელობები ინტერპოლაციის კვანძებში მოცემული იყო სამი ნიშნადი ციფრებით (იხ. ცხრილი 26), ამიტომ დამრგვალების წესების თანახმად დამრგვალებას ვახდენთ სამ ნიშნად ციფრამდე.

მოვიყვანოთ ფორმულები ორი მნიშვნელოვანი ინტერპოლაციისათვის.

1)წრფივი ინტერპოლაცია. ინტერპოლაციური პოლინომის (4.22) აგება ხდება ორი კვანძით და წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას:

$P_1(x) = y_0 + q \cdot \Delta^1 y_0$ ან $P_1(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}(y_1 - y_0)$ (4.23)

ამ უკანასკნელ ფორმულას ადვილად მივიღებთ ნახ. 9 – ის მეშვეობით, შევაერთებთ რა ორ წერტილს (x_0, y_0) და (x_1, y_1) წრფის მონაკვეთით. მეზობელი კვანძების წერტილების (x_i, y_i) და (x_{i+1}, y_{i+1}) წრფის მონაკვეთით შეერთებითა შეიძლება მივიღოთ და ნაწილ-ნაწილ წრფივი ინერპოლაციური გრაფიკი. პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ფიზიკის მრავალი ამოცანისათვის ინტერპოლაციის ასეთი სახე მისაღები არაა, ვინაიდან შეიცავს დიდ ცდომილებებს.

2)კვადრატული ინტერპოლაცია. (4.22) პოლინომისათვის ამ შემთხვევაში შეირჩევა სამი კვანძი. პოლინომი წარმოადგენს შემდეგი სახის კვადრატულ ფუნქციას:

$$P_2(x) = y_0 + q \cdot \Delta^1 y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 \text{ ან}$$

$$P_2(x) = y_0 + q \cdot (y_1 - y_0) + \frac{q(q-1)}{2} \cdot (y_2 - 2y_1 + y_0) \quad (4.24).$$

გამოთვლით მათემატიკაში ასევე გამოიყენებიან ინტერპოლაციური პოლინომები, რომლებიც აგებულია თანაბრად დაშორებული კვანძების საფუძველზე, რომელთა კოეფიციენტების გათვლაც ხდება ფუნქციის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც განთავსებულია არჩეული x წერტილების, როგორც მარცხნივ ისე მარჯვნივ.

ასეთი ინტერპოლანტების ასაგებად მოსახერხებელია კვანძები მოცემული იყოს შემდეგი სახით

$$x_i = x_0 + ih, \text{ სადაც } i = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots \mp n \quad (4.28).$$

ამრიგად კვანძის ნომრები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი ისე უარყოფითი რიცხვებიც. ჩენტრალურ კვანძს გააჩნია ნულოვანი ინდექსი.

შემდგომში q სიდიდედ გამოვიყენებთ (4.21) ფორმულით განსაზღვრულ სიდიდეს. ქვემოთ მოყვანილია სტირლინგის ინტერპოლაციური ფორმულა., შემდეგი სახით:

$$P_S(x) = y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \cdot \Delta^2_{y-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3_{y-2} + \Delta^3_{y-1}}{2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)}{4!} \cdot \Delta^4_{y-2} + \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5_{y-3} + \Delta^5_{y-2}}{2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{6!} \cdot \Delta^6_{y-3} + \cdots + \frac{q(q^2-1)(q^2-4)(q^2-9)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n)} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)(q^2-9)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n} \qquad (4.29).$$

ამ უკანასკნელ ფორმულაში $\Delta^k y_i$ სიმბოლოებით აღნიშნულია საბოლოო სხვაობები, რომლებიც გამოითვლება ფორმულებით:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i. \ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \text{ და ა.შ.}$$

სპეციალურმა კვლევებმა აჩვენეს, რომ სტირლინგის ინტერპოლაციურ ფორმულას (4.29) უმცირესი მნიშვნელობა გააჩნია მაშინ როდესაც $|q| \leq 1/4$.

სტირლინგის კვადრატულ ინტერპოლაციურ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე

$$P_S(x) = y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \cdot \Delta^2_{y-1} = y_0 + \frac{y}{2} \cdot (y_0 - y_{-1}) +$$

$$+ \frac{q^2}{2}(y_i + y_{-1} - 2y_0) \quad (2.31).$$

დანართი 1
ძირითადი ფორმულები

1. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

2. შეწონილი საშუალო

$$x_i = \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}$$

3. ბსოლუტური ცდომილება

$$\Delta x_i = x - x_i$$

ან

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

აქ $\bar{x}$-გასაზომი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობაა, ხოლო x-ნამდვილი მნიშვნელობა. ვინაიდან როგორც წესი ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია სარგებლობენ ფორმულით

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

4. ფარდობითი ცდომილება

$$\Delta x_{ფარდ} = \frac{\Delta x_i}{x}, \text{ ან } \Delta x_{ფარდ} = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}}$$

5. გაზომვათა n რაოდენობიასას ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

6.შერჩევითი დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}$$

7.გენერალური დისპერსია

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} S_n^2$$

8.გაზომვის წონა

$$p = \frac{k}{\sigma^2}$$

9.არათანაბარწერტილოვანი გაზომვის დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n p(\bar{x} - x_i)^2}{n \sum_1^n p_i}$$

10.ვარიაციის კოეფიციენტი

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ (გენერალური)}$$

$$w_n = \frac{S_n}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ (შერჩევთი)}$$

11.საშუალო არითმეტიკული ცდომილება შერჩევითი)

$$r_n = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \cdots + |\bar{x} - x_i|}{n} = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{n}$$

12.გენერალური საშუალო არითმეტიკული ცდომილება

$$\rho = \lim_{n\to\infty} r_n$$

13.კავშირი საშუალოარითმეტიკულ და საშუალოკვადრატულ ცდომილებას შორის

$$\rho = 0.80\sigma; \quad \alpha = 1.25\rho$$

14.ნდობის ინტერვალი ინტერვალებისთვის

Δx	σ	2σ	3σ
α	0.68	0.95	0.097

15.დისპერსიის შეკრების კანონი:

$$\text{თუ } Z = X + Y, \text{ მაშინ } S_z^2 = S_x^2 + S_y^2$$

16.საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება

$$S_{n\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

17.სტიუდენტის კოეფიციენტი

$$t_{\alpha_n} = \frac{\sqrt{n}\Delta x}{S_n}$$

18.შემთხვევითი დამოუკიდებელი ცდომილებების შეკრების კანონი

$$\text{თუ } Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_3$$

მაშინ $\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2=\left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\Delta X_n}{X_n}\right)^2$;   თუ $Y=\frac{X_1}{X_2}$, მაშინ

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2=\left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2;$$

თუ $Y=AX+B$, სადაც A და B მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ $\Delta Y=A\Delta X$

19.ჩებიშევის უტოლობა

$$P(|\bar{x}-x_i|<\alpha\sigma)<\frac{1}{\alpha^2}$$

20.ფუნქციის შემთხვევითი ცდომილება

$$\text{თუ } Y=f(X), \text{ მაშინ } \Delta Y=f^I(X)\Delta X$$

და

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\frac{f^I(X)}{f(X)}\Delta X;$$

თუ $Y=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, მაშინ $\Delta Y=\sqrt{\sum_1^n\left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}$

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\sqrt{\sum_1^n\left(\frac{\partial lnf}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}$$

21.უმცირესი კვადრატების მეთოდი

$$y=kx+b,$$

$$k=\frac{n\sum_i^n x_iy_i-\sum_i^n x_i-\sum_i^n y_i}{n\sum_i^n x_i^2-(\sum_i^n x_i)^2}$$

$$b=\frac{n\sum_i^n x_i^2\sum_i^n y_i^2-\sum_i^n x_i-\sum_i^n x_i\sum_i^n x_iy_i}{n\sum_i^n x_i^2-(\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_0^2=\frac{\sum_i^n y_i^2}{(n-2)}-\frac{(\sum_i^n y_i)^2}{n(n-2)}-\frac{(n\sum_1^n x_iy_i)^2}{\left|n\sum_i^n x_i^2-(\sum_i^n x_i)^2\right|(n-2)n}$$

$$S_k^2=\frac{S_0^2 n}{n\sum_i^n x_i^2-(\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_b^2=\frac{S_0^2\sum_i^n x_i^2}{n\sum_i^n x_i^2-\left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

დამხმარე ფორმულები

1.საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - x_0),$$

სადაც x_0 - $\bar{x}$ - თან ახლოს მყოფი ნებისმიერი რიცხვია

2.საშუალო კვადრატული ცდომილება

ა)ერთეული გაზომვის

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - \frac{|\sum_1^n (x_0 - x_i)|^2}{n}}{n-1}}$$

ბ)საშუალო არითმეტიკულის

$$S_{n\bar{x}} = \sqrt{\frac{n\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - |\sum_1^n (x_0 - x_i)|^2}{n-1}}$$

დანართი 2. ცხრილები

ცხრილი I. $\Phi(t)$ ალბათობის ინტეგრალთან დაკავშირებული სიდიდეები;
t=t($\mathcal{P}$) ფუნქცია წარმოადგენს $\mathcal{P} = 2\Phi(t)$ ფუნქციის შექცეულს

t	$\Phi(t)$	$1-2\Phi(t)$	1-$\mathcal{P}$	t=t($\mathcal{P}$)	$\mathcal{P}$
2,5	0,49379	0,01242	0,05	1,960	0,95
2,6	49534	00932	04	2,054	96
2,7	49653	00693	03	2,170	97
2,8	49744	00511	02	2,326	98
2,9	49813	00373	01	2,576	99
3,0	0,49865	0,00270	0,009	2,612	0,991
3,1	49903	00194	008	2,652	992
3,2	49931	00137	007	2,697	993
3,3	49952	00097	006	2,748	994
3,4	49966	00067	005	2,807	995
3,5	0,499767	0,000465	0,004	2,878	0,996
3,6	499841	000318	003	2,968	997
3,7	499892	000216	002	3,090	998
3,8	499927	000145	001	3,291	999
3,9	499952	000095	0009	3,290	9991
4,0	0,499968	0,000063	0,0008	3,353	0,9992
4,1	499979	000041	0007	3,390	9993
4,2	499987	000027	0006	3,432	9994
4,3	499991	000017	0005	3,481	9995
4,4	499995	000011	0004	3,540	9996
4,5	0,499966	0,0000068	0,0003	3,615	0,9997
4,6	499979	0000041	0002	3,720	9998
4,7	499987	0000045	0001	3,891	9999
4,8	0,499992	0,0000016	10^{-5}	4,417	1-10^{-5}
4,9	499995	0000009	10^{-6}	4,892	1-10^{-6}
5,0	499997	0000006	10^{-7}	5,327	1-10^{-7}

ცხრილი II. ჩებიშევის ორთოგონალური მრავალწევრის მნიშვნელობა 9 წერტილისათვის

$$N = 9 = H_0$$

$$p_1 = u = p_1^*,\ \ p_2 = u^2 - \frac{20}{3} = \frac{1}{3}p_2^*,$$

$$p_3 = u^3 - \frac{59}{5}u = \frac{6}{5}p_3^*,$$

$$p_4 = u^4 - \frac{115}{7}u^2 + \frac{216}{7} = \frac{12}{7}p_4^*,$$

$$p_5 = u^5 - \frac{185}{9}u^2 + \frac{716}{9}u = \frac{20}{3}p_5^*.$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	-20 -17 -8 7 28	0 -9 -13 -7 14	18 9 -11 -21 14	0 9 4 -11 4
7	60	924	1188	3432	3120
11	60	308	$\frac{7128}{5}$	$\frac{41184}{7}$	20800
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$6\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{15}$	$4\frac{22}{35}$	$4\frac{8}{63}$	$3\frac{53}{99}$

ცხრილი III.

ნდობის ალბათობები α ინტერვალისთვის გამოსახული საშუალო კვადრატული ცდომილების წილებში $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\alpha}$

ლაპლასის ფუნქცია: $2\Theta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon = \alpha$

ε	α	ε	α	ε	α
0	0	1.2	0.77	2.6	0.990
0.05	0.04	1.3	0.80	2.7	0.993
0.1	0.08	1.4	0.84	2.8	0.995
0.15	0.12	1.5	0.87	2.9	0.996
0.2	0.16	1.6	0.89	3.0	0.997
0.3	0.24	1.7	0.91	3.1	0.9981
0.4	0.31	1.8	0.93	3.2	0.9986
0.5	0.38	1.9	0.94	3.3	0.9990
0.6	0.45	2.0	0.95	3.4	0.9993
0.7	0.55	2.1	0.964	3.5	0.9995
0.8	0.57	2.2	0.972	3.6	0.9997
0.9	0.63	2.3	0.973	3.7	0.9998
1.0	0.68	2.4	0.984	3.8	0.99986
1.1	0.73	2.5	0.988	3.9	0.99990
					0.99993

ცხრილი IV

სტიუდენტის კოეფიციენტები t_{α_n}

n	α					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
2	0.16	0.33	0.51	0.73	1.00	1.38
3	.14	.45	.45	.62	.82	1.06
4	.14	.42	.42	.58	.77	0.98
5	.13	.41	.41	.57	.74	.94
6	.13	.27	.41	.56	.73	.92
7	.13	.27	.40	.55	.72	.90
8	.13	.26	.40	.55	.71	.90
9	.13	.26	.40	.54	.71	.90
10	.13	.26	.40	.54	.70	.88
11	.13	.26	.40	.54	.70	.88
12	.13	.26	.40	.54	.70	.87
13	.13	.26	.40	.54	.70	.87
14	.13	.26	.39	.54	.69	.87
15	.13	.26	.39	.54	.69	.87
16	.13	.26	.39	.54	.69	.88
17	.13	.26	.39	.54	.69	.86
18	.13	.26	.39	.53	.69	.86
19	.13	.26	.39	.53	.69	.86
20	.13	.26	.39	.53	.69	.86
21	.13	.26	.39	.53	.69	.86
22	.13	.26	.39	.53	.69	.86
23	.13	.26	.39	.53	.69	.86
24	.13	.26	.39	.53	.69	.86
25	.13	.26	.39	.53	.69	.86
26	.13	.26	.39	.53	.68	.86
27	.13	.26	.39	.53	.68	.86
28	.13	.26	.39	.53	.68	.86
29	.13	.26	.39	.53	.68	.86
30	.13	.26	.39	.53	.69	.85
40	.13	.26	.39	.53	.68	.85
60	.13	.25	.39	.53	.68	.85
120	.13	.25	.39	.53	.68	.85
∞	.13	.25	.39	.53	.67	.86

ცხრილი IV. სტიუდენტის კოეფიციენტები t_{α_n}
(გაგრძელება)

n	α						
	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	1.3	1.6	2.4	4.3	4.5	5.8	12.9
5	1.2	1.5	2.1	4.3	3.7	4.6	3.6
6	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.9
11	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.5
13	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.0	4.2
15	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.0
17	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
18	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
21	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
22	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
23	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3,8
24	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
25	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
26	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
27	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
28	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
29	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
30	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
40	1.1	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.6
60	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
120	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
∞	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

ცხრილი V

გაზომვათა აუცილებელი რაოდენობა, Δ ცდომილების მისაღებად p საიმედოობით						
$\Delta = \Delta x/\sigma$	p მნიშვნელობა					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	127
0.2	13	29	70	99	171	277
0.1	47	169	273	387	668	1089

ცხრილი VI
ნდობის ინტერვალი σ-თვის

α	0.99		0.98		0.95		0.90	
γ / n	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0.36	160	0.39	80	0.45	32	0.51	16
3	.43	14	.47	10	.52	6.3	.58	4.4
4	.48	6.5	.51	5.1	.57	3.7	.62	2.9
5	.52	4.4	.55	3.7	.60	2.9	.65	2.4
5	.55	3.5	.58	3.0	.62	2.5	.67	2.1
7	.57	3.0	.60	2.6	0.64	2.2	.68	1.9
8	.59	2.7	.62	2.4	.66	2.0	.70	1.8
9	.60	2.4	.63	2.2	.68	1.9	.72	1.7
10	.62	2.3	.64	2.1	.69	1.8	.73	1.6
11	.63	2.2	.66	2.0	.70	1.7	.74	1.6
12	.64	2.1	.67	1.9	.71	1.6	.75	1.5
13	.65	2.0	.68	1.8	.72	1.6	.76	1.5
14	.66	1.9	.69	1.8	.73	1.6	.76	1.5
15	.67	1.8	.69	1.7	.73	1.5	.77	1.5
16	.68	1.8	.70	1.7	.74	1.5	.77	1.4
17	.68	1,8	.71	1.7	.75	1.5	.79	1.4
18	.69	1.7	.72	1.6	.75	1.5	.79	1.4
19	.70	1.7	.73	1.6	.76	1.5	.79	1.4
20	.70	1.7	.75	1.5	.76	1.4	.81	1.4
25	.73	1.6	.77	1.4	.76	1.3	.83	1.3
30	.74	1.5	.79	1.3	.80	1.3	.85	1.3
40	.77	1.4	.7	1.3	.82	1.2	.86	1.2
50	.79	1.3	.81	1.2	.84	1.2	.88	1.2
70	.82	1.3	.84	1.2	.86	1.2	.89	1.2
100	.85	1.2	.86	1.2	.88	1.2	.90	1.1
200	.89	1.1	.90	1.1	.91	1.1	.93	1.1

ცხრილი VII
აუცილებელ გაზომვათა რაოდენობა ε ტოლი შემთხვევითი ცდომილების α საიმედოობით მისაღწევად

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{S}$	α					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	130
0.2	13	29	70	100	170	280
0.1	47	110	270	390	700	1100
0.05	180	430	1100	1500	2700	4300
0.01	4500	1100	27000	38000	66000	11000

ცხრილი VIII
უხეში ცდომილების შეფასება
$v_{\text{მაქს}} = \left|\frac{\bar{x}-x_k}{S}\right|$ n გაზომვათა რიგში β ალბათობისთვის

n	β			
	0.1	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80
16	2.35	2.52	2.67	2.84
17	2.38	2.55	2.70	2.87
18	2.40	2.58	2.73	2.90
19	2.43	2.60	2.75	2.93
21	2.45	2.62	2.78	2.96
21	2.47	2.64	2.80	2.98
22	2.49	2.66	2.82	3.01
23	2.50	2.68	2.84	3.03
24	2.52	2.70	2.86	3.05
25	2.54	2.72	2.88	3.07

ცხრილი IX

საწყისი მონაცემები		ანგარიში			კონტროლი		
x	m	u	mu	mu^2	u	mu	mu^2
35,6	1	-4	-4	16	-5	-5	26
35,9	3	-1	-3	3	-2	-6	12
36,1	3	1	3	3	0	0	0
36,2	2	2	4	8	1	2	2
36,6	1	6	6	36	5	5	25
ჯამი	10	–	6	66	–	–	64

ცხრილი X

ინტერვალები	x	m	u	mu	mu^2	u	mu	mu^2
8,275 – 8,325	8,30	1	−6	−6	35	−7	−7	49
8,325 – 8,375	8,35	2	−5	−5	50	−6	−12	72
8,375 – 8,425	8,40	4	−4	−4	64	−5	−20	100
8,425 – 8,475	8,45	5	−3	−3	45	−4	−20	80
8,475 – 8,525	8,50	8	−2	−2	32	−3	−24	72
8,525 – 8,775	8,55	10	−1	−1	10	−2	−20	40
8,575 – 8,625	8,60	18	0	0	0	−1	−18	18
8,625 – 8,675	8,65	17	1	1	17	0	0	0
8,675 – 8,725	8,70	12	2	2	48	1	12	12
8,725 – 8,775	8,75	9	3	3	81	2	18	36
8,525 – 8,775	8,80	7	4	4	112	3	21	63
8,775 – 8,825	8,85	6	5	5	150	4	24	96
8,825 – 8,875	8,90	0	6	6	0	5	0	0
8,875 – 8,925	8,95	1	7	7	49	6	6	36
8,925 – 8,975								
ჯამი	–	100	–	60	694	–	−40	674

ცხრილი XI. ფუნქცია $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$

(სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუქცია)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
−1,25	0,1056	−0,93	0,1762	−0,61	0,2709	−0,29	0,3859
−1,24	0,1075	−0,92	0,1788	−0,6	0,2743	−0,28	0,3897
−1,23	0,1093	−0,91	0,1814	−0,59	0,2776	−0,27	0,3936
−1,22	0,1112	−0,9	0,1841	−0,58	0,2810	−0,26	0,3974
−1,21	0,1131	−0,89	0,1867	−0,57	0,2843	−0,25	0,4013
−1,2	0,1151	−0,88	0,1894	−0,56	0,2877	−0,24	0,4052
−1,19	0,1170	−0,87	0,1922	−0,55	0,2912	−0,23	0,4090
−1,18	0,1190	−0,86	0,1949	−0,54	0,2946	−0,22	0,4129
−1,17	0,1210	−0,85	0,1977	−0,53	0,2981	−0,21	0,4168
−1,16	0,1230	−0,84	0,2005	−0,52	0,3015	−0,2	0,4207
−1,15	0,1251	−0,83	0,2033	−0,51	0,3050	−0,19	0,4247
−1,14	0,1271	−0,82	0,2061	−0,5	0,3085	−0,18	0,4286
−1,13	0,1292	−0,81	0,2090	−0,49	0,3121	−0,17	0,4325
−1,12	0,1314	−0,8	0,2119	−0,48	0,3156	−0,16	0,4364
−1,11	0,1335	−0,79	0,2148	−0,47	0,3192	−0,15	0,4404
−1,1	0,1357	−0,78	0,2177	−0,46	0,3228	−0,14	0,4443
−1,09	0,1379	−0,77	0,2206	−0,45	0,3264	−0,13	0,4483
−1,08	0,1401	−0,76	0,2236	−0,44	0,3300	−0,12	0,4522
−1,07	0,1423	−0,75	0,2266	−0,43	0,3336	−0,11	0,4562
−1,06	0,1446	−0,74	0,2296	−0,42	0,3372	−0,1	0,4602
−1,05	0,1469	−0,73	0,2327	−0,41	0,3409	−0,09	0,4641
−1,04	0,1492	−0,72	0,2358	−0,4	0,3446	−0,08	0,4681
−1,03	0,1515	−0,71	0,2389	−0,39	0,3483	−0,07	0,4721
−1,02	0,1539	−0,7	0,2420	−0,38	0,3520	−0,06	0,4761
−1,01	0,1562	−0,69	0,2451	−0,37	0,3557	−0,05	0,4801
−1	0,1587	−0,68	0,2483	−0,36	0,3594	−0,04	0,4840
−0,99	0,1611	−0,67	0,2514	−0,35	0,3632	−0,03	0,4880
−0,98	0,1635	−0,66	0,2546	−0,34	0,3669	−0,02	0,4920
−0,97	0,1660	−0,65	0,2578	−0,33	0,3707	−0,01	0,4960
−0,96	0,1685	−0,64	0,2611	−0,32	0,3745	0	0,5000
−0,95	0,1711	−0,63	0,2643	−0,31	0,3783		
−0,94	0,1736	−0,62	0,2676	−0,3	0,3821		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
−1,25	0,1056	−0,93	0,1762	−0,61	0,2709	−0,29	0,3859
−1,24	0,1075	−0,92	0,1788	−0,6	0,2743	−0,28	0,3897
−1,23	0,1093	−0,91	0,1814	−0,59	0,2776	−0,27	0,3936
−1,22	0,1112	−0,9	0,1841	−0,58	0,2810	−0,26	0,3974
−1,21	0,1131	−0,89	0,1867	−0,57	0,2843	−0,25	0,4013
−1,2	0,1151	−0,88	0,1894	−0,56	0,2877	−0,24	0,4052
−1,19	0,1170	−0,87	0,1922	−0,55	0,2912	−0,23	0,4090
−1,18	0,1190	−0,86	0,1949	−0,54	0,2946	−0,22	0,4129
−1,17	0,1210	−0,85	0,1977	−0,53	0,2981	−0,21	0,4168
−1,16	0,1230	−0,84	0,2005	−0,52	0,3015	−0,2	0,4207
−1,15	0,1251	−0,83	0,2033	−0,51	0,3050	−0,19	0,4247
−1,14	0,1271	−0,82	0,2061	−0,5	0,3085	−0,18	0,4286
−1,13	0,1292	−0,81	0,2090	−0,49	0,3121	−0,17	0,4325
−1,12	0,1314	−0,8	0,2119	−0,48	0,3156	−0,16	0,4364
−1,11	0,1335	−0,79	0,2148	−0,47	0,3192	−0,15	0,4404
−1,1	0,1357	−0,78	0,2177	−0,46	0,3228	−0,14	0,4443
−1,09	0,1379	−0,77	0,2206	−0,45	0,3264	−0,13	0,4483
−1,08	0,1401	−0,76	0,2236	−0,44	0,3300	−0,12	0,4522
−1,07	0,1423	−0,75	0,2266	−0,43	0,3336	−0,11	0,4562
−1,06	0,1446	−0,74	0,2296	−0,42	0,3372	−0,1	0,4602
−1,05	0,1469	−0,73	0,2327	−0,41	0,3409	−0,09	0,4641
−1,04	0,1492	−0,72	0,2358	−0,4	0,3446	−0,08	0,4681
−1,03	0,1515	−0,71	0,2389	−0,39	0,3483	−0,07	0,4721
−1,02	0,1539	−0,7	0,2420	−0,38	0,3520	−0,06	0,4761
−1,01	0,1562	−0,69	0,2451	−0,37	0,3557	−0,05	0,4801
−1	0,1587	−0,68	0,2483	−0,36	0,3594	−0,04	0,4840
−0,99	0,1611	−0,67	0,2514	−0,35	0,3632	−0,03	0,4880
−0,98	0,1635	−0,66	0,2546	−0,34	0,3669	−0,02	0,4920
−0,97	0,1660	−0,65	0,2578	−0,33	0,3707	−0,01	0,4960
−0,96	0,1685	−0,64	0,2611	−0,32	0,3745	0	0,5000
−0,95	0,1711	−0,63	0,2643	−0,31	0,3783		
−0,94	0,1736	−0,62	0,2676	−0,3	0,3821		

შენიშვნა: როდესაც $x > 0$ მაშინ $\Phi(x)$ იანგარიშება ფორმულით $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

დანართი 3

მაგალითები

განვიხილოთ ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების სხვადასხვა კონკრეტული მაგალითი

I.პირდაპირი გაზომვები.

ამ შემთხვევაში რეკომენდებულია ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

1). გაზომვის თითოეული მონაცემი შეიტანეთ ცხრილში

2) გამოთვალეთ n გაზომვის საშუალო მნიშვნელობა

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

3) გამოინგარიშეთ ცალკეული გაზომვის ცდომილება

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

4) გამოინგარიშეთ ცალკეული გაზომვის ცდომილების კვადრატი

$$(\Delta x_1)^2, (\Delta x_1)^2, \cdots, (\Delta x_n)^2$$

5) გამოინაგარიშეთ საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta x)^2}{n(n-1)}}$$

6) აიღეთ საიმედოობის მნიშვნელობა (ჩვეულებრივ იღებენ p = 0.95)

7) საიმედოობის მოცემული p და გაზომვის n რაოდენობისაგან გამომდინარე, განსაზღვრეთ სტიუდენტის კოეფიციენტის მნიშვნელობა t

8) გამოიანგარიშეთ ნდობის ინტერვალი (გაზომვის ცდომილება)

$$\Delta x = S_r \cdot t$$

9) თუ გაზომვის შედეგის ცდომილება Δx ტოლი ან დაახლოებით ერთი სიდიდის აღმოჩნდა ხელსაწყოს ცდომილებისა δ, მაშინ ნდობის ინტერვალის საზღვრად აიღეთ

$$\Delta x = \sqrt{(S_r \cdot t)^2 + \delta^2}$$

თუ ერთი ცდომილება ნაკლებია მეორეზე სამჯერ ან მეტჯერ, უფრო ნალები მოიშორეთ

10) საბოლოოშედეგი ჩაწერეთ შემდეგი სახით

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

11). შეაფასეთ გაზომვის შედეგის ფარდობითი ცდომილება

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$$

ვნახოთ თუ როგორ გამოიყენება ზემოთ მოყვანილი ფორმულები კონკრეტული რიცხვებისთვის

ვთქვათ გავზომეთ ღეროს დიამეტრი d (სისტემატური ცდომილება იყოს 0.005 მმ). გაზომვის შედეგები შევიტანოთ ცხრილის მეორე გრაფაში. მოვძებნოთ $\bar{x}$ და ცხრილის მესამე გრაფაში შევიტანოთ სხვაობები $d - \bar{x}$, ხოლო მეოთხეში – ამ სხვაობის კვადრატები

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n} = \frac{\sum_1^6 d_i}{6} = \frac{24.06}{6} = 4.01 \text{ მმ}$$

$$S_r = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta x)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_1^6 ((d-\bar{x})^2)^2}{6 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{0.0046}{30}} = 0.01238 \text{ მმ}$$

ავიღებთ, რა საიმედოობას P = 0.95, სტიუდენტის კოეფიციენტების ცხრილიდან ექვსი გაზომვისათვის ვპოულობთ t = 2.57. აბსოლუტურ

n	d, მმ	d − x	$(\mathrm{d} - \bar{\mathrm{x}})^2$
1	4.02	+ 0.01	0.0001
2	3.98	- 0.03	0.0009
3	3.97	- 0.04	0.0016
4	4.01	+ 0.00	0.0000
5	4.05	+ 0.04	0.0016
6	4.03	+ 0.02	0.0004
$\sum$	24.06	-	0.0046

ცდომილებას ვპოულობთ ფორმულით

$$\Delta d = S_r \cdot t = 0.01238 \cdot 2.57 = 0.04 \text{ მმ.}$$

შევადაროთ შემთხვევითი და სისტემატური ცდომილებები

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{0.04}{0.005} = 8$$

ვინაიდან $\delta < \Delta$ ამიტომ $\delta = 0.005$ უკუვაგდოთ.

საბოლოო შედეგი ასე ჩავწეროთ $d = (4.01 \pm 0.04)$ როცა $p = 0.95$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% = \frac{0.04}{4.01} \cdot 100\% \approx 1\%$$

II.არაპირდაპირი გაზომვები

როგორც ზემოთ იყო მითითებული არაპირდაპირი გაზომვების დროს ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე წარმოადგენს უშუალოდ გაზომვადი ერთი ან რამდენიმე სიდიდის ფუნქციას

$$N = f(x, y, z, \ldots) \quad (1)$$

როგორც ალბათობის თეორიიდან გამომდინარეობს სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა მიიღება ამ უკანასკნელში გაზომილი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობის ჩასმით

$$\bar{N} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) \quad (2)$$

საჭიროა მოვძებნოთ ამ ფუნქციის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები, თუ ცნობილია დამოუკიდებელი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობები.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, როცა შეცდომა სისტემატურია ან შეცდომა შემთხვევითია. სისტემატური ცდომილების შემთხვევაში არაპირდაპირი გაზომვების შესახებ ერთიანი აზრი დღემდე არ არსებობს. მაგრამ თუ გამოვალთ არაპირდაპირი გაზომვების სისტემატური ცდომილების განმარტებიდან მიზანშეწონილია სისტემატური ცდომილებები ვიანგარიშოთ ფორმულებით

$$\delta N = \pm\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right| + \cdots\right] \text{ (3) ან}$$

$$\delta N = \pm\bar{N}\left[\left|\frac{\partial lnf}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial lnf}{\partial y}\delta y\right| + \left|\frac{\partial lnf}{\partial z}\delta z\right| + \cdots\right] \text{ (4)}$$

სადაც

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$$

არის

$$N = f(x, y, z, \dots)$$

ფუნქციის კერძო წარმოებულები $x, y, z, \dots$-ით გამოთვლილი იმ პირობით, რომ ყველა არგუმენტი გარდა იმ არგუმენტებისა, რომლებითაც ჩატარებულია გაზომვა მუდმივი სიდიდეებია. $\delta x, \delta y, \delta z$ არგუმენტების სისტემატური ცდომილებებია. (3) ფორმულით სარგებლობა მოსახერხებელია მაშინ, როდესაც ფუნქციას $N = f(x, y, z, \dots)$ აქვს არგუმენტების ჯამის ან სხვაობის სახე, ხოლო (4) ფორმულით მაშინ როდესაც ფუნქციას აქვს არგუმენტების ნამრავლს ან ფარდობის სახე.

არაპირდაპირი გაზომვების შემთხვევითი ცდომილების საანგარიშოდ უნდა ვისარგებლოთ ფორმულებით

$$\Delta N = \pm\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \cdots\right] \text{ (5) ან}$$

$$\Delta N = \pm\bar{N}\left[\left(\frac{\partial lnf}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial lnf}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial lnf}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \cdots\right] \text{ (6)}$$

სადაც $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z, \dots$ არის არგუმენტების ნდობის ინტერვალები $x, y, z, \dots$ არგუმენტების მოცემული ნდობის ალბათობებისთვის. მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ Δx, Δy, Δz, ... ინტერვალები აღებული უნდა იყოს ერთნაირი ნდობის ალბათობებისთვის $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$. ამ შემთხვევაში ΔN ნდობის ინტერვალისთვის საიმედოობა ასევე ტოლი იქნება P.

ხშირად შეიმჩნევა შემთხვევა, როდესაც სისტემატური ცდომილება და შემთხვევითი ცდომილება დაახლოებით ერთნაირია და ორივენი ერთნაირად განაპირობებენ გაზომვის სიზუსტეს. ამ შემთხვევაში სრული ცდომილება

$\sum$ განისაზღვრება როგორც კვადრატული ჯამი, შემთხვევითი Δ და სისტემატური δ ცდომილებებისა, არა ნაკლებ P ალბათობით. სადაც P შემთხვევითი ცდომილების ნდობის ალბათობაა:

$$\sum \; = \sqrt{\Delta^2 + \delta^2}$$

არაპირდაპირი გაზომვებისას, აღწარმოებად პირობებში ფუქციას პოულობენ ცალკეული გაზომვებისთვის, ხოლო ნდობის ინტერვალს მოსაძებნი სიდიდის მისაღებად გამოთვლიან იმ მეთოდიკით, რომელიც გამოიყენება პირდაპირი გაზომვებისთვის.

უნდა აღინიშნოს, რომ როდესაც ფუნქციონალური დამოკიდებულება მოცემულია გალოგარითმებისთვის ხელსაყრელი ფორმულით, უფრო მარტივია განვსაზღვროთ ფარდობითი ცდომილება, ხოლო შემდეგ თანაფარდობიდან $\Delta N = \varepsilon \overline{N}$ მოვძებნოთ აბსოლუტური ცდომილება.

გათვლების დაწყებამდე ყოველთვის უნდა ვიფიქროთ ჩასატარებელ გათვლებზე და დავწეროთ ფორმულები, რომლებითაც ვისარგებლებთ ცდომილებების გამოსათვლელად. ეს ფორმულები საშუალებას მოგვცემენ დავადგინოთ თუ რა გაზომვები უნდა ჩავატაროთ განსაკუთრებული ყურადღებით და რომლებზე არ ღირს დიდი დროის დახარჯვა.

არაპირდაპირი გაზომვების შედეგების დამუშავებისას რეკომენდებულია ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

1)პირდაპირი გაზომვის ყველა სიდიდე დაამუშავეთ პირდაპირი გაზომვების შედეგების დამუშავების მეთოდებით. ამასთან გასაზომი სიდიდისთვის აიღეთ ნდობიდ ერთნაირიმნიშვნელობა P

2)არაპირდაპირი გაზომვის ცდომილება შეაფასეთ (3) და (4) ფორმულებით, სადაც წარმოებულები გამოთვალეთ სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობისთვის. თუ ცალკეული გაზომვის ცდომილება დიფერენცირების შედეგში შედის რამდენჯერმე, უნდა დავაჯგუფოთ ის წევრები ერთად, რომლებიც შეიცავენ ერთნაირ დიფერენციალს, და ავიღოთ დიფერენციალის წინ ფრჩხილებში მდგომი წევრების მოდული; ხოლო ნიშანი d ნაცვლად ავიღოთ Δ ან δ

3)თუ სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილებების მნიშვნელობები ახლოსააა ერთმანეთთან ისინი უნდა შევკრიბოთ ცდომილების შეკრების კანონით. თუ

ერთი ცდომილება ნაკლებია მეორეზე 3-ჯერ ან მეტჯერ უფრო ნაკლები უნდა უკუვაგდოთ.

4) გაზომვის შედეგები ჩაწერეთ შემდეგი სახით

$$N = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \pm \Delta f$$

5) განსაზღვრეთ არაპირდაპირი გაზომვების სერიის ფარდობითი ცდომილება

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{f}.100\%$$

მოვიყვანოთ არაპირდაპირი გაზომვების დამუშავების მაგალითი

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ცილინდრის მოცულობა ფორმულით

$$v = \pi d^2 h \quad (7)$$

სადაც d ცილინდრის დიამეტრია, ხოლო h - ცილინდრის სიმაღლე. ორივე ეს სიდიდე განისაზღვრება პირდაპირი გაზომვით. ვთვათ გაზომვებმა მოგვცეს შემდეგი შედეგები: $d = (4.01 \pm 0.03)$ მმ და $h = (8.65 \pm 0.02)$მმ ერთნაირი $p = 0.95$ საიმედოობით. მოცულობის საშუალო მნიშვნელობა იქნება

$v = 3.14 \cdot\ (4.01)^2 \cdot 8.65$ მმ^3

გავალოგარითმოთ (7)

$$lnV = ln\pi + 2lnd + lnh - ln4$$

$$\frac{\partial lnV}{\partial d} = \frac{2}{d}$$

$$\frac{\partial lnV}{\partial h} = \frac{2}{d}$$

$$\Delta V = \pm \bar{V} \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

$$\Delta V = \pm 109.19 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0.03}{4.01}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{8.65}\right)^2} \approx 1.65 \text{ მმ}^3$$

ვინაიდან გაზომვა ჩატარებულია მიკრომეტრით, რომლის დანაყოფის ფასია 0.01 მმ, სისტემატური ცდომილება $\delta d = \delta h = 0.01$ მმ. სისტემატური ცდომილება δV იქნება

$$\delta V = \pm\bar{V}\left(2\cdot\frac{\delta d}{d}+\frac{\delta h}{h}\right) = 109.19\left(\frac{2\cdot 0.01}{4.01}+\frac{0.01}{8.65}\right) \approx 0.67 \text{ მმ}^3$$

სისტემატური ცდომილება შესადარია შემთხვევითი ცდომილების და შესაბამისად

$$\Delta V = \sqrt{(1.65)^2+(0.67)^2} = 1.78 \approx 2\text{მმ}^3$$

ამრიგად გაზომვის შედეგია

$$V = (109 \pm 2) \text{ მმ}^3 \quad p = 0.95\text{-თვის}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{109}\cdot 100\% \approx 2\%$$

მაგალითი 2. მოძებნეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებისთვის

$$\tau = \frac{m_1+m_2-m_3}{2m_1m_2}$$

ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია ჯერ მოვძებნოთ ფარდობითი ცდომილება. მაშინ

$$d = \left[ln\left(\frac{m_1+m_2-m_3}{2m_1m_2}\right)\right] = d[ln(m_1+m_2-m_3) - ln2 - lnm_1 - lnm_2] =$$

$$= d[ln(m_1+m_2-m_3)] - d(ln2) - d(lnm_1) - d(lnm_2) =$$

$$= \frac{d(m_1+m_2-m_3)}{m_1+m_2-m_3} - \frac{dm_1}{m_1} - \frac{dm_2}{m_2} = \frac{dm_1}{m_1+m_2-m_3} + \frac{dm_2}{m_1+m_2-m_3} - \frac{dm_3}{m_1+m_2-m_3} -$$

$$- \frac{dm_1}{m_1} - \frac{dm_2}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1+m_2-m_3} - \frac{1}{m_1}\right)dm_1 + \left(\frac{1}{m_1+m_2-m_3} - \frac{1}{m_2}\right)dm_2 -$$

$$- \frac{dm_3}{m_1+m_2-m_3} = \frac{m_2-m_3}{m_1(m_1+m_2-m_3)}dm_1 + \frac{m_1-m_3}{m_2(m_1+m_2-m_3)}dm_2 -$$

$$- \frac{dm_3}{m_1+m_2-m_3} = \frac{m_2-m_3}{m_1(m_1+m_2-m_3)}dm_1 + \frac{m_1-m_3}{m_2(m_1+m_2-m_3)}dm_2 -$$

$$- \frac{1}{m_1+m_2-m_3}dm_3$$

(48) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{\Delta\tau}{\bar{\tau}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)}\right]^2 (\Delta m_1)^2 + \left[\frac{m_1 - m_3}{m\ \ (m_1 + m_2 - m_3)}\right]^2 (\Delta m_1)^2 + \left[\frac{dm_3}{m_1 + m_2 - m_3}\right]^2}$$

აბსოლუტური შემთხვევითი ცდომილება მოიძებნება ფორმულიდან

$$\Delta\tau = \varepsilon \cdot \bar{\tau}$$

(4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{\delta\tau}{\bar{\tau}} = \left|\frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)}\delta m_1\right| + \left|\frac{m_1 - m_3}{m_2(m_1 + m_2 - m_3)}\delta m_2\right| + \left|\frac{\delta m_3}{m_1 + m_2 - m_3}\right|$$

აბსოლუტურ სისტემატურ ცდომილებას მოვძებნით გამოსახულებიდან

$$\delta\tau = \varepsilon \cdot \bar{\tau}$$

ლიტერატურა

1. ი.სხირტლაძე, თ.ტუღუში, ა.ოსიძე, ა. ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბ. 1980 წ, 124 გვ.
2. ვ. ცხადაია, ზ. ჯაბუა. ტესტებისა და ამოცანების კრებული მათემატიკაში. თბ. 2009 წ, 457 გვ.
3. З.Румшиский. математическая обработка результатов эксперимента. М., Наука, 1971 г., 192 ст.
4. А.Н. Заидель. Ошибка измерении физических величин. Л., Наука, 1974 г., 108 ст.
5. М.А.Фадеев, К.А.Марков. Численные методы. Нижный новгород. 2010 г., 159 ст.
6. М.А.Фадеев. Элементарная обработка результатов эксперимента. Нижный новгород . 2010 г., 122 ст.
7. John R. Taylor. An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements, 2d Edition, University Science Books, 1997
8. Philip R. Bevington and D. Keith Robinson, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, 2d Edition, WCB/McGraw-Hill, 1992
9. Handbook of physical measurements. Judith G Hall, Judith E Allenson, Karen W Gripp, Anne M Slavotinek. Reviewed by Deborah J.Stalker. Published by Oxford University Press, Oxford, 2006, pp.520