საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ლ. ბერიძე, რ. გოგიბერიძე, ნ. კაჭახიძე

MATLAB-ი
სტუდენტებისათვის

დამტკიცებულია სახელმძღვანელოდ
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ. 21.02.2014, ოქმი № 1

თბილისი
2014

განხილულია გამოყენებითი მათემატიკის თანამედროვე ეფექტური პროგრამული სისტემა MATLAB-ი (matrix laboratory), როგორც მოდელირების მძლავრი სისტემა. იგი წარმოადგენს ტექნიკური გამოთვლების მაღალი დონის ინსტრუმენტს, რომელიც მოიცავს მრავალ პაკეტს. MATLAB-ის ტიპური გამოყენებაა: მათემატიკური გამოთვლები, ალგორითმების შექმნა, მოდელირება, მონაცემთა ანალიზი, კვლევა და ვიზუალიზაცია, მეცნიერული და საინჟინრო გრაფიკა და სხვა.

„MATLAB-ი სტუდენტებისათვის“ განკუთვნილია ყველა სპეციალობის იმ სტუდენტებისთვის, რომელთა პროგრამაშიც შედის „MATLAB-ი“. იგი გამოადგება მაგისტრანტებსა და დოქტორანტებს, რომლებსაც სხვადასხვა ამოცანების ამოხსნისას ესაჭიროებათ მათემატიკური გამოთვლების ჩატარება, გრაფიკა და ა.შ. ასევე სხვა დაინტერესებულ პირებს.

ყველა პარაგრაფი შედგება საჭირო საცნობარო მასალისაგან, ამოხსნილი ამოცანებისა და მრავალრიცხოვანი სავარჯიშო მაგალითებისაგან.

რეცენზენტები: სრული პროფესორი **ა. მესხი**
სრული პროფესორი **გ. ბერიკელაშვილი**

ISBN 978-9941-20-420-3

Verba volant, scripta manent

http://www.gtu.ge/publishinghouse/

შესავალი

რა არის MATLAB-ი?

MATLAB – ეს არის მაღალი დონის ენა ტექნიკური გამოთვლებისათვის, იგი შეიცავს გამოთვლების, ვიზუალიზაციის, პროგრამირების საშუალებებს.

კომპიუტერული ალგებრა ახალი მეცნიერული მიმართულებაა ინფორმატიკაში. მისი წარმოშობა მჭიდროდაა დაკავშირებული ისეთი უნივერსალური პროგრამული საშუალებების შექმნასთან, როგორიცაა Mathematica, Maple, Mathcad, MatLab და სხვა. ამ სისტემებიდან თითოეული უნიკალურია, ყოველ მათგანს აქვს ურთიერთობის საკუთარი ენა, მათემატიკური ფუნქციების სიმრავლე, მათემატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და ალგორითმები.

MATLAB-ის უნიკალურობა განისაზღვრება იმით, რომ:

1) სისტემა ორიენტირებულია მატრიცულ ოპერაციებზე;
2) აქვს დიდი რაოდენობის ფუნქციათა შემცველი ბიბლიოთეკა, რომლებიც გამოიყენება რიგი მეცნიერული და საინჟინრო ამოცანების ამოხსნისას (მართვის ანალიზი და სინთეზი, ექსპერიმენტის დაგეგმარება და მრავალი სხვა);
3) აქვს დიალოგის შესაძლებლობა სხვა მათემატიკურ სისტემებთან (Maple, Mathcad, MS Excel), რაც აფართოებს მისი მოქმედების არეალს, ამცირებს მის ერთ-ერთ ნაკლს – სხვა სისტემებთან შედარებით სუსტ სიმბოლურ მათემატიკას.

ამ განსაკუთრებულობის გამო MATLAB-ი არის ყველაზე უფრო გავრცელებული მათემატიკური სისტემა, რომელიც სარგებლობს დიდი პოპულარობით მომხმარებლებში, მისი გამოყენება თითქმის აუცილებელი გახდა ზოგადტექნიკურ და სპეციალურ დისციპლინებში ლაბორატორიული სამუშაოების ჩატარებისას.

იმ პრობლემების სპექტრი, რომელთა გამოკვლევა შეიძლება MATLAB-ის და მისი გაფართოებების (Tool box) საშუალებით, მოიცავს მატრიცულ ანალიზს. ის მომხმარებელს აძლევს საშუალებას: სწრაფად ჩაატაროს მოქმედებები მატრიცებსა და ვექტორებზე, როგორიცაა მატრიცების გამრავლება, შებრუნება, დეტერმინანტის გამოთვლა, საკუთრივი რიცხვებისა და ვექტორების პოვნა, ალგებრული, ტრიგონო-

მეტრიული, შექცეული ტრიგონომეტრიული, ლოგარითმული, მაჩვენებლიანი ფუნქციების შემცველი გამოსახულებების მნიშვნელობათა გამოთვლა, გამოსახულებების გამარტივება და დამუშავება, განტოლებებისა და სისტემების ამოხსნა, მოქმედებები პოლინომებზე, პოლინომების ყველა ფესვის პოვნა, ფუნქციათა ინტეგრება, დიფერენცირება, ზღვართა გამოთვლა, მწკრივად გაშლა, მწკრივის ჯამის პოვნა, დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამოხსნა, მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებისა და ოპტიმიზაციის ამოცანების ამოხსნა, კარტოგრაფიული გამოსახულებების, ნეირონული ქსელების, დინამიკური პროცესების მოდელირება, მონაცემთა დამუშავება, ანალიზი და ვიზუალიზაცია, ანუ მათი გრაფიკული სახით წარმოდგენა. მას წარმატებით იყენებენ სამხედრო საქმეში, აეროდინამიკაში, საავტომობილო წარმოებაში, ენერგეტიკაში, ეკონომიკაში, მეცნიერებისა და ტექნიკის თითქმის ყველა სფეროში. ფართოდ გამოიყენება, აგრეთვე, მსოფლიოს წამყვანი უნივერსიტეტების სამეცნიერო და სასწავლო პროექტებში, საზღვარგარეთის ბევრი სასწავლო დაწესებულება იყენებს MATLAB-ს სხვადასხვა პროფილის სპეციალისტების მომზადების საქმეში, თანამედროვე ინჟინრისა და მეცნიერ-ტექნიკური მუშაკისათვის MATLAB-ი წარმოადგენს მოდელირებისა და სხვა გამოყენებითი სისტემის შეუცვლელ ინსტრუმენტს.

MATLAB-ის პაკეტში რეალიზებულია რამდენიმე ათეული ე.წ. Tool box-ი (სპეციალიზებული ქვეპროგრამების ბიბლიოთეკა), რომელთა დანიშნულებაა სხვადასხვა პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნა. მაგალითად, Tool box SYMBOLIC-ის დანიშნულებაა სიმბოლური გამოთვლების შესრულება, ხოლო Tool box CONTROL-ის – ავტომატური მართვის სისტემების მოდელირება და გამოთვლების შესრულება.

MATLAB-ის პაკეტის გამოჩენის ისტორიას უკავშირებენ პროფესორ კლივ მოულერის სახელს. ფირმა MathWorks-ში გადასვლამდე იგი პედაგოგიურ და მეცნიერულ მოღვაწეობას ეწეოდა აშშ-ს მათემატიკის კათედრებზე და უნივერსიტეტების (ნიუ-მექსიკო, მიჩიგანი, სტენფორდი) კომპიუტერულ ცენტრებში. იგი არის მთელი რიგი წიგნების თანაავტორი, რომლებიც ნათარგმნია მრავალ ენაზე. დაახლოებით 30 წლის წინ მოულერი მონაწილეობას ღებულობდა Fortran-ის ენაზე პროგრამების პაკეტების დამუშავებაში წრფივი ალგებრის ამოცანების ამოხსნისათვის (LINPACK) და მატრიცების საკუთრივი რიცხვებისა და ვექტორების

პრობლემების გამოკვლევებში (EISPACK). მის მიერ 1980 წელს AFIPS საერთაშორისო კონფერენციაზე გაკეთებულ მოხსენებაში პირველად იქნა გახმოვანებული ტერმინი MATLAB-ი (მიღებულია Matrix Laboratory-ის შემოკლებით).

MATLAB-ის პაკეტის მეორე დაბადებას უკავშირებენ MathWorks ფირმის ამჟამინდელი პრეზიდენტის ჯეკ ლიტლის სახელს, რომელმაც გასული საუკუნის 80-იანი წლების დასაწყისში პროგრამა MATLAB-ი გადაიტანა უფრო თანამედროვე გამოთვლით პლატფორმებზე Macintosh, VAX და IBM PC. პაკეტის შემდგომი განვითარება ფირმა MathWorks-ის ეგიდით მიმდინარეობდა, პროგრამული პაკეტი ამ კომპანიამ შექმნა 1990 წელს და მას შემდეგ მუდმივად ავითარებს. გამოდის მისი ახალი ვერსიები.

ფირმის დაარსების მომენტიდან (1984 წ.) კ. მოულერი მისი სამეცნიერო ხელმძღვანელია. MATLAB-ის პაკეტის მოდერნიზაციას უზრუნველყოფს ფირმის 1000-ზე მეტი თანამშრომელი, მაღალკვალიფიციური მათემატიკოსები და ინჟინრები, ტექნიკური მუშაკები მთელი მსოფლიოდან.

წინამდებარე სახელმძღვანელოს მიზანია MATLAB-ის დაწყებითი გაცნობა. იგი შეიცავს მხოლოდ ელემენტარულ ცნობებს, მოცემულია ის აუცილებელი მასალა, რომელიც „MATLAB" კურსის პრაქტიკული სამუშაოების ჩასატარებლად არის საჭირო. აღწერილია MATLAB-ის 2010 წლის გამარტივებული ვერსია, რომელიც ორიენტირებულია სასწავლო პროცესში მის გამოყენებაზე.

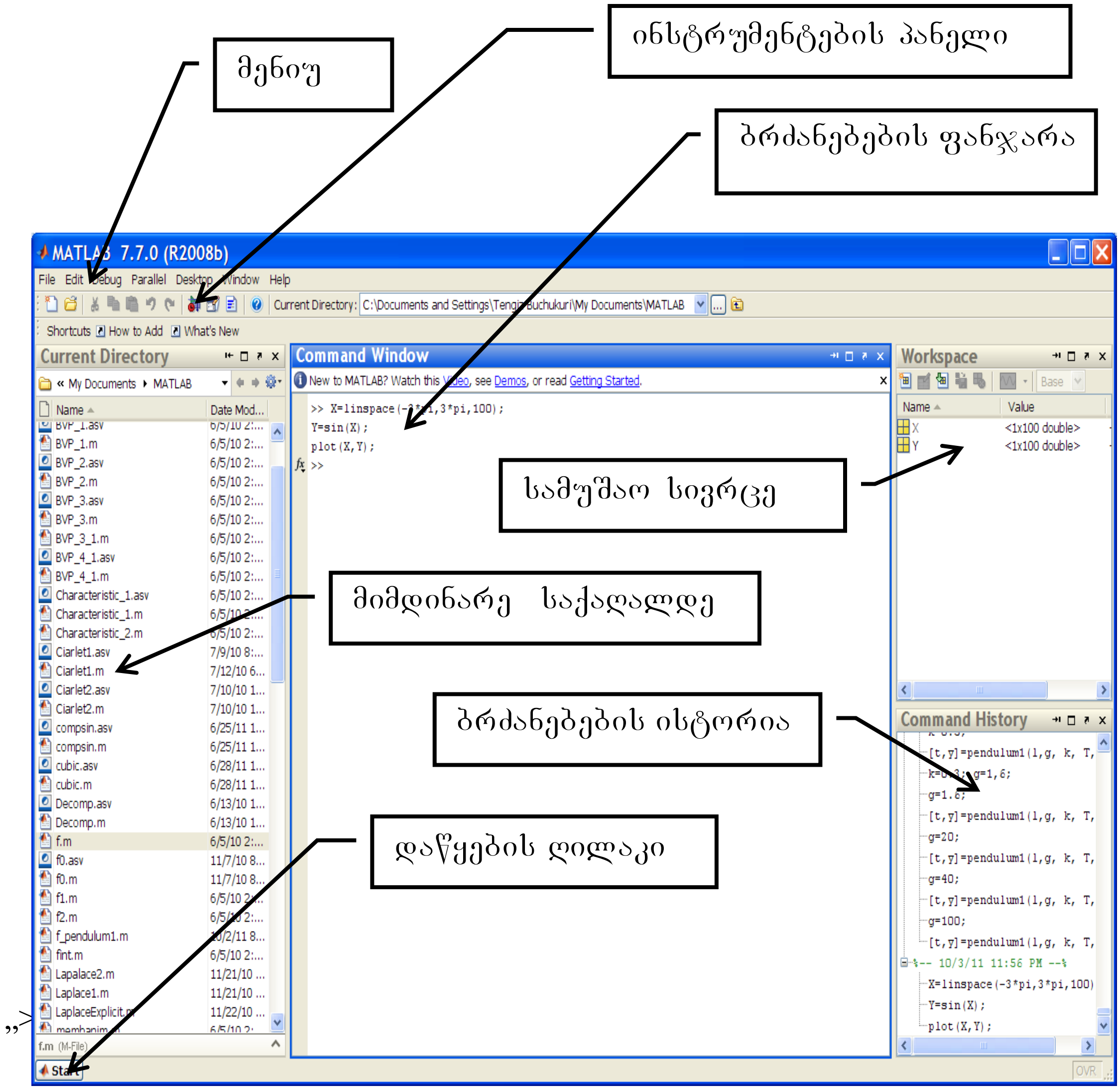
MATLAB-ის პაკეტის უფრო ღრმად, სრულყოფილად შესწავლის მსურველებს ვურჩევთ გაეცნონ ლიტერატურას, რომლის მოძიება შეიძლება ინტერნეტით:

1. И. Ануфриев, А. Смирнов, Е. Смирнова - MATLAB 7 (наиболее полное руководство), 1097 ст.;
2. Ю. Кетков, А. Кетков, М. Шульц - MATLAB 7 (программирование, численные методы), Санкт-Петербург, 2005 г. 753 ст.;
3. Л. Боловко, Т. Бутусов - MATLAB для студента Санкт-Петербург, 2005 г. 318 ст.;
4. П. Мироновский, К Петрова - Введение в MATLAB, учебное пособие, Санкт-Петербург, 2006 г. 163 ст.;

5. Amos Gilat, MATLAB - An introduction with applications – John Wihley & Sons, 2004;
6. ზ. ბაიაშვილი – MATLAB პროგრამული პაკეტის გამოყენების საფუძვლები, თბილისი, სტუ, 2010 წ.;
7. ნ. მჭედლიშვილი, ი. დავითაშვილი, თ. ხუციშვილი, ი. მოსაშვილი – მოდელირების ინსტრუმენტული საშუალება MATLAB-ი (I ნაწილი), თბილისი, სტუ, 2009 წ.

1. მუშაობის პირველი ნაბიჯები, სამუშაო მაგიდის მოკლე მიმოხილვა

პროგრამული პაკეტის გაშვების შემდეგ გაიხსნება პროგრამა MATLAB-ის ძირითადი ფანჯარა, რომელსაც სამუშაო მაგიდა ეწოდება. იგი შეიცავს მენიუს, ინსტრუმენტების პანელს, ბრძანებათა ფანჯარას (Command Window) და ჩანართებს – ბრძანებათა ისტორია (Command History), მიმდინარე საქაღალდე (Current Directory) და სამუშაო არე (Workspace).



ტანა, ბრძანების აკრეფა. ბრძანების შესრულება კი Enter კლავიშის დაჭერით ხდება.

ბრძანებათა ფანჯარა სუფთავდება ბრძანებით – clc.

ცვლადების მნიშვნელობები, რომლებიც გამოითვლება სამუშაო სეანსის დროს, ინახება MATLAB-ის სამუშაო არეში – Workspace. ამ არეში შესვლა შეიძლება ინსტრუმენტების პანელიდან Desktop/ Workspace.

ფანჯარაში Command History, ინახება ყველა ის ინფორმაცია, რაც შეტანილ იქნება ბრძანებათა ფანჯარაში, ე.ი. ქრონოლოგიურად დალაგებული და დათარიღებული ბრძანებების ჯგუფები. იგი იძლევა ადრე შესრულებული ყველა ბრძანების დათვალიერების საშუალებას. ამ არეში შესვლის გზაა: Desktop/ Command History.

ყველა ფანჯრის გასუფთავება შეიძლება მენიუს Edit პუნქტიდან:

Clear Command Window

Clear Command History

Clear Workspace

MATLAB-ის პროგრამის დახურვა ხდება quit ან exit ბრძანებით.

2. უმარტივესი გამოთვლები, გამოთვლების შედეგების ფორმატირება, ცვლადები

გამოსახულების მნიშვნელობის გამოსათვლელად საჭიროა ფუნქციები (ბრძანებები) და მოქმედებათა ნიშნები: ეს ინფორმაცია შეიძლება ვნახოთ help elfun ბრძანებით, ეკრანზე გამოიტანება ყველა ელემენტარული ფუნქციის სია მოკლე აღწერით. პროგრამა შეიცავს აგრეთვე სპეციალურ მათემატიკურ ფუნქციებს. მათი აღწერის გაცნობა შეიძლება help specfun ბრძანებით.

საცნობარო მასალა

ფუნქცია	MATLAB-ის პროგრამაში შესატანი ფორმა
ოპერაციების (მოქმედებების) ნიშნები	
შეკრება	+
გამოკლება	–
გამრავლება	*
გაყოფა	/
ახარისხება	^
ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	
sin x	sin(x) , არგუმენტი მოცემულია რადიანებში sind(x) , არგუმენტი მოცემულია გრადუსებში
cos x	cos(x) , არგუმენტი მოცემულია რადიანებში cosd(x) , არგუმენტი მოცემულია გრადუსებში
tg x	tan(x) , არგუმენტი მოცემულია რადიანებში tand(x) , არგუმენტი მოცემულია გრადუსებში
ctg x	cot(x) , არგუმენტი მოცემულია რადიანებში cotd(x) , არგუმენტი მოცემულია გრადუსებში

შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები	
$\arcsin x$	asin(x) , არგუმენტი მიიღება რადიანებში $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ შუა-ლედში asind(x), არგუმენტი მიიღება გრადუსებში $[-90^0, 90^0]$ შუალედში
$\arccos x$	acos(x), არგუმენტი მიიღება რადიანებში $[0, \pi]$ შუა-ლედში acosd(x), არგუმენტი მიიღება გრადუსებში $[0^0, 180^0]$ შუალედში
$\mathrm{arctg}\, x$	atan(x), არგუმენტი მიიღება რადიანებში $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ შუა-ლედში atand(x), არგუმენტი მიიღება გრადუსებში $]-90^0, 90^0[$ შუალედში atan2(y, x), იძლევა y/x სიდიდის არკტანგენსს რადია-ნებში $]-\pi, \pi]$ საზღვრებში
$\mathrm{arcctg}\, x$	acot(x) , არგუმენტი მიიღება რადიანებში acotd(x) , არგუმენტი მიიღება გრადუსებში
ჰიპერბოლური ფუნქციები	
$\mathrm{sh}\, x$	sinh(x) $\left(\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$
$\mathrm{ch}\, x$	cosh(x) $\left(\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$
$\mathrm{th}\, x$	tanh(x) $\left(\mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)$
$\mathrm{cth}\, x$	coth(x) $\left(\mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$
შექცეული ჰიპერბოლური ფუნქციები	
$\mathrm{arcsh}\, x$	asinh(x), იგი ტოლია $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
$\mathrm{arcch}\, x$	acosh(x), იგი ტოლია $\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x \geq 1$

$\operatorname{arcth} x$	atanh(x), იგი ტოლია $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $\|x\| < 1$
$\operatorname{arccth} x$	acoth(x), იგი ტოლია $\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $\|x\| > 1$
ხარისხები, ლოგარითმები, ფესვები	
e^x	exp(x)
2^x	pow2(x)
$y \cdot 2^x$	pow2(y,x)
$\ln x$	log(x)
$\ln(1+x)$	log1(x)
$\lg x$	log10(x)
$\log_2 x$	log2(x)
$\log_a x$	log(x) /log(a) (ვისარგებლებთ ერთი ფუძიდან მეორეზე გადასვლის ფორმულით: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\sqrt[n]{x}$	nthroot(x,n) ან x^(1/n)
$\|x\|$	abs(x)
π	pi
φ	phi
θ	theta
ρ	ro (rho)
$\sqrt{x^2+y^2}$	hypot(x,y)

კუთხე გრადუსებში ტოლია კუთხე რადიანებში გამრავლებული $\frac{180}{\pi}$-ზე;
კუთხე რადიანებში ტოლია კუთხე გრადუსებში გამრავლებული $\frac{\pi}{180}$-ზე.

a და b წყვილის უ.ს.ჯ.	lcm(a,b); (least common multipe)
a და b წყვილის უ.ს.გ.	gcd(a,b); (greatest common divisor)
იმ მარტივი რიცხვების ჩამონათვალი, რომლებიც ნაკლებია ან ტოლია n-ზე	primes(n)

ფაქტორიალი n!	factorial(n)
რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლა	factor(n)
a-ს b-ზე გაყოფის შედეგად მიღებული ნაშთი	rem(a,b) ან mod(a,b)
a, b, c რიცხვების ყველა შესაძლო გადაადგილება, ე.ი. გადანაცვლება P_n	perms ([a,b,c])
ელემენტების ჯამი	sum(a), $a = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
ელემენტების ნამრავლი	prod(a), $a = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
განუზღვრელობა (0/0)	NAN
უსასრულობა (∞)	inf
x რიცხვის ნიშანი	sign(x)
კომპლექსური რიცხვები $z = a + bi$	
წარმოსახვითი ნაწილი	imag(z)
ნამდვილი ნაწილი	real(z)
z-ის მოდული, ე.ი. $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	abs(z)
კუთხე რადიანებში $\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{b}{a}$	angle(z) = atan2(imag(z), real(z)) ითვლის კუთხეს რადიანებში $]-\pi, \pi]$ შუალედში
შეუღლებული კომპლექსური რიცხვი	conj(z)

დამრგვალება

ceil(x)	ამრგვალებს უახლოეს მეტ მთელ რიცხვამდე
floor(x)	ამრგვალებს უახლოეს ნაკლებ მთელ რიცხვამდე
fix(x)	უკუაგდებს წილად ნაწილს
round(x)	ამრგვალებს უახლოეს მთელ რიცხვამდე

გამოთვლების შედეგების სიზუსტე და ფორმატირება (ძირითადად გამოვიყენებთ)	
format short	გამოყავს შედეგი 4 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ
format long	single ტიპის რიცხვებისათვის 7 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ
format short e	ფორმატი მცოცავი მძიმით, 4 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ
format long e	ფორმატი მცოცავი მძიმით, 14-15 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ double ტიპის რიცხვებისათვის და 7 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ single ტიპის რიცხვებისათვის
format bank	საბანკო ფორმატი 2 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ
format rat	შედეგი გამოდის წილადის სახით

მაგალითები

1. იპოვეთ

1) $a = e^{-6}(\ln 13)^4 - \sqrt{\dfrac{\sin 2{,}5\pi - \cos 5{,}5\pi}{\cos 4{,}3\pi + \sin 8{,}5\pi}}$.

```
>> a = exp(−6) * (log(13))^4 − sqrt((sin(2.5 * pi) − cos(5.5 * pi))/
        (cos (4.3 * pi) + sin(8.5 * pi)))
a =
   −0.6863
```

2) $b = 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{128} + 5\sqrt[4]{6}$.

```
>> b = 3 * 16^(1/3) + 2 * 128^(1/3) + 5 * 6^(1/4)
  b =
     25.4643
```

3) $\lg 100 - \log_2 5 + 3\ln 7 + 5\log_3 8$.

```
>> c = log10(100) − log2(5) + 3 * log(7) + 5 * (log(8)/log(3))
```

$c\ =$

14.9797

4) $\left|\dfrac{5\sqrt{2}-1}{5}-1\right|+\left|\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}-1\right|.$

$>>\mathrm{d} = \mathrm{abs}((5*\mathrm{sqrt}(2)-1)/5-1)+\mathrm{abs}((2*\mathrm{sqrt}(2)-1)/2-1)$

$\mathrm{d}\ =$

0.3000

5) $\dfrac{\cos 125^{\circ}+\mathrm{tg}\,47^{\circ}\,\mathrm{ctg}\,35^{\circ}+\sin 72^{\circ}}{\sin 3+\cos 2+\mathrm{tg}\,6}\ .$

$>>\mathrm{f} = (\mathrm{cosd}(125)+\mathrm{tand}(47)*\mathrm{cotd}(35)+\mathrm{sind}(72))/(\sin(3)+\cos(2)$
$\quad +\tan(6))$

$\mathrm{f}\ =$

-3.3726

2. გამოთვალეთ შემდეგი გამოსახულების მნიშვნელობა:

$$\left(\frac{2}{5x}-\frac{2}{x-1}\left(\frac{x+y}{5x}-x-y\right)\right):\frac{x-y}{x},\ \text{როცა}\ \ x=43,\ \ y=42.$$

$>>\mathrm{x} = 43;\mathrm{y} = 42;$

$>>\mathrm{m} = (2/(5*\mathrm{x})-2/(\mathrm{x}-1)*((\mathrm{x}+\mathrm{y})/(5*\mathrm{x})-\mathrm{x}-\mathrm{y}))/((\mathrm{x}-\mathrm{y})/\mathrm{x})$

$\mathrm{m}\ =$

173.6381

3. გამოთვალეთ $\sqrt{295}$ და წარმოადგინეთ იგი უკვეცი წილადის სახით:

```
>> format rat
>> sqrt(295)
ans =
   2250/131
```

4. გამოთვალეთ (შემოიღეთ აღნიშვნა):

$$T=\frac{(\sin y+\sin 2y+\sin 3y)^4}{1+\dfrac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{1+e^x}}+\sqrt{1+\frac{\sin y+\sin 2y+\sin 3y}{1+e^x}}\,,$$

როცა $x = \dfrac{2\pi}{5}, y = 47^0$.

$>> \mathrm{x} = (2 * \mathrm{pi})/5; \quad \mathrm{y} = 47;$

$>> \mathrm{a} = \mathrm{sind(y)} + \mathrm{sind}(2 * \mathrm{y}) + \mathrm{sind}(3 * \mathrm{y});$

$>> \mathrm{b} = 1 + \exp(\mathrm{x});$

$>> \mathrm{c} = 1 + \mathrm{a/b};$

$>> \mathrm{T} = (\mathrm{a}\hat{}4)/\mathrm{c} + \mathrm{sqrt(c)}$

T =

21.5481

5. გამოთვალეთ π-ს მნიშვნელობა მიახლოებითი ფორმულით:

$$\pi \approx 768 * \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 1}}}}}}}}}$$ და დაადგინეთ ცდომილება.

$>> \mathrm{a} = \mathrm{sqrt}(2 + 1);$

$>> \mathrm{b} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{a});$

$>> \mathrm{c} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{b});$

$>> \mathrm{d} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{c});$

$>> \mathrm{e} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{d});$

$>> \mathrm{f} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{e});$

$>> \mathrm{g} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{f});$

$>> \mathrm{t} = \mathrm{sqrt}(2 + \mathrm{g});$

$>> \mathrm{T} = 768 * (\mathrm{sqrt}(2 - \mathrm{t}))$

T =

3.1416

$>> \mathrm{eps} = \mathrm{abs}(\mathrm{T} - \mathrm{pi})$

eps =

$2.1904e - 006$

6. გამოთვალეთ e-ს მიახლოებითი მნიშვნელობა ფორმულით:

$e \approx \sqrt[6]{\pi^4 + \pi^5}$ და დაადგინეთ ცდომილება.

$>> \mathrm{q} = (\mathrm{pi}\hat{}4 + \mathrm{pi}\hat{}5)\hat{}(1/6)$

q =

2.7183

$>> \mathrm{eps} = \mathrm{abs}(\mathrm{q} - \exp(1))$
eps $=$
$1.9847\mathrm{e} - 08$

7. გამოთვალეთ $\pi -$ ის მიახლოებითი მნიშვნელობა ფორმულით:
$\pi^2 \approx 6 \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}$ და დაადგინეთ ცდომილება.

$>> \mathrm{n} = 1 : 100;$
$>> \mathrm{s} = \mathrm{sqrt}(6 * \mathrm{sum}(1./(\mathrm{n}.\hat{}2)))$
s $=$
3.1321
$>> \mathrm{eps} = \mathrm{abs}(\mathrm{s} - \mathrm{pi})$
eps $=$
0.0095

ცვლადები

ცვლადის სახელი წარმოადგენს ლათინური ასოების მიმდევრობას. MATLAB-ი ანსხვავებს დიდ და პატარა ასოებს (ერიდეთ ცვლადების აღსანიშნავად i და j სიმბოლოების ხმარებას, ასევე არ შეიძლება სახელად MATLAB-ის რეზერვირებული სიტყვების (keywords) ხმარება. ამ სიტყვების ჩამონათვალი შეიძლება ნახოთ ბრძანებით – iskeyword).

თუ ცვლადი ღებულობს რამდენიმე მნიშვნელობას, მაშინ მას ასე ჩავწერთ:

1) $\mathrm{x} = [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4]$
2) $\mathrm{x} = \mathrm{a} : \mathrm{h} : \mathrm{b}$, სადაც a საწყისი მნიშვნელობაა, b – ბოლო, h – ბიჯი.
3) $\mathrm{x} = \mathrm{linspace}(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{n})$, სადაც n დანაყოფთა რაოდენობაა. თუ n-ს არ მივუთითებთ, მაშინ MATLAB-ი ავტომატურად იღებს $n = 100$.

ორი ერთნაირი ზომის მასივის შესაბამის ელემენტებს შორის მოქმედებათა ჩასატარებლად ოპერაციის ნიშნის წინ იწერება წერტილი:

ელემენტობრივი გამრავლება	.*
ელემენტობრივი ახარისხება	.^
ელემენტობრივი გაყოფა	./ (I მასივის ელემენტები იყოფა II მასივის შესაბამის ელემენტებზე)
ელემენტობრივი გაყოფა	.\ (II მასივის ელემენტები იყოფა I მასივის შესაბამის ელემენტებზე)

მაგალითები

გამოთვალეთ:

1. $\dfrac{a^2b+2ab^2+b^3}{a-b}\left(\dfrac{a}{ab+b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{b}{a^2-ab}\right)$, როცა $\begin{cases} a = 71:2:81 \\ b = 25:3:40 \end{cases}$

```
>> a = 71 : 2 : 81;
>> b = 25 : 3 : 40;
>>  A = (a.^2.* b + 2 * a.* b.^2 + b.^3)./(a − b).* (a./(a.* b + b.^2) − (a.^2 ...
+b.^2)./(a.^3 − a.* b.^2) + b./(a.^2 − a.* b))
A =
      6.0000    101.0000    106.0000    111.0000     116.0000     121.0000
```

2. $\sqrt[5]{x(1+x)^2(1+2x)^3+\sqrt[3]{\dfrac{x(1+x)^2(1+2x)^3}{\ln|\operatorname{ctg} y|}}}$, როცა $\begin{cases} x = 3:1:7 \\ y = \dfrac{\pi}{6}:\dfrac{\pi}{24}:\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

```
>> x = 3 : 1 : 7;   y = pi/6 : pi/24 : pi/3;
>> a = x.* (1 + x).^2.* (1 + 2 * x).^3;
>> b = log(abs(cot(y)));
```

$>> \mathrm{c = (a./b).\hat{}(1/3);}$
$>> \mathrm{A = (a + c).\hat{}(1/5)}$

A =

6.9738   9.3891   25.3633   14.5226 + 0.0005i   17.2153 + 0.0003i

3. იპოვეთ z კომპლექსური რიცხვის მოდული, არგუმენტი, ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები, შეუღლებული კომპლექსური რიცხვი:

$$z = \frac{(1+2i)^2(4-3i)^3}{(3+4i)^4(2-i)^3}.$$

$>> \mathrm{z = ((1 + 2i)\hat{}2 * (4 - 3i)\hat{}3)/((3 + 4i)\hat{}4 * (2 - i)\hat{}3)}$

z =

$-0.0400 - 0.0800i$

$>> \mathrm{r = abs(z)}$

r =

0.0894

$>> \mathrm{q = angle(z)}$

q =

-2.0344

$>> \mathrm{R = real(z)}$

R =

-0.0400

$>> \mathrm{I = imag(z)}$

I =

-0.0800

$>> \mathrm{\bar{z} = conj(z)}$

$\bar{z}$ =

$-0.0400 + 0.0800i$

4. l სიგრძის კაბელის ერთ ბოლოზე პოტენციალი შეადგენს v_0-ს, მეორე ბოლო კი დამიწებულია. გამოთვალეთ დენის მნიშვნელობა ფორმულით:

$$I_0 = \frac{v_0}{z_0} th(pl), \text{ სადაც } v_0 = 100, \ z_0 = 500 + 400i, \ l = 10,$$
$$p = 0{,}1 + 0{,}15i.$$

$>> \mathrm{v0 = 100; \quad z0 = 500 + 400 * i; \quad l = 10; \quad p = 0.1 + 0.15 * i;}$

```
>> I0 = v0 * (tanh(p * l))/z0
I0 =
     0.1645 - 0.1214i
```

5. l სიგრძის მსუბუქი ძელი ორივე ბოლოთი დამაგრებულია. მასზე მოდებულია W წონა წერტილში, რომელიც a მანძილით არის დაშორებული ერთი ბოლოდან ($x = 0$), დაჭიმულობის F ძალა და ღუნვის M მომენტი მოიცავს ტოლობებს:

$$F = \begin{cases} \dfrac{W(l-a)^2(l+2a)}{l^3}, & \text{თუ } 0 < x < a, \\ \dfrac{-Wa^2(3l-2a)}{l^3}, & \text{თუ } a < x < l; \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \dfrac{W(l-a)^2(al-x(l+2a))}{l^3}, & \text{თუ } 0 < x < a, \\ \dfrac{Wa^2(al-2l^2+x(3l-2a)}{l^3}, & \text{თუ } a < x < l. \end{cases}$$

იპოვეთ F და M, თუ $a = 5$, $l = 10$, $W = 5$, $x = 3$.

```
>> a = 5;   l = 10;   W = 5;  x = 3;
>> F = W * (l - a)^2 * (l + 2 * a)/l^3
F =
     2.5000
>> M = W * (l - a)^2 * (a * l - x * (l + 2 * a))/l^3
M =
     -1.2500
```

სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ და შედეგები წარმოადგინეთ მძიმის შემდეგ 4 ციფრის სიზუსტით:

   1) $(2+7)^3 + \dfrac{273^{\frac{1}{3}}}{2} + \dfrac{55^2}{3}$;

2) $2^3+7^3+\dfrac{273^3}{2}+55^{\frac{3}{2}}$;

3) $\dfrac{3^7\ln(76)}{7^3+546}+\sqrt[3]{910}$;

4) $49\cdot\dfrac{\left(\sqrt[4]{250}+23\right)^2}{e^{(45-3^3)}}$;

5) $\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)^2+\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{7}\ln 8\right)}{\sqrt{7}}$;

6) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)^2\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}\right)+\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi\ln 8}{6}\right)}{7\cdot\dfrac{5}{2}}$;

7) $\dfrac{4-\operatorname{tg}^2 45^\circ+\operatorname{ctg}^4 60^\circ}{3-\sin^2 90^\circ-4\cos^2 60^\circ+4\operatorname{tg}45^\circ}$;

8) $\dfrac{\cos 1530^\circ\operatorname{tg}1410^\circ-\operatorname{tg}^2 2220^\circ\sin 1845^\circ}{\cos^2(-2250^\circ)}$;

9) $21^{2,25}-\dfrac{\sqrt[4]{2,56^{\sqrt{10}}+\sin 88^\circ}}{\lg\dfrac{9}{5}}$;

10) $\left(57e^{1,35}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{9}\right)\cos^2 37+5\sqrt{\ln 127}$;

11) $7,4\sqrt[5]{6,2^4+\ln 27}-\dfrac{10\cos 75^\circ}{\sin\dfrac{\pi}{5}}$;

12) $6\arcsin\dfrac{1}{7}+\dfrac{\sqrt[5]{e^{2,9}+\operatorname{tg}2,1}}{3+\log_{20}7}$.

2. გამოთვალეთ და შედეგები წარმოადგინეთ მძიმის შემდეგ 10 ციფ-რით:

1) $\cos 72^\circ\cos 22^\circ+\sin 72^\circ\sin 22^\circ-\cos 50^\circ$;

2) $1+\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$;

3) $\dfrac{\sin 35^\circ\sin 70^\circ\cos 75^\circ}{1-\cos 70^\circ-\cos 140^\circ-\cos 150^\circ}$;

4) $\sin \arccos(\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

5) $\arccos 0 + \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\frac{1}{2}$;

6) $\operatorname{arcctg} 0 + \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg} 1$;

7) $2^{\log_2(2-\sqrt{3})^2} + 2^{\log_{\sqrt{2}}(2+\sqrt{3})} + 25^{\frac{1}{\log_3 5}}$;

8) $\sqrt{81^{\frac{1}{\log_4 9}} + 121^{\frac{1}{\log_3 11}}}$;

9) $e^{3-\sqrt{3}} + 5\sin 77° - 4\cos\frac{3\pi}{5} + \lg 19{,}57$.

3. გამოთვალეთ e^3, $\sqrt{29}$, $\sqrt[3]{37}$, შედეგები დაამრგვალეთ:
   ა) უახლოეს მეტ მთელ რიცხვამდე;
   ბ) უახლოეს ნაკლებ მთელ რიცხვამდე;
   გ) უკუაგდეთ წილადი ნაწილი;
   დ) უახლოეს მთელ რიცხვამდე.

4. გამოთვალეთ მიახლოებითი მნიშვნელობა და დაადგინეთ ცდომილება

1) $\pi \approx \sqrt[193]{\frac{10^{100}}{11222{,}11122}}$;

2) $\pi \approx 16\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$;

3) $\pi \approx \sqrt{8\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{(2n-1)^2}}$;

4) $\pi \approx \sqrt{12}\sum_{k=0}^{100}\frac{(-3)^{-k}}{2k+1}$.

5. გამოთვალეთ მოცემული გამოსახულებები, როცა $x = 13{,}5$:

1) $x^3 + 5x^2 - 26{,}7x - 52$;

2) $\frac{\sqrt{14x^3}}{e^{3x}}$;

3) $\lg|x^2 - x^3|$.

6. იპოვეთ მოცემული გამოსახულებების მნიშვნელობები არგუმენტების მოცემული მნიშვნელობებისათვის:

1) $xz^2-\left(\dfrac{2^z}{3(x+1)}\right)^{3/5}$, როცა $x=9{,}6$, $z=8{,}1$;

2) $\dfrac{443(z+4)}{2\cdot x^{3/2}}+\dfrac{e^{-x(z+2)}}{x+3z}$, როცა $x=9{,}675$, $z=7{,}285$;

3) $\left(\dfrac{a^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{ab+b^2}+\dfrac{b}{a^2+ab}\right)\right):\dfrac{b}{a-b}$, როცა $a=5{,}75$, $b=2.84$;

4) $\left(\dfrac{2x^2y+2xy^2}{9x^3+x^2y+9xy^2+y^3}\cdot\dfrac{9x+y}{x^2-y^2}+\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)\cdot 14(x^2-y^2)$, როცა $x=\dfrac{1}{7}$, $y=\dfrac{1}{14}$;

5) $\dfrac{x^{2/3}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{2/3}}{\left(x^{4/3}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$, როცა $x=1{,}352$, $y=2{,}437$;

6) $\dfrac{\left(a\sin\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(b\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2}{2a^2\sin\frac{\pi}{6}-2ab\cos 0+\left(b\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}\right)^2}$, როცა $a=3$, $b=4$;

7) $a+\dfrac{ab(a+d)^2}{c\sqrt{|ab|}}$, როცა $a=15{,}62$, $b=-7{,}08$, $c=62{,}5$, $d=0{,}5(ab-c)$;

8) $d\,e^{\frac{d}{2}}+\dfrac{ad+cd}{(a+b+cd)\left(\frac{20}{a}+\frac{30}{b}\right)}$, როცა $a=15$, $b=-7$, $c=6{,}25$, $d=5(3ab+2c)$.

7. იპოვეთ კომპლექსური რიცხვის ნამდვილი ნაწილი, წარმოსახვითი ნაწილი, შეუღლებული კომპლექსური რიცხვი, მოდული, არგუმენტი:

1) $z=\dfrac{2-3i}{2+5i}+\dfrac{7+4i}{1-2i}-\dfrac{3}{i}$;

2) $z=\dfrac{12-3i}{22+5i}-\dfrac{17+4i}{1-2i}+\dfrac{6}{i}$;

3) $z=\dfrac{(25-2i)(8+14i)}{35+3i}$;

4) $z = (1{,}57 + 0{,}99i)^{125}$;

5) $z = \left(1 + \cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x}$.

6) ამოხსენით განტოლება $x(5-4i) + \sqrt{33} = 2^{0{,}45}$. შემდეგ გამოთვალეთ $y = \sqrt{6}\operatorname{tg} x - 3\ln(2x)$. შედეგი მიიღეთ 7 ათწილადი ნიშნით მძიმის შემდეგ.

8. შეამოწმეთ შემდეგი ტოლობების ჭეშმარიტება:

1) $\sin 2x = 2\sin x \cos x, \quad x = \frac{5}{24}\pi$;

2) $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}, \quad x = \frac{5}{24}\pi$;

3) $\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}, \quad x = \frac{3}{17}\pi$;

4) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}, \quad x = \frac{3}{17}\pi$;

5) $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha), \quad \alpha = \frac{5\pi}{9}, \ \beta = \frac{\pi}{7}$;

6) $\operatorname{tg} 5\theta = \frac{5\operatorname{tg}\theta - 10\operatorname{tg}^3\theta + \operatorname{tg}^5\theta}{1 - 10\operatorname{tg}^2\theta + 5\operatorname{tg}^4\theta}, \quad \theta = 37°$;

7) $\sin^4\theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + 3), \quad \theta = 3{,}25$;

8) $\sin^5\theta = \frac{1}{16}(\sin 5\theta - 5\sin 3\theta + 10\sin\theta), \quad \theta = 47°$;

9) $\cos^6\theta = \frac{1}{36}(\cos 6\theta + 6\cos 4\theta + 15\cos 2\theta + 10), \quad \theta = 2{,}577$;

10) $\cos^2\theta\sin^3\theta = \frac{1}{16}(2\sin\theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta), \quad \theta = 67°$.

9. იპოვეთ იმ სფეროს რადიუსი და ზედაპირის ფართობი, რომლის მოცულობაა 350 სმ^3.

10. მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტი $a = 11$ სმ, ხოლო ჰიპოტენუზა $c = 21$ სმ. იპოვეთ მეორე კათეტი და მახვილი კუთხეები გრადუსებში.

11. კოსინუსების თეორემის გამოყენებით იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები რადიანებში, თუ გვერდებია $a = 18$სმ, $b = 35$სმ, $c = 50$სმ.

12. სამკუთხედის წვეროებია: $A(-3,5)$, $B(4, -7)$, $C(2\,,9)$. იპოვეთ
   1) სამკუთხედის პერიმეტრი;
   2) ფართობი;
   3) კუთხეების სიდიდეები გრადუსებში.

13. იპოვეთ მანძილი $A(2,6,5)$ და $B(-10,15,9)$ წერტილებს შორის.

14. იპოვეთ მანძილი $\mathrm{M}_0(2,-3)$ წერტილიდან $3x + 5y - 6 = 0$ წრფემდე $\left(d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)$.

15. პოტენციალთა სხვაობა E (ვოლტებში) სატელეგრაფო ხაზსა და დედამიწას შორის გამოითვლება $E = A\,\mathrm{ch}\left(x\sqrt{\frac{r}{R}}\right) + B\,\mathrm{sh}\left(x\sqrt{\frac{r}{R}}\right)$ ფორმულით, სადაც A და B მუდმივებია, x არის მანძილი გადამცემი ბოლოდან, r არის 1 კმ სიგრძის გამტარის წინაღობა, R არის 1 კმ სიგრძის იზოლაციის წინაღობა. იპოვეთ E, თუ $A = 250$, $B = 273{,}26$, $x = 400$ კმ, $r = 8$, $R = 3{,}2 \cdot 10^7$.

16. იპოვეთ 1253-ის მარტივი მამრავლები.
17. იპოვეთ 256-სა და 1226-ის უმცირესი საერთო ჯერადი.

18. იპოვეთ 1255-სა და 2575-ის უდიდესი საერთო გამყოფი.

19. იპოვეთ 55!.

20. იპოვეთ 55-მდე ყველა მარტივ რიცხვთა სიმრავლე.

21. გამოთვალეთ $y = \dfrac{e^{\mathrm{arctg}\,(\sin x)} - 1}{\sqrt[5]{1 - \ln(1 + x)} - 1}$, როცა $x = 0$.

22. გამოთვალეთ $y = \dfrac{\sqrt[3]{4 + x^2} + 7x}{x^2 - 5x + 6}$, როცა $x = 2$.

23. იპოვეთ $y = \dfrac{e^{\cos x} - 5x + 1}{x^2 + 5x + 15}$, როცა $x = 2$. პასუხი ჩაწერეთ უკვეცი წილადის სახით.

24. შემოიღეთ შესაბამისი აღნიშვნები, გამოთვალეთ და შედეგები ჩაწერეთ სხვადასხვა ფორმატში:

1) $Z = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[3]{x - \sin y}}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{|x|\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt[3]{x - \sin y}}$, $\quad x = 0{,}325, \ \ y = 2{,}57;$

2) $W = \left(1 + \dfrac{\ln y}{x + \operatorname{tg} y}\right)^{1 + \frac{x + \operatorname{tg} y}{\ln y}}$, $\quad x = 37, \ \ y = 47;$

3) $R = \operatorname{sh}\dfrac{(x + \ln y)^3}{\sqrt{|x - \ln y|}} \operatorname{ch}\left((x + \ln y)\sqrt{|x - \ln y|}\right)$, $\quad x = 3{,}57, \quad y = 2{,}62;$

4) $H = \dfrac{\sqrt{\cos 2y + \sin 4y + \sqrt{e^x + e^{-x}}}}{(e^x + e^{-x})^3(\cos 2y + \sin 4y + 1)^2}$, $\quad x = 0{,}3753, \quad y = 46°;$

5) $A = \sqrt[5]{x(1 + 2x)^2(1 + 3x)^3 + \sqrt[3]{\dfrac{x(1 + 2x)^2(1 + 3x)^3}{\ln|\operatorname{ctg} y|}}}$,

$x = 2{,}493, \quad y = 4{,}367;$

6) $S = \sqrt{\left|\dfrac{x - \sin y}{x + \sin y} + \dfrac{x + \sin y}{x - \sin y}\right| + e^{(x - \sin y)(x + \sin y)}}$,

$x = 4{,}35, \quad y = 60°;$

7) $B = \dfrac{1 + \arcsin(\cos 2y)}{2^x + 3^{-x}} + \left(\dfrac{2^x + 3^{-x} - 1}{1 + \arcsin(\cos 2y)}\right)^2$,

$x = 0{,}576, \quad y = 46°.$

25. იპოვეთ $Y = (x^2 + 1)^3 x^3$ ფუნქციის მნიშვნელობები, როცა $x = -2{,}5, \dots, 3$ ბიჯით $h = 0{,}5$.

26. იპოვეთ $d = \dfrac{1}{2}gt^2$ ფუნქციის მნიშვნელობები, თუ დრო $t = 1, \dots, 10$ ბიჯით $h = 1$, ხოლო $g = 9{,}8$მ/წმ^2.

27. გამოთვალეთ $z = \dfrac{xy + \dfrac{4}{x}}{(x+y)^{(y-x)}} + 12^{\frac{x}{y}}$, როცა x და y ცვლადები ღებულობენ მნიშვნელობებს $x = 2, \dots, 10$, ბიჯით $h_1 = 2$; $y = 3, \dots, 15$, ბიჯით $h_2 = 3$.

28. გამოთვალეთ $T = \dfrac{xyz}{(h+k)^{k/5}} + \dfrac{ke^{\left(\frac{z}{x}+y\right)}}{z^h}$, თუ $h = 0{,}9$; $k = 12{,}5$;

$x = 1, \dots, 4$ ბიჯით $h_1 = 1$
$y = 0{,}9, \dots, 0{,}6$ ბიჯით $h_2 = -0{,}1$
$z = 2{,}5, \dots, 4$ ბიჯით $h_3 = 0{,}5$.

29. გამოთვალეთ

$$D = \frac{36a^3 - 144a - 36a^2 + 144}{a^3 + 27} \cdot \left(1 + \left(\frac{a}{3}\right)^{-2}\right) \cdot \frac{1}{16a^{-2} - 4},$$

$a = 3, \dots, 15$, $h = 2$.

30. გამოთვალეთ

$$E = \frac{2b + a - \dfrac{4a^2 - b^2}{2}}{b^3 + 2ab^2 - 3a^2 b} \cdot \frac{a^3 b - 2a^2 b^2 + ab^2}{a^2 - b^2},$$

$a = 2, \dots, 7$, $h_1 = 1$; $b = 3, \dots, 8$; $h_2 = 1$.

31. გამოთვალეთ

1) $Z = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt[3]{x - \sin y}}{\sqrt{1 + x^2}} - \dfrac{|x|\sqrt{1 + x^2}}{\sqrt[3]{x - \sin y}}$, $x = 3, \dots, 7$, $h_1 = 0{,}5$,

$y = 5, \dots, 9$, $h_2 = 0{,}5$;

2) $W = \left(1 + \dfrac{\ln y}{x + \operatorname{tg} y}\right)^{1 + \frac{x + \operatorname{tg} y}{\ln y}}$, $x = 20, \dots, 30$, $h_1 = 1$,

$y = 10, \dots, 20$, $h_2 = 1$;

3) $R = \operatorname{sh} \dfrac{(x + \ln y)^3}{\sqrt{|x - \ln y|}} \operatorname{ch}\left((x + \ln y)\sqrt{|x - \ln y|}\right)$, $x = 3, \dots, 9$, $h_1 = 0{,}5$,

$y = 4, \dots, 10$, $h_2 = 0{,}5$;

4) $H = \dfrac{\sqrt{\cos 2y + \sin 4y + \sqrt{e^x + e^{-x}}}}{(e^x + e^{-x})^3(\cos 2y + \sin 4y + 1)^2}$, $x = 0{,}5, \dots, 2{,}5$, $h_1 = 0{,}5$,

$y = 1, \dots, 3$, $h_2 = 0{,}5$;

5) $A = \sqrt[5]{x(1+2x)^2(1+3x)^3 + \sqrt[3]{\dfrac{x(1+2x)^2(1+3x)^3}{\ln|\operatorname{ctg} y|}}}$,

$x = 3, \dots, 6$, $h_1 = 0{,}5$,
$y = 4, \dots, 7$, $h_2 = 0{,}5$;

6) $S = \sqrt{\left|\dfrac{x - \sin y}{x + \sin y} + \dfrac{x + \sin y}{x - \sin y}\right| + e^{(x - \sin y)(x + \sin y)}}$, $x = 4, \dots, 6$, $h_1 = 0{,}5$,

$y = 8, \dots, 10$, $h_2 = 0{,}5$;

7) $B = \dfrac{1 + \arcsin(\cos 2y)}{2^x + 3^{-x}} + \left(\dfrac{2^x + 3^{-x} - 1}{1 + \arcsin(\cos 2y)}\right)^2$, $x = 1, \dots, 10$, $h_1 = 1$,

$y = 3, \dots, 12$, $h_2 = 1$;

8) $A = 2 \cdot 4{,}2^{4x-5y} + \dfrac{\sqrt[5]{3\ln|xy| + 2x^2}}{\sin y^2 + 3}$, $x = -1, \dots, 5$, $h_1 = 1{,}5$,

$y = 0, \dots, 4$, $h_2 = 1$;

9) $B = xy^2 + \log|3x + 2y| \cdot \dfrac{\arccos\dfrac{x^2}{x^2+3} + 3y}{\mathrm{e}^{2x-3y}}$, $x = -3, \dots, 9$, $h_1 = 2$,

$y = -3, \dots, 3$, $h_2 = 1$;

10) $S = \mathrm{e}^{\frac{x^2 - 2y}{y+4}} + y\left(\sqrt[4]{2\arcsin x} + 2x\right)$, $x = 0, \dots, 1$, $h_1 = 0{,}1$,

$y = -1, \dots, 3$, $h_2 = 0{,}4$;

11) $H = x\mathrm{e}^{2x+3y} - \dfrac{\ln|x^2 - 2y| + \operatorname{arctg} 2y}{4x - 3y}$, $x = -2, \dots, 1$, $h_1 = 1$,

$y = 0, \dots, 1{,}5$, $h_2 = 0{,}5$;

32. ჭურვის ტრაექტორია, რომელიც გასროლილია V_0 საწყისი სიჩქარით და α კუთხით ჰორიზონტთან, განისაზღვრება ტოლობით:

$$Y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{gx^2}{V_0{}^2 \cos^2 \alpha} \,.$$

გამოთვალეთ Y, თუ $V_0 = 1,\dots,5$, $h_1 = 1$; $x = 2,..,10$, $h_2 = 2$; $\alpha = 0,\dots,\frac{\pi}{3}$, $h_3 = \frac{\pi}{12}$.

33. დაკიდებული ხიდის ბაგირით მოხაზული წირი მოცემულია ტოლობით:

$$y = \frac{hx^2}{l^2} - \frac{2hx}{l} + h,$$

სადაც x მანძილია, რომელიც ხიდის ერთი ბოლოდან იზომება, ამ ბაგირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \sqrt{l^2 + 4h^2} + \frac{e^2}{2^h}\operatorname{arcsh}\left(\frac{2^h}{l}\right).$$

იპოვეთ S, თუ $l = 0,\dots,100$, $h_1 = 20$; $h = 0,\dots,20$, $h_2 = 4$.

3. ვექტორები, მატრიცები, მასივები, წრფივ განტოლებათა სისტემები

მასივები მრავალგანზომილებიანი ცხრილებია, მატრიცები ორ-განზომილებიანი მასივებია (სტრიქონებისა და სვეტების რაოდენობა), ვექტორები $1\times m$ ან $n\times 1$ ზომის მატრიცებია.

ა) ვექტორები: კონსტრუირება და ოპერაციები

სტრიქონ-ვექტორი	$\mathrm{A} = [\mathrm{a}_1\ \ \mathrm{a}_2\ \ \mathrm{a}_3\ \dots \mathrm{a}_\mathrm{m}]$ ან $\mathrm{A} = [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{m}]$
სვეტ-ვექტორი	$\mathrm{A} = [\mathrm{a}_1; \mathrm{a}_2; \mathrm{a}_3; \dots; \mathrm{a}_\mathrm{n}]$
ვექტორი, რომლის კომპონენტები მუდმივი ბიჯით იცვლებიან (a საწყისი წერტილით, b – ბოლო წერტილით, h ბიჯით), $h = \frac{b-a}{n}$, $n = \frac{b-a}{h} + 1$	$\mathrm{A} = \mathrm{a} : \mathrm{h} : \mathrm{b} \qquad (\mathrm{b} > a)$ თუ ბიჯი $h = 1$, მაშინ $\mathrm{A} = \mathrm{a} : \mathrm{b}$
თუ n-განზომილებიანი ვექტორი (a საწყისი წერტილითა და b ბოლო წერტილით) მიღებულია $[a,b]$ მონაკვეთის n ტოლ ნაწილად დაყოფით	$\mathrm{A} = \mathrm{linspace(a, b, n)}$ $\mathrm{A} = \mathrm{linspace(a, b)}$, ამ შემთხვევაში ავტომატურად აიღება $\mathrm{n} = 100$
ვექტორის ელემენტების ჯამი	sum(A)
ვექტორის ელემენტების ნამრავლი	prod(A)
ვექტორის ელემენტთა სა-შუალო არითმეტიკული	mean(A) ან sum(A)/length(A)
ვექტორის მინიმალური ელემენტის მოძებნა	min(A), [m, n] = min(A). m ცვლადში მოთავსდება მინიმალური ელემენტი, ხოლო n ამ ელემენტის ნომერია

ვექტორის მაქსიმალური ელემენტის მოძებნა	max(A), [m,n] = max(A). m ცვლადში მოთავსდება მაქსიმალური ელემენტი, ხოლო n ამ ელემენტის ნომერია
ელემენტების დალაგება ზრდადობით, კლებადობით	sort(A) −sort(−A)
ელემენტების მედიანა	median(A)
ელემენტების მოდა	mode(A)
ელემენტების სტანდარტული გადახრა	std(A)
ჰისტოგრამა	hist(A)

თუ ვექტორის ყველა ელემენტზე საჭიროა ერთი და იმავე მოქმედების ჩატარება, ჩაწერენ: $f(A)$

შედეგი იმავე ზომის ვექტორია, რომლის ელემენტები მიიღება A ვექტორის ყველა ელემენტზე f ოპერაციის ჩატარებით,

მაგალითად: $\sin(A)$, $\mathrm{sqrt}(A)$, $\log(A)$, $\mathrm{expm}(A)$

$\vec{a}=(x,y,z)$ ვექტორის სიგრძე: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	sqrt(sum(a.^2)) ან sqrt(a*a') ან norm(a)
ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი	dot(a,b) ან sum(a.*b) ან a*b'
ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი	cross(a,b)
სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$	sum(a.*cross(b,c)) ან dot(a,cross(b,c)) ან a*cross(b,c)' ან dot(cross(a,b),c) ან cross(a,b)*c' ან sum(cross(a,b).*c)
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ვექტორებზე აგებუ-ლი პარალელეპიპედის მოცულობა: $V=\left\|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right\|$	abs(a*cross(b,c)') ან abs(dot(a,cross(b,c)))
ტეტრაედრის მოცულობა $V=\frac{1}{6}V_{\text{პარალ}}$	abs(dot(a,cross(b,c)))/6 ან abs(a*cross(b,c)')/6

ორ ვექტორს შორის კუთხე $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}$	angle(a,b) = acos(dot(a,b)/(norm(a)*norm(b))) angled(a,b) = acosd(dot(a,b)/(norm(a)*norm(b))) ან phi = (180 * angle(a,b))/pi
სამი ვექტორის ვექტორულ-ვექტორული ნამრავლი $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$	cross(cross(a,b),c)
კუთხე ორ სიბრტყეს შორის, ასევე კუთხე ორ სივრცით წრფეს შორის $\cos\varphi = \dfrac{\lvert\vec{a}\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	acos(abs(a*b')/(norm(a)*norm(b))) (გრადუსებში), acosd(abs(a*b')/(norm(a)*norm(b))) (რადიანებში)
კუთხე სივრცით წრფესა და სიბრტყეს შორის $\sin\varphi = \dfrac{\lvert\vec{a}\vec{b}\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert}$	asin(abs(a*b')/(norm(a)*norm(b))) (გრადუსებში), asind(abs(a*b')/(norm(a)*norm(b))) (გრადუსებში)

მაგალითები

1. შექმენით სტრიქონ-ვექტორი, რომლის ელემენტებია:

   32, 4, 81, e^5, $\cos\dfrac{\pi}{3}$ და 14,12.

```
>> x = [32, 4, 81, exp(5), cos(pi/3), 14.12]
x =
   32.0000    4.0000    81.0000   148.4132    0.5000    14.1200
```

2. შექმენით სვეტ-ვექტორი, რომლის ელემენტებია:

   55, 14, ln(51), 987, 0, $5\sin(25\pi)$

$>>\ x = [55;\ 14;\ \log(51);\ 987;\ 0;\ 5*\sin(25*\mathrm{pi})]$

```
x  =
     55.0000
     14.0000
      3.9318
    987.0000
           0
     -0.0000
```

3. შექმენით სტრიქონ-ვექტორი, რომლის პირველი ელემენტია 1, ბოლო 33, ხოლო განსხვავება ორ მომდევნო ელემენტს შორის არის 2.

```
>>  a = 1;   b = 33;   h = 2;
>>  x = a:h:b
x  =
   Columns 1 through 14
    1    3    5    7    9   11   13   15   17   19   21   23   25   27
   Columns 15 through 17
   29   31   33
```

ან

```
>>  a = 1;  b = 33;  h = 2;
>>  n = (b - a)/h + 1;
>>  x = linspace(a,b,n)
x  =
   Columns 1 through 14
    1    3    5    7    9   11   13   15   17   19   21   23   25   27
   Columns 15 through 17
   29   31   33
```

4. შექმენით სვეტ-ვექტორი, რომლის პირველი ელემენტია 15, ბოლო – (−15), ხოლო ბიჯი $h = -5$ (სვეტ-ვექტორი შეიძლება მიღებული იქნას სტრიქონ-ვექტორის ტრანსპონირებით, რომელიც შეიქმნება ბრძანებით „ ′ “).

```
>>  a = 15;   b = -25;   h = -5;
>>  x = a:h:b;
>>  y = x'
```

$y\ =$

15

10

5

0

-5

-10

-15

-20

-25

ან

$>>\ a = 15; \quad b = -25; \quad h = -5;$

$>>\ n = (b - a)/h + 1;$

$>>\ x = \mathrm{linspace}(a, b, n);$

$>>\ y = x'$

$y\ =$

15

10

5

0

-5

-10

-15

-20

-25

5. მოცემულია წერტილები: $A(-3,5,4); \quad B(7,-3,2); \quad C(5,-1,6).$

1) იპოვეთ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{AC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BC}.$

$>>\ a = [7 - (-3) \quad - 3 - 5 \quad 2 - 4]$

$a\ =$

$10 \quad - 8 \quad - 2$

$>>\ b = [5 + 3 \quad - 1 - 5 \quad 6 - 4]$

$b\ =$

$8 \quad - 6 \quad 2$

$>>\ c = [5 - 7 \quad - 1 + 3 \quad 6 - 2]$

$c\ =$

$-2 \quad 2 \quad 4$

2) იპოვეთ $\vec{a}, \vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების სიგრძეები.

$>>$ $\mathrm{a1 = sqrt(sum(a.\hat{}2))}$

a1 =

12.9615

$>>$ $\mathrm{b1 = sqrt(sum(b.\hat{}2))}$

b1 =

10.1980

$>>$ $\mathrm{c1 = sqrt(sum(}c\mathrm{.\hat{}2))}$

c1 =

4.8990

3) იპოვეთ სკალარული ნამრავლი $\vec{\mathrm{a}} \cdot \vec{\mathrm{b}}$

$>>$ $\mathrm{a2 = dot(a, b)}$

a2 =

124

ან

$>>$ $\mathrm{a2 = sum(a.* b)}$

a2 =

124

4) იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის $\left(\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$.

$>>$ $\mathrm{angle = acosd(a2/(a1 * b1))}$

angle =

20.2647 (გრადუსებში)

$>>$ $\mathrm{angle = acos(a2/(a1 * b1))}$

angle =

0.3537 (რადიანებში)

5) იპოვეთ ვექტორული ნამრავლი $\vec{\mathrm{a}} \times \vec{\mathrm{c}}$

$>>$ $\mathrm{a3 = cross(a,c)}$

a3 =

$-28 \quad -36 \quad 4$

6) იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელოგრამისა და სამკუთხედის ფართობები $\left(S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|,\quad S_1 = S/2\right)$.

$>>$ $\mathrm{S = sqrt(sum(a3.\hat{}2))}$

S =

45.7821

>> S1 = S/2

S1 =

22.8910

6. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a} = (-1,2,1)$, $\vec{b} = (2,0,-3)$, $\vec{c} = (1,-3,1)$.

1) იპოვეთ შერეული ნამრავლი $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

>> d = dot(cross(a,b), c)

d =

−7 (ე.ი. ვექტორები არაკომპლანარულია)

2) იპოვეთ პარალელეპიპედისა და ტეტრაედრის მოცულობები.

>> V = abs(dot(cross(a,b), c))

V = 7

>> V1 = V/6

V1 = 1.1667

3) იპოვეთ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

>> e = cross(cross(a,b), c)

e =

−13 2 19

7. იპოვეთ კუთხე $x - 2y + 2z - 8 = 0$ და $5x + 9y - 3z - 1 = 0$ სიბრტყეების შორის (მითითება: სიბრტყეების მიმმართველი ვექტორებია: $\vec{m} = (1,-2,2)$ და $\vec{n} = (5,9,-3)$).

>> m = [1,−2,2];

>> n = [5,9,−3];

>> t = acos(abs(dot(m,n))/sqrt(sum(m.^2) * sum(n.^2)))

t =

0.9390 (რადიანებში)

>> t = acosd(abs(dot(m,n))/(sqrt(sum(m.^2) * sum(n.^2)))

t = 53.8014 (გრადუსებში).

8. იპოვეთ კუთხე $\frac{x-7}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+1}{-2}$ და $\frac{x+3}{-7} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{3}$ წრფეების შორის.

>> m1 = [3 5 −2];

>> n1 = [−7 2 3];

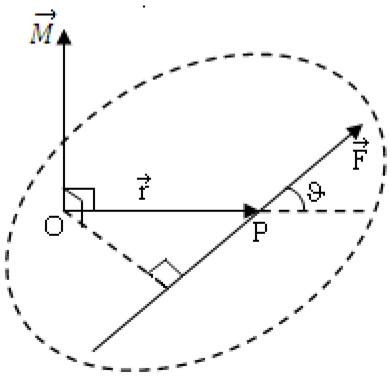
$>>$ t = cos(abs(dot(m1,n1))/sqrt(sum(m1.^2) * sum(n1.^2)))
t =
 1.2130 (რადიანებში)
$>>$ t = acosd(abs(dot(m1,n1))/sqrt(sum(m1.^2) * sum(n1.^2)))
t =
 69.4982 (გრადუსებში)

9. კუთხე $5x + 12y - 2z - 9 = 0$ სიბრტყეს და $\frac{x+9}{-5} = \frac{y-1}{-9} = \frac{z+7}{2}$ წრფეს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{m}_2 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{m}_2||\vec{n}_2|}$$ სადაც $\vec{m}_2 = (5, 12, -2)$ და $\vec{n}_2 = (-5, -9, 2)$.

$>>$ m2 = [5 12 −2];
$>>$ n2 = [−5 −9 2];
$>>$ t = asin(abs(dot(m,n))/sqrt(sum(m.^2) * sum(n.^2)))
t =
 0.6318 (რადიანებში)
$>>$ t = asind(abs(dot(m,n))/sqrt(sum(m.^2) * sum(n.^2)))
t =
 36.1986 (გრადუსებში)

10. თუ $\vec{F}$ ძალა მოდებულია P წერტილზე და $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, მაშინ $\vec{F}$ ძალის $\vec{M}$ მომენტი O წერტილის მიმართ არის $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (იხ. ნახ. 1).



ნახ. 1

ძალა, რომლის სიდიდე უდრის 4 ერთეულს, მოქმედებს $P(2,3,-5)$ წერტილზე $\vec{m}(4,5,-8)$ ვექტორის მიმართულებით. ვიპოვოთ ამ ძალის მომენტი $A(1,2,-3)$ წერტილის მიმართ.

$$\vec{M} = \overline{AP} \times \vec{F}, \quad \vec{F} = \frac{4}{|\vec{m}|}\vec{m}, \quad \overline{AP} = (1,1,-2\ ) = \vec{a}.$$

```
>>  m = [4 5 − 8];  m1 = sqrt(sum(m.^2)); F = 4 * m/m1;
>>  a = [1 1 − 2];  M = cross(a,F)
M  =
      0.7807     0    0.3904
```

11. $\vec{F}$ ძალა, რომლის სიდიდეა 46, მოქმედებს $A(3,2,4)$ წერტილზე $-2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ ვექტორის მიმართულებით. იპოვეთ:

ა) ძალის მომენტი $B(1,5,-2)$ წერტილის მიმართ;

ბ) $\vec{F}$ და $\overline{AB}$ ვექტორებს შორის კუთხე.

ა) ვთქვათ, $\vec{m} = -2\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, მაშინ

$$\vec{M} = \overline{BA} \times \vec{F}, \quad \vec{F} = \frac{46}{|\vec{m}|}\vec{m}, \quad \overline{BA} = (2,-3,6\ ) = \vec{a}.$$

```
>>  m = [−2  6  3];  m1 = sqrt(sum(m.^2)); F = 46 * m/m1;
>>  a = [2  − 3  6];  M = cross(a,F)
M  =
     −295.7143   − 118.2857    39.4286
```

ბ) ვთქვათ, $\vec{a} = \overline{AB} = (-2,\ 3,-6\ )$, მაშინ

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{F}}{|\vec{a}||\vec{F}|}.$$

```
>>  m = [−2  6  3];  F = 46 * m/sqrt(sum(m.^2)); a = [−2  3  − 6];
>>  t = acos(dot(a,F)/sqrt(sum(a.^2) * sum(F.^2)))
t  =
    1.4891    (რადიანებში)
>>  t = acosd(dot(a,F)/sqrt(sum(a.^2) * sum(F.^2)))
t  =
    85.3176   (გრადუსებში)
```

სავარჯიშოები

1. შექმენით სტრიქონ-ვექტორი, რომლის ელემენტებია:

$32,\ 4,\ 81,\ e^{2,5},\ \cos\frac{\pi}{3}$ და $14{,}12$.

2. შექმენით სვეტ-ვექტორი, რომლის ელემენტებია $55,\ 14,\ \ln(15),\ 987,\ 0,\ 5\sin(25\pi)$.

3. შექმენით სტრიქონ-ვექტორი, რომლის პირველი ელემენტია 2, ბოლო 30, ხოლო განსხვავება ორ მომდევნო ელემენტს შორის არის 2.

4. შექმენით სვეტ-ვექტორი, რომლის პირველი ელემენტია 15, ბოლო ელემენტია -25, განსხვავება ორ მომდევნო ელემენტს შორის კი არის -5.

5. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(2,-4,3)$, $\vec{b}=(4,6,-5)$. იპოვეთ:
   1) $(2\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b})$;
   2) $(2\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-2\vec{b})$;
   3) $|2\vec{a}+3\vec{b}|$.

6. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(2,7,-3)$, $\vec{b}=(-5,9,4)$. იპოვეთ:
   1) $(\vec{a}-4\vec{b})(3\vec{a}+5\vec{b})$;
   2) $(\vec{a}-4\vec{b})\times(3\vec{a}+5\vec{b})$;
   3) $|2\vec{a}+3\vec{b}|$.

7. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(5,6,-4)$, $\vec{b}=(-3,2,-6)$. იპოვეთ კუთხე $3\vec{a}+\vec{b}$ და $-\vec{a}+2\vec{b}$ ვექტორებს შორის.

8. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(2,1,-4)$, $\vec{b}=(-1,6,3)$, $\vec{c}=(5,7,-9)$. იპოვეთ
   1) $\left((2\vec{a}-6\vec{b})\times(4\vec{a}+3c)\right)\times(2\vec{b}-4\vec{c})$;
   2) $(2\vec{a}-6\vec{b})\times\left((4\vec{a}+3c)\times(2\vec{b}-4\vec{c})\right)$;

8. მოცემულია ვექტორები: $\vec{a}=(1,4,-1)$, $\vec{b}=(-2,1,5)$, $\vec{c}=(2,1,3)$. იპოვეთ $\vec{P}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{Q}=4\vec{a}+2\vec{c}$ და $\vec{R}=2\vec{b}-3\vec{c}$ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა.

9. მოცემულია წერტილები: $A(3,2,1)$, $B(4,-2,7)$, $C(6,-3,9)$, $D(2,-8,6)$. იპოვეთ

1) $a=\overline{AB}$, $b=\overline{AC}$, $c=\overline{BD}$, $\vec{d}=\overline{BC}$;
2) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე;
3) $\vec{c}\times\vec{d}$, პარალელოგრამის ფართობი, სამკუთხედის ფართობი;
4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, $V_{\text{პარალელეპიპედი}}$, $V_{\text{ტეტრაედრი}}$;
5) $|(\overline{\vec{a}\times\vec{b}})\times(\vec{c}\times\vec{d})|$.

10. მოცემულია ორი სიბრტყე: $x-2y+2z-8=0$ და $5z+9y-3z-1=0$. იპოვეთ კუთხე ამ სიბრტყეებს შორის.

11. იპოვეთ კუთხე $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+3}{1}$ და $\frac{z-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-2}$ წრფეებს შორის.

12. იპოვეთ კუთხე $5z+2y-3z-1=0$ სიბრტყეს და $\frac{x+7}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-1}{-3}$ წრფეს შორის.

ბ) მატრიცები

მატრიცის შექმნა ხდება კვადრატულ ფრჩხილებში ელემენტების ჩამოთვლით, რომლებიც ერთმანეთისაგან გამოყოფილია მძიმით ან ჰაარით („პრობელით“), სტრიქონები კი ერთმანეთისაგან გამოიყოფა წერტილ-მძიმით. მატრიცის შექმნა ხდება აგრეთვე სტრიქონ-სტრიქონ	$A=[a_1,b_1,c_1;a_2,b_2,c_2;a_3,b_3,c_3]$ $A=[a_1\ b_1\ c_1;a_2\ b_2\ c_2;a_3\ b_3\ c_3]$ $A=[a_1\ b_1\ c_1$ (*enter*) $a_2\ b_2\ c_2$ (*enter*) $a_3\ b_3\ c_3]$ (*enter*)
ნულოვანი $n\times n$ განზომილების კვადრატული მატრიცა	x = zeros(n)

$m \times n$ განზომილების მატრიცა, რომლის ყველა ელემენტი ნულია	$x = \mathrm{zeros}(m, n\ )$
$n \times n$ განზომილების კვადრატული ერთეულოვანი მატრიცა	$\mathrm{I} = \mathrm{eye}(n)$
$m \times n$ განზომილების მატრიცა, რომლის მთავარ დიაგონალზე 1-იანებია, ყველა დანარჩენი ელემენ-ტი 0-ებია	$\mathrm{I} = \mathrm{eye}(m, n)$
$n \times n$ განზომილებიანი მატრიცა, რომლის ყველა ელემენტი 1-ის ტოლია	$\mathrm{A} = \mathrm{ones}(n)$
$m \times n$ განზომილებიანი მატრიცა, რომლის ყველა ელემენტი 1-ის ტოლია	$\mathrm{A} = \mathrm{ones}(m, n)$
დიაგონალური მატრიცა, რომლის მთავარ დიაგონალზე დგანან რიცხვები $a, b, c, d,$ დანარჩენი ელემენტები 0-ებია	$\mathrm{A} = \mathrm{diag}[\mathrm{a\ b\ c\ d}]$ ან ასე: $\mathrm{V} = [\mathrm{a}; \mathrm{b}; \mathrm{c}; \mathrm{d}]$ $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{V})$
მატრიცა, რომლის დიაგონალური ელემენტებიდან k ერთეულით მარჯვნივ (მარცხნივ) დგანან ელე-მენტები $a, b, c,$ დანარჩენი ელე-მენტები 0-ებია	$\mathrm{A} = \mathrm{diag}([\mathrm{a\ b\ c}], \mathrm{k}\ )$ $\mathrm{A} = \mathrm{diag}([\mathrm{a\ b\ c}], -\mathrm{k}\ )$ ან ასე: $\mathrm{V} = [\mathrm{a}; \mathrm{b}; \mathrm{c}]$ $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{V}, \mathrm{k})$ $\mathrm{A} = \mathrm{diag}(\mathrm{V}, -\mathrm{k})$
ვექტორი, რომლის კომპონენტებია A მატრიცის დიაგონალური ელე-მენტები	$\mathrm{m} = \mathrm{diag}(\mathrm{A})$
A მატრიცის ზომის მატრიცა, რო-მელშიც შეტანილია A მატრიცის დიაგონალის ქვემოთ (ზემოთ) მდგომი ელემენტები, ზემოთ (ქვე-მოთ) კი ნულებია, ე.ი. ქვედა (ზე-და) სამკუთხოვანი მატრიცის მი-ღება	$\mathrm{b} = \mathrm{tril}(\mathrm{A})$ $\mathrm{b} = \mathrm{triu}(\mathrm{A})$

A მატრიცის სვეტების ურთიერთ-შენაცვლება სიმეტრიულად ცენტრის მიმართ	fliplr(A)
A მატრიცის სტრიქონების ურთი-ერთშენაცვლება სიმეტრიულად ცენტრის მიმართ	flipud(A)
(0,1) შუალედში მოთავსებული შე-მთხვევითი რიცხვებით შედგენილი $m \times n$ განზომილებიანი მატრიცა	rand(m,n)
(0,1) შუალედში მოთავსებული შე-მთხვევითი რიცხვებით შედგენილი n განზომილებიანი კვადრატული მატრიცა	rand(n)
ნორმალურად განაწილებული შემ-მთხვევითი რიცხვებისაგან შედგე-ნილი $m \times n$ განზომილებიანი მა-ტრიცა	randn(m,n)
ნორმალურად განაწილებული შე-მთხვევითი რიცხვებისაგან შედგე-ნილი n განზომილებიანი კვადრა-ტული მატრიცა	randn(n)
$[a, b]$ შუალედში თანაბრად განა-წილებული მთელი რიცხვების $m \times n$ განზომილებიანი მატრიცა	randi([a,b],m,n)
$[a, b]$ შუალედში თანაბრად განა-წილებული მთელი რიცხვების n განზომილებიანი კვადრატული მა-ტრიცა	randi([a,b],n)
$[0, b]$ შუალედში თანაბრად განა-წილებული მთელი რიცხვების n განზომილებიანი კვადრატული მა-ტრიცა	randi(b,n)

A მატრიცის მობრუნება 90^0-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით	rot90(A)
A მატრიცის მობრუნება 90^0-ით k-ჯერ საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით	rot90(A, k)
A და B მატრიცების შეერთება მარჯვნიდან, ე.ი. A მატრიცას მიეწერება B მატრიცა მარჯვნიდან	M = [A B] ან M = cat(2, A, B)
A მატრიცას მიეწერება B მატრიცა ქვემოდან	M = [A; B] ან M = cat(1, A, B)
A მატრიცის ფორმის შეცვლა. მიიღება $m \times n$ განზომილებიანი მატრიცა, შედგენილი A მატრიცის სვეტებით. A მატრიცის ელემენტთა რაოდენობა უნდა იყოს mn.	reshape(A, m, n)
მატრიცის სვეტების ელემენტების ჯამები	sum(A, 1) ან sum(A)
მატრიცის სტიქონების ელემენტების ჯამები	sum(A, 2)
მატრიცის სვეტების ელემენტების ნამრავლები	prod(A, 1) ან prod(A)
მატრიცის სტრიქონების ელემენტების ნამრავლები	prod(A, 2)
მატრიცის სვეტების ელემენტების დალაგება ზრდადობით, კლებადობით	sort(A, 1) ან sort(A) −sort(−A, 1) ან − sort(−A)
მატრიცის სტრიქონების ელემენტების დალაგება ზრდადობით, კლებადობით	sort(A, 2) −sort(−A, 2)
მატრიცის სვეტის ამოშლა	M(:, n) = [ ], ამოიშლება n-ური სვეტი
მატრიცის სტრიქონის ამოშლა	M(m, :) = [ ], ამოიშლება m-ური სტრიქონი

მატრიცის სვეტის ჩანაცვლება სხვა სვეტით	$\mathrm{M}(:,\mathrm{n}) = \mathrm{B}$, n-ური სვეტი შეიცვლება B სვეტით
მატრიცის სტრიქონის ჩანაცვლება სხვა სტრიქონით	$\mathrm{M}(\mathrm{m},:) = \mathrm{B}$, m-ური სტრიქონი შეიცვლება B სტრიქონით
თითოეული სვეტის ელემენტების საშუალო არითმეტიკულებისაგან შედგენილი სტრიქონი	$\mathrm{mean}(\mathrm{A}) = \mathrm{mean}(\mathrm{A},1)$
თითოეული სტრიქონის ელემენტების საშუალო არითმეტიკულებისაგან შედგენილი სვეტი	$\mathrm{mean}(\mathrm{A},2)$
თითოეული სვეტის მაქსიმალური (მინიმალური) ელემენტებისაგან შედგენილი სტრიქონი	$\max(\mathrm{A})$ ან $\max(\mathrm{A},[\ ],1)$ $\min(\mathrm{A})$ ან $\min(\mathrm{A},[\ ],1)$
თითოეული სტრიქონის მაქსიმალური (მინიმალური) ელემენტებისაგან შედგენილი სვეტი	$\max(\mathrm{A},[\ ],2)$ $\min(\mathrm{A},[\ ],2)$
სვეტების ელემენტების მედიანები	$\mathrm{median}(\mathrm{A})$
სტრიქონების ელემენტების მედიანები, ჩაწერილი სტრიქონში	$\mathrm{median}(\mathrm{A}')$
მატრიცის სვეტების ელემენტთა სტანდარტული გადახრების სტრიქონი	$\mathrm{std}(\mathrm{A})$ ან $\mathrm{std}(\mathrm{A},0)$ ან $\mathrm{std}(\mathrm{A},0,1)$ $\mathrm{std}(\mathrm{A},1)$ ან $\mathrm{std}(\mathrm{A},1,1)$
მატრიცის სტრიქონების ელემენტთა სტანდარტული გადახრების სვეტი	$\mathrm{std}(\mathrm{A},0,2)$ $\mathrm{std}(\mathrm{A},1,2)$

$$S = \left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (0)$$

$$S = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$$

მატრიცის ტრანსპონირება	A'

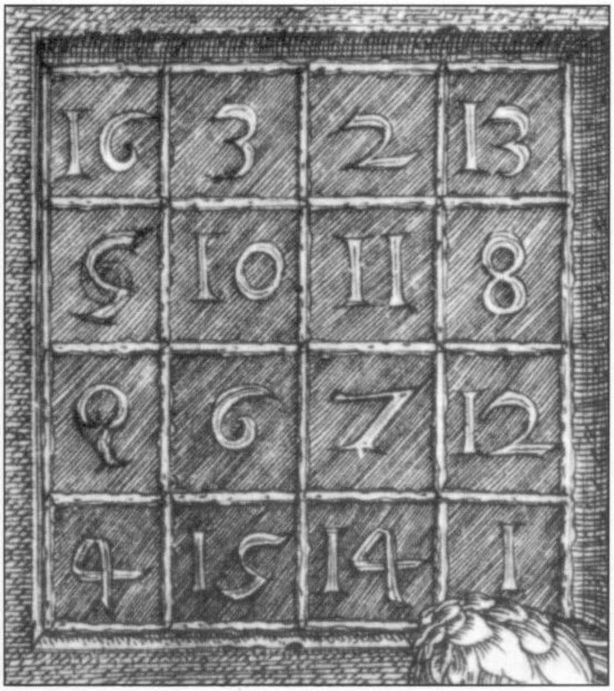
კომპლექსური მატრიცის ტრანსპო-ნირება და კომპლექსურად შეუღ-ლება	A′
მატრიცის შებრუნება	A^(−1) ან inv(A)
მატრიცების ჩვეულებრივი ნამრავ-ლი	A ∗ B
მატრიცების ელემენტობრივი ნა-მრავლი	A.∗ B
კვადრატული მატრიცის ჩვეულებ-რივი ახარისხება n ხარისხში	A^n
კვადრატული მატრიცის ელემენ-ტობრივი ახარისხება n ხარისხში	A. ^n
A მატრიცის ელემენტების გაყოფა B მატრიცის შესაბამის ელემენ-ტებზე	A./B
B მატრიცის ელემენტების გაყოფა A მატრიცის შესაბამის ელემენ-ტებზე	A.\B ან B./A
A მატრიცის რანგი	rank(A)
A კვადრატული მატრიცის დეტერ-მინანტი	det(A)
ექსპონენციალური ფუნქცია A მა-ტრიცის თითოეული ელემენტიდან – e^A	exp(A)
კვადრატული ფესვი A მატრიცის თითოეული ელემენტიდან – $\sqrt{A}$	sqrt(A)
ლოგარითმული ფუნქცია A მატრი-ცის თითოეული ელემენტიდან – $\ln A$	log(A)
A მატრიცის საკუთრივი რიცხვები-საგან შემდგარი სვეტ-ვექტორი	eig(A) [V, D] = eig(A) V – საკუთრივი ვექტორებისა-გან შემდგარი სვეტია, D – დიაგონალური მატრიცა,

	მთავარ დიაგონალზე საკუთ-რივი რიცხვებია, დანარჩენი ელემენტები ნულებია

სპეციალური სახის მატრიცები

პასკალის მატრიცა – პასკალის სამკუთხედის შესაბამისი მატრიცა. არამთავარი დიაგონალის პარალე-ლურად განლაგებულია შესაბამისი ბინომური კოეფიციენტები.	P = pascal(n)
ტეპლიცის მატრიცა – მთავარ დია-გონალზე და მის სიმეტრიულად შესაბამისად განლაგებულია მოცე-მული რიცხვები	$\mathrm{T = toeplitz([v_1\ v_2\ \cdots\ v_n])}$
ადამარის მატრიცა – რიცხვებით 1 და −1 შედგენილი $n = 2^k$ რიგის კვადრატული მატრიცა, რომლის სვეტები ორთოგონალურია.	H = hadamard(n)
„მაგიური კვადრატი“ – 1-დან n^2-მდე რიცხვებისაგან შედგენილი n რიგის კვადრატული მატრიცა. ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ტოლია ნებისმიერი სვეტის ელემენტების ჯამისა, ასევე დიაგონალების ელემენტების ჯამისა.	M = magic(n)

ალორძინების პერიოდის უდიდესი გერმანელი მხატვრის, ფერმწერის, გრაფიკოსის, გრავიორის, ხელოვნების თეორეტიკოსისა და მათემატიკის დიდი მოყვარულის ალბრეხტ დიურერის გრავიურა „მელანქოლია“ შეიცავს ბევრ მათემატიკურ სიმბოლოს. გრავიურის ზედა მარჯვენა კუთხეში მოთავსებულია 4×4 ზომის მატრიცა, რომელიც ცნობილია მაგიური კვადრატის სახელწოდებით და რომელიც ერთ-ერთ რთულ გამოცანას წარმოადგენს. მასში განლაგებულია 1-დან 16-მდე რიცხვები ისე, რომ ნებისმიერი სტრიქონის, სვეტის, დიაგონალებზე



მდგომი ელემენტების, ოთხივე კუთხეში მოთავსებული კვადრატების, ასევე ცენტრალურ კვადრატში რიცხვთა ჯამი ერთი და იგივეა – **34**, კუთხეებში მოთავსებული ოთხივე რიცხვის ჯამიც 34-ია, ქვედა სტრიქონის შუა ორი რიცხვი დიურერის მიერ ამ გრავიურის შექმნის წელს (1514) მიანიშნებს.

მაგალითები

1. შექმენით B მატრიცა, გამოიყენეთ ვექტორის შექმნის ფორმა $x = a : h : b$ ან ბრძანება linspace

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & 25 \\ 72 & 66 & 60 & 54 & 48 & 42 & 36 & 30 & 24 \\ 0 & 0{,}125 & 0{,}250 & 0{,}375 & 0{,}500 & 0{,}625 & 0{,}750 & 0{,}875 & 1 \end{pmatrix}$$

$>> x = 1 : 3 : 25;$

```
>> y = 72 : −6 : 24;
>> z = 0 : 0.125 : 1;
>> B = [x; y; z]
B  =
    Columns 1 through 6
      1.0000       4.0000     7.0000     10.0000     13.0000    16.0000
     72.0000      66.0000    60.0000     54.0000     48.0000    42.0000
           0       0.1250     0.2500      0.3750      0.5000     0.6250
    Columns 7 through 9
     19.0000      22.0000    25.0000
     36.0000      30.0000    24.0000
      0.7500       0.8750     1.0000
```

ან

```
>> x = linspace(1,25,9);
>> y = linspace(72,24,9);
>> z = linspace(0,1,9);
>> B = [x; y; z]
B  =
    Columns 1 through 6
      1.0000      4.0000      7.0000    10.0000    13.0000    16.0000
     72.0000     66.0000     60.0000    54.0000    48.0000    42.0000
           0      0.1250      0.2500     0.3750     0.5000     0.6250
   Columns 7 through 9
     19.0000     22.0000     25.0000
     36.0000     30.0000     24.0000
      0.7500      0.8750      1.0000
```

2. ააგეთ 3×4 განზომილების მატრიცა

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 10 & 2 \\ 13 & 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1) იპოვეთ ელემენტი $M(3,1)$

```
>> M = [3 11 6 5; 4 7 10 2; 13 9 0 8];
>> K = M(3,1)
K =
      13
```

2) შეცვალეთ $M(3,1)$ ელემენტი რიცხვით 20.

```
>> M = [3 11 6 5; 4 7 10 2; 13 9 0 8];
>> M(3,1) = 20
M =
     3    11     6     5
     4     7    10     2
    20     9     0     8
```

3) იპოვეთ $M(2,4) - M(1,2)$

```
>> M = [3 11 6 5; 4 7 10 2; 13 9 0 8];
>> X = M(2,4) - M(1,2)
X =
    -9
```

3. ააგეთ დიურერის მეოთხე რიგის მაგიური მატრიცა, იპოვეთ სვეტე-ბის, სტრიქონების ელემენტების ჯამი.

```
>> M = magic(4)
M =
    16     2     3    13
     5    11    10     8
     9     7     6    12
     4    14    15     1
>> x = sum(M)
x =
    34    34    34    34
>> M1 = M'
M1 =
    16     5     9     4
     2    11     7    14
     3    10     6    15
    13     8    12     1
>>  y = sum(M1)'
y =
     34
     34
     34
     34
```

როგორც ვხედავთ, ეს ჯამები ერთი და იგივეა. დიაგონალზე მდგომი ელემენტების ჯამებიც 34-ია.

4. შეადგინეთ პასკალის მეოთხე რიგის მატრიცა.

```
>> P = pascal(4)
P =
   1   1    1    1
   1   2    3    4
   1   3    6   10
   1   4   10   20
```

5. შეადგინეთ ტეპლიცის მატრიცა ელემენტებით 3,5,7,9.

```
>>  T = toeplitz([3,5,7,9])
T =
   3   5   7   9
   5   3   5   7
   7   5   3   5
   9   7   5   3
```

ან ასე

```
>>  v = [3 5 7 9]; T = toeplitz(v)
T =
   3   5   7   9
   5   3   5   7
   7   5   3   5
   9   7   5   3
```

6. ააგეთ 5×4 ზომის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვებისაგან შედგენილი მატრიცა. მოახდინეთ მისი ტრანსპონირება, მობრუნება 90^0-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

```
>> A = randn(5,4)
A =
    0.5377   -1.3077   -1.3499   -0.2050
    1.8339   -0.4336    3.0349   -0.1241
   -2.2588    0.3426    0.7254    1.4897
    0.8622    3.5784   -0.0631    1.4090
    0.3188    2.7694    0.7147    1.4172
```

$>> B = A'$

$B\ =$

$$\begin{matrix} 0.5377 & 1.8339 & -2.2588 & 0.8622 & 0.3188 \\ -1.3077 & -0.4336 & 0.3426 & 3.5784 & 2.7694 \\ -1.3499 & 3.0349 & 0.7254 & -0.0631 & 0.7147 \\ -0.2050 & -0.1241 & 1.4897 & 1.4090 & 1.4172 \end{matrix}$$

$>> C = rot90(A)$

$C\ =$

$$\begin{matrix} -0.2050 & -0.1241 & 1.4897 & 1.4090 & 1.4172 \\ -1.3499 & 3.0349 & 0.7254 & -0.0631 & 0.7147 \\ -1.3077 & -0.4336 & 0.3426 & 3.5784 & 2.7694 \\ 0.5377 & 1.8339 & -2.2588 & 0.8622 & 0.3188 \end{matrix}$$

7. შეადგინეთ დიაგონალური მატრიცა, რომლის მთავარ დიაგონალზე მდებარე რიცხვებია $2, 4, 6, 8$.

>> A = diag([2 4 6 8])

$A\ =$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{matrix}$$

8. აგეთ 4×4 ზომის ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი მთელი რიცხვებისაგან შედგენილი მატრიცა. იპოვეთ მისი დეტერმინანტი, მატრიცის შებრუნებული. მიიღეთ მისგან ზედა სამკუთხოვანი და ქვედა სამკუთხოვანი მატრიცები.

$>> A = randi(4,4)$

$A\ =$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{matrix}$$

>> B = det(A)

$B\ =$

3

$>> C = inv(A)$

C =

$$\begin{matrix} -1.6667 & -0.3333 & -0.6667 & 3.3333 \\ 1.6667 & 0.3333 & 1.6667 & -4.3333 \\ -0.3333 & 0.3333 & -1.3333 & 1.6667 \\ 1.3333 & -0.3333 & 1.3333 & -2.6667 \end{matrix}$$

>> A1 = triu(A)

A1 =

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

>> A2 = tril(A)

A2 =

$$\begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{matrix}$$

9. ააგეთ მატრიცა

$$A = \begin{pmatrix} \sin(1) & {}^{5}/_{3} & e^{-2} \\ 6\pi & 2^{-1,4} & \log_2 5 \end{pmatrix}.$$

>> A = [sin(1) 5/3   exp(−2); 6 ∗ pi   2^(−1.4)   log(5)/log(2)]

A =

$$\begin{matrix} 0.8415 & 1.6667 & 0.1353 \\ 18.8496 & 0.3789 & 2.3219 \end{matrix}$$

10. ააგეთ მატრიცები:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}.$$

მათი დახმარებით მიიღეთ მატრიცები:

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\4&5&6\\7&8&9\\10&11&12\\13&14&15\end{pmatrix}\quad \text{და} \quad N=\begin{pmatrix}1&2&3&7&8&9\\2&3&4&10&11&12\\4&5&6&13&14&15\end{pmatrix}.$$

```
>> A = [1 2 3; 2 3 4; 4 5 6];
>> B = [7 8 9; 10 11 12; 13 14 15];
>> M = cat(1, A, B)
M =
     1     2     3
     2     3     4
     4     5     6
     7     8     9
    10    11    12
    13    14    15
>> N = cat(2, A, B)
N =
     1     2     3     7     8     9
     2     3     4    10    11    12
     4     5     6    13    14    15
```

11. ააგეთ მატრიცები:

$$M=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&10\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{3}&\sqrt{4}\\\sqrt{5}&\sqrt{6}&\sqrt{7}\\\sqrt{8}&\sqrt{9}&\sqrt{10}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}e^2&e^3&e^4\\e^5&e^6&e^7\\e^8&e^9&e^{10}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}\cos\sqrt{2}&\cos\sqrt{3}&\cos\sqrt{4}\\\cos\sqrt{5}&\cos\sqrt{6}&\cos\sqrt{7}\\\cos\sqrt{8}&\cos\sqrt{9}&\cos\sqrt{10}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}1-3\cos\sqrt{2}&1-3\cos\sqrt{3}&1-3\cos\sqrt{4}\\1-3\cos\sqrt{5}&1-3\cos\sqrt{6}&1-3\cos\sqrt{7}\\1-3\cos\sqrt{8}&1-3\cos\sqrt{9}&1-3\cos\sqrt{10}\end{pmatrix}.$$

```
>> M = [2 3 4; 5 6 7; 8 9 10]
```

M =

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{matrix}$$

>> A = sqrt(M)

A =

$$\begin{matrix} 1.4142 & 1.7321 & 2.0000 \\ 2.2361 & 2.4495 & 2.6458 \\ 2.8284 & 3.0000 & 3.1623 \end{matrix}$$

>> B = exp(M)

B =

1.0e + 004 *

$$\begin{matrix} 0.0007 & 0.0020 & 0.0055 \\ 0.0148 & 0.0403 & 0.1097 \\ 0.2981 & 0.8103 & 2.2026 \end{matrix}$$

>> C = cos(A)

C =

$$\begin{matrix} 0.1559 & -0.1606 & -0.4161 \\ -0.6173 & -0.7699 & -0.8796 \\ -0.9514 & -0.9900 & -0.9998 \end{matrix}$$

>> D = ones(3) − 3 * C

D =

$$\begin{matrix} 0.5322 & 1.4817 & 2.2484 \\ 2.8518 & 3.3097 & 3.6387 \\ 3.8541 & 3.9700 & 3.9994 \end{matrix}$$

12. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ მატრიცის საშუალებით ააგეთ მატრიცები:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} i & 2i & 3i \\ 2i & 3i & 4i \\ 4i & 5i & 6i \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} i-1 & 2i & 3i+1 \\ 2i & 3i+1 & 4i+2 \\ 4i+2 & 5i+3 & 6i+4 \end{pmatrix}.$$

$>> \mathrm{M} = [1\ 2\ 3;\ 2\ 3\ 4;\ 4\ 5\ 6];$

$>> \mathrm{M1} = \mathrm{M} - 2 * \mathrm{ones}(3)$

M1 =

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

$>> \mathrm{M2} = \mathrm{M} * \mathrm{i}$

M2 =

$$\begin{matrix} 0 + 1.0000\mathrm{i} & 0 + 2.0000\mathrm{i} & 0 + 3.0000\mathrm{i} \\ 0 + 2.0000\mathrm{i} & 0 + 3.0000\mathrm{i} & 0 + 4.0000\mathrm{i} \\ 0 + 4.0000\mathrm{i} & 0 + 5.0000\mathrm{i} & 0 + 6.0000\mathrm{i} \end{matrix}$$

$>> \mathrm{M3} = \mathrm{M2} + \mathrm{M1}$

M3 =

$$\begin{matrix} -1.0000 + 1.0000\mathrm{i} & 0 + 2.0000\mathrm{i} & 1.0000 + 3.0000\mathrm{i} \\ 0 + 2.0000\mathrm{i} & 1.0000 + 3.0000\mathrm{i} & 2.0000 + 4.0000\mathrm{i} \\ 2.0000 + 4.0000\mathrm{i} & 3.0000 + 5.0000\mathrm{i} & 4.0000 + 6.0000\mathrm{i} \end{matrix}$$

13. ააგეთ მეოთხე რიგის ნორმალურად განაწილებული მატრიცები A და B.

$>> \mathrm{A} = \mathrm{randn}(4)$

A =

$$\begin{matrix} 1.5326 & 1.1174 & 1.1006 & -0.7423 \\ -0.7697 & -1.0891 & 1.5442 & -1.0616 \\ 0.3714 & 0.0326 & 0.0859 & 2.3505 \\ -0.2256 & 0.5525 & -1.4916 & -0.6156 \end{matrix}$$

$>> \mathrm{B} = \mathrm{randn}(4)$

B =

$$\begin{matrix} 0.7481 & -1.4023 & -0.1961 & 1.5877 \\ -0.1924 & -1.4224 & 1.4193 & -0.8045 \\ 0.8886 & 0.4882 & 0.2916 & 0.6966 \\ -0.7648 & -0.1774 & 0.1978 & 0.8351 \end{matrix}$$

იპოვეთ

1) $2A + 3B$.

$>> \mathrm{M1} = 2 * \mathrm{A} + 3 * \mathrm{B}$

M1 =

5.3095	− 1.9721	1.6131	3.2785
−2.1166	− 6.4453	7.3464	− 4.5366
3.4086	1.5297	1.0466	6.7908
−2.7457	0.5729	− 2.3897	1.2741

2) $A \cdot B$ (ჩვეულებრივი ნამრავლი).

>> M2 = A ∗ B

M2 =

2.4773	− 3.0695	1.4595	1.6813
1.8179	3.5705	− 1.1545	− 0.1567
−1.4498	− 0.9420	0.4634	2.5861
−1.1297	− 1.0886	0.2717	− 2.3558

3) A და B მატრიცების ელემენტობრივი ნამრავლი.

>> M3 = A.∗ B

M3 =

1.1465	− 1.5668	− 0.2158	− 1.1786
0.1481	1.5491	2.1917	0.8540
0.3300	0.0159	0.0251	1.6374
0.1725	− 0.0980	− 0.2951	− 0.5141

4) A მატრიცის ჩვეულებრივი კვადრატი.

>> M4 = A^2

M4 =

2.0652	0.1213	4.6141	0.7201
0.4716	− 0.2102	− 0.8127	6.0106
0.0458	1.6810	− 3.0395	− 1.5552
−1.1861	− 1.2425	1.3950	− 3.5461

5) A მატრიცის ელემენტობრივი კვადრატი.

>> M5 = A. ^2

M5 =

2.3490	1.2485	1.2113	0.5510
0.5924	1.1861	2.3846	1.1270
0.1379	0.0011	0.0074	5.5246
0.0509	0.3053	2.2248	0.3790

6) A მატრიცის ნამრავლი B მატრიცის შებრუნებულზე.

>> M6 = A/B

M6 =

$$\begin{matrix} -0.5814 & 0.4547 & 1.6740 & -0.7420 \\ -0.3165 & 1.0085 & -0.0706 & 0.3610 \\ 0.3989 & -0.2247 & 0.9411 & 1.0546 \\ 0.0653 & -0.7298 & -1.0554 & -0.6838 \end{matrix}$$

7) B მატრიცის ელემენტობრივი განაყოფი A-ზე.

>> M7 = A./B

M7 =

$$\begin{matrix} 2.0488 & -0.7968 & -5.6138 & -0.4675 \\ 4.0000 & 0.7657 & 1.0880 & 1.3196 \\ 0.4179 & 0.0667 & 0.2947 & 3.3741 \\ 0.2949 & -3.1150 & -7.5405 & -0.7372 \end{matrix}$$

8) A-ს ტრანსპონირებული მატრიცა.

>> M8 = A′

M8 =

$$\begin{matrix} 1.5326 & -0.7697 & 0.3714 & -0.2256 \\ 1.1174 & -1.0891 & 0.0326 & 0.5525 \\ 1.1006 & 1.5442 & 0.0859 & -1.4916 \\ -0.7423 & -1.0616 & 2.3505 & -0.6156 \end{matrix}$$

9) A-ს შებრუნებული მატრიცა.

>> M9 = A^(−1)

M9 =

$$\begin{matrix} -1.1063 & -3.6698 & -3.2649 & -4.8037 \\ 1.7431 & 3.6535 & 3.5821 & 5.2749 \\ 0.7623 & 1.7158 & 1.4749 & 1.7534 \\ 0.1228 & 0.4665 & 0.8378 & 0.6218 \end{matrix}$$

ან

>> M9 = inv(A)

M9 =

$$\begin{matrix} -1.1063 & -3.6698 & -3.2649 & -4.8037 \\ 1.7431 & 3.6535 & 3.5821 & 5.2749 \\ 0.7623 & 1.7158 & 1.4749 & 1.7534 \\ 0.1228 & 0.4665 & 0.8378 & 0.6218 \end{matrix}$$

10) A და B მატრიცების შესაბამისი დეტერმინანტები.

>> a = det(A)

a =
   1.4663
 >> b = det(B)
b =
  −5.4245

14. ააგეთ [1,3] შუალედში ნორმალურად განაწილებული მთელი რიცხვებისაგან შედგენილი 5×6 განზომილების მატრიცა. იპოვეთ მისი რანგი.

>> A = randi([1,3],5,6)
A =

1	3	1	1	2	2
2	3	3	1	1	2
1	3	2	1	3	1
3	1	3	3	2	1
1	2	1	2	2	1

>> r = rank(A)
r =
      5

15. მოცემულია მატრიცული განტოლებები. იპოვეთ უცნობი მატრიცა.

$$1)\quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & 7 \\ -4 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -1 \\ 6 & 8 & 10 \\ -7 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

>> A = [5 6 3; −2 4 7; −4 8 − 1];
>> B = [−3 8 − 1; 6 8 10; −7 − 6 5];
>> X = inv(A) ∗ B
X =

−0.3125	0.8750	− 1.0625
−0.8729	− 0.1292	0.2187
1.2667	1.4667	1.0000

$$2)\quad Y \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -9 \\ 11 & 12 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5 & -7 & 9 \\ 8 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

>> A = [5 2 − 1; 3 7 − 9; 11 12 − 13];
>> B = [0 1 3; 5 − 7 9; 8 6 − 4];
>> Y = B ∗ inv(A)
Y =

$$\begin{matrix} -30.5000 & -28.0000 & 21.5000 \\ 22.6667 & 17.6667 & -14.6667 \\ -10.0000 & -10.0000 & 8.0000 \end{matrix}$$

16. მოცემულია მატრიცული განტოლება:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ X.

```
>> A = [1 2; 2 3];
>> B = [2 - 1; -1 0];
>> C = [1 - 1; -1 0];
>> X = inv(A) * C * inv(B)
X =
    -3.0000   - 1.0000
     2.0000     1.0000
```

17. მოცემულია მატრიცა $A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. იპოვეთ საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ვექტორები.

```
>> A = [13 2 - 2; 6 9 - 6; 2 - 2 5];
>> x = eig(A)
x =
     3.0000
    15.0000
     9.0000
```

მივიღეთ საკუთრივი რიცხვებისაგან შედგენილი სვეტ-მატრიცა.

```
>> [V,D] = eig(A)
V =
    0.0000     0.7071     0.5774
    0.7071     0.7071   - 0.5774
    0.7071   - 0.0000     0.5774
```

სვეტები საკუთრივი ვექტორებია.

```
D =
    3.0000          0          0
         0    15.0000          0
         0          0     9.0000
```

დიაგონალზე დგას საკუთრივი რიცხვები.

გ) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ხერხები
მაგალითები

მოცემულია სისტემა:

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -6, \\ -2x_1 - 6x_2 + 7x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

ვიპოვოთ x_1, x_2, x_3, x_4.

1. სისტემის ამოხსნა მატრიცების გაყოფით (MATLAB-ში სისტემის ამოხსნა შეიძლება ე.წ. მატრიცების გაყოფით. გამოიყენება გაუსის გამორიცხვის მეთოდი):

$$AX = B$$
$$X = A\backslash B$$

$>>\ \mathrm{A} = [7\ 2\ 3\ -4;\ 2\ \ -3\ 4\ \ -6;\ 3\ 5\ \ -3\ 5;\ -2\ \ -6\ 7\ \ -8];$

$>>\ \mathrm{B} = [-1;\ 7;\ -6;\ 0];$

$>>\ \mathrm{X} = \mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$

X =

3.3636
−5.9091
−3.2727
0.7273

2. ამოვხსნათ იგივე სისტემა შებრუნებული მატრიცის დახმარებით:

$$AX = B$$
$$X = A^{-1}B$$

$>>\ \mathrm{A} = [7\ 2\ 3\ -4;\ 2\ \ -3\ 4\ \ -6;\ 3\ 5\ \ -3\ 5;\ -2\ \ -6\ 7\ \ -8];$

$>>\ \mathrm{B} = [-1;\ 7;\ -6;\ 0];$

$>>\ \mathrm{X} = \mathrm{inv(A)} * \mathrm{B}$

X =

3.3636
−5.9091
−3.2727
0.7273

3. სისტემის ამოხსნა კრამერის წესით.

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

სადაც Δ არის A მატრიცის დეტერმინანტი, Δ_i დამხმარე დეტერმინანტებია, რომლებიც მიიღება Δ-ში x_i-ურის შესაბამისი სვეტის შეცვლით თავისუფალი წევრებისაგან შედგენილი სვეტით, ე.ი. B სვეტით.

```
>> A = [7 2 3 − 4; 2 − 3 4 − 6; 3 5 − 3 5; −2 − 6 7 − 8];
>> B = [−1; 7; −6; 0];
>> A1 = A;   A2 = A;   A3 = A;   A4 = A;
>> A1(:, 1) = B;
>> A2(:,2) = B;
>> A3(:,3) = B;
>> A4(:, 4) = B;
>> x1 = det(A1)/det(A);
>> x2 = det(A2)/det(A);
>> x3 = det(A3)/det(A);
>> x4 = det(A4)/det(A);
>> x = [x1; x2; x3; x4]
x =
    3.3636
   −5.9091
   −3.2727
    0.7273
```

სავარჯიშოები

1. შექმენით 4×7 ზომის მატრიცა 1) ბრძანებით linspace, 2) $x = a{:}h{:}b$ ფორმით, რომლის I სტრიქონის პირველი წევრია 1, ბოლო 7, შეიცავს 7 წევრს; II სტრიქონის პირველი წევრია 2, ბოლო 14, შეიცავს 7 წევრს; III სტრიქონის პირველი წევრია 21, ბოლო − 3, ასევე შეიცავს 7 წევრს; IV სტრიქონის პირველი წევრია 5, ბოლო − 35, ისიც შეიცავს 7 წევრს.

იპოვეთ 1) მატრიცის $B(4,3)$ ელემენტი;

2) $B(4,4)-B(4,7)+B(2,6)$.

2. შექმენით 3×5 ზომის C მატრიცა, რომლის I სტრიქონი ლუწი რიცხვებია 2-დან 10-მდე, მეორე სტრიქონი – 3-დან 15-მდე ბიჯით 3, მესამე სტრიქონი – 7-დან 35-მდე ბიჯით 7.

1) შეცვალეთ მასში $C(3,5)$ ელემენტი რიცხვით 30, ხოლო $C(2,3)$ რიცხვით 4, მოახდინეთ მიღებული მატრიცის ტრანსპონირება;
2) შეცვალეთ C მატრიცის მესამე სტრიქონი სტრიქონით $B=[7\ 5\ 3\ 1\ 2]$;
3) შეცვალეთ C მატრიცის მე-4 სვეტი $\begin{bmatrix}3\\7\\4\end{bmatrix}$ სვეტით.

3. მოცემულია მატრიცები:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\1 & 7 & -3\\6 & -10 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}11 & 5 & -3\\0 & -12 & 4\\2 & 6 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}7 & 14 & 1\\10 & 3 & -2\\8 & -5 & 9\end{pmatrix}.$$

იპოვეთ:

1) $A+B$ და $B+A$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
2) $A+(B+C)$და $(A+B)+C$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
3) $5(A+C)$და $5A+5C$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
4) $A\cdot(B+C)$ და $A\cdot B+A\cdot C$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
5) $A\cdot B$ და $B\cdot A$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
6) $A\cdot(B\cdot C)$და $(A\cdot B)\cdot C$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
7) $(A\cdot B)'$და $B'\cdot A'$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს;
8) $(A+B)'$ და $A'+B'$. შედეგები შეადარეთ ერთმანეთს.

ააგეთ მატრიცა $\begin{pmatrix}-1 & 3 & 3 & 2 & 5\\-3 & 5 & 2 & 3 & 4\\-3 & 1 & 5 & 0 & 7\\-5 & 7 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

1) იპოვეთ მატრიცის რანგი;
2) მიიღეთ მისგან ზედა და ქვედა სამკუთხოვანი მატრიცები;

3) მოაბრუნეთ მატრიცა 90^0-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით;
4) მოაბრუნეთ მატრიცა 270^0-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით;
5) იპოვეთ სვეტების ელემენტების ჯამები, ნამრავლები;
6) იპოვეთ სტრიქონების ელემენტების ჯამები, ნამრავლები;
7) დაალაგეთ სვეტების ელემენტები ზრდის, კლების მიხედვით;
8) დაალაგეთ სტრიქონების ელემენტები ზრდის, კლების მიხედვით.

4. შექმენით ნორმალურად განაწილებული მეოთხე რიგის კვადრატული A და B მატრიცები. იპოვეთ:

1) $\det A$, $\det B$;
2) A-ს შებრუნებული მატრიცა;
3) B-ს ტრანსპონირებული მატრიცა;
4) AB (მატრიცების ჩვეულებრივი ნამრავლი);
5) A-ს ელემენტობრივი ნამრავლი B-ზე;
6) A^2B^3 (მატრიცების ჩვეულებრივი ახარისხება და ნამრავლი);
7) A^2B^3 (მატრიცების ელემენტობრივი ახარისხება და ნამრავლი);
8) $(A'B)$^(-1), AA^(-1), B^$(-1)\,B$;
9) $(AB'\,)$^$(-1)\,(BA)$;
10) A-ს ელემენტობრივი განაყოფი B-ზე;
11) B-ს ელემენტობრივი განაყოფი A-ზე.

5. შექმენით მესამე რიგის პასკალის მატრიცა P და მაგიური მატრიცა M.

1) მიუწერეთ M მატრიცას P მატრიცა მარჯვნიდან, ქვემოდან;
2) მოძებნეთ M მატრიცის $(2,1)$ ელემენტი, გაამრავლეთ იგი P მატრიცის $(2,3)$ ელემენტზე.

6. შექმენით ნორმალურად განაწილებული მთელი რიცხვების 4×4 განზომილების A მატრიცა. იპოვეთ $\sqrt{A}$, $\ln A$, $\sin A$, $2\sqrt{A}+$ $+(3\sin A)i$.
7. შექმენით თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვებისაგან შედგენილი მატრიცა, ზომით 4×5. იპოვეთ e^A, $\cos A$, $\log_2 A$.
8. შექმენით მატრიცა randn(5), იპოვეთ:

1) დეტერმინანტი, რანგი;

2) საკუთრივი რიცხვები, საკუთრივი ვექტორები;
3) სვეტების საშუალო არითმეტიკულები, მედიანები, სტანდარტული გადახრები;
4) სტრიქონების საშუალო არითმეტიკულები, მედიანები, სტანდარტული გადახრები.

9. მოცემულია მატრიცები

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{და} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 0 \\ -3 & -9 & 12 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ:

1) $\mathrm{rot90(B)}, \quad \mathrm{rot90(A,3)};$
2) $\mathrm{fliplr(A)}, \quad \mathrm{flipud\big(fliplr(B)\big)};$
3) $\mathrm{reshape(A,4,3)}, \quad \mathrm{rashape(A,6,2)}, \quad \mathrm{reshape\big(flipud(B,8,2)\big)};$
4) $\mathrm{triu(B)}, \quad \mathrm{tril(B,-1)};$
5) $\mathrm{tril(A)}, \quad \mathrm{triu(A,2)}.$

10. ამოხსენით მატრიცული განტოლებები:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ -10 & 7 & 8 \end{pmatrix};$

2) $Y \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 9 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -8 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \\ -6 & 8 & 7 \\ 10 & 12 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -6 & 9 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$

11. ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცების გაყოფის მეთოდით, შებრუნებული მატრიცის გამოყენებით, კრამერის წესით. შეამოწმეთ მიღებული შედეგები.

1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 10x_1 - 7x_2 + 0x_3 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 16, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 10x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 4{,}5x_4 = 13{,}5, \\ 6x_1 + 12x_2 - 2x_3 + 16x_4 = 20, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 6. \end{cases}$

5) $\mathrm{rand}(4) \cdot X = \mathrm{randn}(4)$;

6) $\mathrm{randn}(5) \cdot X = \mathrm{rand}(5)$.

4. პოლინომები

MATLAB-ის შემადგენლობაში შედის რიგი ფუნქციებისა, რომლებიც საშუალებას იძლევა ჩავატაროთ სხვადასხვა ოპერაციები ერთი ცვლადის პოლინომებზე: გამრავლება, გაყოფა, გაწარმოება, ფესვების პოვნა და სხვა.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n.$$

პოლინომის კონსტრუირება MATLAB-ში ხდება კოეფიციენტებისაგან შედგენილი სტრიქონ-ვექტორით: $\mathrm{P_n = [a_0\ a_1\ \ a_2\ \cdots\ a_n]}$.

ოპერაცია პოლინომებზე	ბრძანება
პოლინომის მნიშვნელობის გამოთვლა x_0 წერტილში	$\mathrm{polyval(p, x_0)}$
პოლინომის მნიშვნელობების გამოთვლა x_1, x_2, x_3, … , x_m წერტილებში	$\mathrm{polyval\ (p, [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\ ])}$ ან $\mathrm{h = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \cdots x_m\ ];}$ $\mathrm{polyval\ (p, h)}$
პოლინომის ყველა ფესვის მოძებნა	roots (p)
p პოლინომის ფესვების r სტრიქონ-ვექტორით პოლინომის აღდგენა $\mathrm{r = [x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]}$	poly(r)
პოლინომების ნაშთით გაყოფა $P/Q = \frac{num}{den}$	[q,r] = deconv(P,Q) num = P მოცემული წილადის მრიცხველია, den = Q მოცემული წილადის მნიშვნელია, q განაყოფია, r – ნაშთი.
პოლინომების გადამრავლება	conv(P,Q)
პოლინომების გაყოფა უნაშთოდ	deconv(P,Q)
წესიერი რაციონალური წილადის დაშლა ელემენტარულ წილადებად	[K,R] = residue(num,den) num მოცემული წილადის მრიცხველია, den – მნიშვნელი.

	$K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ ელემენტარული წილადების მრიცხველების ვექტორია, $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ – მნიშვნელების ფესვების ვექტორი.
ელემენტარული წილადების გაერთმნიშვნელიანება	$[\mathrm{num}, \mathrm{den}] = \mathrm{residue}(R,K,P)$ $R = [r_1, r_2, \dots, r_n]$ მნიშვნელების ფესვების ვექტორია, ხოლო $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ – მრიცხველების ვექტორი. P მთელი ნაწილია.
ერთი და იმავე განზომილების P და Q პოლინომების შეკრება-გამოკლება	$P + Q$ $P - Q$
P პოლინომის წარმოებულის გამოთვლა	polyder(P)
P და Q პოლინომების ნამრავლის წარმოებულის გამოთვლა	polyder(P,Q)
P და Q პოლინომების შეფარდების წარმოებულის გამოთვლა	[n,d] = polyder(P,Q) n წარმოებულის მრიცხველის კოეფიციენტების ვექტორია, d – მნიშვნელის კოეფიციენტების ვექტორი.

მაგალითები

1. $P = 5x^3 + 7x^2 - 3x + 4, \quad Q = 6x^2 + 13x + 6.$

იპოვეთ

1) P პოლინომის მნიშვნელობა წერტილში $x = -3$.

```
>> P = [5 7 -3 4];
>> polyval(P, -3)
ans =
    -59
```

2) Q პოლინომის მნიშვნელობები $x_1 = 3$ და $x_2 = 6$ წერტილებში.

```
>> Q = [6 13 6];
>> polyval(Q, [3,6])
ans =
     99  300
```

3) P პოლინომის მნიშვნელობები $h = [6 - 9\ 7]$ ვექტორის კოორდინატებზე.

```
>> p = [5 7 −3 4];  h = [6 −9 7];
>> polyval(p,h)
 ans =
      1318     −3047      2041
```

4) P მრავალწევრის ფესვები.

```
>> P = [5 7 −3 4];
>> roots(P)
ans =
 −1.9269
  0.2634 +  0.5880i
  0.2634 −  0.5880i
```

5) აღადგინეთ მრავალწევრი, თუ მისი ფესვებია:

$-2.7543, \quad -0.1854 + 3.1415i, \quad -0.1854 - 3.1415i.$

```
>> r = [−2.7543,  −0.1854 + 3.1415i, −0.1854 −  3.1415i];
>> poly(r)
 ans =
       1.0000   3.1251   10.9247   27.2769
```

ე.ი. საძიებელი მრავალწევრია: $x^3 + 3{,}1251x^2 + 10{,}9247x + 27{,}2769.$

6) იპოვეთ $6x^6 + 3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 9x + 14 = 0$ განტოლების ფესვები.

```
>> P = [6  0  3  −2    7   −9   14];
>> roots(P)
ans =
 −0.9985 +  0.8427i
 −0.9985 −  0.8427i
   0.1246 +  1.1170i
   0.1246 −  1.1170i
   0.8739 +  0.5642i
   0.8739 −  0.5642i
```

7) $P \cdot Q$ ნამრავლი.

```
>> P = [5  7 -3  4];
>> Q = [6  13  6];
>> conv(P,Q)
ans =
     30  107  103   27   34   24
```

ე.ი. $P \cdot Q = 30x^5 + 107x^4 + 103x^3 + 27x^2 + 34x + 24.$

8) $\frac{P}{Q}$, განაყოფი R და ნაშთი r.

```
>> P = [5 7 -3 4];
>> Q = [6 13 6];
>> [R,r] = deconv(P,Q)
R =
   0.8333   -0.6389
r =
     0       0   0.3056   7.8333
```

ე.ი. განაყოფია: $R = 0{,}8333x - 0{,}6389$,

ხოლო ნაშთია: $r = 0{,}3056x + 7{,}8333.$

9) P პოლინომის წარმოებული.

```
>> P = [5 7 -3 4];
>> polyder(P)
ans =
      15   14   -3
```

ე.ი. $P' = 15x^2 + 14x - 3.$

10) PQ ნამრავლის წარმოებული.

```
>> P = [5 7 -3 4];
>> Q = [6 13 6];
>> polyder(P,Q)
ans =
     150  428  309   54   34
```

ე.ი. $(PQ)' = 150x^4 + 428x^3 + 309x^2 + 54x + 34.$

11) $\frac{P}{Q}$ განაყოფის წარმოებული.

```
>> P = [5 7 -3 4];
>> Q = [6 13 6];
```

```
>> [n,d] = polyder(P,Q)
n =
    30  130  199   36   -70
d =
    36  156  241  156   36
```

ე.ი. $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{30x^4 + 130x^3 + 199x^2 + 36x - 70}{36x^4 + 156x^3 241x^2 + 156x + 36}$.

12) მოცემულია პოლინომები:

$P = 4x^7 + 5x^6 - 9x^4 - 3x^2 + 6x + 11,$

$Q = x^5 \cos 3 + x^4 \ln 3 + \sqrt[3]{357}\, x^3 + e^{3,54} x^2 + x \sin 2 + 4.$

იპოვეთ $P \pm Q,\ P \cdot Q,\ P/Q$ (ნაშთის ჩვენებით).

```
>> P = [4  5  0  -9  0  -3  6  11];
>> Q = [0  0  cos(3)  log(3)  (357)^(1/3)  exp(3.54)  sin(2)  4];
>> Q1 = [cos(3)  log(3)  (357)^(1/3)  exp(3.54)  sin(2)  4];
>> sum = P + Q,  sub = P - Q,  mul = conv(P,Q),  [R,r] = deconv(P,Q)

sum =
     4.0000     5.0000    -0.9900    -7.9014     7.0940    31.4669     6.9093
15.0000
sub =
     4.0000     5.0000     0.9900   -10.0986    -7.0940   -37.4669     5.0907
7.0000
mul =
   Columns  1 through  11
           0            0    -3.9600    -0.5555    33.8689   182.2475   166.0843   -
40.3293  -299.4381   -33.7638   -84.7522
   Columns  12 through  15
   282.1073   372.5919    34.0023    44.0000

R =
    -4.0404    -9.5343   -39.5328
r =
    1.0e+03  *
         0         0         0    0.2413    0.6127    1.3844    0.0801    0.1691
```

13) მოცემულია პოლინომები:

$$P = e^4x^5 + x^4 \arccos\frac{3}{4} + \sqrt{1345}x^3 - x^2\cos 1,5 + 4x + 11,$$

$$Q = x^5 \ln 6 - x^4 \operatorname{arctg} 1,5 - \sqrt[4]{2057}\,x^3 + e^{-3,85}x^2 + \sqrt{1349}.$$

იპოვეთ P', $(P\cdot Q)'$, $\left(\frac{P}{Q}\right)'$.

```
>> P = [exp(4)  acos(3/4)  sqrt(1345)  cos(1.5)  4  11];
>> Q = [log(6)  -atan(1.5)  (2057)^(1/4)  exp(-3.85)  sqrt(1349)];
>> derP = polyder(P), derPQ = polyder(P,Q), [N,D] = polyder(P,Q)
derP =
 272.9908   2.8909  110.0227   0.1415   4.0000
derPQ =
  1.0e + 04  *
  0.0880  -0.0419   0.3029  -0.0179   1.1297   0.0174   0.4089   0.0154   0.0147
N =
  1.0e+04 *
  0.0098  -0.0107   0.1037   0.0014   1.0252   0.0037   0.4046  -0.0143   0.0147
D =
  1.0e+03 *
  0.0032  -0.0035   0.0251  -0.0132   0.1769  -0.0719   0.4947   0.0016   1.3490
```

2. დავშალოთ $\frac{x+5}{x^2+3x+2}$ წილადი ელემენტარულ წილადებად.

```
>> num = [1 5];
>> den = [1 3 2];
>> [K,R] = residue(num,den)
K =
    -3
     4
```

R =

-2

-1

ე.ი. გვაქვს $\dfrac{x+5}{x^2+3x+2} = \dfrac{-3}{x+2} + \dfrac{4}{x+1}$.

3. შევკრიბოთ ელემენტარული წილადები $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{7}{x-1} - \dfrac{3}{x+5}$.

```
>> K = [5 7 -3];  R = [-3 1 -5];
>> [num, den] = residue(R, K, P)
num =
   5  -38  -71  549  695  -249  293
den =
   1  -9  -1  105
```

ე.ი. მივიღეთ: $P = \dfrac{5x^6 - 38x^5 - 71x^4 + 549x^3 695x^2 - 249x + 293}{x^3 - 9x^2 - x + 105}$

სავარჯიშოები

1. იპოვეთ განაყოფები:

   ა) $\dfrac{6a^3 + 11a^2 + 5a + 3}{3a^2 + a + 1}$,

   ბ) $\dfrac{x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 4x^2 - 5x - 2}{9x^2 - 10x + 6}$,

   გ) $\dfrac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x + 7}{\mathrm{x} - 2}$,

   დ) $\dfrac{15x^5 + 35x^4 - 37x^3 - 19x^2 + 41x - 15}{5x^3 - 4x + 3}$.

2. იპოვეთ ნამრავლები:

   ა) $(2x^3 + 5x^2 + 8x - 3)(x^2 - 2x + 3)$,

   ბ) $(6x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 9x - 5)(3x^2 + 4x - 5)$,

   გ) $(x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 4x^2 - 5x - 2)(5x^2 - 10x + 6)$.

3. იპოვეთ ჯამები

   ა) $(12x^2 - 11x + 10) + (-15x^3 + 10x^2 - 15x)$,

   ბ) $\left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x\right) - (-3x^3 + 2x^2 + 4x + 6)$.

4. იპოვეთ $P = 7x^3 + 4x^2 + 8x + 3$ მრავალწევრის წარმოებული.

5. იპოვეთ $(3x^3 + 6x^2 + 7x - 9)(4x^4 + 3x^2 - 7x + 2)$ ნამრავლის წარმოებული.

6. იპოვეთ $\frac{(4x^4 + 3x^2 - 6x + 7)}{(3x^2 + 4x - 3)}$ ფარდობის წარმოებული.

7. შეკრიბეთ ელემენტარული წილადები: $\frac{5}{x+7} + \frac{3}{x-1} - \frac{6}{x+3} - \frac{9}{x-6}$.

8. დაშალეთ ელემენტარულ წილადებად რაციონალური წილადი:
   $\frac{3x^2 - 5x + 7}{(x-3)(x+4)(x-1)(x+2)}$.

9. გამოყავით მთელი ნაწილი და ნაშთი, შემდეგ კი ნაშთი დაშალეთ ელემენტარულ წილადებად:
   $\frac{4x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6}{(x+3)(x-1)(x+7)}$.

10. იპოვეთ $(4x^4 + 3x^2 + 6x - 9)(2x^2 + 3x - 1)$ ნამრავლი და შემდეგ მისი მნიშვნელობა წერტილებში $x = 3,\ 4,\ -5,\ 9$.

11. იპოვეთ შეფარდება $\frac{x^5 + 4x^4 - 3x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}$, შემდეგ კი მისი მნიშვნელობა წერტილში $x = 2$.

12. მოცემულია $y = 12x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ პოლინომი. იპოვეთ მისი ფესვები, შემდეგ მიღებული ფესვებიდან აღადგინეთ პოლინომი.

13. იპოვეთ შემდეგი განტოლებების ამონახსნები:

ა) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 4x + 13 = 0$;

ბ) $3x^7 + 5x^6 - 6x^5 + 8x^3 + 2x^2 - 16 = 0$

გ) $7x^9 + 4x^8 - 3x^6 + 5x^5 - x^3 + 17x^2 - 19x + 21 = 0$.

13. მოცემულია პოლინომები:

$P = x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 3, \quad Q = 3x^6 + 4x^5 + 2x^4 + x^2,$

$T = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1, \quad R = 3x^3 + 2x^2 - 1.$

იპოვეთ:

ა) $x_1 = \frac{QR}{PT}$;

ბ) $y = P \cdot Q \cdot T \cdot R$;

გ) P პოლინომის მნიშვნელობა $z = 2, -5, 6, 7$ წერტილებში;

დ) $P \cdot Q$-ს მნიშვნელობა $x = 1,5,7$ წერტილებში;

ე) y-ის მნიშვნელობა $x = 4$ წერტილში;

ვ) იპოვეთ y ფუნქციის წარმოებული;

ზ) polyder (p,q) ბრძანების საშუალებით იპოვეთ $x1$ ფუნქციის წარმოებული.

14. გამოთვალეთ $y = 15x^4 - 5x^2 + x + 2$ ფუნქციის მნიშვნელობები $-2 \le x \le 2$ არეზე, შემდეგ ააგეთ გრაფიკი.

5. ფუნქცია, მისი აგების სახეები

$\mathrm{x = linspace(a,b,n)}$ $\mathrm{y = f(x)}$	აიგება n კომპონენტიანი ვექტორი. მიიღება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები x_i-ურ წერტილებში
$\mathrm{x = a{:}h{:}b}$ $\mathrm{y = f(x)}$	აიგება ვექტორი, რომლის საწყისია a, ბოლო – b, ბიჯი – h. მიიღება $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები x_i-ურ წერტილებში
ერთი ცვლადის ***inline*** ფუნქცია $\mathrm{my\_func = inline('f(x)')}$	ამით ფუნქცია შექმნილია. გამოვიყენებთ საჭიროებისამებრ
ორი ცვლადის ***inline*** ფუნქცია $\mathrm{my\_func1}$ $\mathrm{= inline('f(x,y)','x','y')}$	ამით ფუნქცია შექმნილია. გამოვიყენებთ საჭიროებისამებრ
ერთი ცვლადის **ანონიმური** ფუნქცია $\mathrm{MyAnonymous1 = @(x)f(x)}$	
ორი ცვლადის **ანონიმური** ფუნქცია $\mathrm{MyAnonymous2 = @(x,y)f(x,y)}$	

მაგალითები

1. ავაგოთ *inline* ფუნქცია $y = \sin^2 x - e^x + \cos x$.

$\mathrm{>>\ my\_func = inline('(sin(x))^\wedge 2 - exp(x) + cos(x)')}$

$\mathrm{my\_func\ =}$

$\mathrm{Inline\ function:}$

$\mathrm{my\_func(x)\ =\ (sin(x))^\wedge 2 - exp(x) + cos(x)}$

2. ავაგოთ *inline* ფუნქცია $z = \cos^3(x+y) - \ln(x+3y) - e^{2x+4y}$.

$\mathrm{>>\ my\_func1 = inline('(cos(x+y))^\wedge 3 - log(x + 3*y) - exp(2*x + 4*y)')}$

my_func1 =

Inline function:

my_func1(x,y) = (cos(x+y))^3 − log(x + 3 * y) − exp(2 * x + 4 * y)

3. ავაგოთ ანონიმური ფუნქცია $y = 5x^3 + \cos x - \ln x$.

>> MyAnonymous1 = @(x)5 * x^3 + cos(x) − log(x)

MyAnonymous1 =

@(x)5 * x^3 + cos(x) − log(x)

4. ავაგოთ ანონიმური ფუნქცია $z = 5e^{xy} + 4x^3y^2 - 3$.

>> MyAnonymous2 = @(x,y)5 * exp(x * y) + 4 * x^3 * y^2 − 3

MyAnonymous2 =

@(x,y)5 * exp(x * y) + 4 * x^3 * y^2 − 3

5. ავაგოთ '*inline*' ფუნქცია P(a,b,c), რომელიც სამკუთხედის a, b, c წვეროების კოორდინატების მიხედვით გამოითვლის სამკუთხედის P პერიმეტრს.

>> P = inline('sqrt(dot(a − b, a − b)) + sqrt(dot(a − c, a − c)) + sqrt(dot(c ...
−b, c − b))');

>> P([−1 2], [2 4], [3 5])   (გამოძახება)

6. ავაგოთ ანონიმური ფუნქცია S(a,b,c), რომელიც სამკუთხედის a, b, c წვეროების კოორდინატების მიხედვით გამოითვლის სამკუთხედის S ფართობს.

ა)

>> Myarea = @(a,b,c)(abs(det([a 1; b 1; c 1]))/2);

>> Myarea([1 3], [−1 4], [2 5])

(ითვლის სიბრტყეზე მდებარე სამკუთხედის ფართობს).

ბ)

>> Myar = @(a,b,c)(sqrt((sqrt(dot(a − b, a − b)) + sqrt(dot(a − c, a − c)) ...
+sqrt(dot(c − b, c − b))) * (−sqrt(dot(a − b, a − b)) + sqrt(dot(a − c, a − c)) ...
+sqrt(dot(c − b, c − b))) * (sqrt(dot(a − b, a − b)) − sqrt(dot(a − c, a − c)) ...
+sqrt(dot(c − b, c − b))) * (sqrt(dot(a − b, a − b)) + sqrt(dot(a − c, a − c)) ...
−sqrt(dot(c − b, c − b))))/4);

(ითვლის ყველანაირი სამკუთხედის ფართობს მისი წვეროების მიხედვით. გამოიყენება ჰერონის ფორმულა).

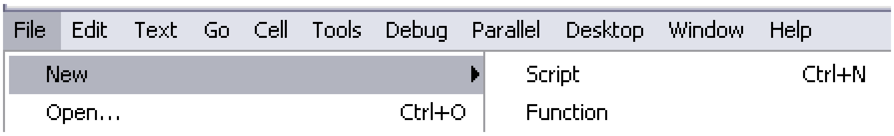
>> Myar([1 3 0], [−1 4 3], [2 5 −1])   (გამოძახება).

7. ავაგოთ ანონიმური ფუნქცია Angle(a, b), რომელიც გამოითვლის კუთხეს a და b ვექტორებს შორის რადიანებში.

```
>> Myangle = @(a, b)(acos(dot(a, b)/sqrt(dot(a, a) * dot(b, b))));
>> Myangle([1 2 0], [−1 5 3])
```

რაიმე, შედარებით რთული ამოცანის გადასაწყვეტად საჭიროა დიდი რაოდენობით ბრძანებების აკრეფა, რისი გაკეთებაც ბრძანებათა ფანჯარაში საკმაოდ მოუხერხებელია. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად MATLAB-ი შეიცავს სპეციალურ ინსტრუმენტს, ე.წ. m-ფაილებს. m-ფაილები ორი სახისაა: სკრიპტი და m-ფუნქცია. მათი შექმნა m-ფაილების რედაქტორის გამოყენებით ხდება. რედაქტორის გამოძახება შემდეგნაირად შეიძლება:

მენიუ File → New → Script (ან Function)



სკრიპტი m-ფაილის უმარტივესი სახეა. მას არ აქვს შემავალი და გამომავალი არგუმენტები და იყენებს სამუშაო არეში არსებულ ცვლადებს ან შეუძლია შექმნას საკუთარი ახალი ცვლადები. მას შემდეგ რაც ავკრეფთ ყველა ბრძანებას, საჭიროა სკრიპტის შენახვა:

რედაქტორის მენიუ File → Save As

გახსნილ ფანჯარაში მივუთითებთ ჩვენთვის სასურველ საქაღალდეს და სკრიპტის სახელს .m გაფართოებით. სახელი არ უნდა ემთხვეოდეს MATLAB-ის სტანდარტული ფუნქციის სახელს. იმისათვის, რომ სკრიპტში შემავალი ბრძანებები შევასრულოთ, საჭიროა მიმდინარე საქაღალდე შევცვალოთ იმ საქაღალდით, სადაც შევინახეთ სკრიპტი ან მივუთითოთ მისამართი, სადაც განთავსებულია აღნიშნული საქაღალდე და დავაწკაპუნოთ რედაქტორის სპეციალურ ღილაკზე, რომელიც მწვანე სამკუთხედის ფორმისაა. სკრიპტის შესრულების შემდეგ ყველა ცვლადი, რომელიც სკრიპტით იყო შექმნილი, ხელმისაწვდომია სამუშაო არეშიც და მათი გამოყენება შესაძლებელია სხვა სკრიპტებში ან ბრძანებათა არეში. სკრიპტის შესრულება ასევე შესაძლებელია ბრძანებათა არეში სკრიპტის სახელის გამოყენებით. ფაქტობრივად, შექმნილი სკრიპტი MATLAB-ის ახალი ბრძანებაა.

8. დავწეროთ სკრიპტი, რომელიც ააგებს $y = 3x^2 - 2x - 6$ ფუნქციის გრაფიკს $[-4;4]$ შუალედში, გრაფიკს შეღებავს შავად, ღერძებს დააწერს 'x' და 'y'-ს.

```
x = linspace(a,b,n);
y = 3 * x.^2 - 2 * x - 6;
plot(x,y,'k');
xlabel('x');
ylabel('y');
```

ვინახავთ: მენიუ file → save as → myfun1.m (სახელი)
>> a = −4; b = 4; n = 200; myfun1 (გამოძახება შესაბამისი ცვლადებისათვის მნიშვნელობების მინიჭებით).

გაცილებით უფრო მოქნილი ინსტრუმენტია m-ფუნქცია. ეს არის სრულფასოვანი ქვეპროგრამა. მას შეიძლება გააჩნდეს ფიქსირებული ან ცვლადი რაოდენობის შემავალი და გამომავალი პარამეტრები. შექმნილი m-ფუნქცია შეიძლება გამოყენებულ იქნას სხვა m-ფუნქციაში. m-ფუნქციაში შეიძლება შევქმნათ ანონიმური ფუნქციები. m-ფუნქციის ფაილის სახელი უნდა ემთხვეოდეს ფუნქციის სახელს. m-ფუნქციათა ნიმუშებს განვიხილავთ ქვემომოყვანილ მაგალითებში.

1. დავწეროთ m-ფუნქციები, Rad2Grad და Grad2Rad, რომელთაგან პირველი, რადიანებში გამოსახულ კუთხეს გადაიყვანს გრადუსებში, ხოლო მეორე – გრადუსებში გამოსახულ კუთხეს გადაიყვანს რადიანებში. Rad2Grad ფუნქციის გამოყენებით გადავაკეთოთ ფუნქცია Angle(a,b) ისე, რომ მან კუთხე გამოსახოს გრადუსებში.

a)
```
function [ Grad ] = Rad2Grad( Rad )
Grad = Rad * 180 / pi;
end
```

ვინახავთ: მენიუ file→ save as → Rad2Grad.m (სახელი)

Rad შემავალი, ხოლო Grad გამომავალი პარამეტრია.

b)
```
function [Rad] = Grad2Rad( Grad )
% transforms Grad to Rad                    (ეს კომენტარია)
Rad = Grad * pi / 180;
end
```

c) Myangle = @(a, b)(Rad2Grad(acos(dot(a,b)/sqrt(dot(a,a) * dot(b,b)))));

2. დავწეროთ m-ფუნქცია x = Eq1(a,b), რომელიც ამოხსნის $ax + b = 0$ განტოლებას.

```
function x = Eq1( a,b )
x = b/a;
end
```

3. დავწეროთ m-ფუნქცია [x1,x2] = Eq2(a, b, c), რომელიც ამოხსნის $ax^2 + bx + c = 0$ განტოლებას.

```
function [x1,x2] = Eq2( a,b, c )
D = b^2 − 4 * a * c;
x1 = (−b − sqrt(D))/(2 * a);
x2 = (−b + sqrt(D))/(2 * a);
end
```

4. დავწეროთ m-ფუნქცია c = Hipotenusa(a, b), რომელიც მართკუთხა სამკუთხედის a, b, კათეტების მიხედვით გამოითვლის მის ჰიპოტენუზას.

```
function [c] = Hipotenusa( a,b )
% evaluates hypotenuse of rectangular triangle
c = sqrt(a^2 + b^2);
end
```

5. დავწეროთ m-ფუნქცია V = Vol(a, b, c), რომელიც მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდების მიხედვით გამოითვლის მის მოცულობას.

```
function [V] = Vol( a,b,c )
% evaluates Volume of rectangular parallelepiped
V = a * b *c;
end
```

6. დავწეროთ m-ფუნქცია S = Srf(a, b, c), რომელიც მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდების მიხედვით გამოითვლის მისი ზედაპირის ფართობს.

```
function [S] = Srf( a,b,c )
% evaluates surface area of rectangular parallelepiped
S = 2 * ( a * b + a * c + b * c);
end
```

m-ფუნქციაში, შემავალი პარამეტრის სახით შეიძლება გამოვიყენოთ *inline*, ანონიმური ან m-ფუნქციებიც.

7. დავწეროთ m-ფუნქცია Sqr(fun, a, b), რომელიც ააგებს $(\text{fun})^2$ ფუნქციის გრაფიკს $[a;b]$ შუალედში.

```
function [y] = Sqr( fun,a,b )
% plots graph of function (fun(x))^2
x = linspace(a,b);
fx = feval(fun,x);
y = plot(x,fx.^2);
grid
end
>> fun = inline('exp(x) + cos(x)');       (fun ფუნქციის შექმნა)
>> Sqr(fun,-pi,pi);                        (Sqr ფუნქციის გამოძახება)
```

სავარჯიშოები

1. ააგეთ „inline“ ფუნქცია:
   1) $f(x) = 3x^2 - \sin x + 5$, იპოვეთ $f(-3)$, $f(\pi)$;
   2) $f(x) = 2x^3 + \log_2(2 + x) - 1$, იპოვეთ $f(-1)$, $f(2)$;
   3) $f(x,y) = 3\sin(x + y) - 4\cos(xy)$, იპოვეთ $f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $f(2,-1)$;
   4) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 6y$, იპოვეთ $f(-1,3)$, $f(4,1)$.
2. ააგეთ ანონიმური ფუნქცია:
   1) $f(x) = 4\sqrt[3]{x} + 3\cos x + 1$, იპოვეთ $f(-7)$, $f(2\pi)$;
   2) $f(x) = 8x^4 + \ln(2 + x) + 4$, იპოვეთ $f(-1{,}05)$, $f\left(\sqrt{2}\right)$;
   3) $f(x,y) = \sin(x - y)\sin(xy)$, იპოვეთ $f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $f(4,-3)$;
   4) $f(x,y) = x^3 - 7x + 4y^2 - 8y + 9$, იპოვეთ $f(-4{,}9)$, $f(8,-10)$.

6. გრაფიკა

MATLAB-ს გააჩნია მონაცემთა გრაფიკული ვიზუალიზაციის სხვადასხვა ტიპის მრავალი საშუალება. შეიძლება ავაგოთ: ერთი ცვლადის $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი სიბრტყეზე და სივრცეში, პოლარულ კოორდინატებში მოცემული $r = f(\varphi)$ ფუნქციის გრაფიკი, ორი ცვლადის $z = f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკი დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში, პარამეტრული სახით მოცემული $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ ზედაპირის გრაფიკი და მრავალი სხვა.

განსაკუთრებით ყურადსაღებია სამგანზომილებიან გრაფიკაში ფიგურის შეფერილობა და ფერის განათების ეფექტების იმიტაცია.

ა) ორგანზომილებიანი გრაფიკა

გრაფიკი იგება სპეციალურ გრაფიკულ ფანჯარაში Figure. გრაფიკის ფორმა განისაზღვრება გრაფიკული ბრძანებების არგუმენტებით. ამავე დროს შეიძლება ამ ფორმის რეგულირება გრაფიკული ფანჯრის მენიუსა და ინსტრუმენტების პანელის გამოყენებით.

გრაფიკის აგებისას შეიძლება მისი გაფორმება სხვადასხვა საშუალებით: გრაფიკის ხაზის გატარება განსხვავებული წირის ტიპით, ფერით, მარკერის ტიპით. ეს სპეციფიკაციები უნდა მოვათავსოთ აპოსტროფებში.

წირის სტილის სპეციფიკაციები

სპეციფიკატორი	წირის ტიპი
-	უწყვეტი წირი
- -	პუნქტირი
:	ორწერტილი
-.-	შტრიხ-პუნქტირი

მარკირების სპეციფიკაციები

მარკერი	მარკერის ტიპი
+	ნიშანი პლუსი
○	წრეწირი

*	ვარსკვლავი
x	ჯვარი
·	წერტილი
s (square)	კვადრატი
d (diamond)	რომბი
^	სამკუთხედი წვეროთი მაღლა
v	სამკუთხედი წვეროთი დაბლა
>	სამკუთხედი წვროთი მარჯვენა მხარეს
<	სამკუთხედი წვეროთი მარცხენა მხარეს
p (pentagram)	ხუთკუთხედი (პენტაგრამა)
h (hexagram)	ექვსკუთხედი (ჰექსაგრამა)

წირის ფერის სპეციფიკაციები

სპეციფიკატორი	ფერი
r (red)	წითელი
g (green)	მწვანე
b (blue)	ლურჯი
c (cyan)	ცისფერი
m (magenta)	იისფერი
y (yellow)	ყვითელი
k (black)	შავი
w (white)	თეთრი

შენიშვნა: სიმბოლოების მიმდევრობა ნებისმიერია, ე.ი. ('ფერი', 'მარკე-რი', 'წირის ტიპი') ან ('მარკერი', 'წირის ტიპი', 'ფერი'). თუ სტილის სტრიქონში მითითებულია მარკერის ტიპი, მაგრამ არაა მითითებული ხაზის სტილი, მაშინ შესაბამის წერტილებში გრაფიკი მარკერით იცვ-ლება, მაგრამ ისინი მონაკვეთებით არ შეერთდება.

გრაფიკული ბრძანებები და მათი აღწერა

plot (x,y) plot (x,y,	x ვექტორის ელემენტებზე y ვექტორის ელემენტების დამოკიდებულების გრაფიკი. იგი $(x(k), y(k))$ კოორდინატებიან წერტილებს აერთებს მონაკვეთებით. რაც მეტია კოორდინატთა რაოდენობა, მით

'მარკერი', 'წირის სტილი', 'ფერი') ან plot (x,y, 'წირის სტილი', 'ფერი' , 'მარკერი')	გლუვია ეს შეერთება.
plot (y), y კომპლექსურია	აგებს წერტილებს $(\mathrm{Re}y_i, \mathrm{Im}y_i)$ და აერთებს მათ ერთმანეთთან
polar (phi,ro, 'სპეციფიკაციები')	გრაფიკის აგება პოლარულ კოორდინატებ-ში
comet (x,y)	$(x(k), y(k))$ კოორდინატებიანი წერტილების შეერთება. ახდენს წირის ანიმაციას. შეერ-თება ხდება კომეტის მოძრაობის შესაბა-მისად.
stairs (x,y)	აგებს x კოორდინატებით y ვექტორის ელე-მენტების საფეხუროვან გრაფიკს. გადა-სვლა საფეხურიდან საფეხურზე მოიცემა x ვექტორის ელემენტებით.
bar (x,y)	აგებს სვეტურ დიაგრამას y ვექტორის ელემენტებისათვის მოცემული x ვექტორის ზრდადობით დალაგებული ელემენტების მიხედვით.
bar (y)	იგივე რაც bar (x,y), $x \in [1, m]$.
barh (x,y)	აგებს სვეტურ დიაგრამებს სვეტების ჰო-რიზონტალური მდებარეობით.
hist (y,m)	მატრიცული ან ვექტორული მონაცემების ჰისტოგრამა, რომელშიც გამოყენებულია ერთი და იმავე ზომის m ინტერვალი.
hist (y)	აიგება ჰისტოგრამა ისე, რომ ვექტორის ელემენტები 10 ერთი და იმავე ზომის ინ-ტერვალში განაწილდება.
pie (y)	აიგება y მონაცემების შესაბამისი წრიუ-ლი დიაგრამა სიბრტყეზე.
title ('....')	გრაფიკული გამოსახულების სათაური.

xlabel ('x')	ტექსტის მიწერა გრაფიკის x ღერძზე.
ylabel ('y')	ტექსტის მიწერა გრაფიკის y ღერძზე.
loglog(x,y)	ლოგარითმული მასშტაბი გამოიყენება x და y საკოორდინატო ღერძებისათვის.
semilog (x,y)	იგება ფუნქციის გრაფიკი ლოგარითმული მასშტაბით, ათის ფუძით x საკოორდინატო ღერძისათვის და წრფივი მასშტაბით y ღერძისათვის.
semilogy(x, y)	იგება ფუნქციის გრაფიკი ლოგარითმული მასშტაბით, ათის ფუძით y საკოორდინატო ღერძისათვის და წრფივი მასშტაბით x ღერძისათვის.

ბ) სამგანზომილებიანი გრაფიკა

plot3(x,y, z)	პარამეტრული სახით მოცემული $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ წირის გრაფიკის აგება.
sphere ან sphere(n)	ერთეულოვანი სფეროს გრაფიკის აგება.
$[x, y, z] = sphere$	x, y, z მატრიცების გენერაცია. გრაფიკის აგება mesh (x,y, z), surf (x,y, z), surfl(x,y, z) ბრძანებებით.
stem3(x, y, z)	$(x(i), y(i))$ წერტილებში $z(i)$ სიმაღლეებით გრაფიკის აგება.
z = peaks (n) peaks (n)	ქმნის გაუსის განაწილების შესაბამის n-ური რიგის z მატრიცას. აგებს შესაბამის გრაფიკს.
bar 3(x,y)	მატრიცული ან ვექტორული მონაცემების შესაბამისი სვეტოვანი ვერტიკალური სამგანზომილებიანი დიაგრამა.

barh 3(x,y)	იგივე, მხოლოდ ჰორიზონტალური დიაგრამა.
area(x,y)	აგებს ფართობის დიაგრამას.
comet3(x,y,z)	კომეტის მოძრაობის შესაბამისი გრაფიკი, რომელიც გადის $(x(i),y(i),z(i))$ კოორდინატებიან წერტილებზე.
contour(x,y,z)	იმ ფუნქციის გრაფიკული გამოსახ-ვა, რომლის მნიშვნელობები (x,y) ბადეზე, ჩაწერილია z მატრიცაში.
cylinder(x,y,z)	ცილინდრის ასახვა. ცილინდრის ზედაპირზე მდებარე წერტილების გენერაცია.
surf(x,y,z)	ქმნის ზედაპირის კარკასული მოდელის გრაფიკს შეფერილობით.
surfc(x,y,z)	აგებულ ზედაპირს ემატება დონის წირები.
mesh(x,y,z)	ზედაპირის კარკასული გრაფიკის აგება სიბრტყეზე x,y ბადის ყოველ წერტილში z სიმაღლის შესაბამისად.
meshc(x,y,z)	კარკასული ზედაპირის გრაფიკის აგება დონის წირებთან ერთად.
qiuver3(x,y,z,u_x,u_y,u_z)	ახდენს სამგანზომილებიანი ველე-ბის ვიზუალიზაციას.
colormap (პალიტრა)	სამგანზომილებიან გრაფიკს აძლევს ელფერს (პალიტრას).
პ ა ლ ი ტ რ ე ბ ი ა	
autumn	წითელს, ნარინჯისფერსა და ყვი-თელს შორის გარდამავალი გადა-სვლა.
bone	ლურჯის ელფერი.
cool	ცისფერისა და მეწამულის ელფერი
copper	სპილენძის ელფერი.
gray	მუქი ნაცრისფერი ელფერიდან ღია ნაცრისფრამდე.

hot	შავ, წითელ, ნარინჯისფერ, ყვითელ და თეთრ ფერებს შორის გარდამავალი გადასვლა.
hsv	ცისარტყელას ფერებს შორის გარდამავალი გადასვლა.
jet	ლურჯ, ცისფერ, მწვანე, ყვითელ და წითელ ფერებს შორის გარდამავალი გადასვლა.
pink	ყავისფერი ელფერი.
prism	წითლის, ნარინჯისფერის, ყვითლის, მწვანის, ლურჯისა და იისფერის ციკლური ცვლილება.
spring	მეწამულისა და ყვითლის ელფერი.
summer	მწვანისა და ყვითლის ელფერი.
vga	თექვსმეტი ფერისაგან შემდგარი Windows-ის პალიტრა.
white	მხოლოდ თეთრი ფერის.
winter	ლურჯისა და მწვანის ელფერი.

გრაფიკების აგება „მარტივი" ბრძანებებით **ezplot, ezmesh, ezsurf, ezpolar ...**

ezplot ('f') ან f = inline (f(x)) ezplot (f)	f ფუნქციის გრაფიკის აგება $[-2\pi, 2\pi]$ შუალედში.
ezplot ('x(t)',' y(t)')	პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება $[0,2\pi]$ შუალედში.
ezplot ('x(t)',' y(t)',[$t_{min}t_{max}$])	პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი $[t_{min}, t_{max}]$ შუალედში.
ezplot3(x,y, z)	$x(t), y(t), z(t)$ პარამეტრული სახით მოცემული მრუდის გრაფიკის აგება, $t \in (0,2\pi)$.

$\mathrm{ezplot}('\mathrm{f}', [\mathrm{x_{min}}, \mathrm{x_{max}}], [\mathrm{y_{min}}, \mathrm{y_{max}}])$	$f(x,y)$ არაცხადი ფუნქციის გრაფიკის აგება არეში $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}]$.
ezpolar (f)	გრაფიკის აგება პოლარულ კოორდინატებში $f = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [0,2\pi]$.
$\mathrm{f} = \mathrm{inline}(\rho(\varphi))$ $\mathrm{ezpolar}(\mathrm{f}, [\mathrm{a}, \mathrm{b}])$	იგივე $\varphi \in [a, b]$.
$\mathrm{ezmesh}('\mathrm{f(x,y)}')$ ან $\mathrm{z} = \mathrm{inline}('\mathrm{f(x,y')}'), \mathrm{ezmesh}(\mathrm{z}, [-\mathrm{a}, \mathrm{a}])$	ორი ცვლადის $f(x,y)$ ფუნქციის კარკასული მოდელის აგება.
ezsurf(f)	ორი ცვლადის ფუნქციის კარკასული მოდელის აგება.
ezcontour(f)	ფუნქციის დონის წირების აგება $[-2\pi, 2\pi] \times [-2\pi, 2\pi]$ კვადრატში.

ა) დეკარტის კოორდინატებში ერთი ცვლადის ფუნქციის გრაფიკის აგების სინტაქსი ასე გამოიყურება:

```
x = a:h:b;  (ან  x = linspace(a,b,n);)
y = f(x);
plot (x,y,'სპეციფიკაციები')
```

ბ) სიბრტყეზე პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგების სინტაქსი:

```
t = a:h:b;   (ან t = linspace(a,b,n);)
x = x(t);y = y(t);
plot (x,y)
```

გ) სივრცეში პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგების სინტაქსი ასეთია:

```
t = a:h:b;
x = x(t); y = y(t);  z = z(t);
plot3 (x,y,z)
```

დ) პოლარულ კოორდინატებში მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება:

```
phi = a:h:b;
```

$\mathrm{ro} = \mathrm{r(phi)};$

$\mathrm{polar\ (phi, ro)}$

ე) ორი ან მეტი გრაფიკის ერთ ფანჯარაში აგება:

ერთ ფანჯარაში $y = f(x)$ და $y = g(x)$ ფუნქციათა გრაფიკების აგების სინტაქსი ასეთია:

$\mathrm{x_1 = a_1\!:h_1\!:b_1;}$

$\mathrm{y_1 = f(x_1);}$

$\mathrm{x_2 = a_2\!:h_2\!:b_2;}$

$\mathrm{y_2 = g(x_2);}$

$\mathrm{plot\ (x_1, y_1,'}$ სპეციფიკაციები$'$, $x_2, y_2,'$სპეციფიკაციები$')$

თუ არ მივუთითებთ სპეციფიკატორებს, მაშინ ერთი გრაფიკი აიგება ლურჯი ფერით, მეორე – მწვანე ფერით. სპეციფიკატორების მითითებით თითოეული ფუნქციისათვის მივიღებთ სასურველი ფერის გრაფიკებს.

ვ) ერთ ფანჯარაში ორი ან მეტი გრაფიკის აგების მეორე მეთოდი მდგომარეობს ახალი გრაფიკული ფანჯრის ბლოკირებაში hold on ბრძანების გამოყენებით, (hold on – წინა ფანჯრის „გაყინვა"); სინტაქსი ასეთია:

$\mathrm{x_1 = a_1\!:h_1\!:b_1;}$

$\mathrm{x_2 = a_2\!:h_2\!:b_2;}$

$\mathrm{x_3 = a_3\!:h_3\!:b_3;}$

$\mathrm{y_1 = f_1(x_1);}$

$\mathrm{y_2 = f_2(x_2);}$

$\mathrm{y_3 = f_3(x_3);}$

$\mathrm{plot\ (x_1, y_1,'}$ სპეციფიკაციები$'$), hold on

$\mathrm{plot\ (x_2, y_2\ ,'}$ სპეციფიკაციები$')$

$\mathrm{plot\ (x_3, y_3,'}$ სპეციფიკაციები$')$

ზ) უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება:

ვთქვათ, გვინდა ავაგოთ

$$y = \begin{cases} f_1(x), & x \in [a, b], \\ f_2(x), & x \in [b, c], \\ f_3(x), & x \in [c, d]. \end{cases}$$

ფუნქციის გრაფიკი. ბრძანებათა თანმიმდევრობა ასეთი იქნება:

$\mathrm{x_1 = [a\!:h_1\!:b];}$ (ან $\mathrm{x_1 = linspace(a, b, n_1);}$)

$y_1 = f_1(x_1);$
$x_2 = [a{:}h_2{:}b];$ (ან $x_2 = \mathrm{linspace}(a,b,n_2);$)
$y_2 = f_2(x_2);$
$x_3 = [a{:}h_3{:}b];$ (ან $x_3 = \mathrm{linspace}(a,b,n_3);$)
$y_3 = f_3(x_3);$
plot(x_1, y_1,' სპეციფიკაციები', x_2, y_2,' სპეციფიკაციები',
x_3, y_3,'სპეციფიკაციები')

თ) რამდენიმე გრაფიკთან მუშაობა.

განვიხილოთ რამდენიმე დამოუკიდებელი გრაფიკის ერთ გრაფიკულ ფანჯარაში მოთავსება. ფანჯარა უნდა გაიყოს ქვეგრაფიკებად subplot ბრძანების საშუალებით. ის ალაგებს გრაფიკებს მატრიცის სახით და აქვს სამი პარამეტრი: სტრიქონების რაოდენობა (m), სვეტების რაოდენობა (n) და ქვეგრაფიკის (k) ნომერი: subplot (m, n, k).

MATLAB-ში ბრძანებათა სინტაქსი ასეთი იქნება:

$x_1 = [a{:}h_1{:}b];$

$y_1 = f_1(x_1);$
subplot (m, n, 1)
plot(x_1, y_1)
$x_2 = [c{:}h_2{:}d];$
$y_2 = f_2(x_2);$
subplot (m, n, 2)
plot(x_2, y_2)
… … … … … … … …
$x_k = [p{:}h_k{:}q];$
$y_k = f_k(x_k);$
subplot (m, n, k)
plot(x_k, y_k)

მაგალითად, გვსურს 6 გრაფიკი განვალაგოთ 2×3 ფანჯრებში:

k=1	k=2	k=3
k=4	k=5	k=6

$(m, n) = (2, 3),$

(2,3,1) $y1$ გრაფიკი	(2,3,2) $y2$ გრაფიკი	(2,3,3) $y3$ გრაფიკი
(2,3,4) $y4$ გრაფიკი	(2,3,5) $y5$ გრაფიკი	(2,3,6) $y6$ გრაფიკი

ი) დეკარტის კოორდინატებში მოცემული $z = f(x, y)$ ფუნქციის გრაფიკის აგების სინტაქსი:

$\mathrm{x = linspace(a, b, n);} \quad \mathrm{y = linspace(c, d, n);}$

$\mathrm{[X, Y] = meshgrid(x, y);}$

$\mathrm{Z = f(X, Y);}$

$\mathrm{mesh(X, Y, Z)}$

$\mathrm{xlabel('x')}$

$\mathrm{ylabel('y')}$

$\mathrm{zlabel('z')}$

$\mathrm{mesh(X, Y, Z)}$-ის ნაცვლად შეიძლება ავიღოთ ქვემოჩამოთვლილთაგან ერთ-ერთი:

$\mathrm{meshz\ (X, Y, Z)}$

$\mathrm{meshc(X, Y, Z)}$

$\mathrm{surfz\ (X, Y, Z)}$

$\mathrm{surfc\ (X, Y, Z)}$

$\mathrm{surfl\ (X, Y, Z)}$

$\mathrm{waterfall\ (X, Y, Z)}$

$\mathrm{contour\ (X, Y, Z, n)}$

$\mathrm{contour3\ (X, Y, Z, n)}$

კ) პარამეტრული სახით მოცემული ზედაპირის გრაფიკის აგების სინტაქსი:

$\mathrm{u = a_1 : h_1 : b_1;}$

$\mathrm{v = a_2 : h_2 : b_2;}$

$\mathrm{x = x(u, v);}$

$\mathrm{y = y(u, v);}$

$\mathrm{z = z(u, v);}$

(თუ u ან v არ შედის z-ის გამოსახულებაში, მაშინ ვწერთ $\mathrm{z = f(u)\ ones(size(v))}$ ან $\mathrm{z = f(v)\ ones\big(size(u)\big)}$, $\mathrm{surf(x, y, z)}$ ან $\mathrm{mesh(x, y, z)}$. ბრძანება hidden გვაძლევს ზედაპირის ქვედა ნაწილის აგების საშუალებას, თუ მას გააჩნია ეს ქვედა ნაწილი.

ლ) ვექტორული ველების ვიზუალიზაციისათვის გამოიყენება ბრძანება quiver (x,y,ux,uy):

$x = a{:}h{:}b;$

$y = x;$

$[X,Y] = \text{meshgrid}(x,y);$ (ან $[X,Y] = \text{meshgrid}(x);$)

$ux = f(X,Y);$

$uy = g(X,Y);$

$\text{quiver}(X,Y,ux,uy)$

სამგანზომილებიანი ვექტორული ველების ვიზუალიზაციას ახდენს ფუნქცია $\text{quiver3}(x,y,z,ux,uy,uz)$.   სინტაქსი ასეთია:

$x = a{:}h{:}b;$

$y = x;$

$z = x;$

$[X,Y,Z] = \text{meshgrid}(x);$

$ux = f_1(X,Y);$

$uy = f_1(X,Y);$

$uz = f_3(X,Y);$

$\text{quiver}(X,Y,Z,ux,uy,uz)$

რამდენიმე წირის შემცველ გრაფიკულ ფანჯარაში წარწერების განთავსება

legend – არის წარწერა ნახაზზე იმ ფაქტის მისათითებლად, თუ რომელი მრუდი რომელ ფუნქციას შეესაბამება. legend-ის განთავსებისათვის ნახაზზე უნდა გავითვალისწინოთ, რომ რიგი და არგუმენტების რაოდენობა უნდა შეესაბამებოდეს მრუდებს საკოორდინატო სიბრტყეზე. ბრძანების ფორმატი შემდეგია:

$\text{mylg} = \text{legend}('y = f_1',' y = f_2', \ldots ,'\text{Location}','$ განთავსების ადგილი$');$

$\text{set}(\text{mylg},'\,\text{EdgeColor}',[a,b,c])$ (წარწერის ჩარჩოს ფერის მითითება, $a,b,c \in [0;1]$)

$\text{set}(\text{mylg},'\,\text{TextColor}',[a,b,c])$ (წარწერის ტექსტის ფერის მითითება, $a,b,c \in [0;1]$)

წარწერის განთავსების ადგილის სპეციფიკაციები

North	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, ზემოთ
South	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, ქვემოთ
East	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, მარჯვნივ
West	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, მარცხნივ
NorthEast	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, ზემო მარჯვენა კუთხეში
NorthWest	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, ზემო მარცხენა კუთხეში
SouthEast	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, ქვემო მარჯვენა კუთხეში
SouthWest	კოორდინატთა სისტემის არე-ში, ქვემო მარცხენა კუთხეში
NorthOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, ზემოთ
SouthOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, ქვემოთ
EastOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, მარჯვნივ
WestOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, მარცხნივ
NorthEastOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, ზემო მარჯვენა კუთხე-ში
NorthWestOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, ზემო მარცხენა კუთხე-ში
SouthEastOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, ქვემო მარჯვენა კუთხე-ში

SouthWestOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, ქვემო მარცხენა კუთხეში
Best	კოორდინატთა სისტემის არეში, გრაფიკის მიმართ ყველაზე ნაკლებად კონფლიქტურ ადგილზე
BestOutside	კოორდინატთა სისტემის გარე არეში, გრაფიკის მიმართ ყველაზე ნაკლებად კონფლიქტურ ადგილზე

მაგალითები

1. ავაგოთ დეკარტის კოორდინატებში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი

ა) $y = x^3 + 9x^2 + 15x - 25, \quad x \in [-3;3]$.

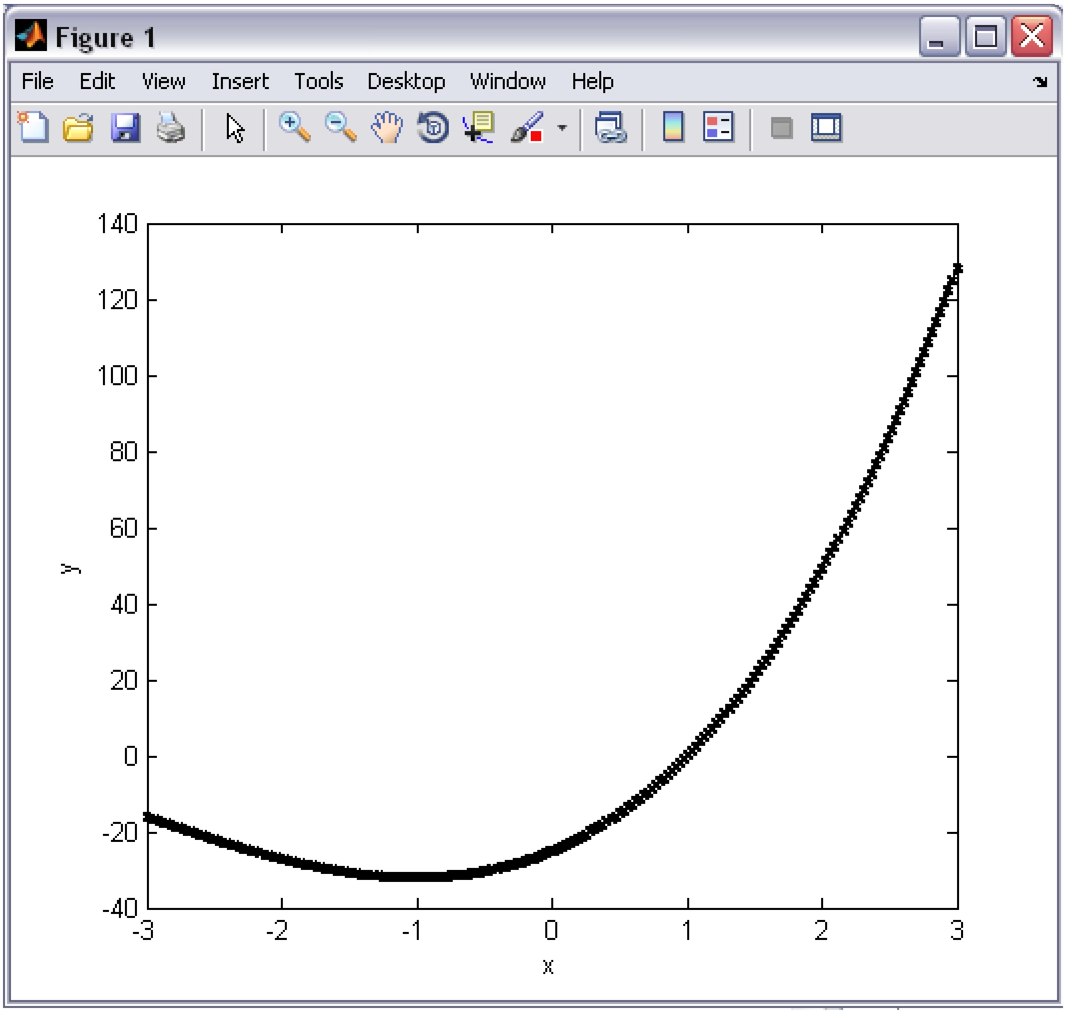
>> figure1 = figure('Color',[1 1 1]); (საკოორდინატო სისტემის გარე ფონის მითითება)

>> x = linspace(-3,3,200);

>> y = x.^3 + 9 * x.^2 + 15 * x - 25;

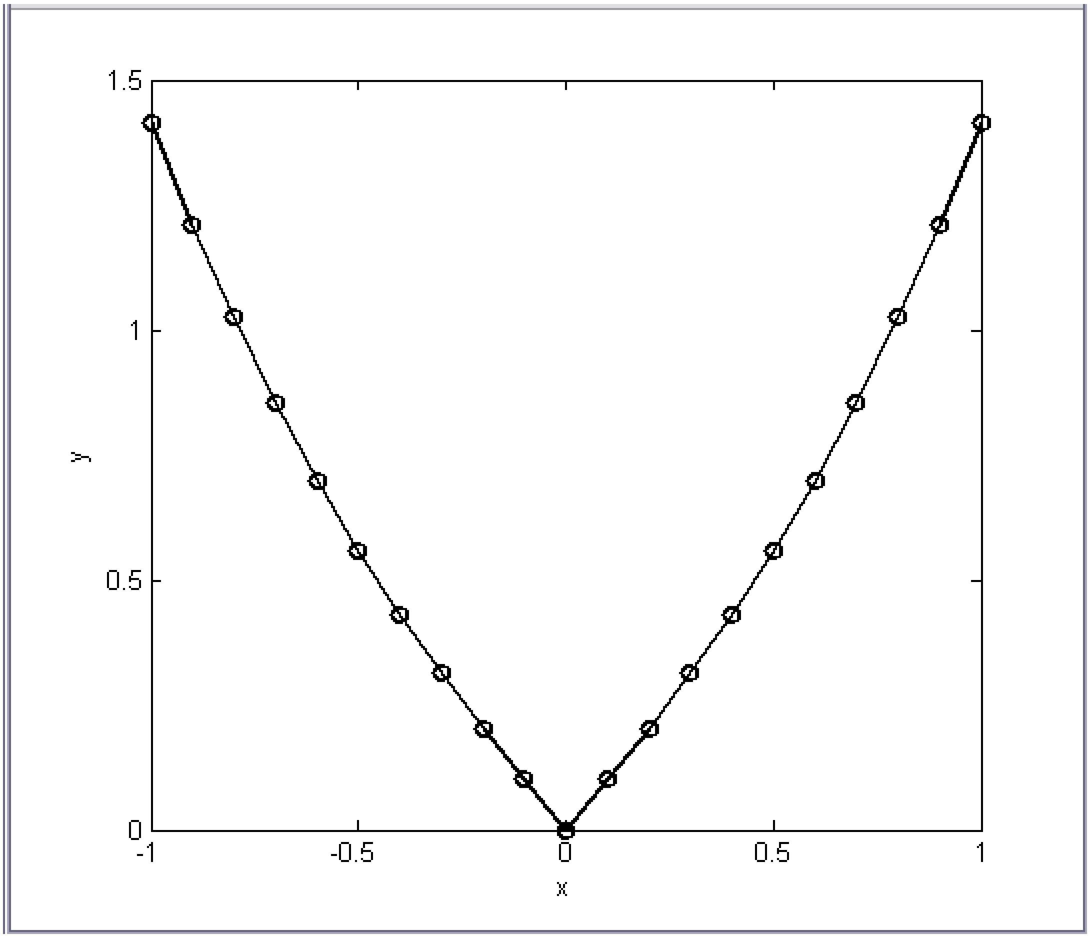
>> plot(x,y,'k - x')

>> xlabel('x');ylabel('y')



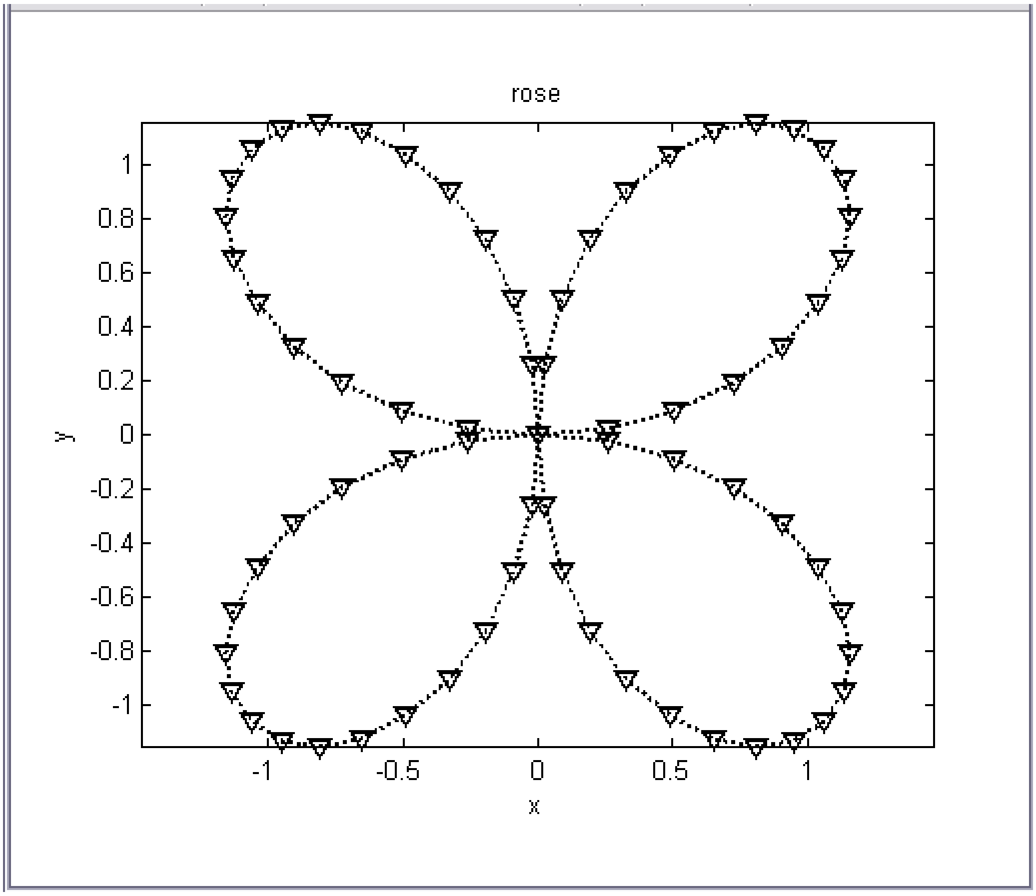
ბ) $y = \sqrt{x^2 + x^4}, \qquad x \in [-1; 1].$

```
>> x = -1:0.1:1;
>> y = sqrt(x.^2 + x.^4);
>> plot(x,y,'r-o')
>> xlabel('x');ylabel('y')
```



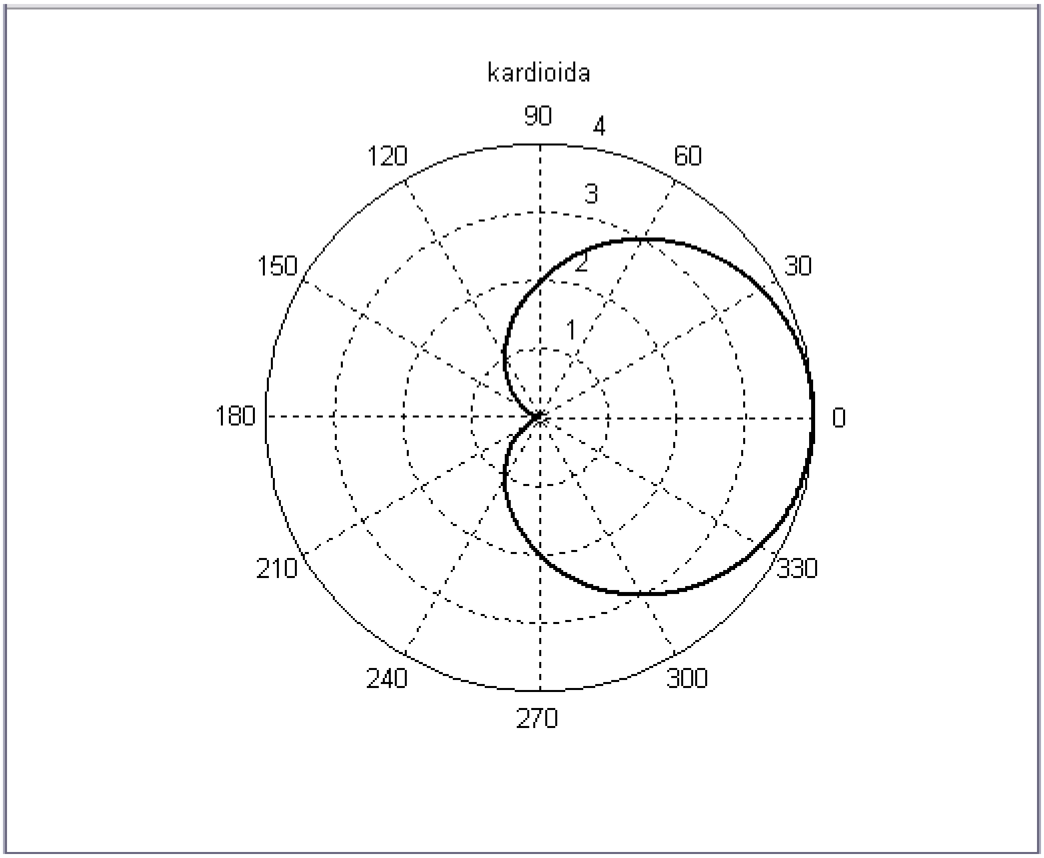
2. ავაგოთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი სიბრტყეზე
$x = 3\sin t \cos^2 t$, $y = 3\cos t \sin^2 t$, $t \in [0; 2\pi]$.

```
>> t = 0: pi/36: 2 * pi;
>> x = 3 * sin(t) .* cos(t) . ^2;
>> y = 3 * cos(t) .* sin(t) . ^2;
>> plot(x,y, 'k: v')
>> axis equal
>> title ('rose');
>> xlabel('x');
>> ylabel('y')
```



3. ავაგოთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული ფუნქციის გრაფიკი
ა) $\rho = 5(1+\cos\varphi), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

```
>> phi = 0: 0.1: 2 * pi;
>> ro = 2 * (1 + cos(phi));
>> h = polar(phi,ro,'-k');
>> set(h,'LineWidth',2);
>> title ('kardioida')
```



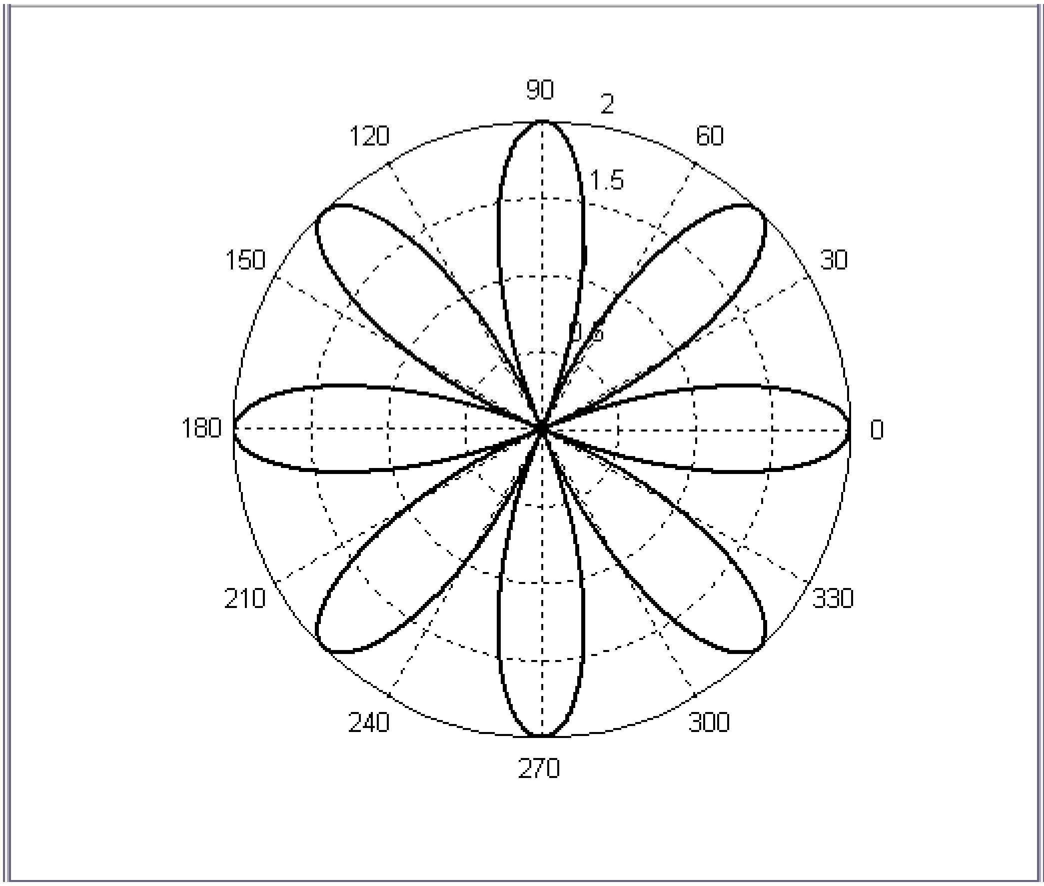
ბ) $\rho = 2\cos 4\theta\,, \quad \theta \in [0; 2\pi].$

$>>$ theta $=$ linspace(0,2 $*$ pi, 100);

$>>$ r $= 2 *$ cos(4 $*$ theta) ;

$>>$ h $=$ polar(theta, r,′ − k′);

$>>$ set(h,′ LineWidth′, 2);

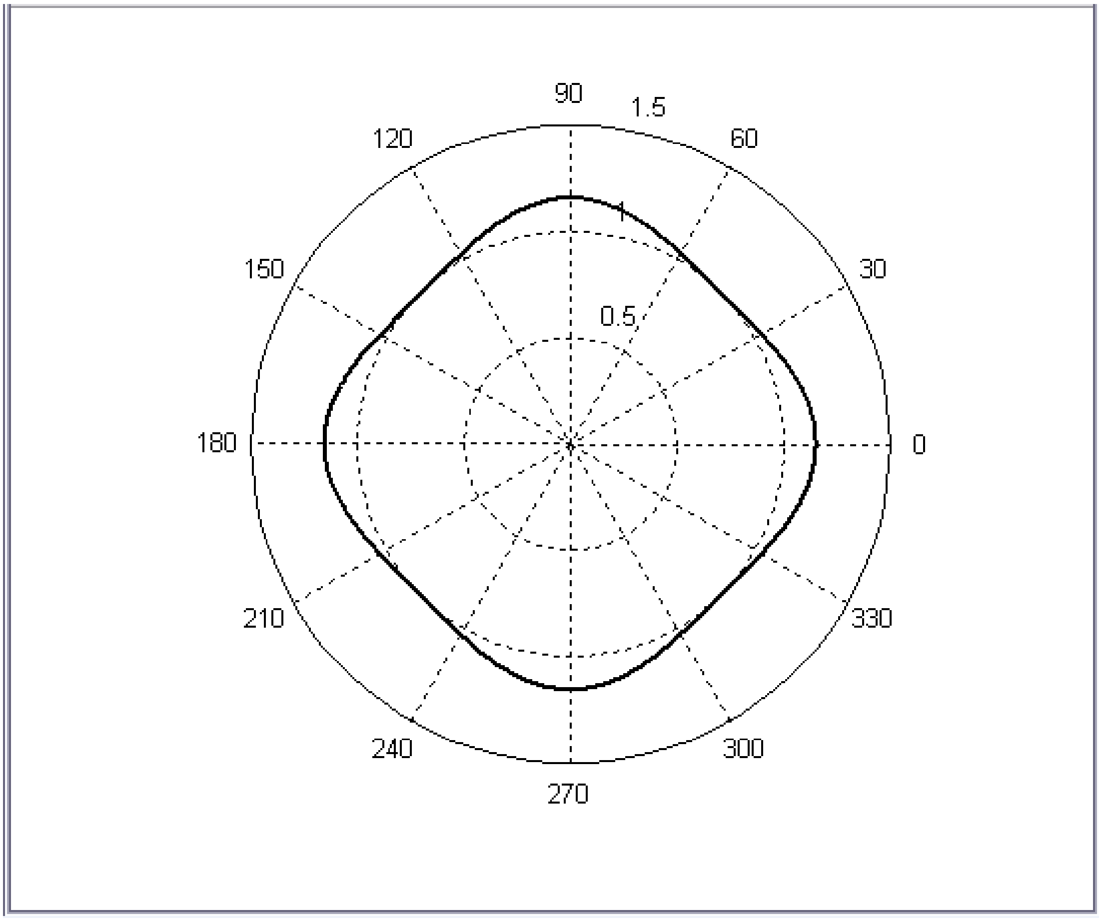


გ) $\rho = \sqrt{\dfrac{2}{2 - 0{,}5\cos^2 2\varphi}}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi].$

$>> \ \mathrm{phi = linspace(0{,}2 * pi, 200);}$

$>> \ \mathrm{ro = sqrt(2./(2 - 0.5 * (cos(2 * phi)).\hat{}2));}$

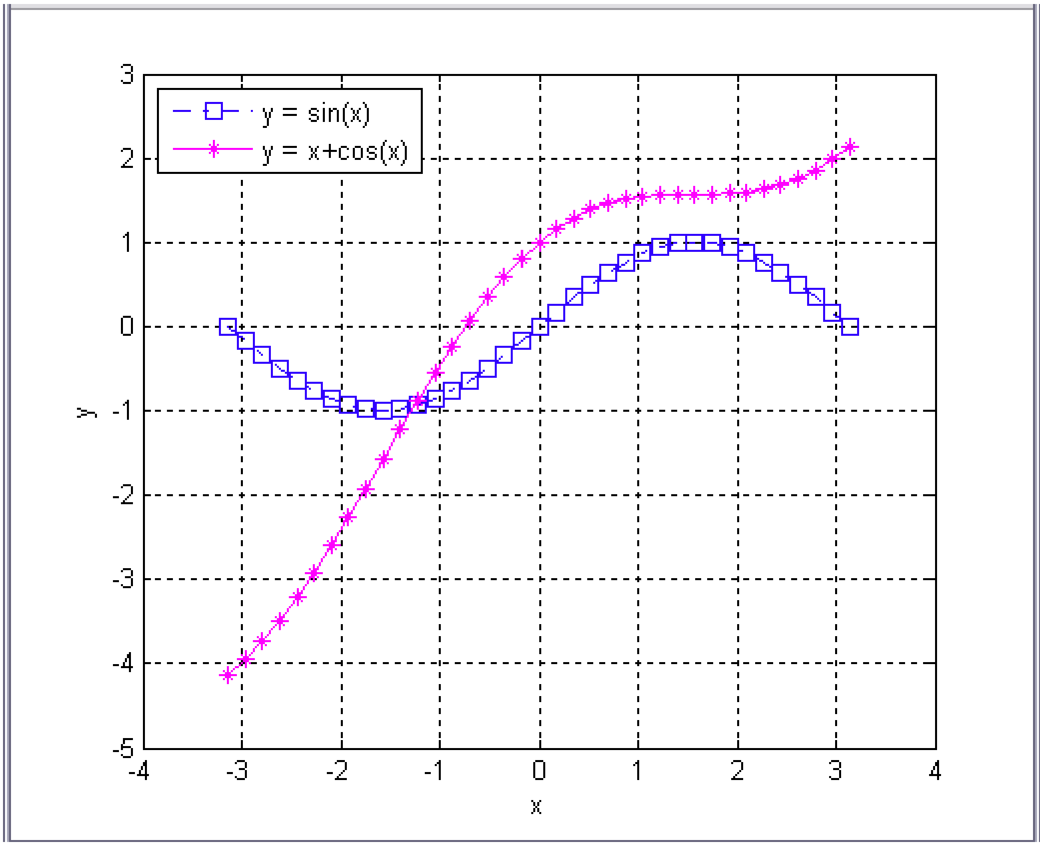
$>> \ \mathrm{polar(phi, ro)}$



4. ერთ ფანჯარაში ავაგოთ დეკარტის კოორდინატებში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

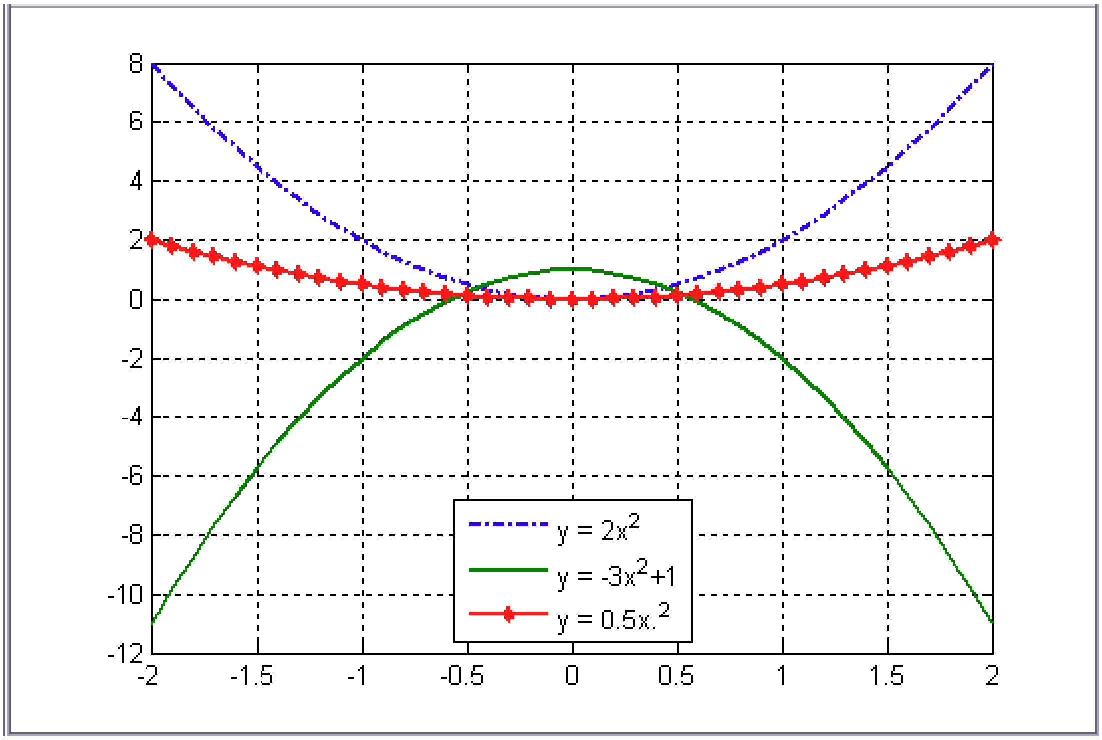
ა) $y_1 = \sin x$, $y_2 = x + \cos x$, $x \in [-\pi; \pi]$.

```
>> x = -pi: pi/18: pi;
>> y1 = sin(x) ;
>> y2 = x + cos(x) ;
>> plot(x,y1,'b-. s',x,y2,'m -* ')
>> xlabel('x' );ylabel('y')
>> legend('y = sin(x) ','y = x + cos(x) ','Location','NorthWest');
```



ბ) $y_1 = 2x^2, \quad y_2 = -3x^2 + 1, \quad y_3 = 0{,}5x^2, \quad x \in [-2;2].$

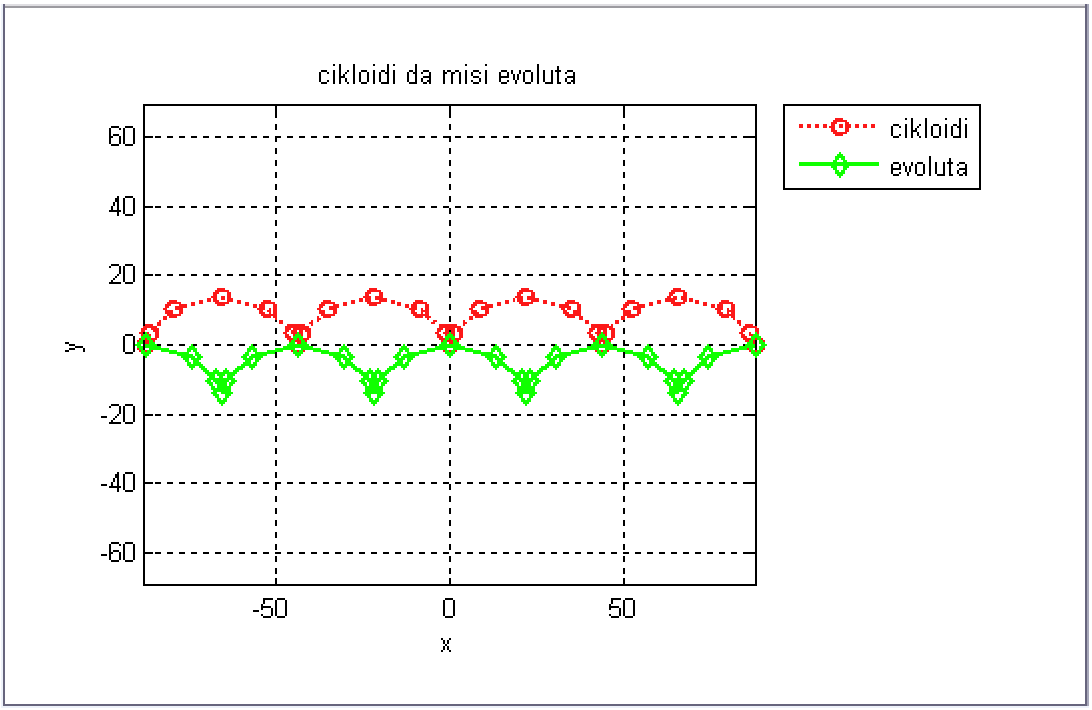
```
>> x = -2:0.1:2;
>> y1 = 2*x.^2;
>> y2 = -3*x.^2 + 1;
>> y3 = 0.5*x.^2;
>> h = plot(x,y1,'-.',x,y2,'-',x,y3,'-*');
>> set(h,'LineWidth',2)
>> legend('y = 2*x^2','y = -3*x^2 + 1','y ...
        = 0.5*x.^2','Location','South');
```



5. ერთ ფანჯარაში ავაგოთ სიბრტყეზე პარამეტრული სახით მოცემული ორი ან მეტი ფუნქციის გრაფიკი:

$x_1 = 7(t - \sin t), \qquad y_1 = 7(1 - \cos t);$
$x_2 = \ 7(t + \sin t), \qquad y_2 = -7(1 - \cos t);$
$-4\pi \le t \le 4\pi.$

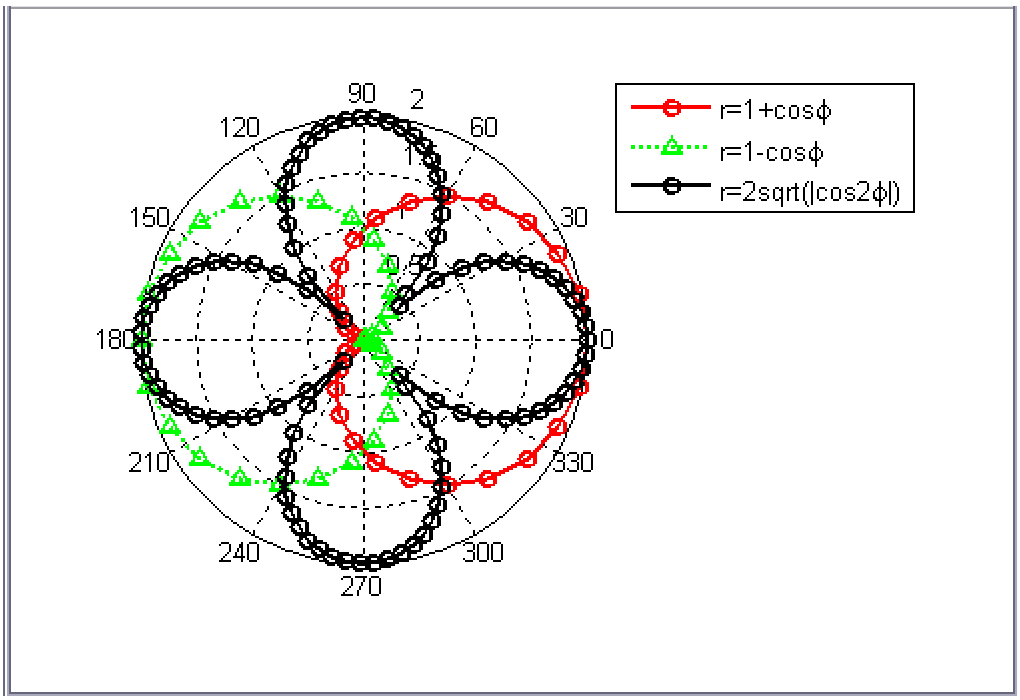
```
>> t = linspace(-4 * pi, 4 * pi, 25);
>> x1 = 7 * (t - sin(t));   y1 = 7 * (1 - cos(t));
>> x2 = 7 * (t + sin(t));   y2 = -7 * (1 - cos(t));
>> h = plot(x1,y1,'r:o',x2,y2,'g-d');
>> set(h,'LineWidth',2)
>> axis equal
>> title ('cikloidi da misi evoluta')
>> xlabel('x'); ylabel('y')
>> legend('cikloidi','evoluta','Location','BestOutside');
```



6. ერთ ფანჯარაში ავაგოთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

$$\rho_1 = 1 + \cos\varphi, \quad \rho_2 = 1 - \cos\varphi, \quad \rho_3 = 2\sqrt{|\cos\varphi|}, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

```
>> phi = 0:pi/15:2*pi;
>> ro1 = 1 + cos(phi);
>> h = polar(phi,ro1,'r-o'); set(h,'LineWidth',2);
>> hold on
>> ro2 = 1 - cos(phi);
>> h1 = polar(phi,ro2,'g:^'); set(h1,'LineWidth',2);
>> hold on
>> phi1 = linspace(0,2*pi,100);
>> ro3 = 2*sqrt(abs(cos(2*phi1)));
>> h2 = polar(phi1,ro3,'k-o'); set(h2,'LineWidth',2)
>> legend('r=1+cos\phi','r=1-cos\phi','r=2sqrt(|cos2\phi|)',...
                                        'Location','BestOutside');
```



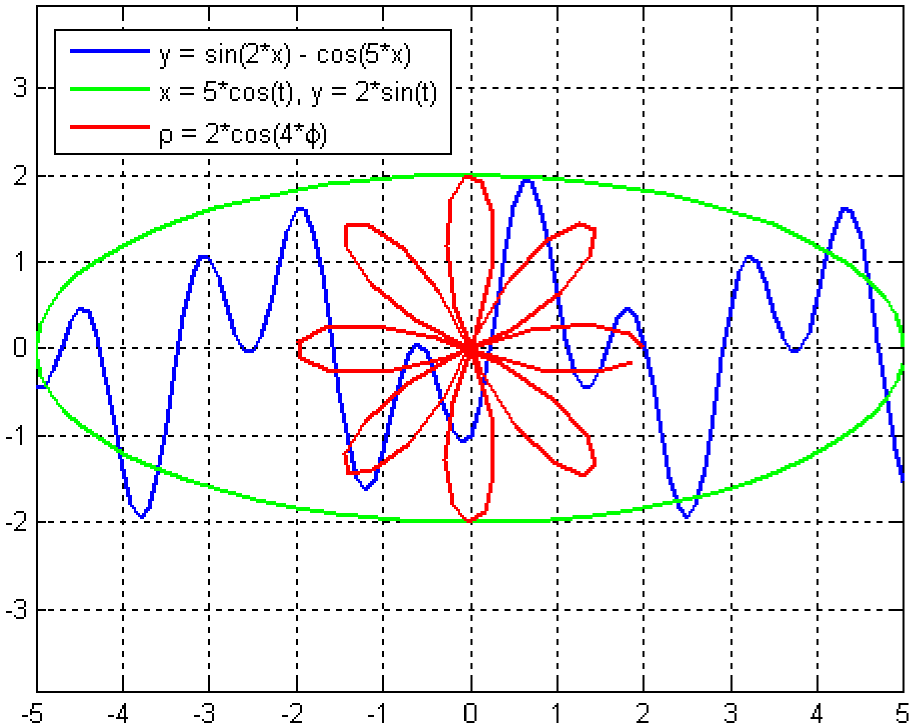
7. ერთ ფანჯარაში ავაგოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

$y = \sin 2x - \cos 5x, \quad x \in [-5, 5];$

$x = 5\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi];$

$\rho = 2\cos 4\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$

```
x = -5:0.1:5;   y = sin(2*x) - cos(5*x);
plot(x,y,'LineWidth',2),  grid,  axis equal,   hold on
t = 0:0.1:2*pi;   x1 = 5*cos(t);   y1 = 2*sin(t);
plot(x1,y1,'g','LineWidth',2),    hold on
phi = 0:0.1:2*pi;   rho = 2*cos(4*phi);   h = polar(phi,rho,'-r');
set(h,'LineWidth',2)
legend('y = sin(2*x) - cos(5*x)','x = 5*cos(t),y = 2*sin(t)','ρ =...
                2*cos(4*\phi)','Location','Best')
```



8. ავაგოთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი სივრცეში:

ა) $x = \sqrt{t}\sin 2t$, $y = \sqrt{t}\cos 2t$, $z = 0{,}5t$, $0 \le t \le 6\pi$.

$>>$ $\mathrm{t = 0{:}\,0.1{:}\,6 * pi;}$

$>>$ $\mathrm{x = sqrt(t).* sin(2 * t)\,;}$

$>>$ $\mathrm{y = sqrt(t).* cos(2 * t)\,;}$

$>>$ $\mathrm{z = 0.5 * t;}$

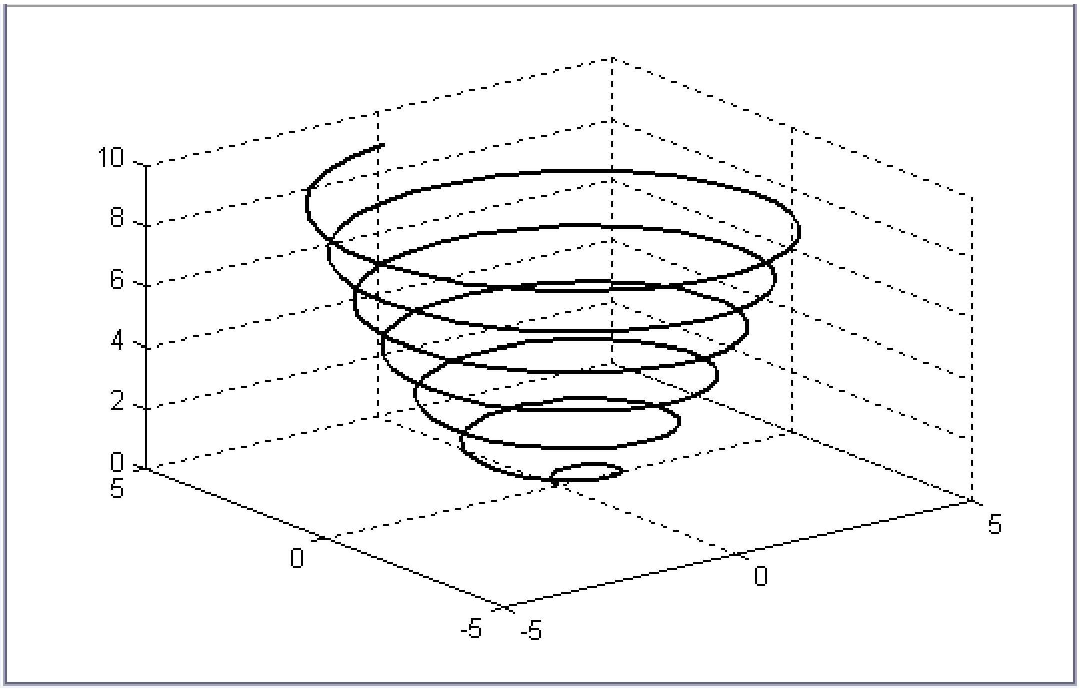
$>>$ $\mathrm{plot3(x, y, z, 'k', 'lineWidth', 2)}$

$>>$ $\mathrm{grid\ on}$

$>>$ $\mathrm{xlabel('x');}$

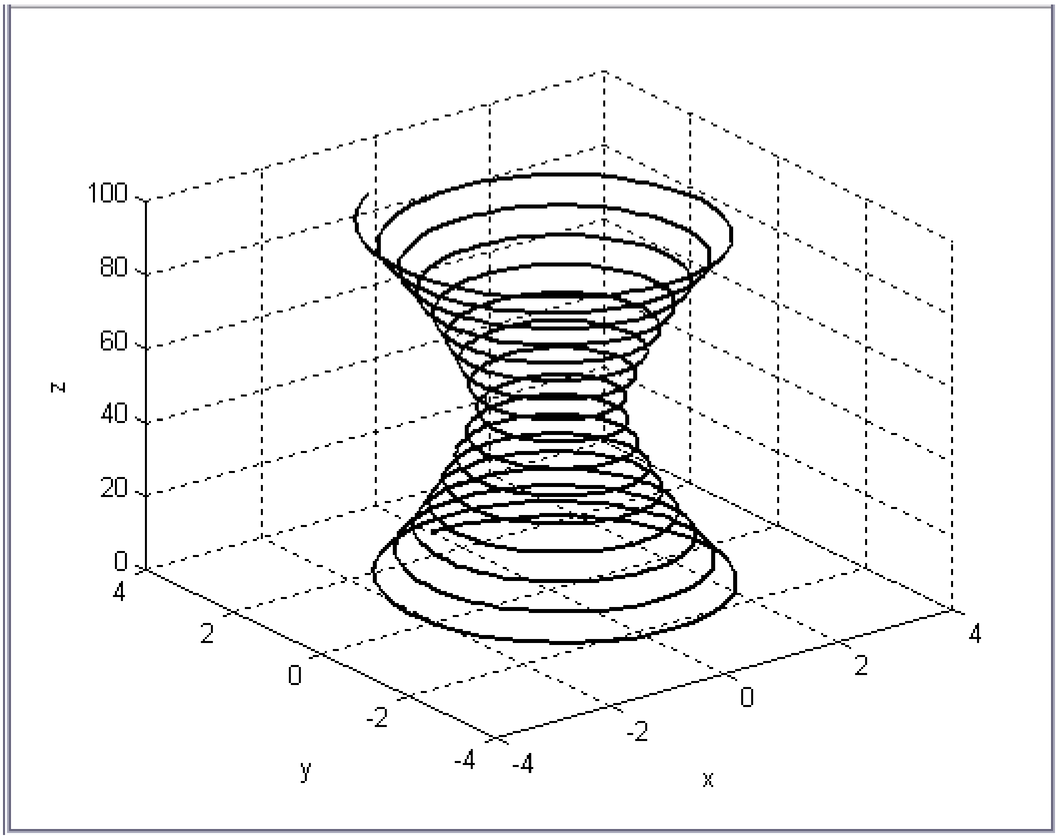
$>>$ $\mathrm{ylabel('y')}$

$>>$ $\mathrm{zlabel('z')}$



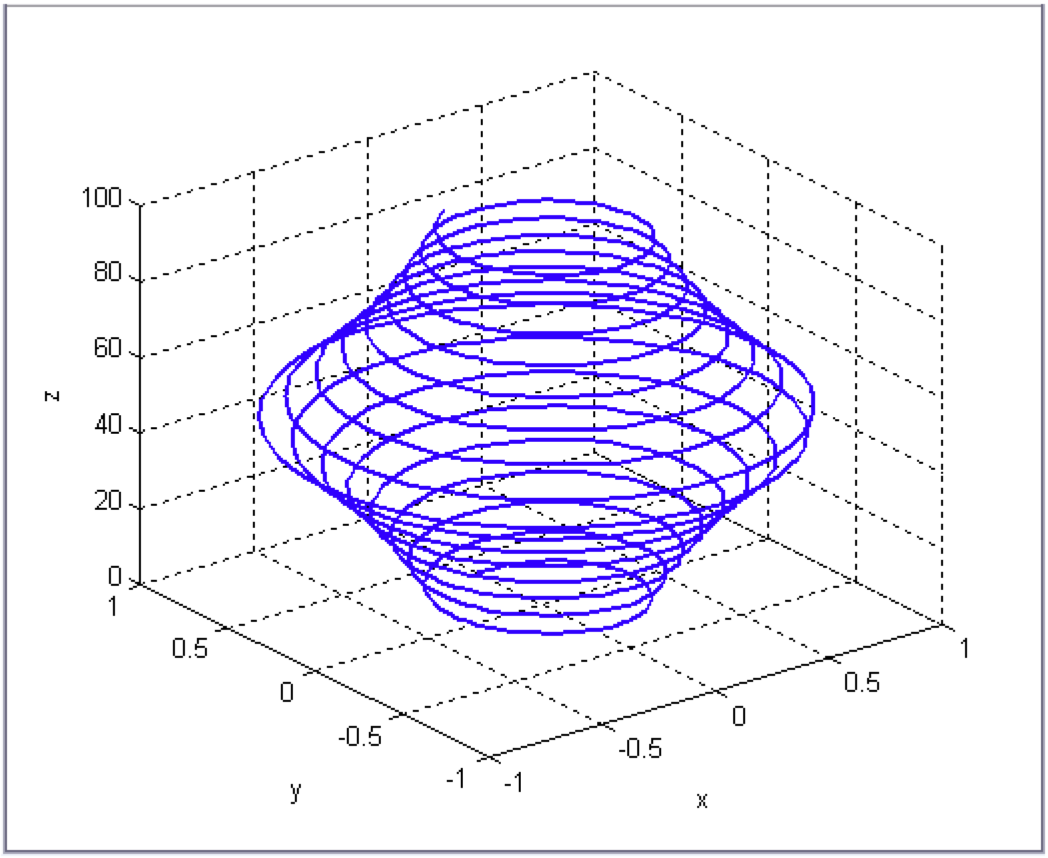
ბ) $x = e^{|t-50|/50}\sin t, \quad y = e^{|t-50|/50}\cos t\,,\ z = t, \quad t \in [0,100].$

```
>> t = 0: 0.1: 100;
>> x = exp(abs(t − 50)/50).∗ sin(t);
>> y = exp(abs(t − 50)/50).∗ cos(t);
>> z = t;
>> plot3(x,y, z, 'k', 'lineWidth', 2)
>> grid on
>> xlabel('x');
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
```



დ) $x = e^{-|t-50|/50}\sin t\,,\quad y = e^{-|t-50|/50}\cos t\,,\quad z = t,\quad t \in [0, 100].$

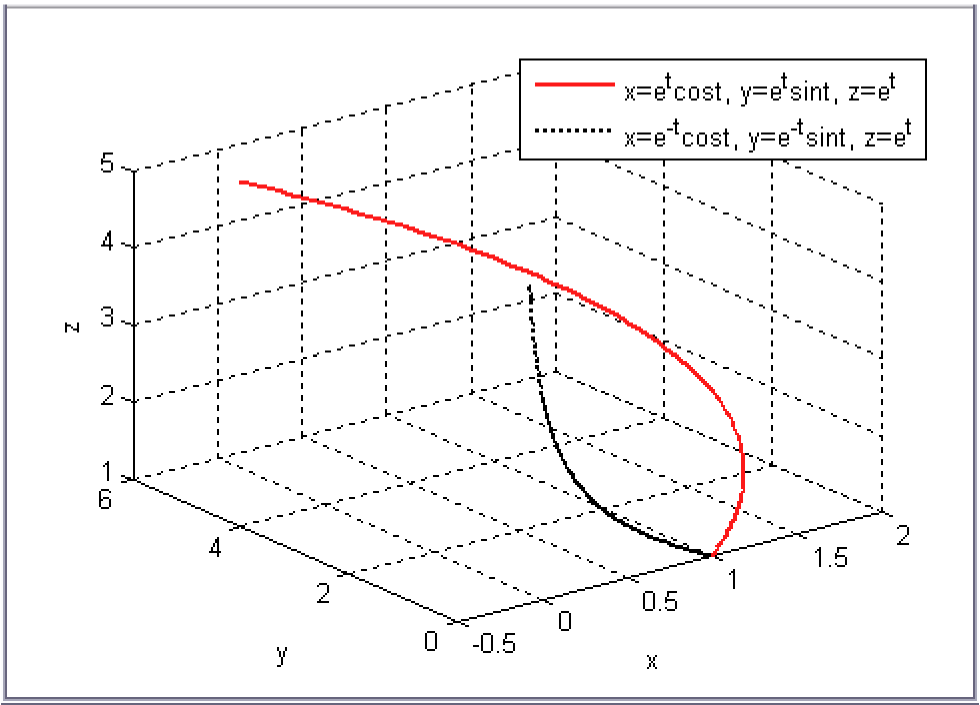
```
>> t = 0: 0.1: 100;
>> x = exp(-abs(t - 50)/50).* sin(t);
>> y = exp(-abs(t - 50)/50).* cos(t);
>> z = t;
>> plot3(x,y,z,'lineWidth',2)
>> grid on
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
```



9. ერთ ფანჯარაში ავაგოთ სივრცეში პარამეტრული სახით მოცემული ორი (ან მეტი) ფუნქციის გრაფიკი:

$$x_1 = e^t \cos t, \quad y_1 = e^t \sin t, \quad z_1 = e^t,$$
$$x_2 = e^{-t} \sin t, \quad y_2 = e^{-t} \cos t, \quad z_2 = e^t,$$
$$t \in [0;\ \ln 5].$$

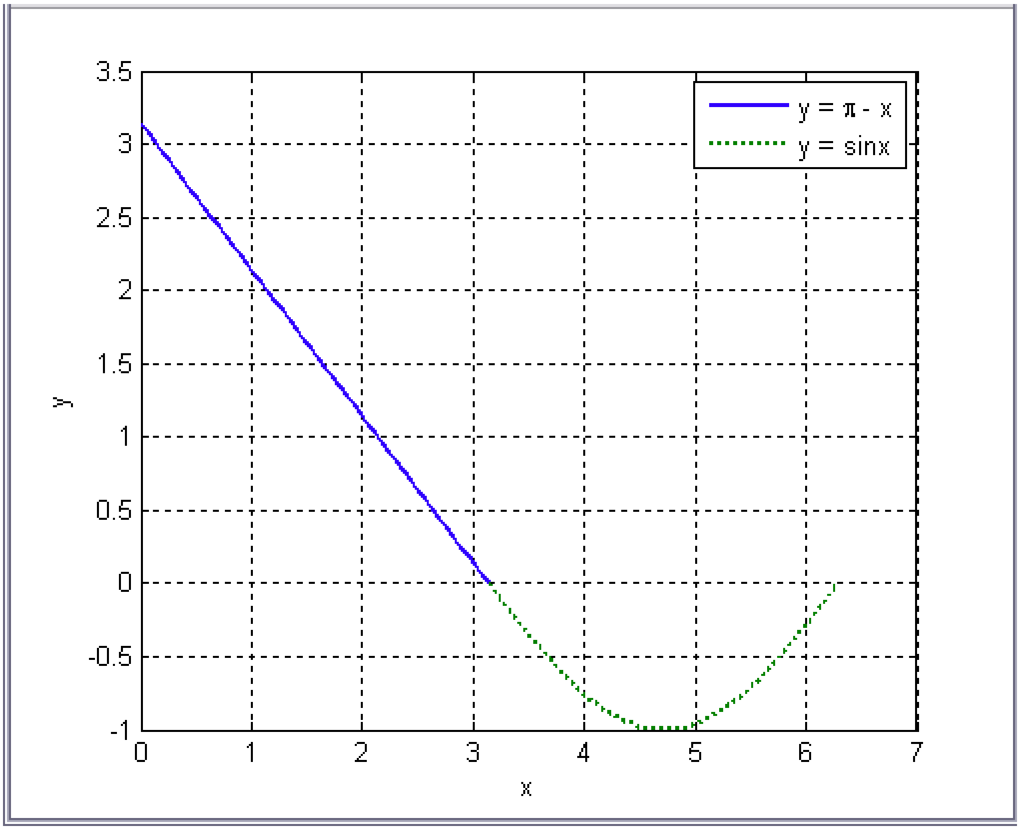
```
>> t = linspace(0,log(5),100);
>> x1 = exp(t).* cos(t);   y1 = exp(t).* sin(t);   z1 = exp(t);
>> x2 = exp(-t).* sin(t);   y2 = exp(-t).* cos(t);   z2 = exp(t);
>> plot3(x1,y1,z1,'r-',x2,y2,z2,'k:')
>> xlabel('x');  ylabel('y'),   zlabel('z')
>> grid on
```



10. ავაგოთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

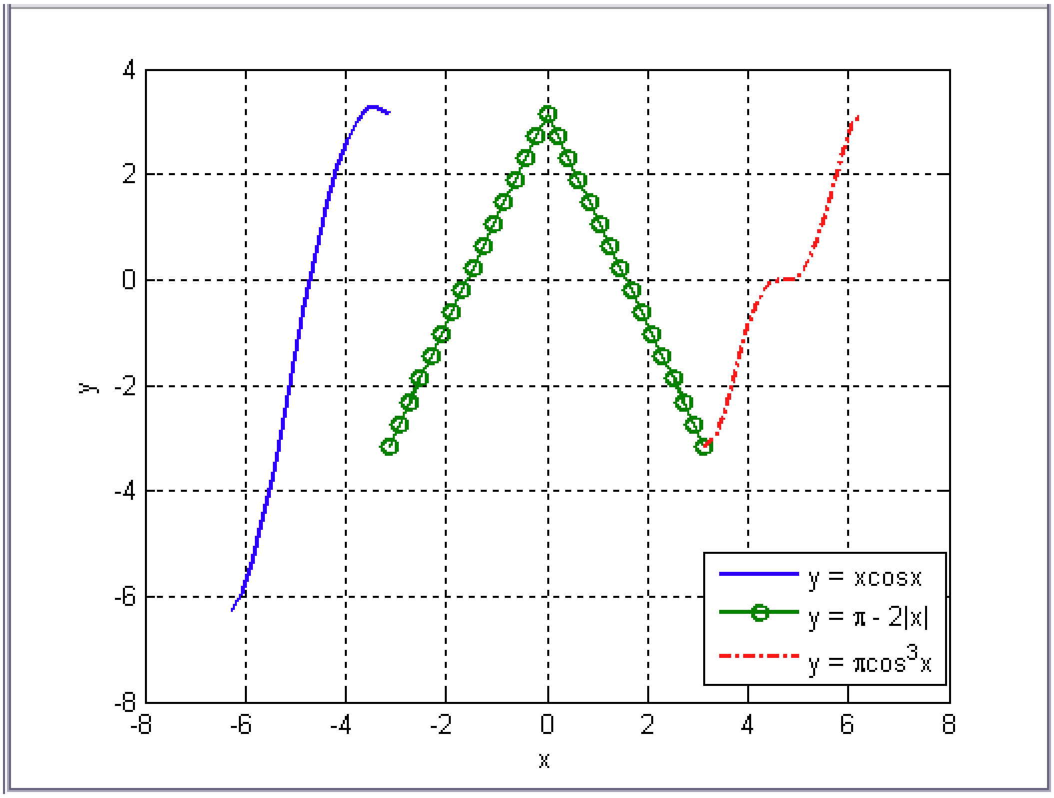
ა) $y = \begin{cases} \pi - x, & 0 \le x \le \pi, \\ \sin x, & \pi < x \le 2\pi. \end{cases}$

```
>> x1 = linspace(0,pi,50);
>> x2 = linspace(pi,2*pi,50);
>> y1 = pi - x1;
>> y2 = sin(x2);
>> plot(x1,y1,x2,y2)
>> xlabel('x');  ylabel('y'),  zlabel('z')
>> grid on
```



ბ) $y = \begin{cases} x\cos x\,, & -2\pi \le x \le -\pi, \\ \pi - 2|x|, & -\pi < x < \pi, \\ \pi\cos^3 x, & \pi \le x \le 2\pi. \end{cases}$

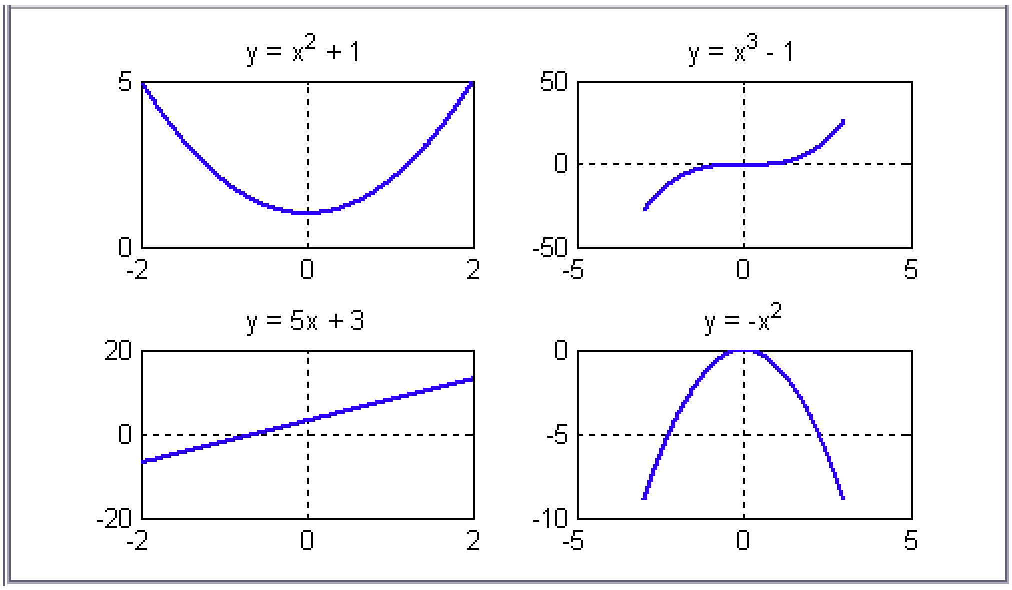
```
>> x1 = -2 * pi: pi/15: -pi;
>> x2 = -pi: pi/15: pi;
>> x3 = pi: pi/15: 2 * pi;
>> y1 = x1.* cos(x1);
>> y2 = pi - 2 * abs(x2);
>> y3 = pi * cos(x3).^3;
>> plot(x1,y1,' -',x2,y2,'- o',x3,y3,' -.')
>> legend('y = xcosx','y = \pi - 2|x|','y = \picos^3x','Location','Best');
```



11. ა) დავყოთ გრაფიკის ფანჯარა ოთხ ნაწილად, 2×2 განზომილების მატრიცად, ჩავხაზოთ მათში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

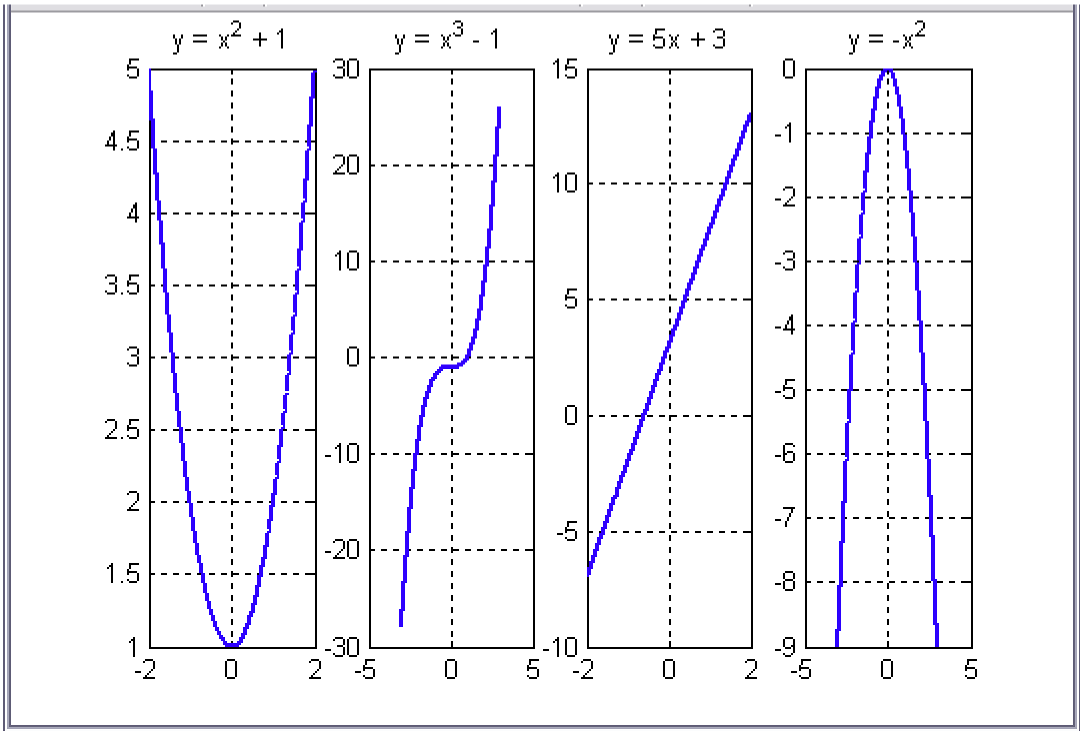
$$y = x^2 + 1, \quad x \in [-2;2],$$
$$y = x^3 - 1, \quad x \in [-3;3],$$
$$y = 5x + 3, \quad x \in [-2,2],$$
$$y = -x^2, \quad x \in [-3,3].$$

```
>> x1 = linspace(-2,2,100);   y1 = x1.^2 + 1;
>> subplot(2,2,1)
>> plot(x1,y1);    title('y = x^2 + 1')
>> x2 = -3:0.1:3;   y2 = x2.^3 - 1;
>> subplot(2,2,2)
>> plot(x2,y2);    title('y = x^3 - 1')
>> x3 = linspace(-2,2,100);  y3 = 5 * x3 + 3;
>> subplot(2,2,3)
>> plot(x3,y3);    title('y = 5x + 3')
>> x4 = -3:0.1:3;  y4 = -x4.^2;
>> subplot(2,2,4)
>> plot(x4,y4);   title('y = -x^2')
```



ბ) იმავე ფუნქციათა გრაფიკები განვათავსოთ 1×4 განზომილების ფანჯრებში:

```
>> x1 = linspace(−2,2,100);   y1 = x1.^2 + 1;
>> subplot(1,4,1)
>> plot(x1,y1);   title('y = x^2 + 1')
>> x2 = −3: 0.1: 3;   y2 = x2.^3 − 1;
>> subplot(1,4,2)
>> plot(x2,y2);   title('y = x^3 − 1')
>> x3 = linspace(−2,2,100);   y3 = 5 ∗ x3 + 3;
>> subplot(1,4,3)
>> plot(x3,y3);   title('y = 5x + 3')
>> x4 = −3: 0.1: 3;   y4 = −x4.^2;
>> subplot(1,4,4)
>> plot(x4,y4);   title('y = −x^2')
```



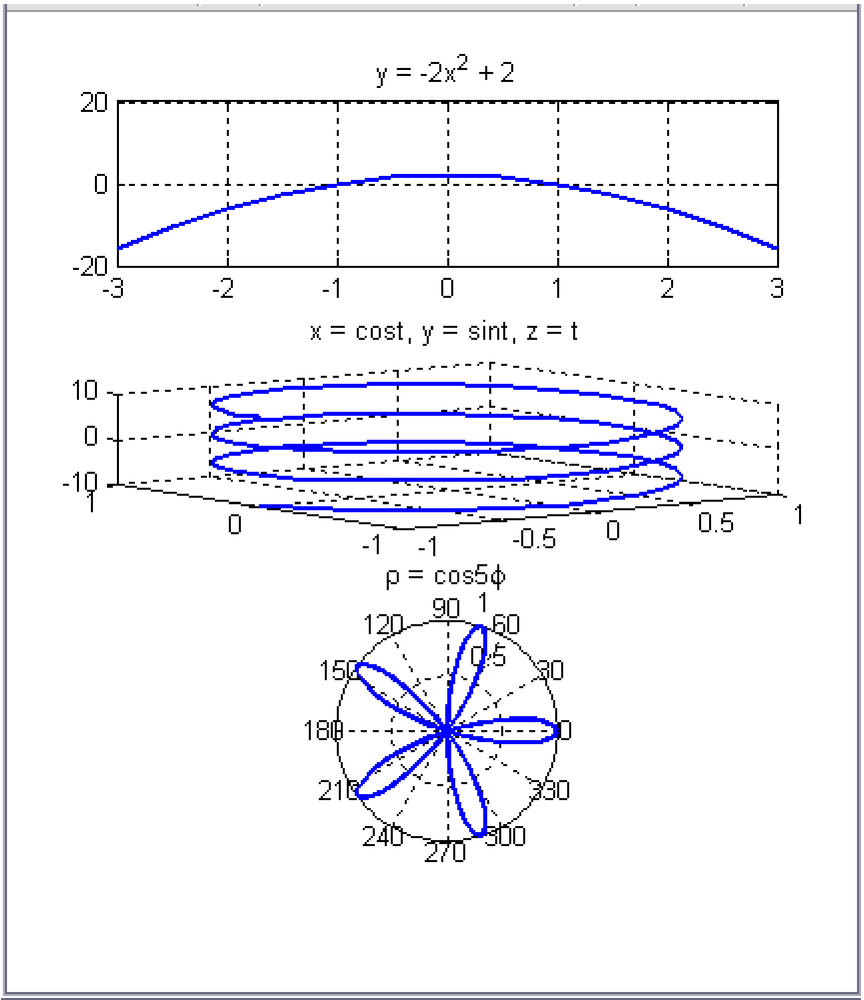
გ) დავყოთ გრაფიკის ფანჯარა 3×1 განზომილების მატრიცად და ჩავხაზოთ მასში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

$$y = -2x^2 + 2, \qquad x \in [-3,3],$$

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [-3\pi, 3\pi],$$

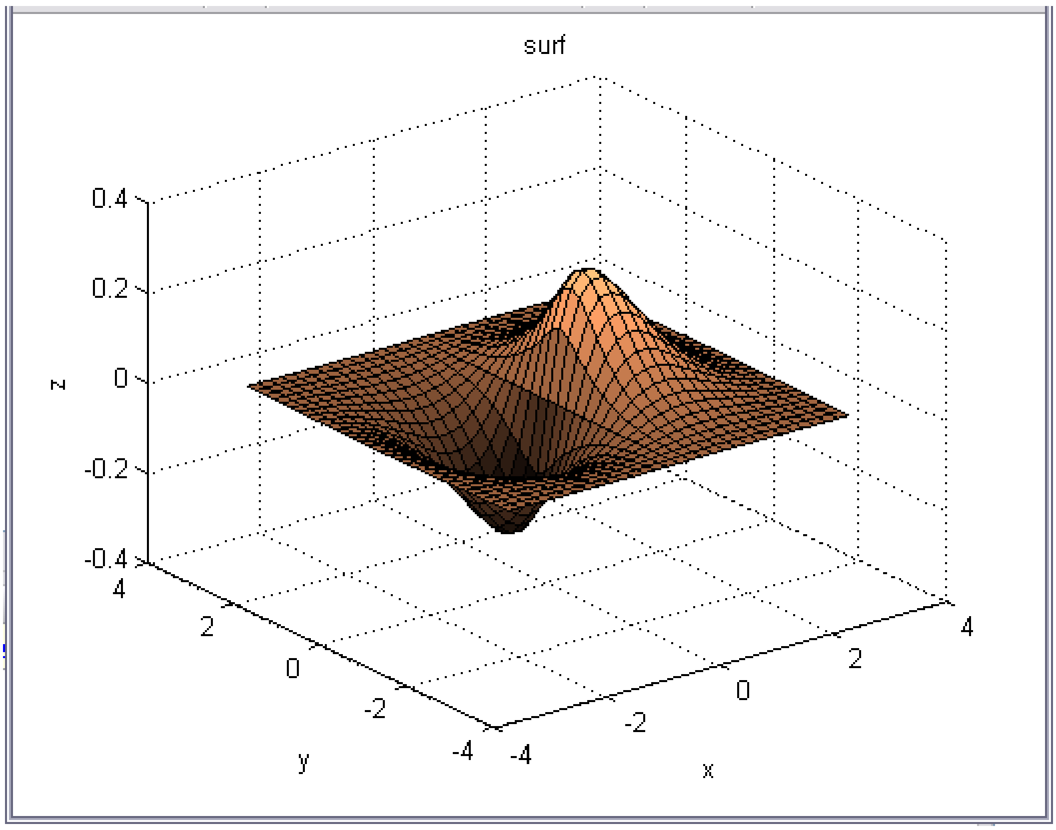
$$\rho = \cos 5\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

```
>> x1 = -3:0.5:3;  y1 = -2*x1.^2+ 2;
>> subplot(3,1,1);  plot(x1,y1);   grid
>> t = -3*pi:pi/15:3*pi;   x2 = cos(t);  y2 = sin(t);   z2 = t;
>> subplot(3,1,2); plot3(x2,y2,z2);  grid
>> t1 = linspace(0,2*pi,100); r = cos(5*t1);
>> subplot(3,1,3);   polar(t1,r)
```

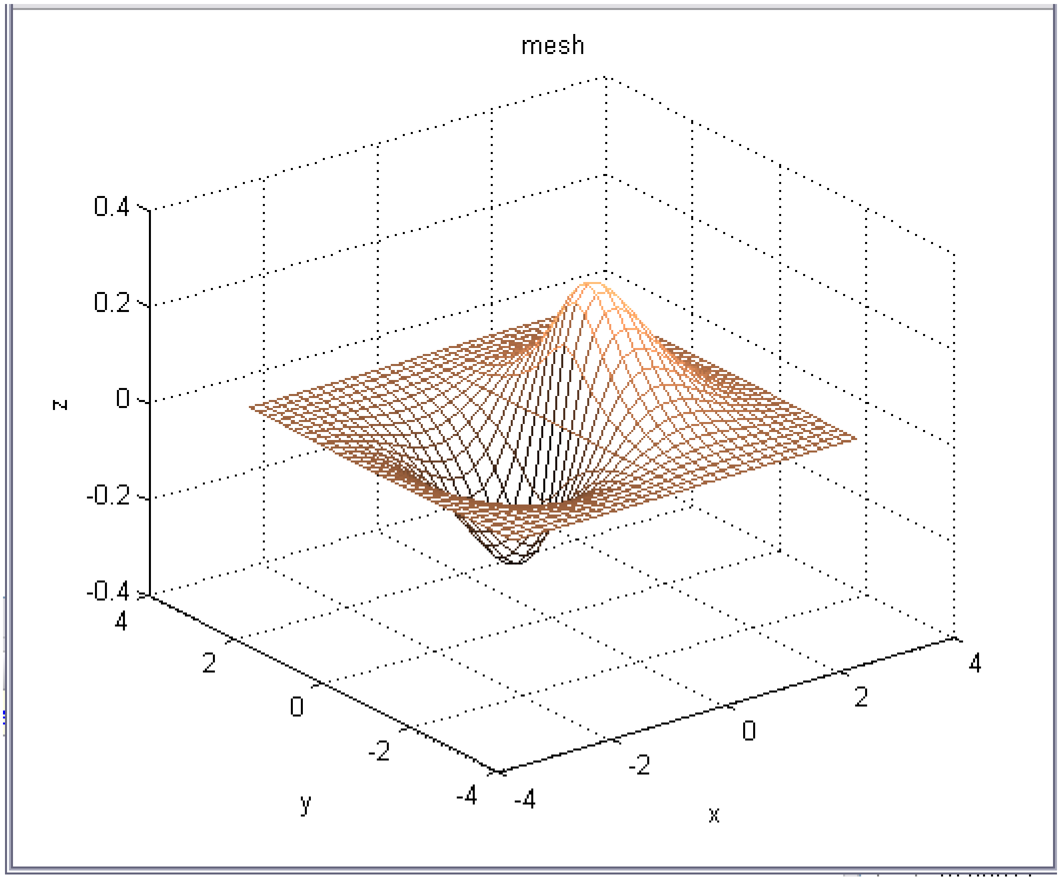


12. ავაგოთ $z = 2{,}3^{-1{,}5\sqrt{x^2+y^2}}\sin x \cdot \cos 0{,}5y$ ფუნქციის გრაფიკი $-3 \le x$, $y \le 3$ არეზე, გამოვიყენოთ აგების ყველა შესაძლო ბრძანება:

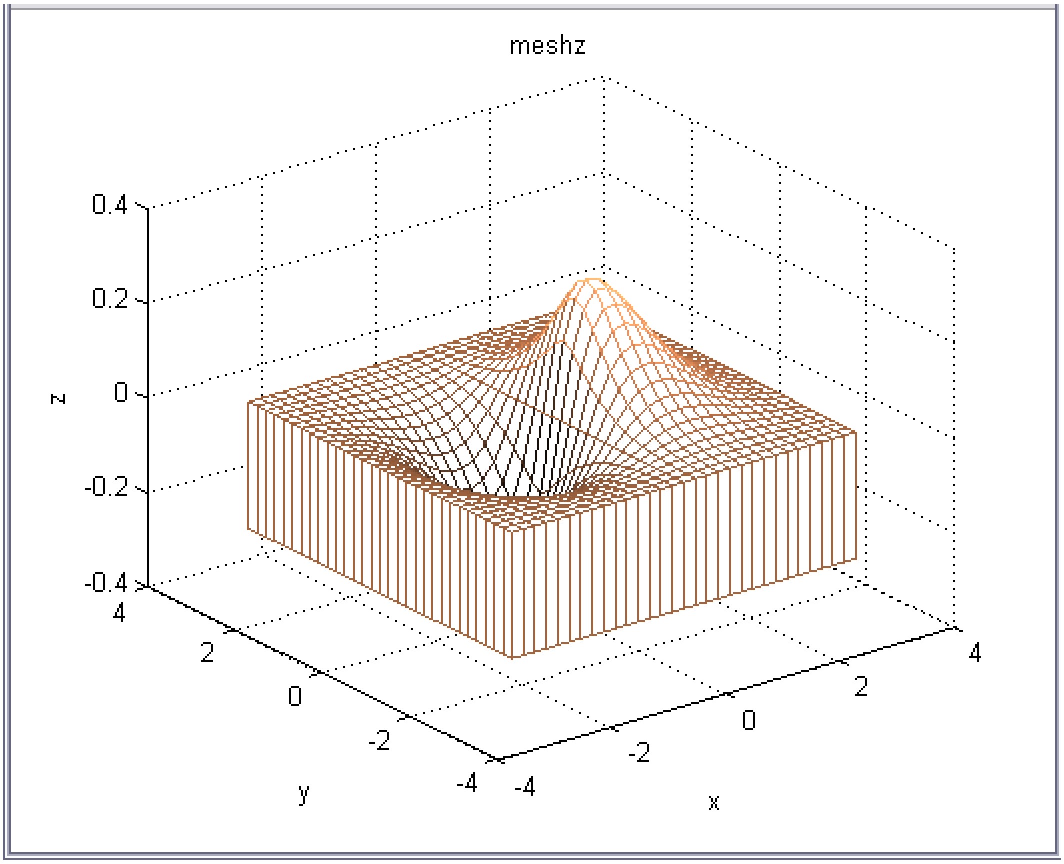
```
>> x = -3:0.2:3;
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 2.3.^(-1.5 * sqrt(X.^2 + Y.^2)).* sin(X).* cos(0.5 * Y);
>> surf(X,Y,Z)
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
>> title('surf')
>> colormap ('copper')
```



```
>> x = −3:0.2:3;
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 2.3.^(−1.5 * sqrt(X.^2 + Y.^2)).* sin(X).* cos(0.5 * Y);
>> mesh(X,Y,Z)
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
>> title('mesh')
>> colormap ('copper')
```



```
>> x = -3:0.2:3;
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 2.3.^(-1.5 * sqrt(X.^2 + Y.^2)).* sin(X).* cos(0.5 * Y);
>> meshz(X,Y,Z)
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
>> title('meshz')
>> colormap ('copper')
```



$>>\ x = -3{:}\,0.2{:}\,3;$

$>>\ y = x;$

$>>\ [X, Y] = \text{meshgrid}(x, y);$

$>>\ Z = 2.3.\hat{}(-1.5 * \text{sqrt}(X.\hat{}2 + Y.\hat{}2)).* \sin(X).* \cos(0.5 * Y);$

$>>\ \mathbf{meshc}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$

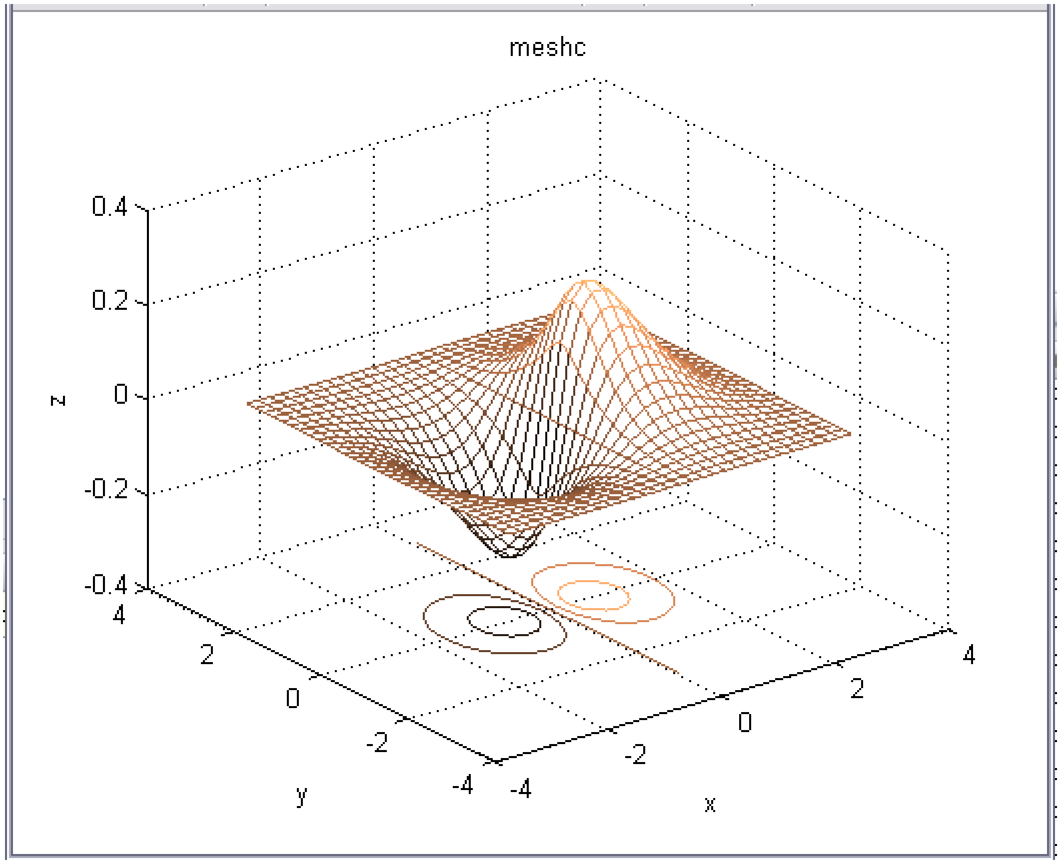
$>>\ \text{xlabel}('x')$

$>>\ \text{ylabel}('y')$

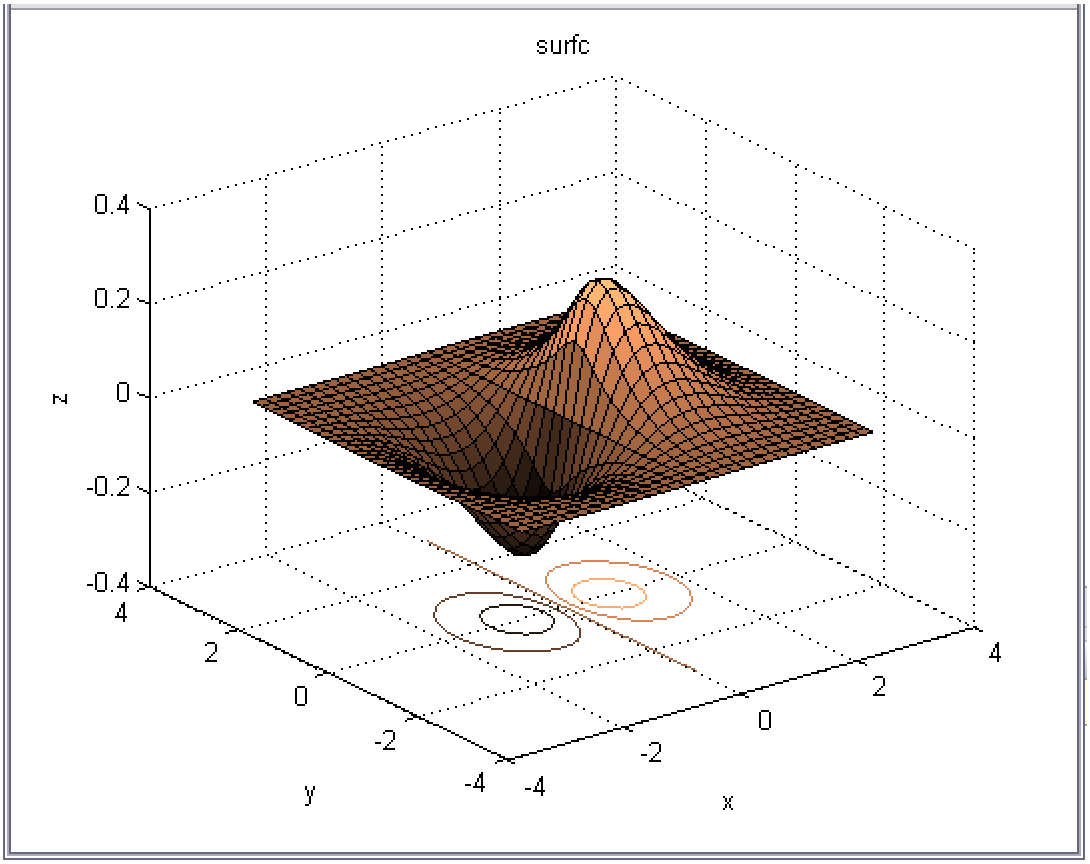
$>>\ \text{zlabel}('z')$

$>>\ \text{title}('\text{meshc}')$

$>>\ \text{colormap}\ \ ('\text{copper}')$



```
>> x = −3: 0.2: 3;
>> y = x;
>> [X, Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 2.3.^(−1.5 * sqrt(X.^2 + Y.^2)).* sin(X).* cos(0.5 * Y);
>> surfc(X, Y, Z)
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
>> title('surfc')
>> colormap ('copper')
```



$>>\ x = -3{:}\,0.2{:}\,3;$

$>>\ y = x;$

$>>\ [X, Y] = \text{meshgrid}(x, y);$

$>>\ Z = 2.3.\,\hat{}\,(-1.5 * \text{sqrt}(X.\,\hat{}\,2 + Y.\,\hat{}\,2)).* \sin(X).* \cos(0.5 * Y);$

$>>\ \textbf{contour3}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{15})$

$>>\ \text{surface}(X, Y, Z, '\text{EdgeColor}', [.8\ .8\ .8], '\text{FaceColor}', '\text{none}')$

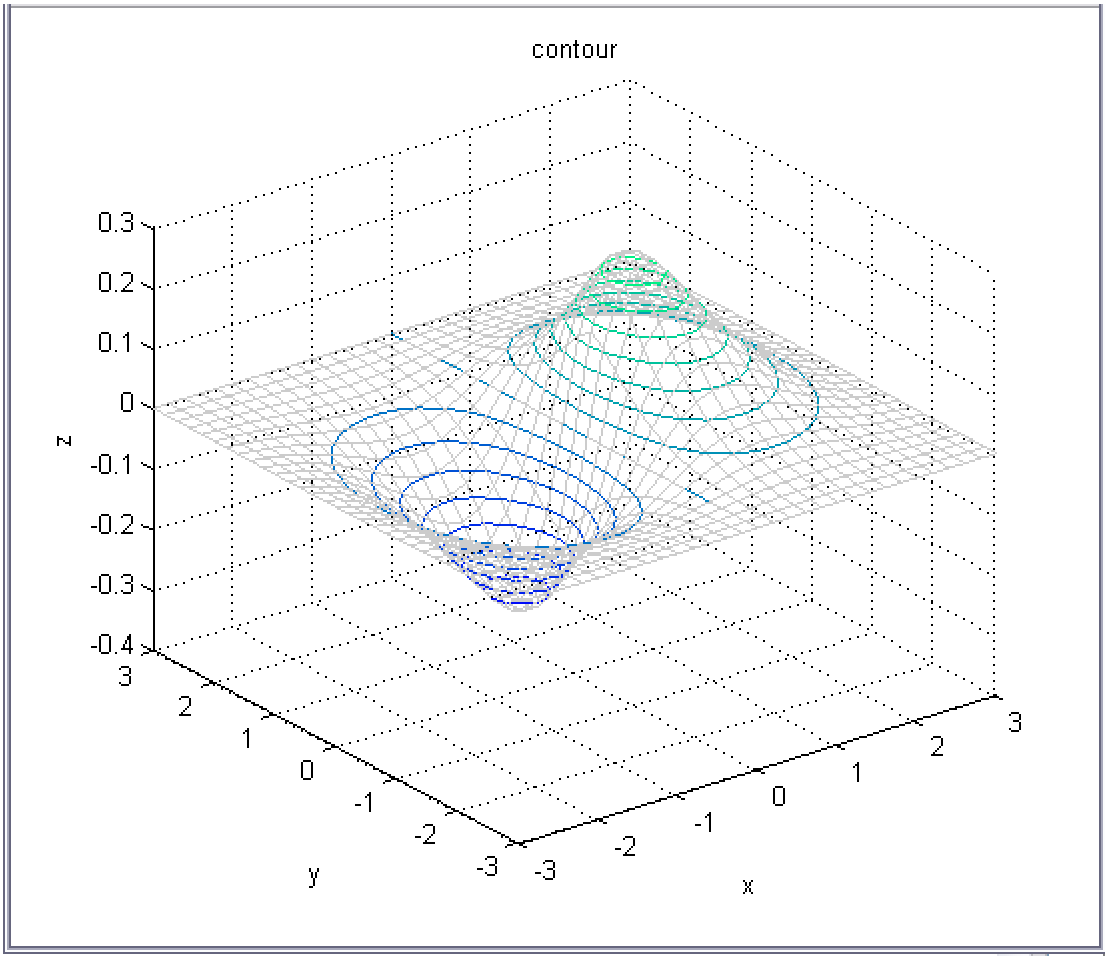
$>>\ \text{xlabel}('x')$

$>>\ \text{ylabel}('y')$

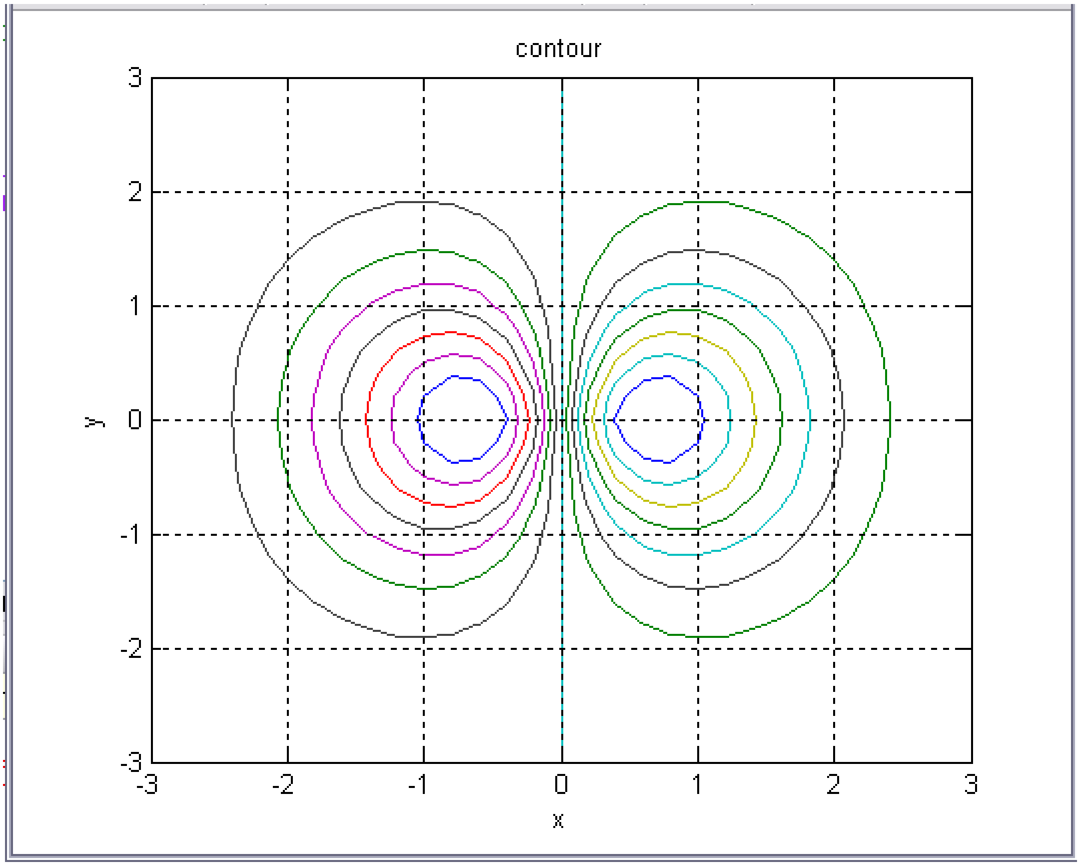
$>>\ \text{zlabel}('z')$

$>>\ \text{title}('\text{contour}')$

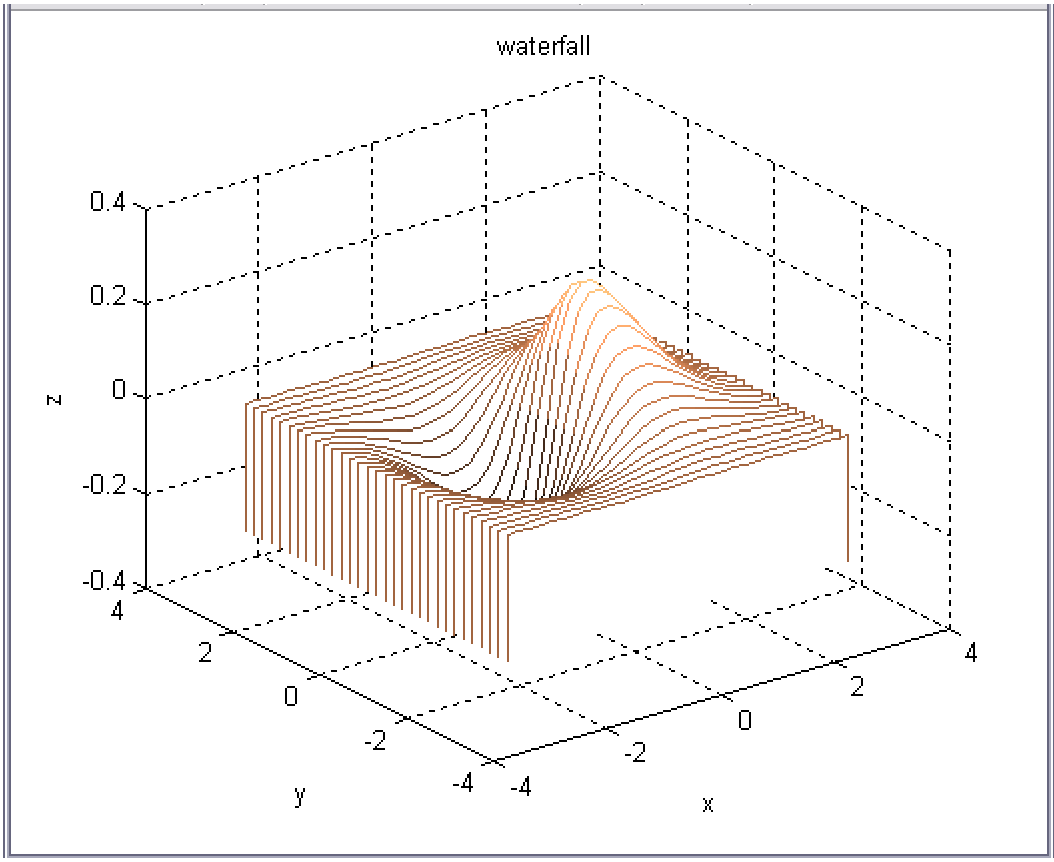
$>>\ \text{colormap}\ \ ('\text{Winter}')$



```
>> x = -3:0.2:3;
>> y = x;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> Z = 2.3.^(-1.5 * sqrt(X.^2 + Y.^2)).* sin(X).* cos(0.5 * Y);
>> contour(X,Y,Z,15)
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
>> title('contour')
>> colormap ('Lines')
```

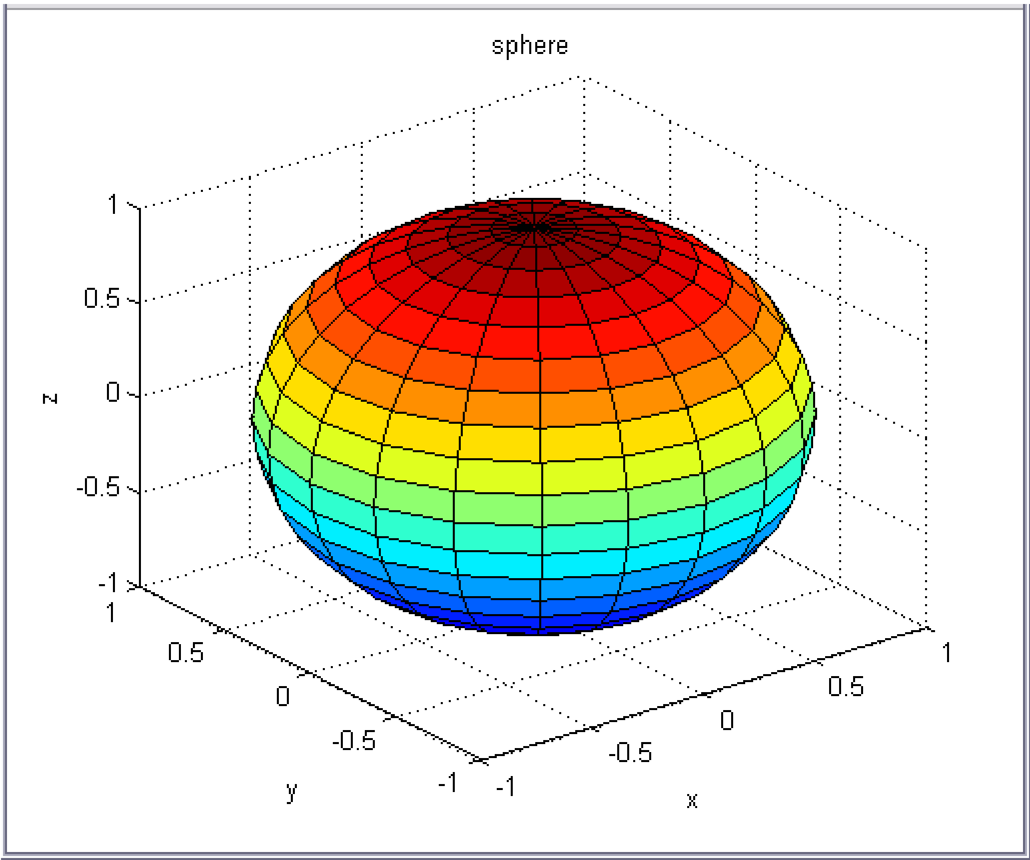


```
>> x = −3: 0.2: 3;
>> y = x;
>> [X, Y] = meshgrid(x, y);
>> Z = 2.3.^(−1.5 ∗ sqrt(X.^2 + Y.^2)).∗ sin(X).∗ cos(0.5 ∗ Y);
>> waterfall(X, Y, Z)
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
>> title('waterfall')
>> colormap ('copper')
```

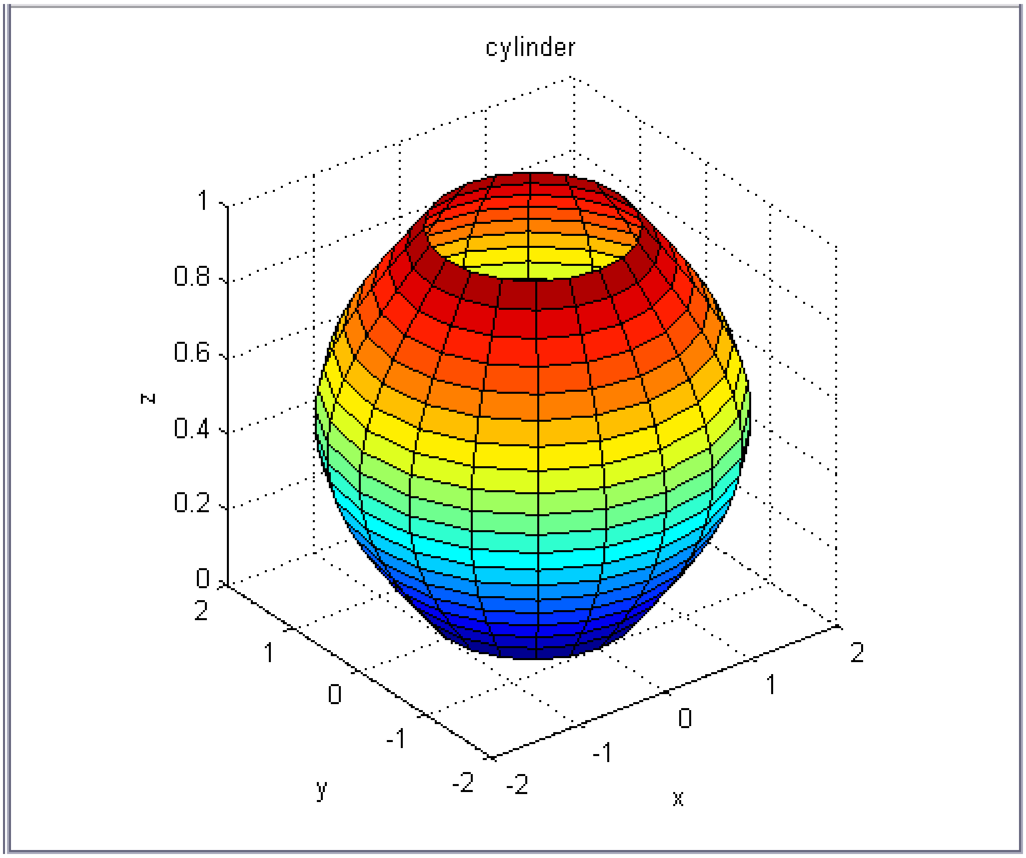


13. ავაგოთ სფერო და ცილინდრი:

```
>> [X,Y,Z] = sphere(20);
>> surf(X,Y,Z)
>> title('sphere')
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
```



```
>> t = linspace(0, pi, 20);
>> r = 1 + sin(t);
>> [X, Y, Z] = cylinder(r);
>> surf(X, Y, Z)
>> axis square
>> title('cylinder')
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
>> zlabel('z')
```

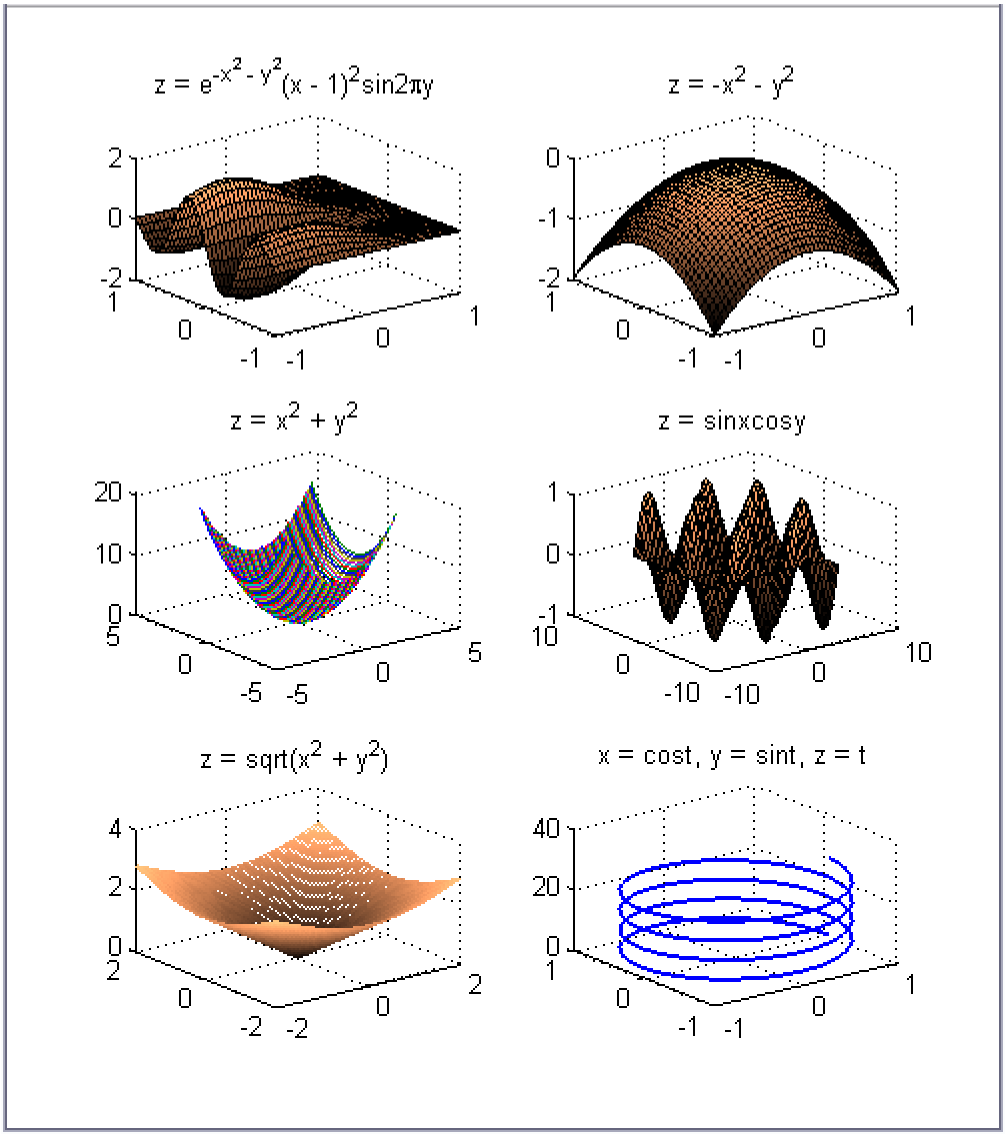


14. დავყოთ გრაფიკის ფანჯარა 3×2 ზომის მატრიცად და განვათავსოთ მათში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

$$z = e^{-x^2-y^2}(x-1)^2 \sin 2\pi y, \quad -1 \le x, y \le 1,$$
$$z = -x^2 - y^2, \qquad -1 \le x, y \le 1,$$
$$z = x^2 + y^2, \qquad -3 \le x, y \le 3,$$
$$z = \sin x \cos y, \qquad -2\pi \le x, y \le 2\pi,$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad -2 \le x, y \le 2,$$
$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \le t \le 8\pi.$$

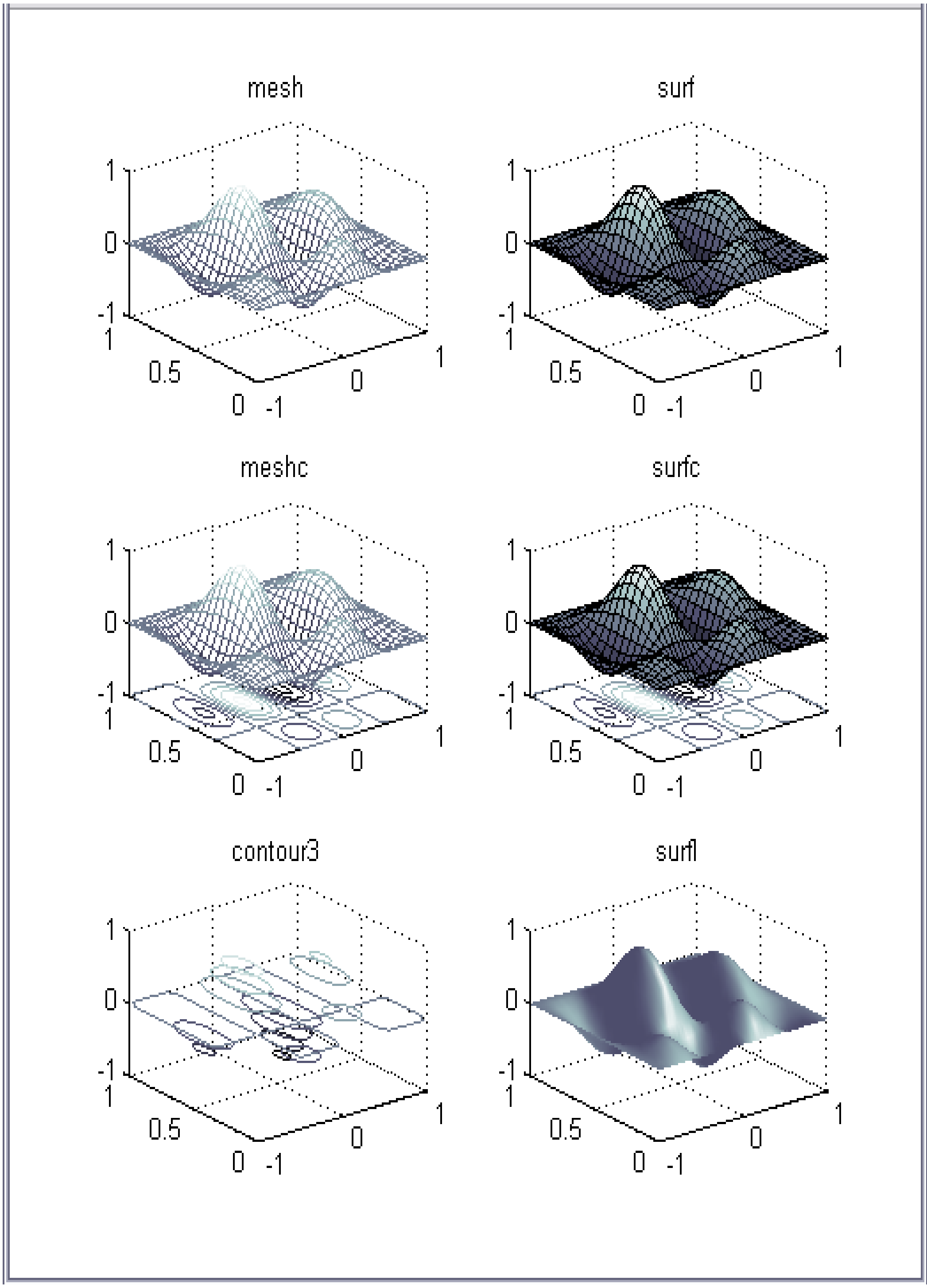
```
>> x1 = −1: 0.05: 1;   y1 = x1;
>> [X1,Y1] = meshgrid(x1,y1);
>> Z1 = exp(−X1.^2 − Y1.^2).∗ (X1 − 1).^2.∗ sin(2 ∗ pi ∗ Y1);
>> subplot(3,2,1)
>> surf(X1,Y1,Z1)
>> title('z = e^{−x^2 − y^2}(x − 1)^2sin2\pi y')
>> x2 = −1: 0.05: 1;  y2 = x2;
>> [X2,Y2] = meshgrid(x2,y2);
>> Z2 = −X2.^2 − Y2.^2;
>> subplot(3,2,2)
>> surf(X2,Y2,Z2)
>> title('z = −x^2 − y^2')
>> x3 = linspace(−3,3);  y3 = x3;
>> [X3,Y3] = meshgrid(x3,y3);
>> Z3 = X3.^2 + Y3.^2;
>> subplot(3,2,3)
>> plot3(X3,Y3,Z3)
>> title('z = x^2 + y^2')
>> x4 = −2 ∗ pi: pi/10: 2 ∗ pi;   y4 = x4;
>> [X4,Y4] = meshgrid(x4,y4);
>> Z4 = sin(X4).∗ cos(Y4);
>> subplot(3,2,4)
>> surf(X4,Y4,Z4)
>> colormap('copper')
>> title('z = sinxcosy')
>> x5 = −2: 0.05: 2;    y5 = x5;
```

```
>> [X5,Y5] = meshgrid(x5,y5);
>> Z5 = sqrt(X5.^2 + Y5.^2);
>> subplot(3,2,5)
>> mesh(X5,Y5,Z5)
>> title('z = sqrt(x^2 + y^2)')
>> t = 0:pi/18:8*pi;   x = cos(t); y = sin(t); z = t;
>> subplot(3,2,6)
>> plot3(x,y,z)
>> title('x = cost, y = sint, z = t')
```



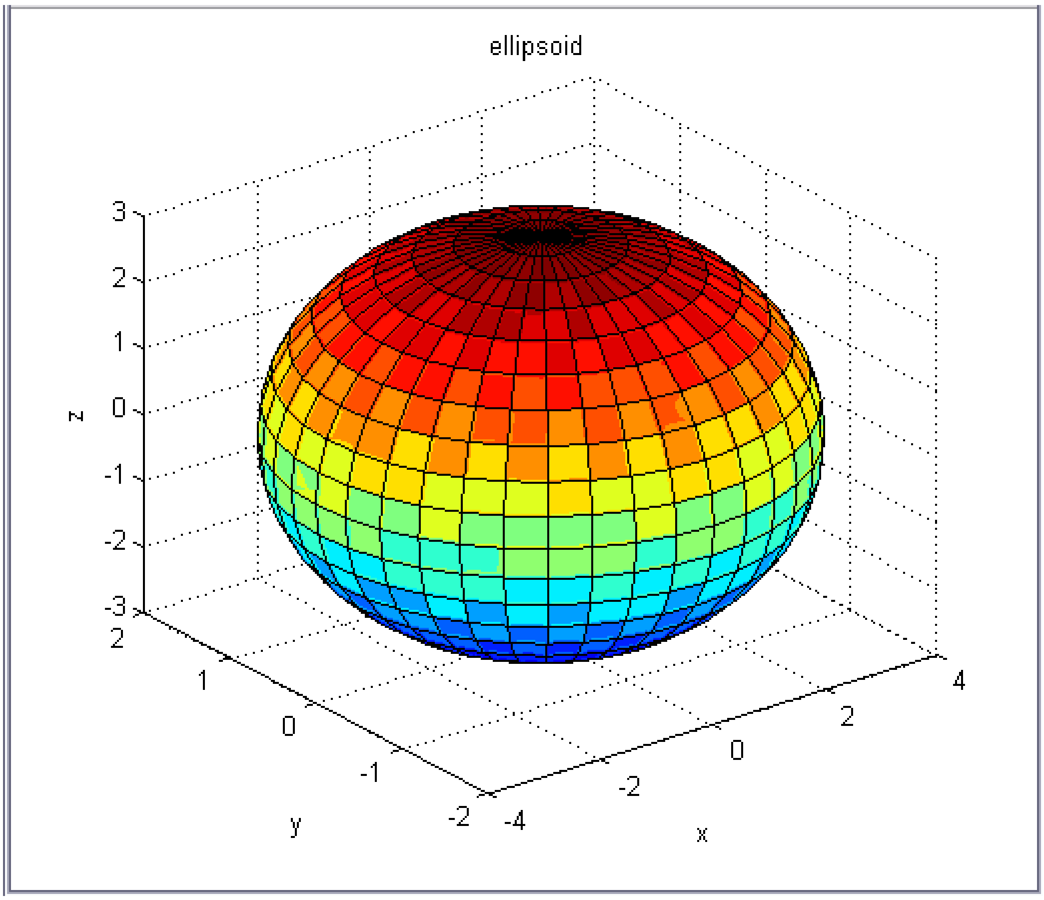
15. გავნათავსოთ $z = 4\sin 2\pi x \cdot \cos 1{,}5\pi y(1 - x^2)y(1 - y)$ ფუნქციის გრაფიკი 3×2 განზომილების ქვეფანჯრებში, გამოვიყენოთ აგების სხვადასხვა ბრძანებები:

```
>> [X, Y] = meshgrid(−1: 0.05: 1,0: 0.05: 1);
>> Z = 4 * sin(2 * pi * X).* cos(1.5 * pi * Y).* (1 − X. ^2).* Y.* (1 − Y);
>> subplot(3,2,1)
>> mesh(X, Y, Z)
>> title('mesh')
>> subplot(3,2,2)
>> surf(X, Y, Z)
>> title('surf')
>> subplot(3,2,3)
>> meshc(X, Y, Z)
>> title('meshc')
>> subplot(3,2,4)
>> surfc(X, Y, Z)
>> title('surfc')
>> subplot(3,2,5)
>> contour3(X, Y, Z)
>> title('contour3')
>> subplot(3,2,6)
>> surfl(X, Y, Z)
>> shading interp
>> title ('surfl')
>> colormap (bone)
```


mesh
surf
meshc
surfc
contour3
surfl

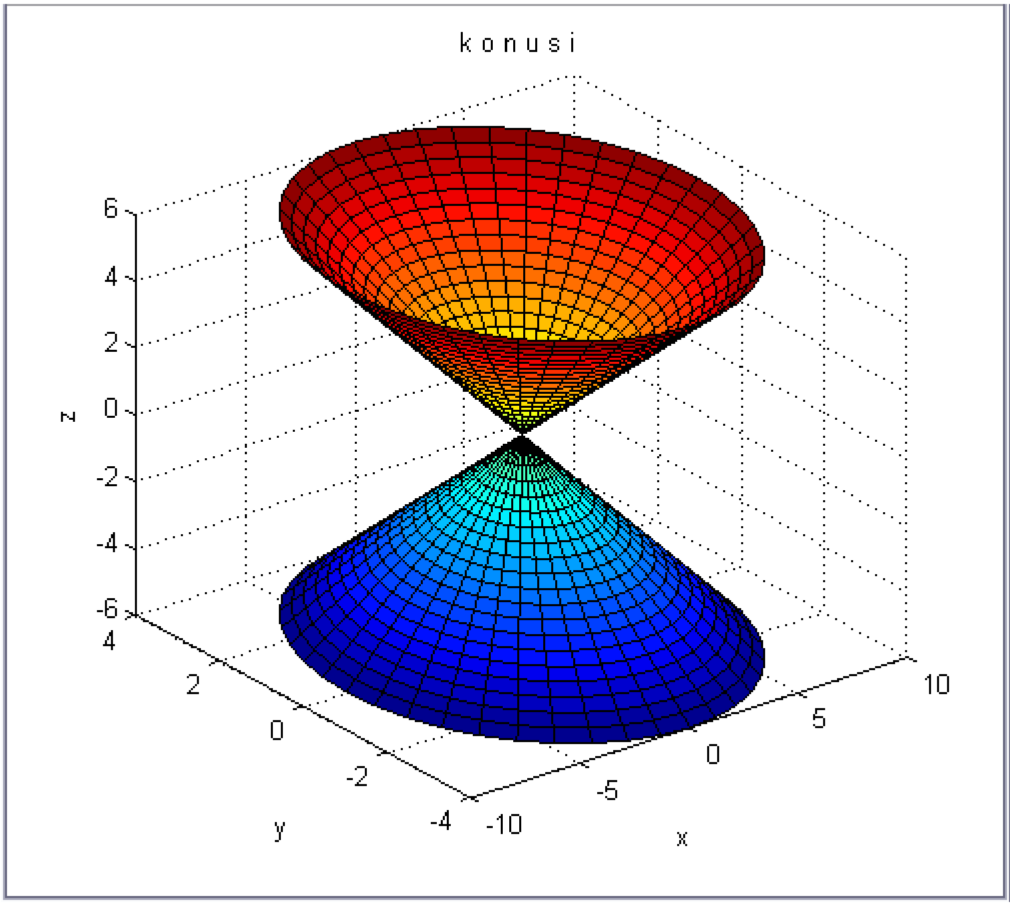
16. ავაგოთ პარამეტრული სახით მოცემული ზედაპირების გრაფიკები:
ა) ელიფსოიდი

```
>> a = 4;
>> b = 2;
>> c = 3;
>> u = (0:0.05*pi:2*pi)'; v = 0:0.05*pi:2*pi;
>> X = a*sin(u)*cos(v);
>> Y = b*sin(u)*sin(v);
>> Z = c*cos(u)*ones(size(v));
>> figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
>> surf(X,Y,Z);
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
>> title('ellipsoid')
```



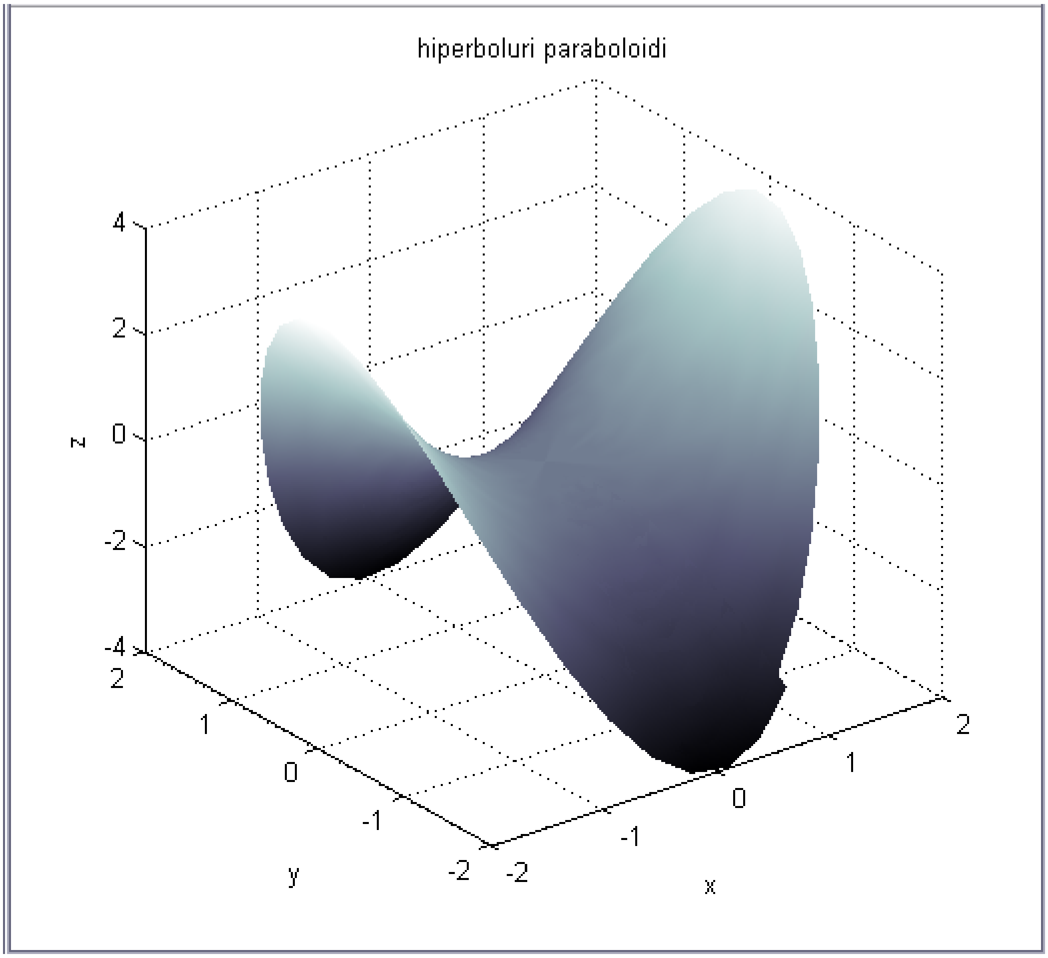
ბ) კონუსი

```
>> a = 4;   b = 2;   c = 3;
>> u  =  (−2:0.1:2)′;
>> v  =  0:0.05 * pi: 2 * pi;
>> X  =  a * u * cos(v);
>> Y  =  b * u * sin(v);
>> Z  =  c * u * ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z);
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
>> title('k o n u s i')
```



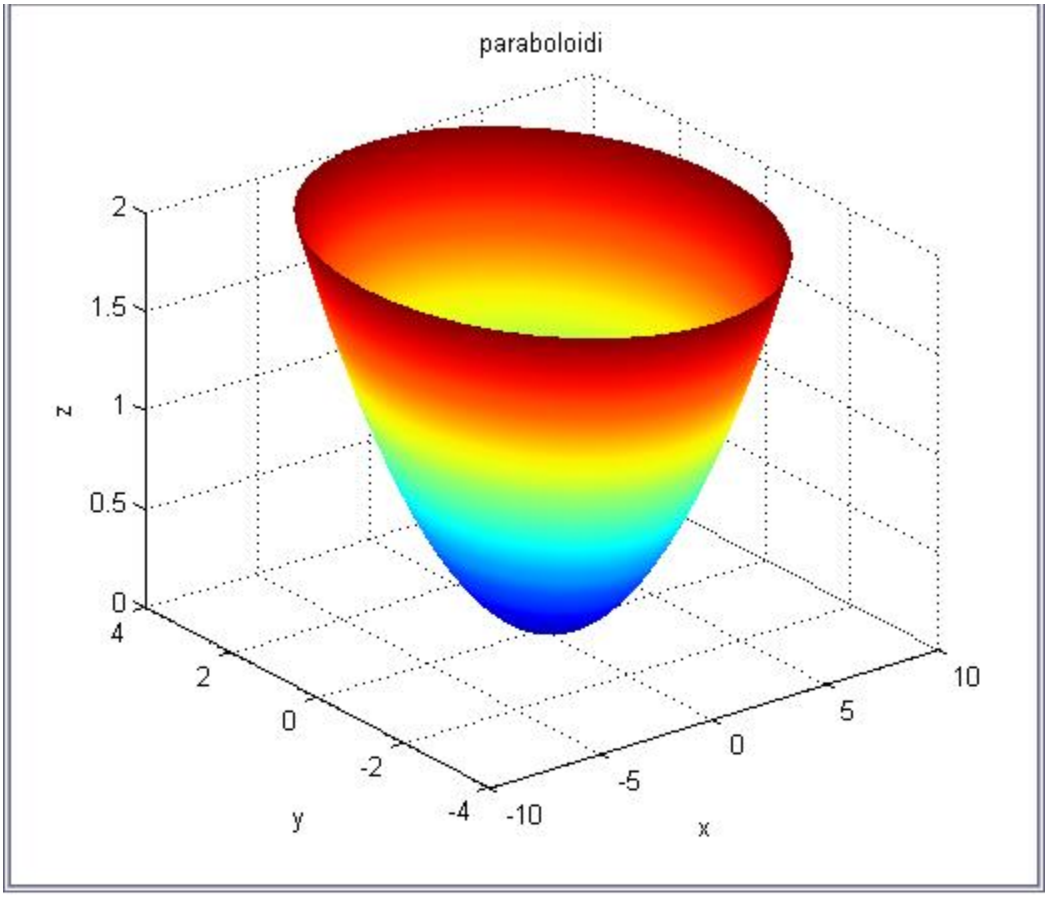
გ) ჰიპერბოლური პარაბოლოიდი

```
>> u = (−2:0.05 ∗ pi:2)′;
>> v = −2:0.05 ∗ pi:2;
>> x = u ∗ cos(v);
>> y = u ∗ sin(v);
>> z = u.^2∗ cos(2 ∗ v) ;
>> surf(x,y,z);
>> shading interp;
>> colormap(Bone);
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
>> title('hiperboluri paraboloidi')
```



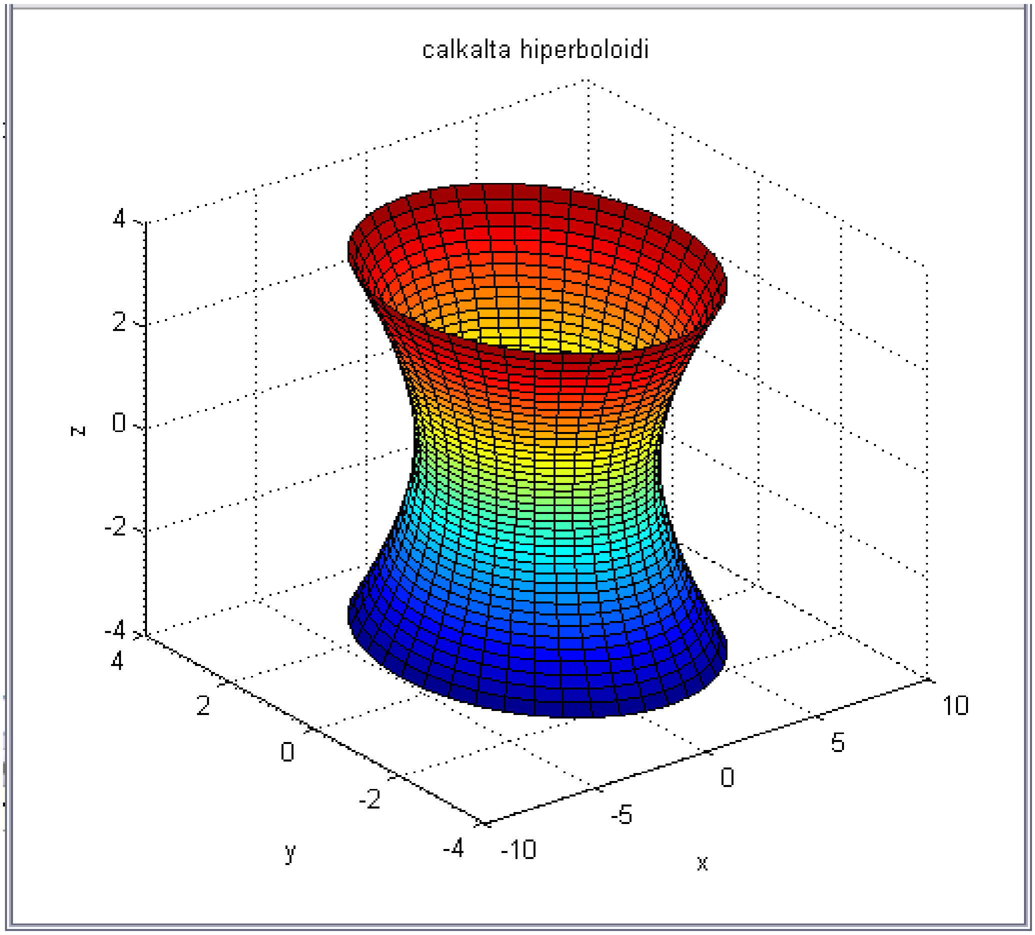
დ) ელიფსური პარაბოლოიდი

```
>> a = 4;
>> b = 2;
>> u = (0:0.05:2)';
>> v = 0:0.05*pi:2*pi;
>> X = a*u*cos(v);
>> Y = b*u*sin(v);
>> Z = 0.5*u.^2*ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z);
>> shading interp;
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
>> title('paraboloidi')
```



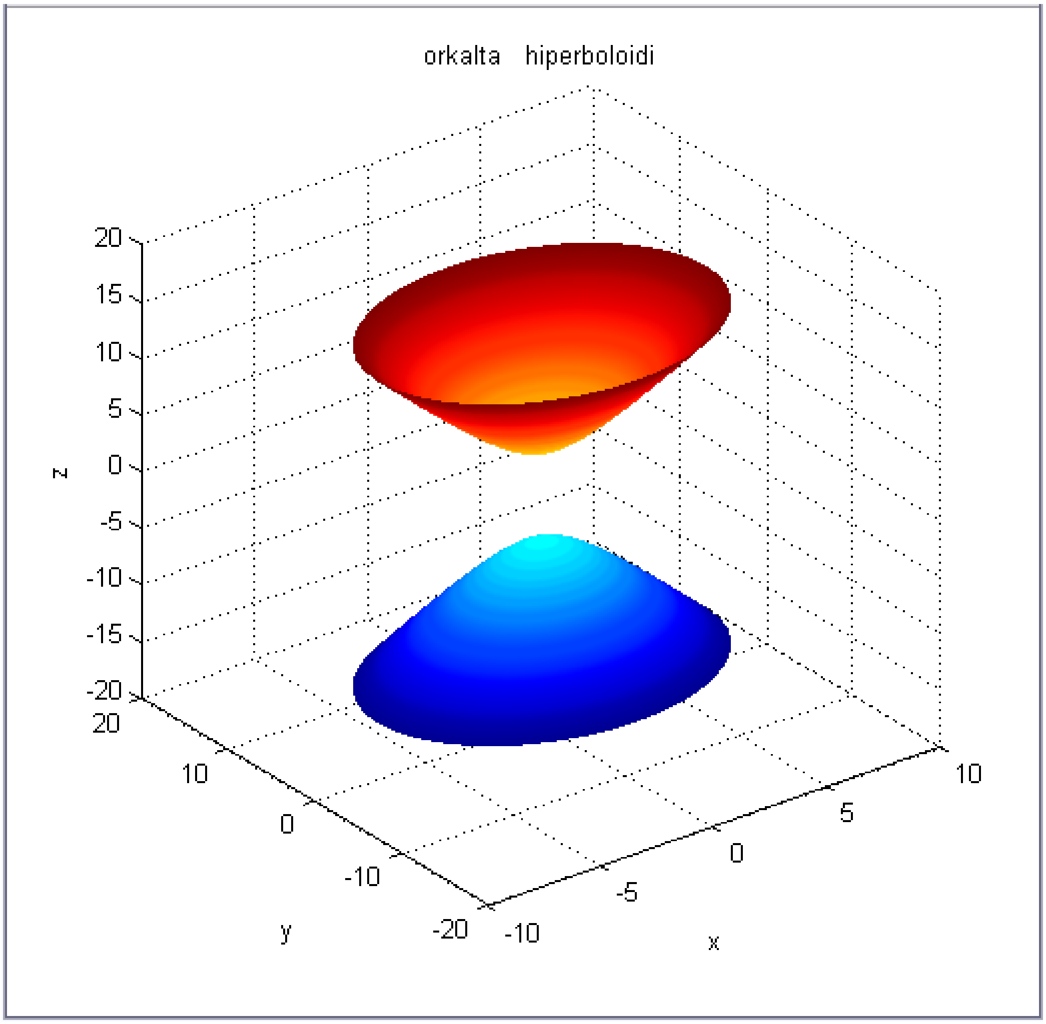
ე) ცალკალთა ჰიპერბოლოიდი

```
>> u = (-1:0.05:1)';
>> v = 0:0.05*pi:2*pi;
>> X = a*cosh(u)*cos(v);
>> Y = b*cosh(u)*sin(v);
>> Z = c*sinh(u)*ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z);
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
>> title('calkalta hiperboloidi')
```



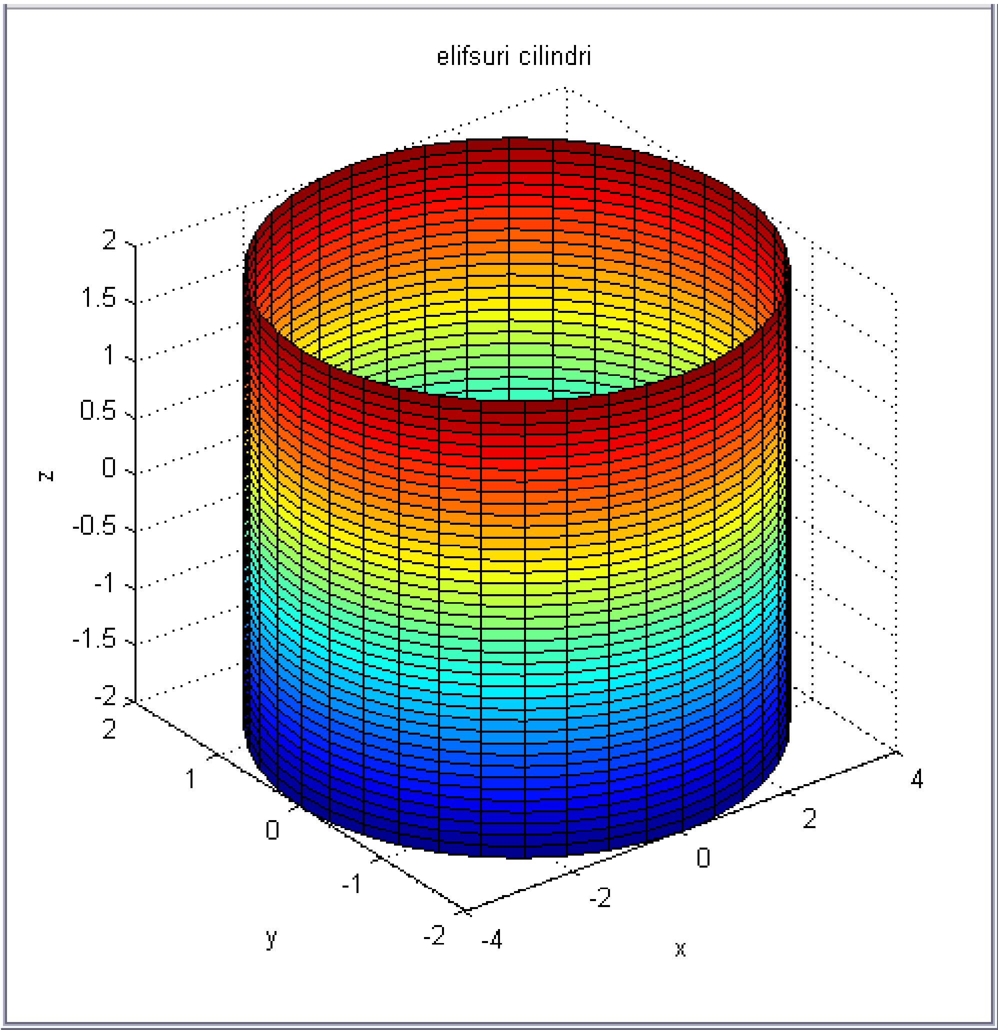
გ) ორკალთა ჰიპერბოლოიდი

```
>> a = 4;  b = 2;  c = 3;
>> u = (0:0.05:2)';  v = 0:0.05*pi:2*pi;
>> X = b*sinh(u)*sin(v);  Y = c*sinh(u)*cos(v);
>> Z = a*cosh(u)*ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z);  hold on
>> surf(X,Y,-Z);
>> shading interp;
>> xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z')
>> title ('orkalta   hiperboloidi')
```



ზ) ელიფსური ცილინდრი

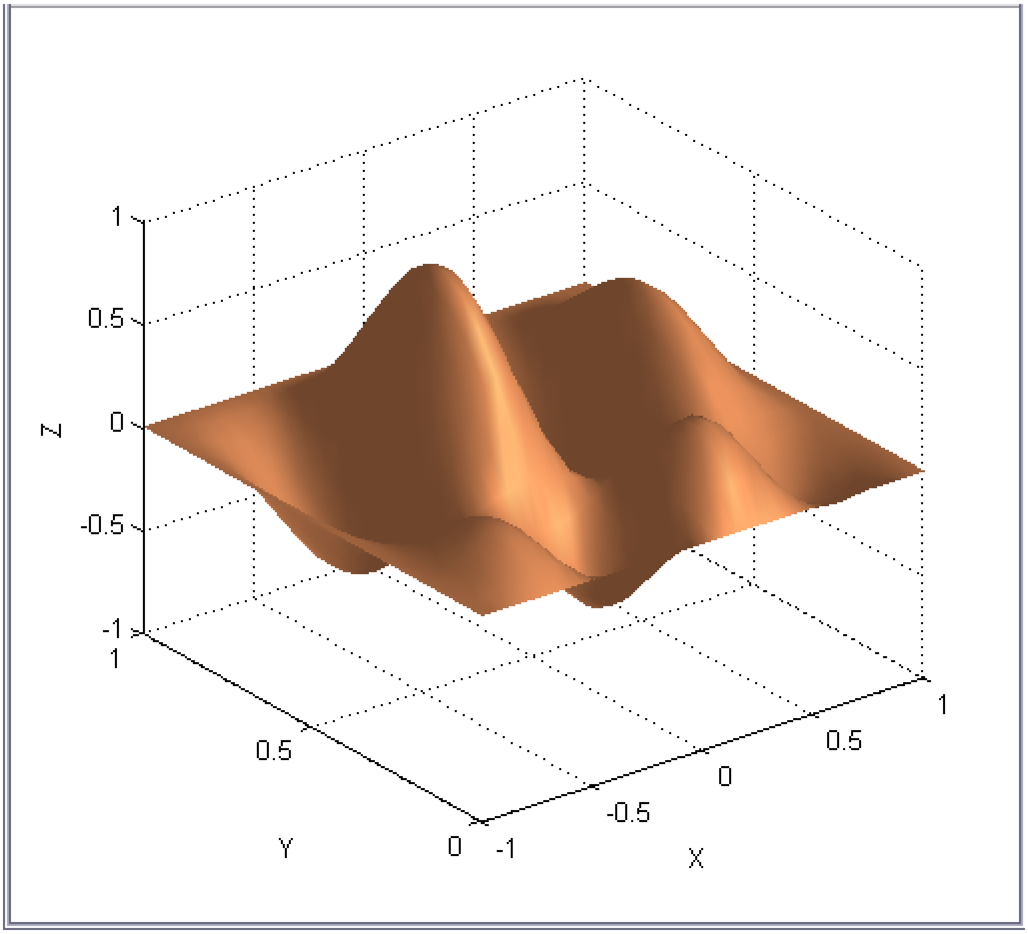
```
>> a = 4; b = 2;
>> u = (−2:0.1:2)′; v = 0:0.05 ∗ pi:2 ∗ pi;
>> X = a ∗ ones(size(u)) ∗ cos(v);
>> Y = b ∗ ones(size(u)) ∗ sin(v);
>> Z = u ∗ ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z);
>> xlabel(′x′); ylabel(′y′); zlabel(′z′)
>> title(′elifsuri cilindri′)
```



17. surfl ბრძანების გამოყენებით ავაგოთ განათებული ზედაპირის გრა-ფიკი:

$$z = 4\sin 2\pi x \cos 1{,}5\pi y\,(1-x^2)y(1-y), \qquad x \in [-1,\ 1], \quad y \in [0,\ 1].$$

```
>> [X, Y] = meshgrid(−1: 0.05: 1,0: 0.05: 1);
>> Z = 4 ∗ sin(2 ∗ pi ∗ X).∗ cos(1.5 ∗ pi ∗ Y).∗ (1 − X. ^2).∗ Y.∗ (1 − Y);
>> surfl(X, Y, Z)
>> shading interp
>> colormap ('copper')
>> xlabel('X')
>> ylabel('Y')
>> zlabel('Z')
```

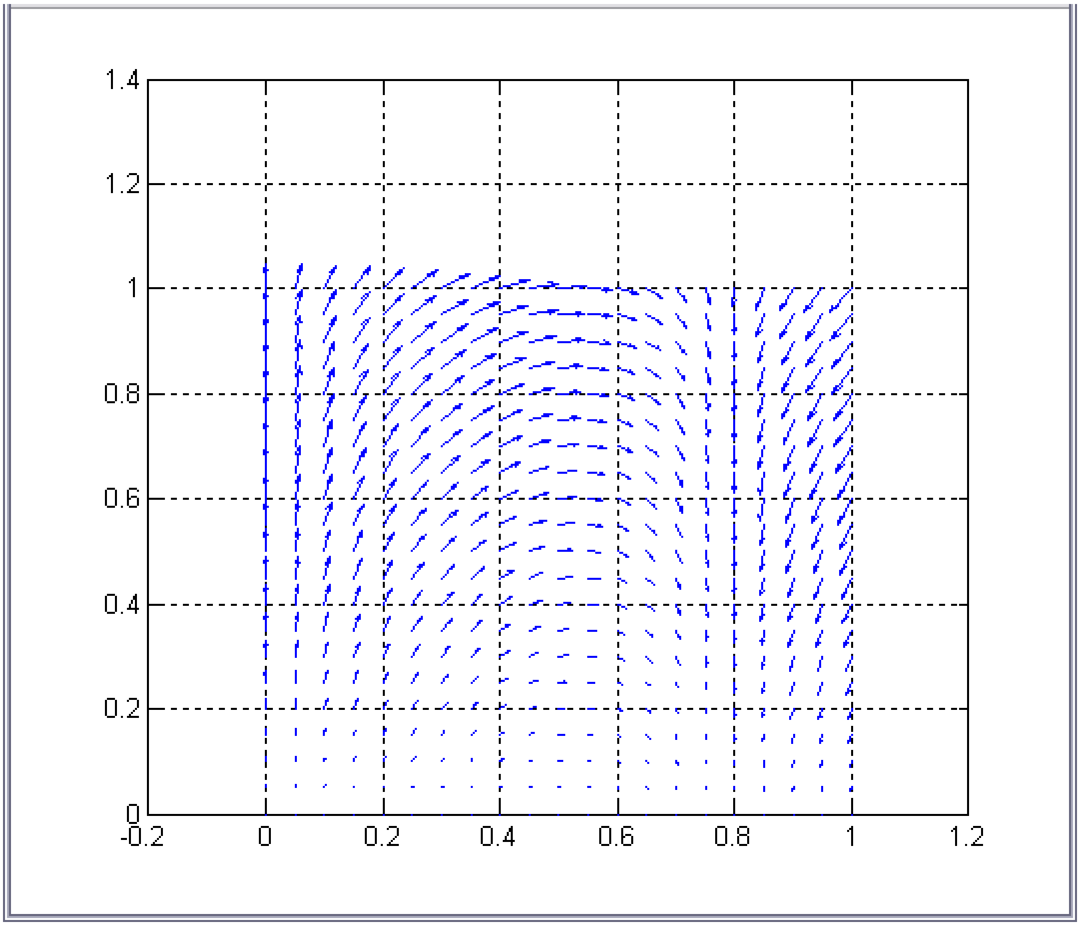


18. მოვახდინოთ ვექტორული ველების ვიზუალიზაცია:

ა) ორგანზომილებიანი ვექტორული ველის ვიზუალიზაცია

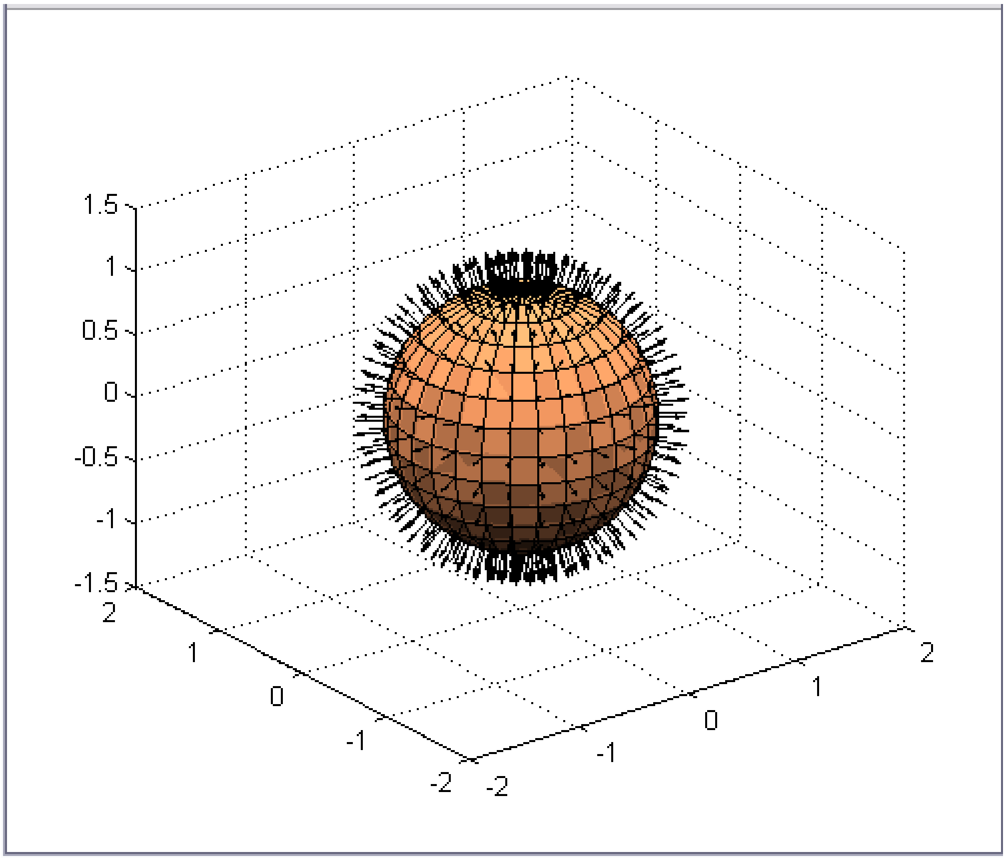
$x, y \in [0,1]$, $u_x = y \sin 4x$, $u_y = \sin 2y \cos 3x$.

```
>> x = 0:0.05:1;
>> y = x;
>> [X, Y] = meshgrid(x,y);
>> ux = sin(4 * X).* Y;
>> uy = sin(2 * Y).* cos(3 * X);
>> quiver(X, Y, ux, uy);
```



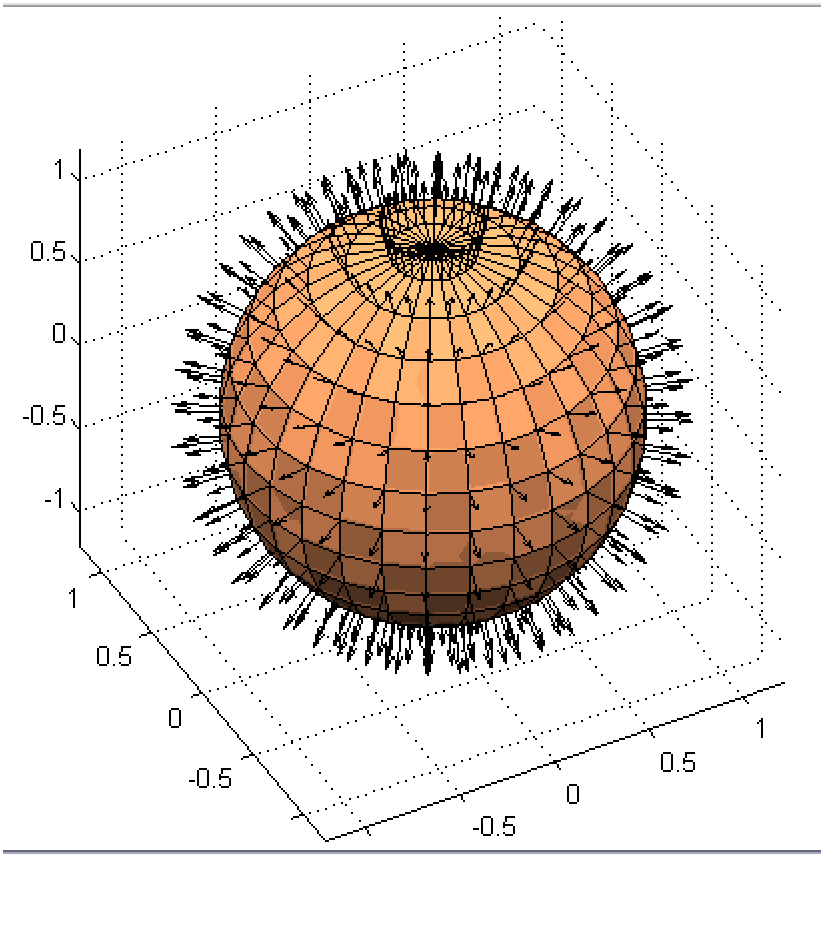
ბ) სამგანზომილებიანი ვექტორული ველის ვიზუალიზაცია:

```
>> u = (−pi: pi/15: pi)′;
>> v = −pi: pi/15: pi;
>> X = sin(u) ∗ cos(v);
>> Y = sin(u) ∗ sin(v);
>> Z = cos(u) ∗ ones(size(v));
>> surf(X,Y,Z)
>> [U,V,W] = surfnorm(X,Y,Z);
>> hold on
>> quiver3(X,Y,Z,U,V,W,2,'k')
>> colormap(copper)
```



თუ გამოვიყენებთ გრაფიკული ფანჯრის რედაქტირების საშუალებებს, რომლებიც ხელმისაწვდომია მენიუდან: Edit → Figure Properties, შეგვიძლია სამგანზომილებიანი ზედაპირი ჩვენთვის მოსახერხებელი ფორმით და ხედვის კუთხით წარმოვადგინოთ. ასევე შესაძლებელია სამგანზომილებიანი ზედაპირის (ან წირის) ბევრი სხვა პარამეტრის ცვლილებაც.

ქვემოთ მოგვყავს ასეთი მანიპულაციების ერთ-ერთი ნიმუში:



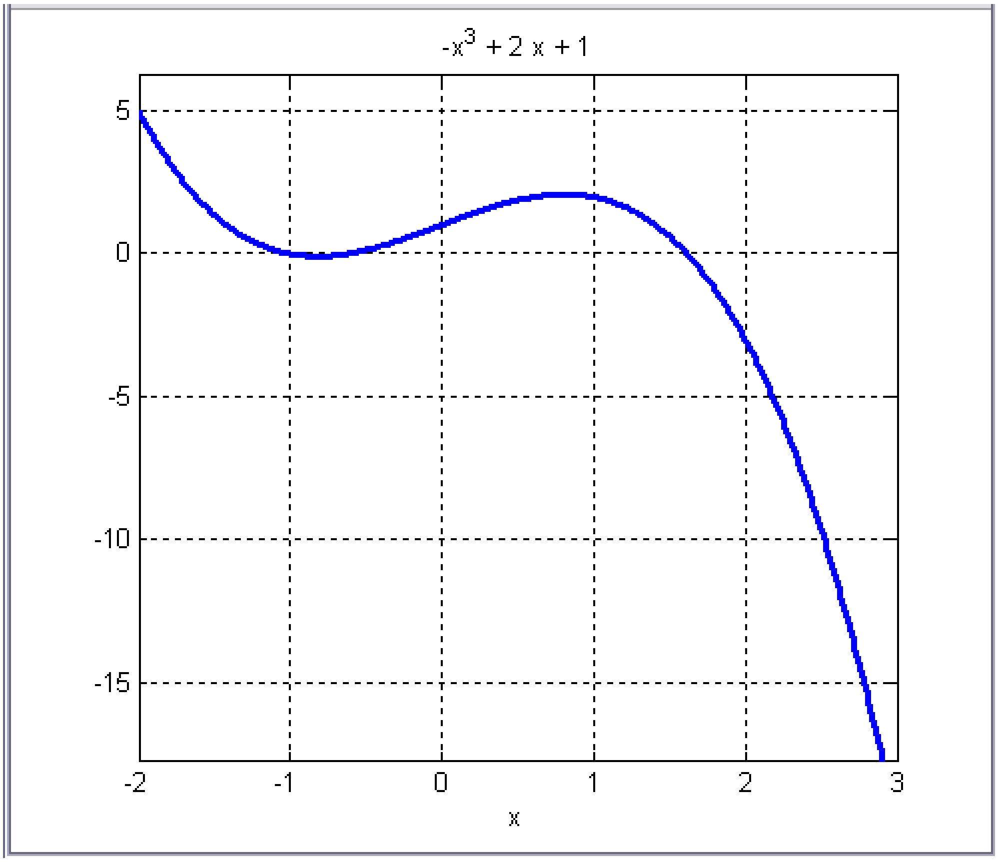
19. ავაგოთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ (ezplot, ezplot3, ezsurf, ezmesh, ezpolar და ა.შ.) გამოყენებით:

ა) $y = -x^3 + 2x + 1,$ $[-2,3]$ შუალედში.

$>>$ $\mathrm{h = ezplot('-x\^{}3 + 2 * x + 1', [-2,3]);}$

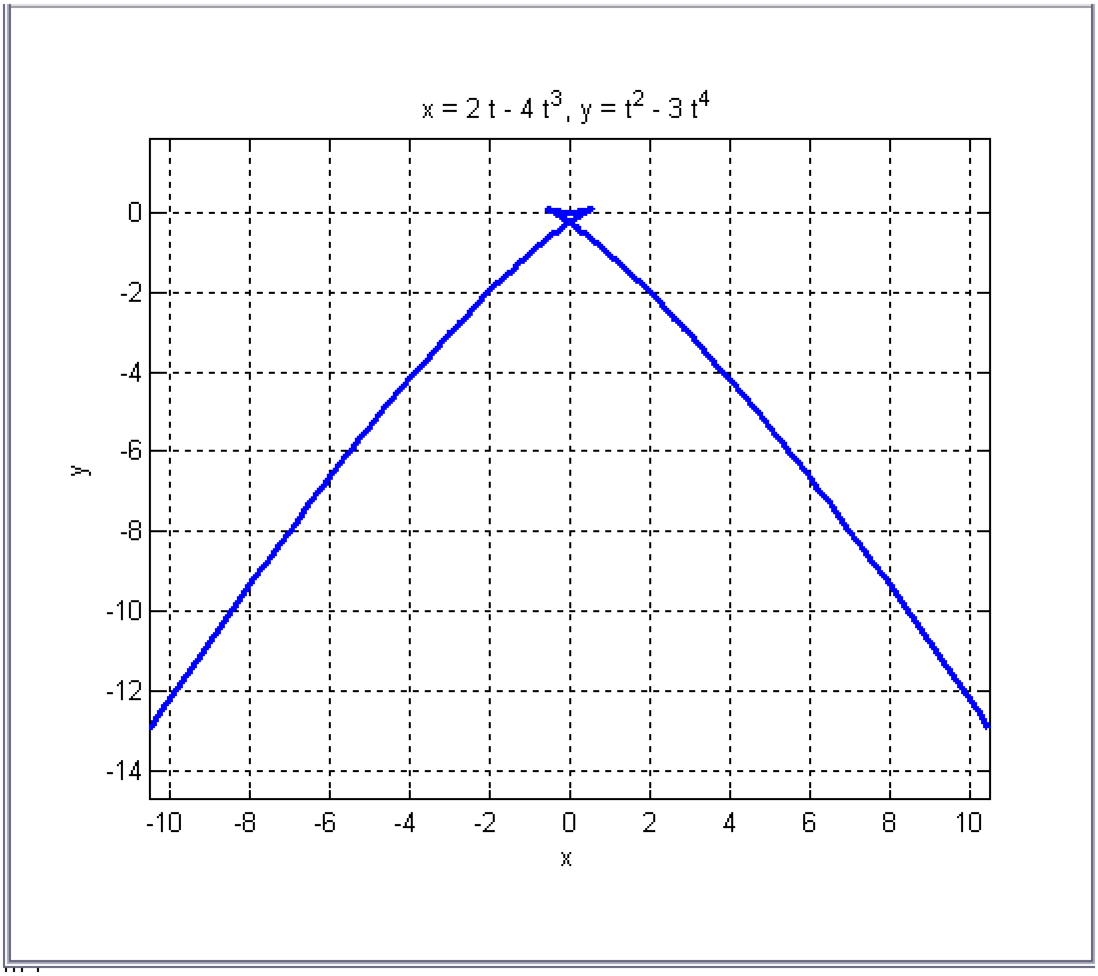
$>>$ $\mathrm{set(h, 'LineWidth', 2.5)}$

$>>$ grid



ბ) $x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4, \quad t \in [-1.5, 1.5].$

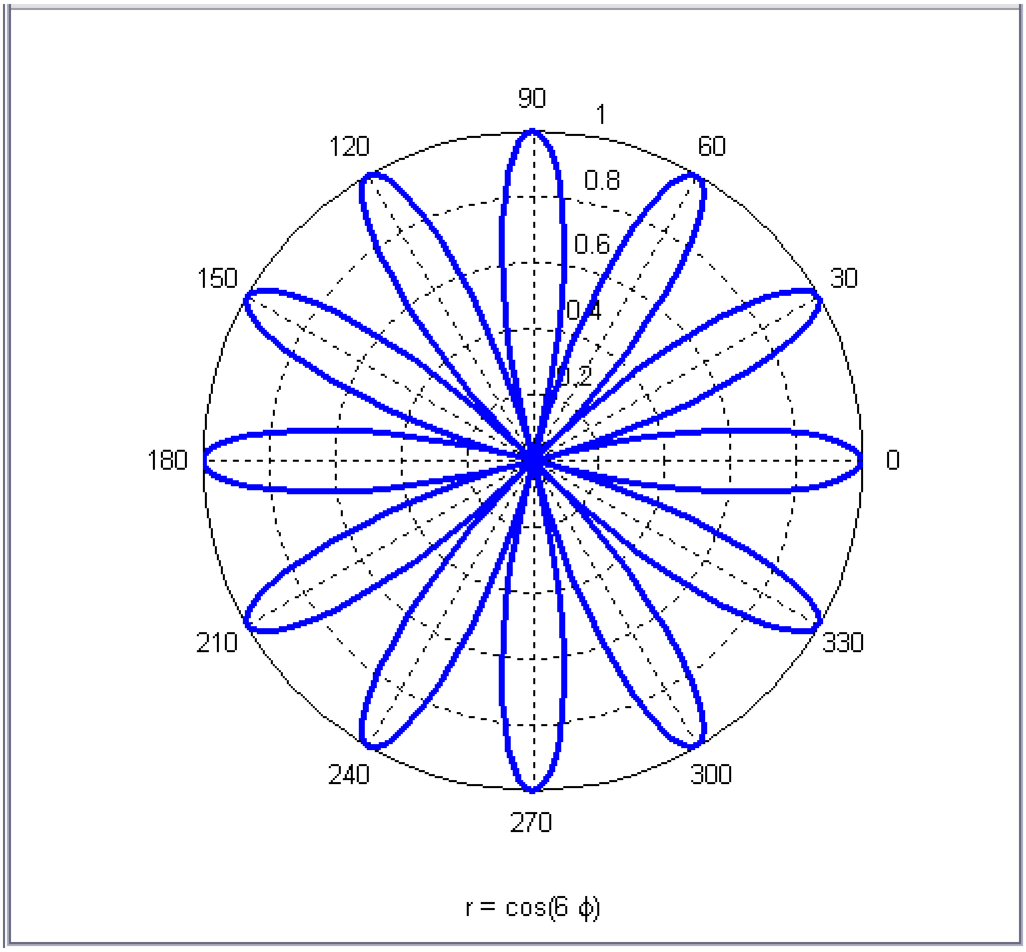
```
>> h = ezplot('2*t - 4*t^3', 't^2 - 3*t^4', [-1.5,1.5]);
>> set(h, 'LineWidth', 2.5)
>> grid
```



გ) $\rho = \cos 6\varphi$.

$>>$ $\mathrm{h = ezpolar('cos(6*phi)');}$

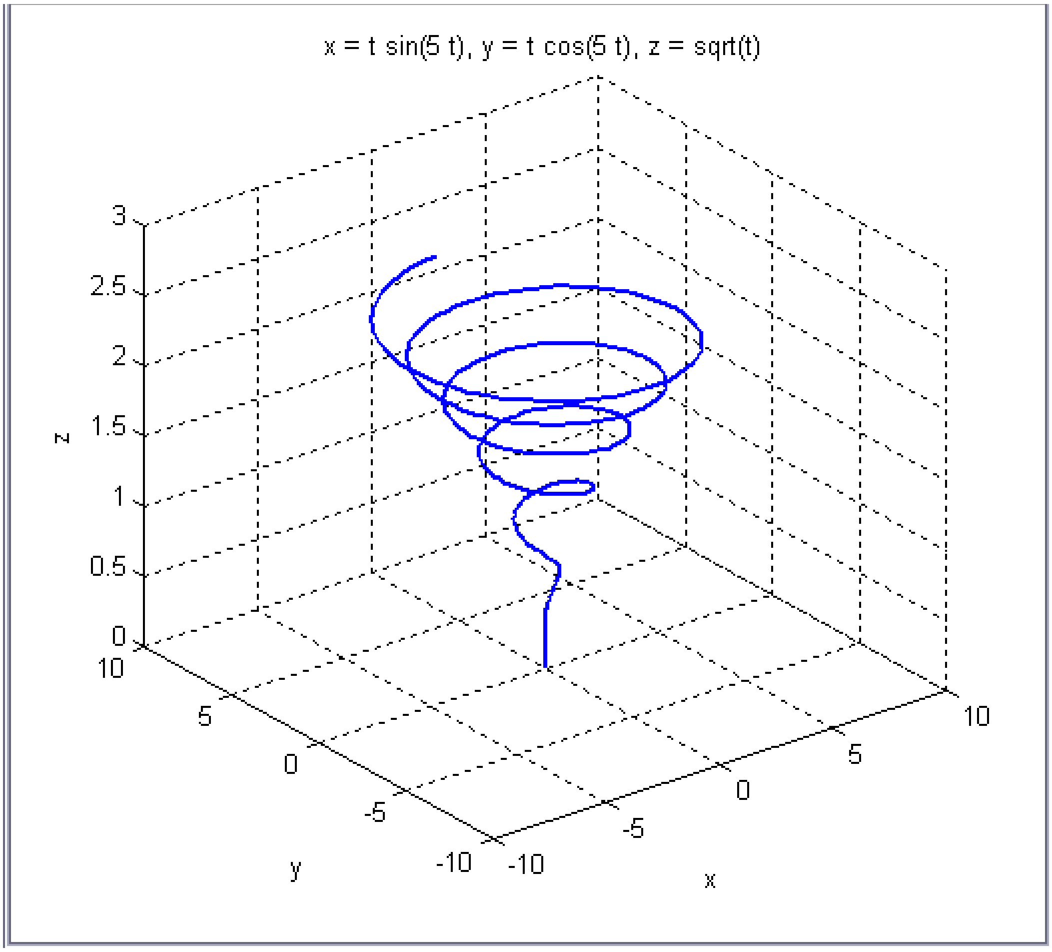
$>>$ $\mathrm{set(h,'LineWidth',2.5)}$



ღ) $x = t\sin 5t\,, \quad y = t\cos 5t\,, \quad z = \sqrt{|t|}, \quad t \in [-3\pi, 3\pi].$

$>>\ \mathrm{h\ = ezplot3('t*sin(5*t)','\,t*cos(5*t)','\,sqrt\big(abs(t)\big)','\,t', [-3*pi, 3*pi]);}$

$>>\ \mathrm{set(h,'LineWidth', 2)}$



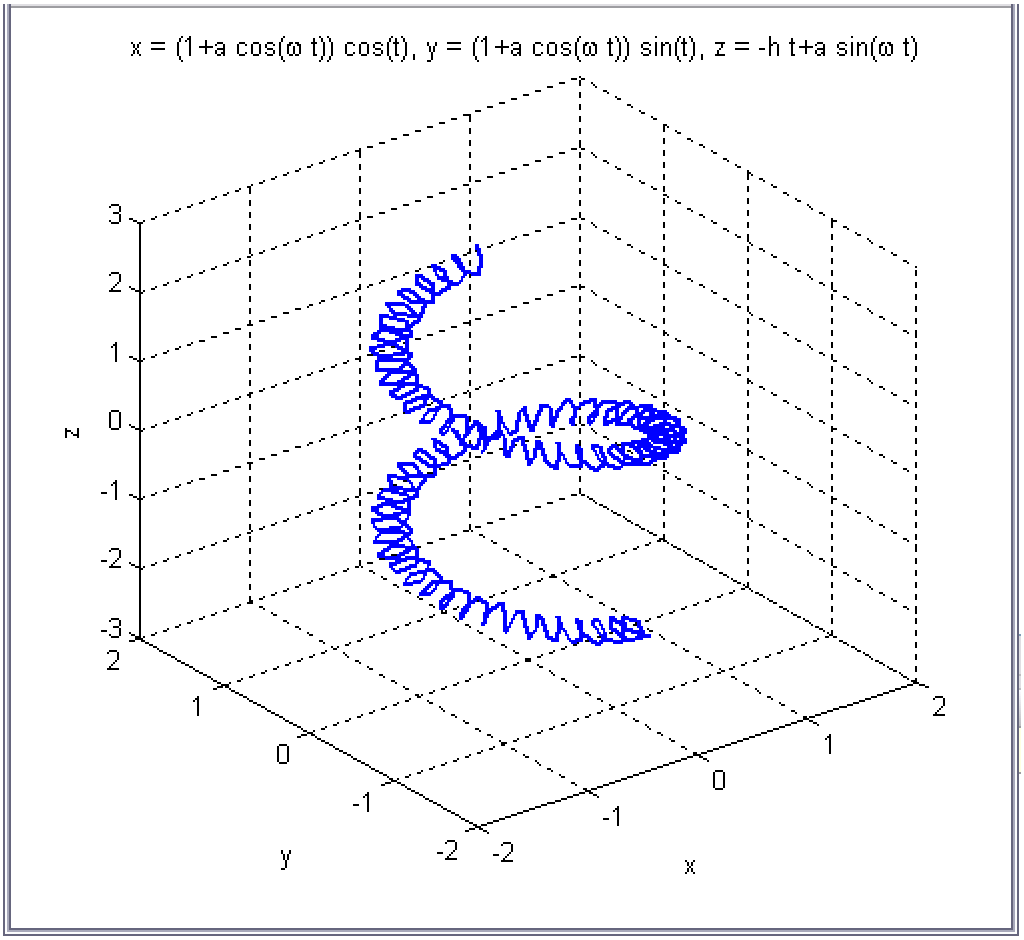
გ) $x = (1 + a\cos\omega t)\cos t\,,$

$y = (1 + a\cos\omega t)\sin t,$

$z = -ht + a\sin\omega t,$

$t \in [-5{,}5] \qquad a = 0{,}15, \qquad \omega = 40, \qquad h = 0{,}4.$

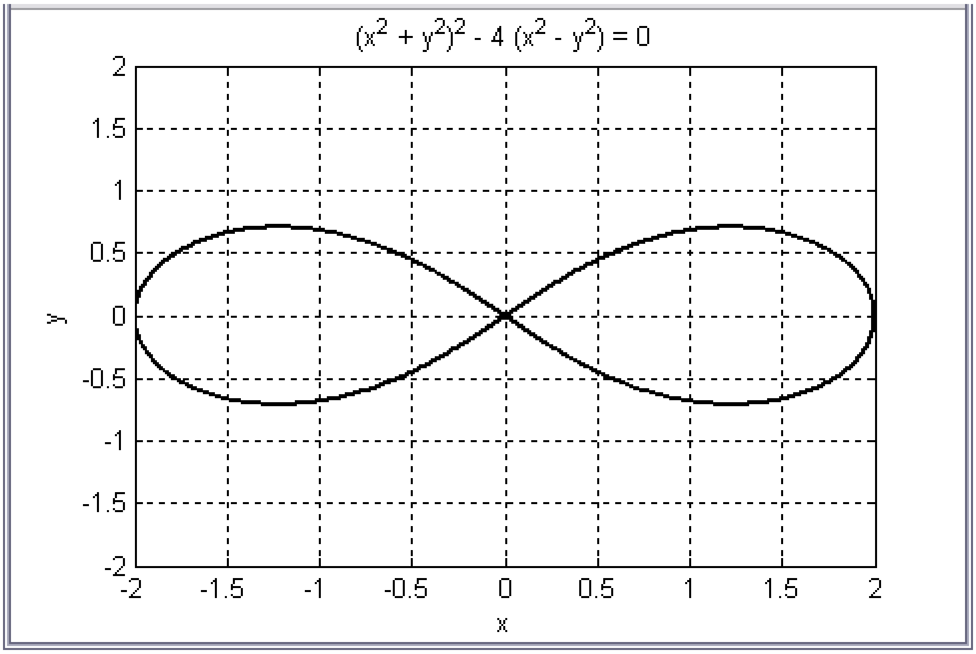
```
>> a = 0.15;
>> omega = 40;
>> h = 0.4;
>> x = @(t)(1 + a * cos(omega * t)).* cos(t);
>> y = @(t)(1 + a * cos(omega * t)).* sin(t);
>> z = @(t) - h * t + a * sin(omega * t);
>> h = ezplot3(x,y,z,[-5,5])
>> set(h,'LineWidth',2)
```



ვ) ავაგოთ არაცხადი ფუნქციების გრაფიკები:

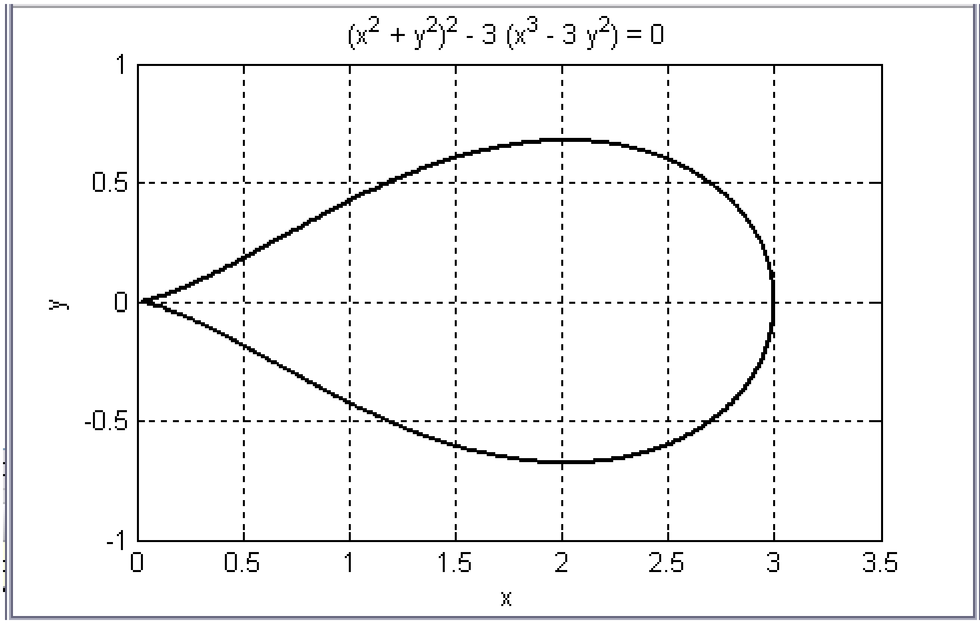
1. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

```
>> ezplot('(x.^2 + y.^2).^2 - 4 * (x.^2 - y.^2)', [-2,2], [-2,2])
```



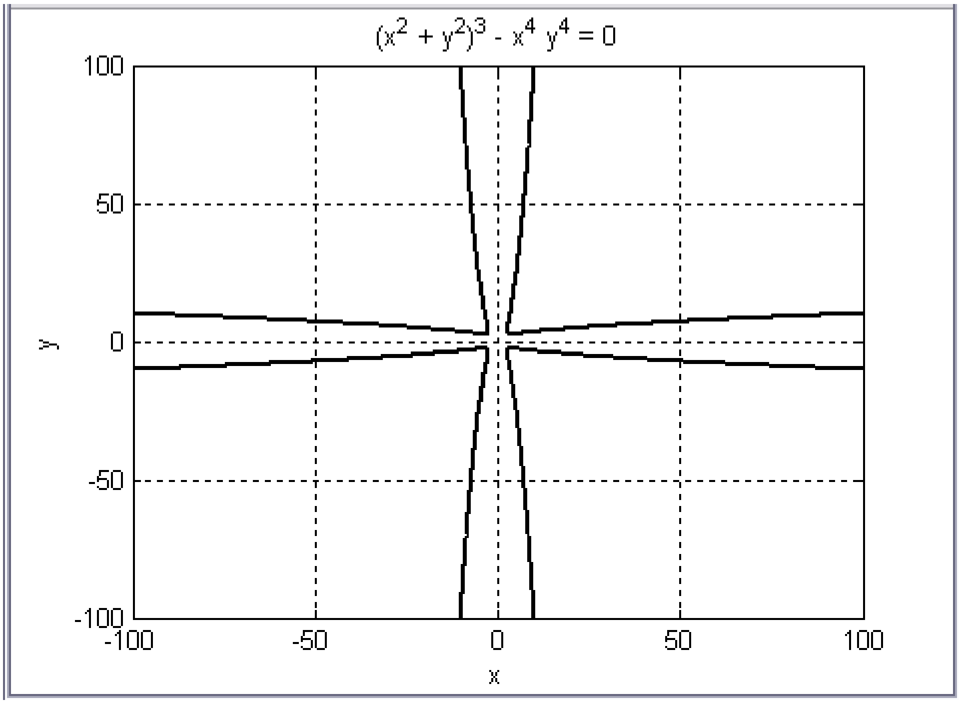
2. $(x^2 + y^2)^2 = 3(x^3 - 3y^2)$.

```
>> ezplot('(x.^2 + y.^2).^2 - 3 * (x.^3 - 3 * y.^2)', [0,3.5], [-1,1])
```



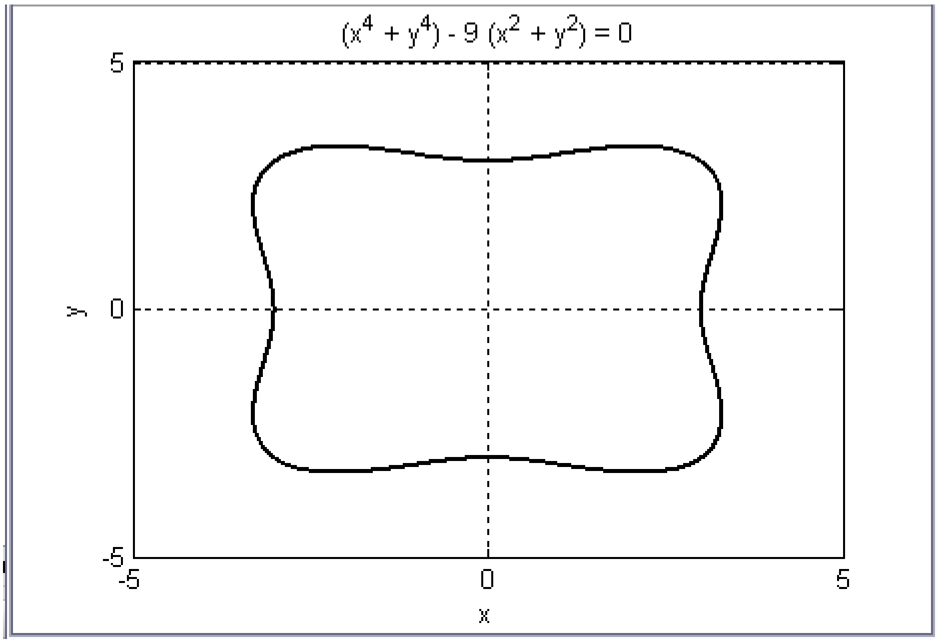
3. $(x^2+y^2)^3 = x^4y^4$.

$>>$ ezplot('(x.^2 + y.^2).^3 − x.^4.* y.^4', [−100,100], [−100,100])



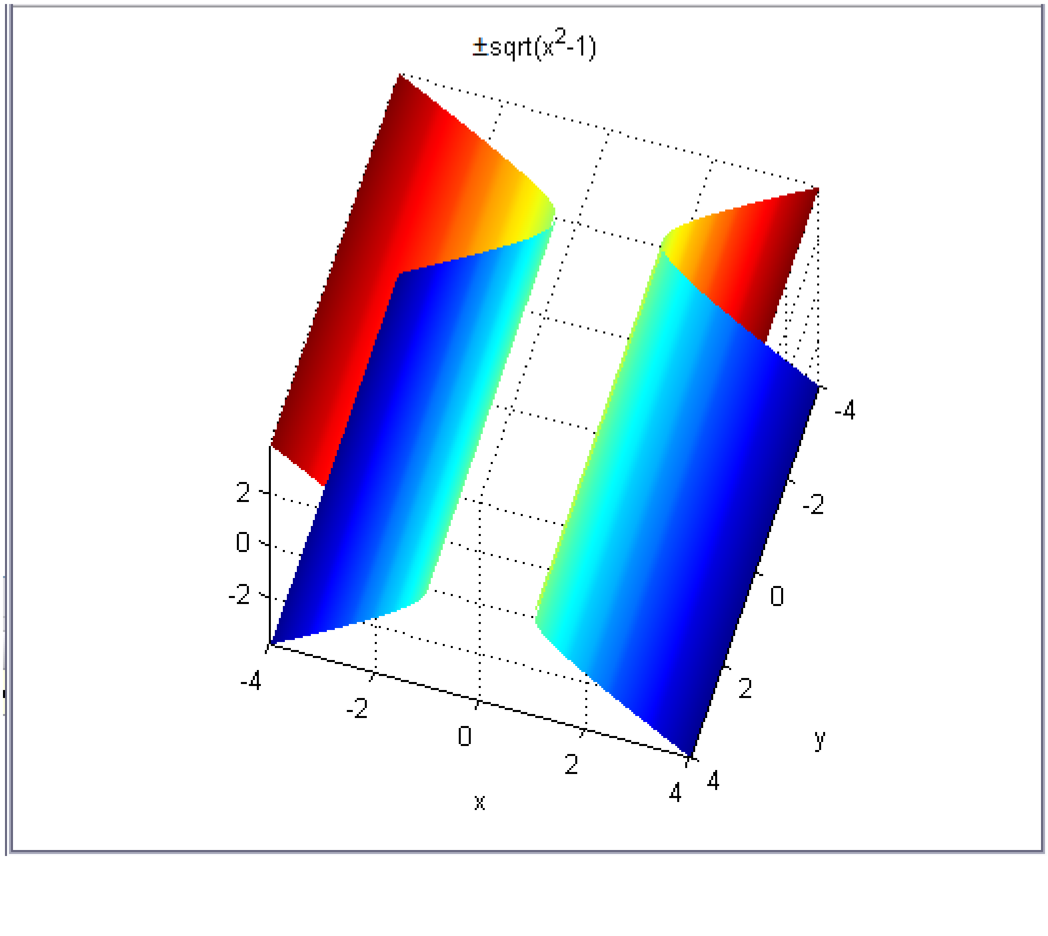
4. $x^4+y^4 = 9(x^2+y^2)$.

$>>$ ezplot('(x.^4 + y.^4) − 9 * (x.^2 + y.^2)', [−5,5], [−5,5])



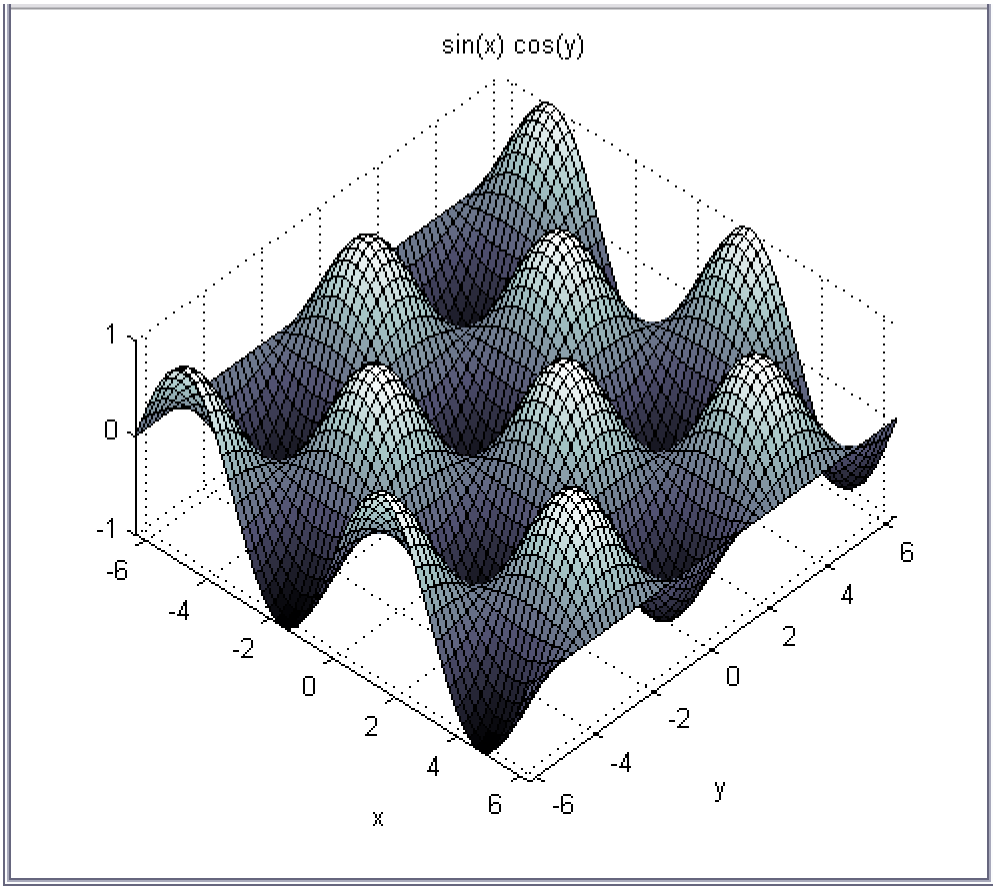
ზ) $z^2 = x^2 - 1, \quad x \in [-4,4]$ ჰიპერბოლური ცილინდრი.

```
>> ezsurf('sqrt(x^2 – 1)',[–4,4]);
>> hold on
>> ezsurf('– sqrt(x^2 – 1)',[–4,4]);
>> axis equal; shading interp
>> view([–17,–62])
```



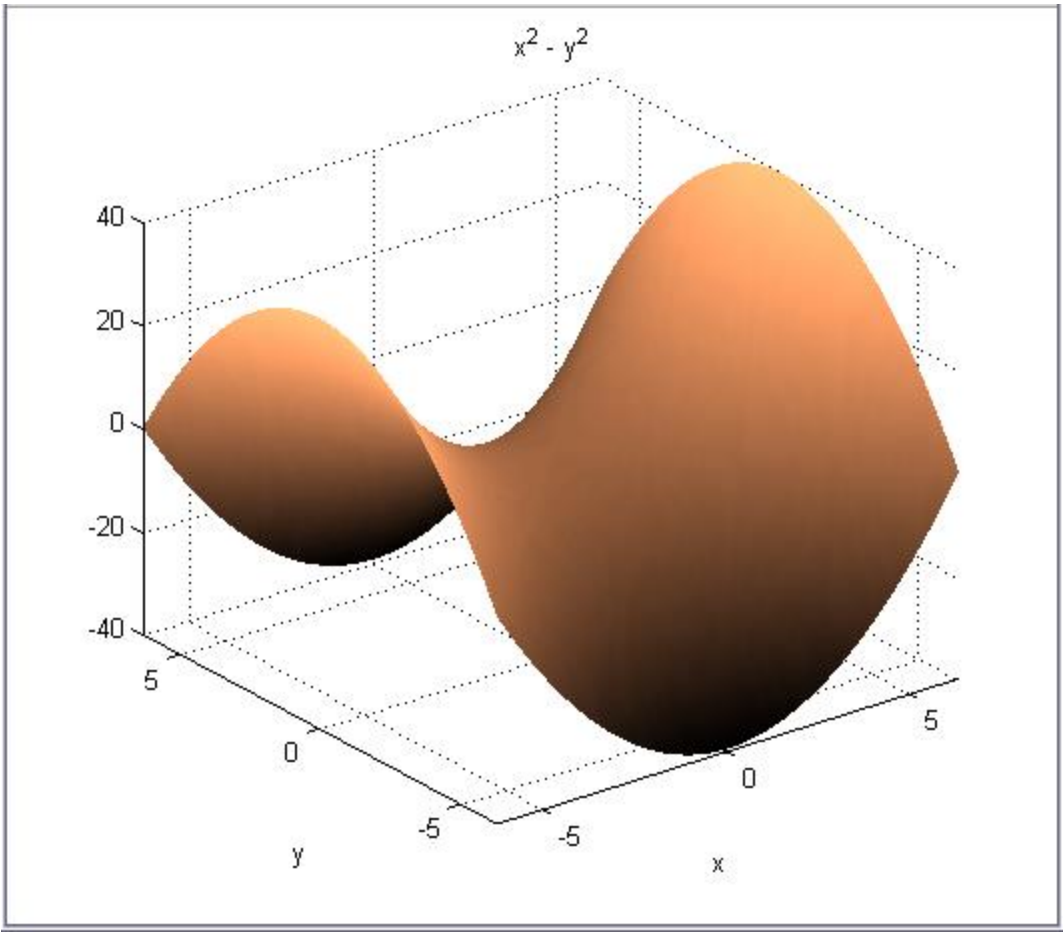
ω) $z = \sin x \cos y$.

```
>> ezsurf('sin(x) * cos(y)')
>> view([43,62])
>> colormap(bone)
```



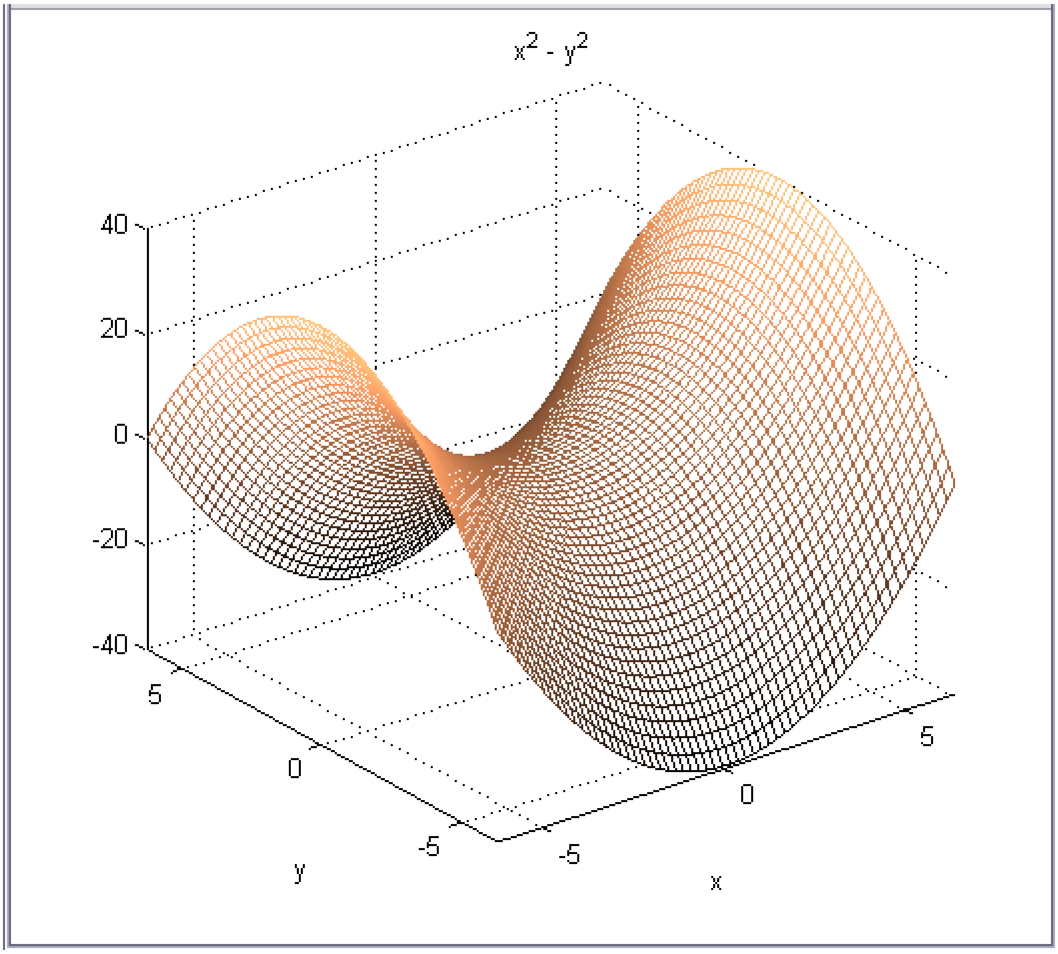
ο) $z = x^2 - y^2, \qquad x \in [-4,4]$.

```
>> ezsurf('x^2 - y^2')
>> shading interp
>> colormap('copper')
```



$>>$ ezmesh('x^2 − y^2')

$>>$ colormap('copper')



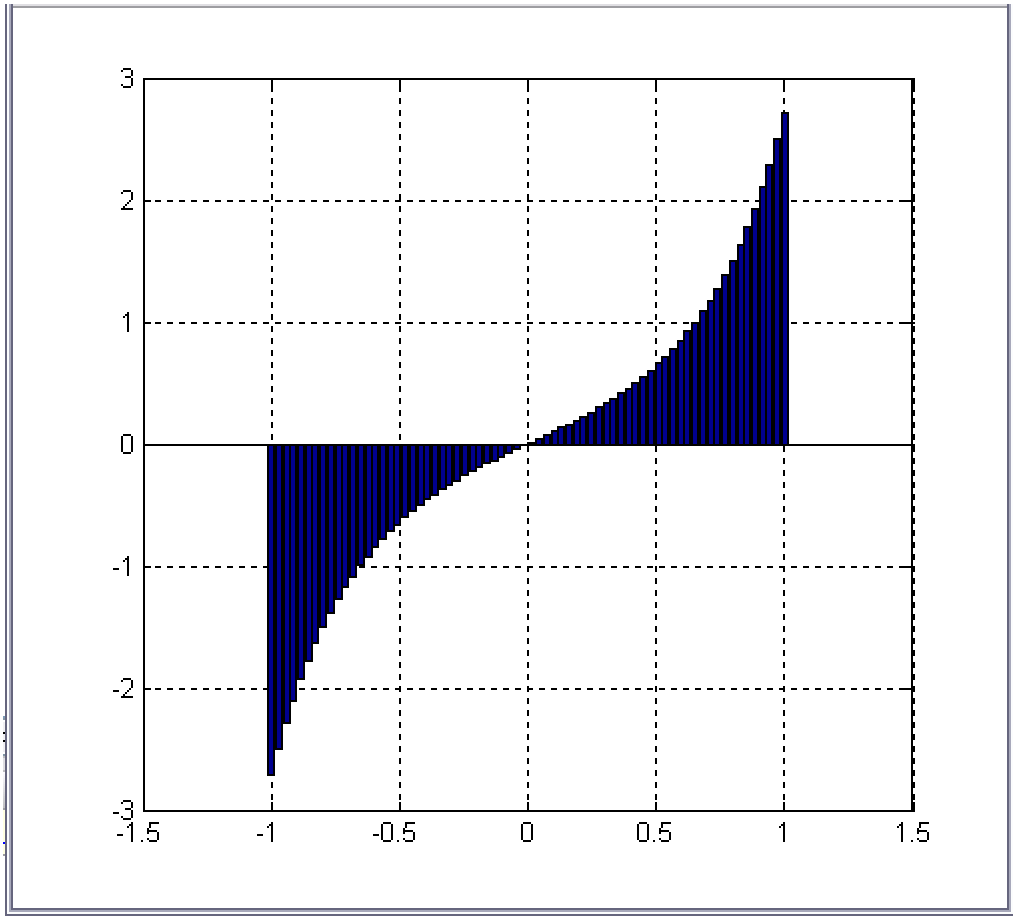
20. გამოვსახოთ $y = xe^{x^2}$ ფუნქცია ვერტიკალური, ჰორიზონტალური დიაგრამებით, ასევე ფართობის, საფეხურებიანი და ღეროვანი დიაგრამებით:

>> x = linspace(−1,1,70);

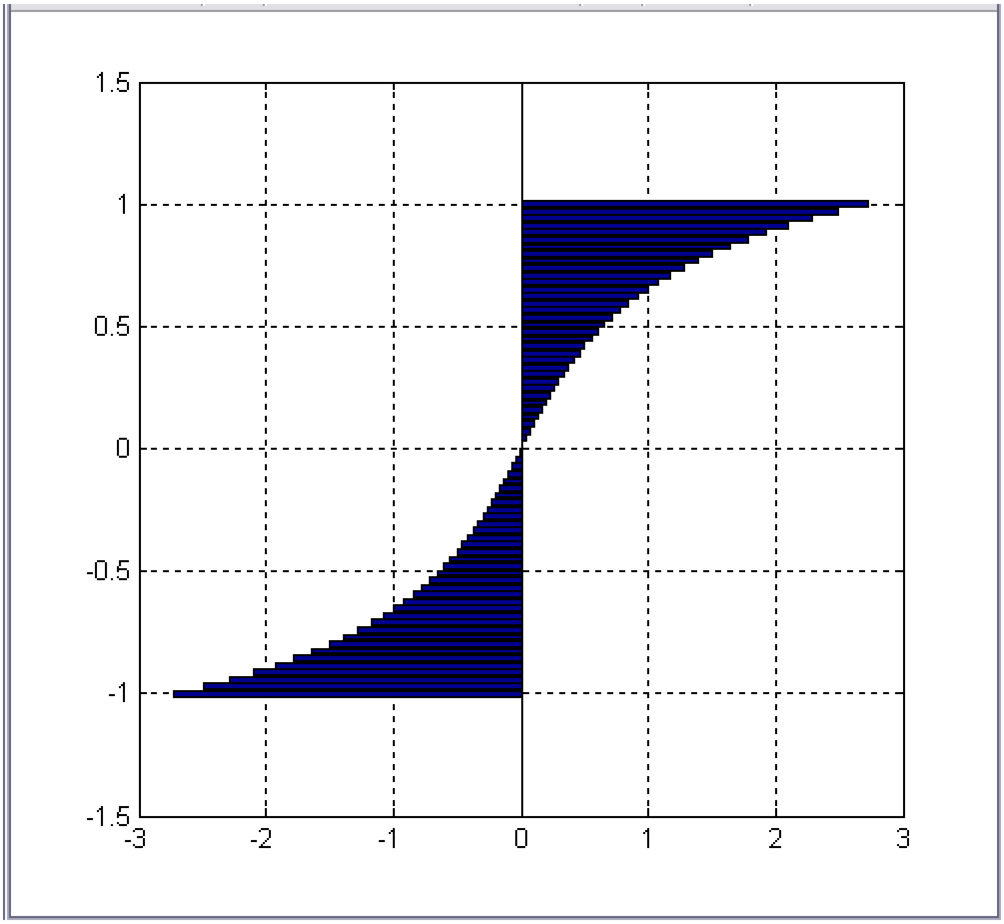
>> y = x.∗ exp(x.^2);

>> bar(x,y)

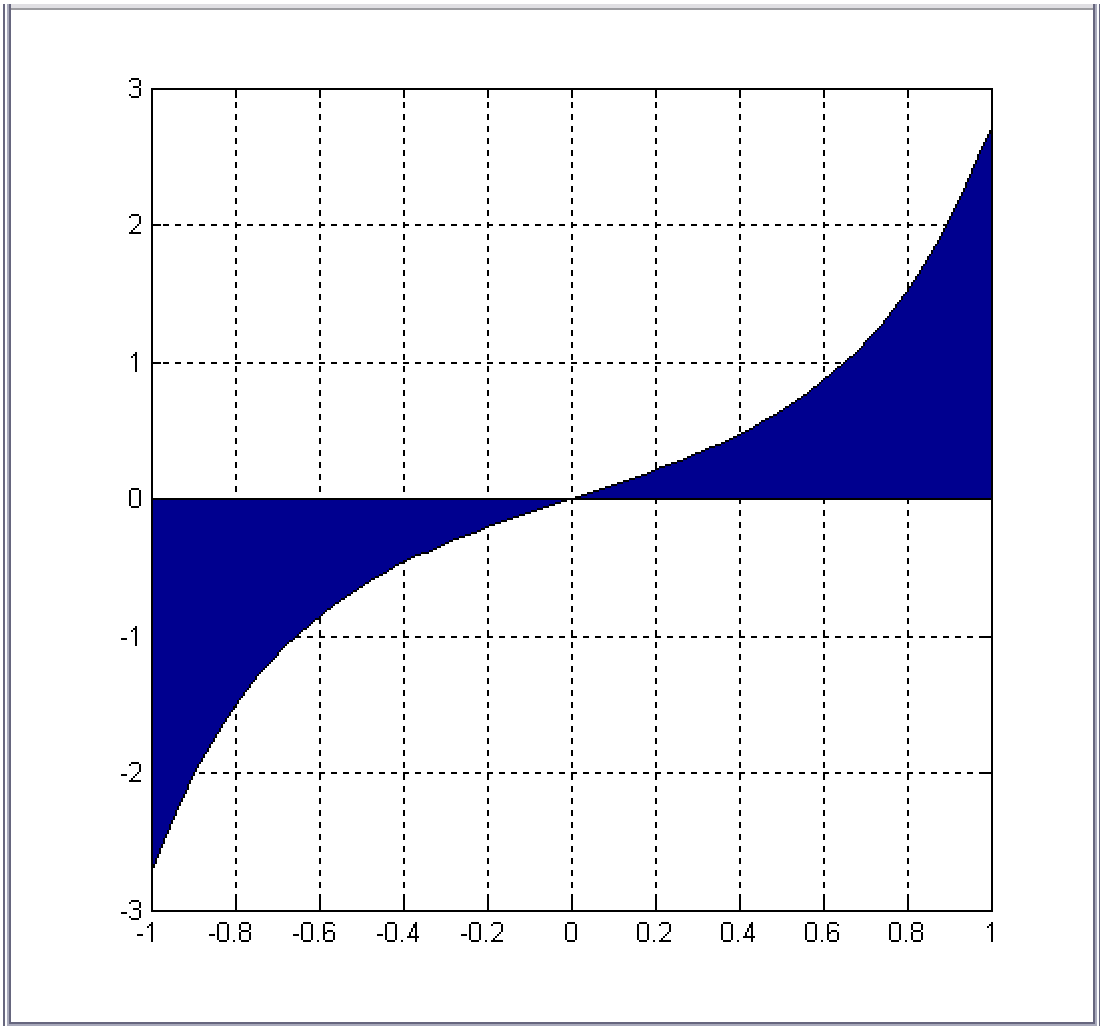
>> grid



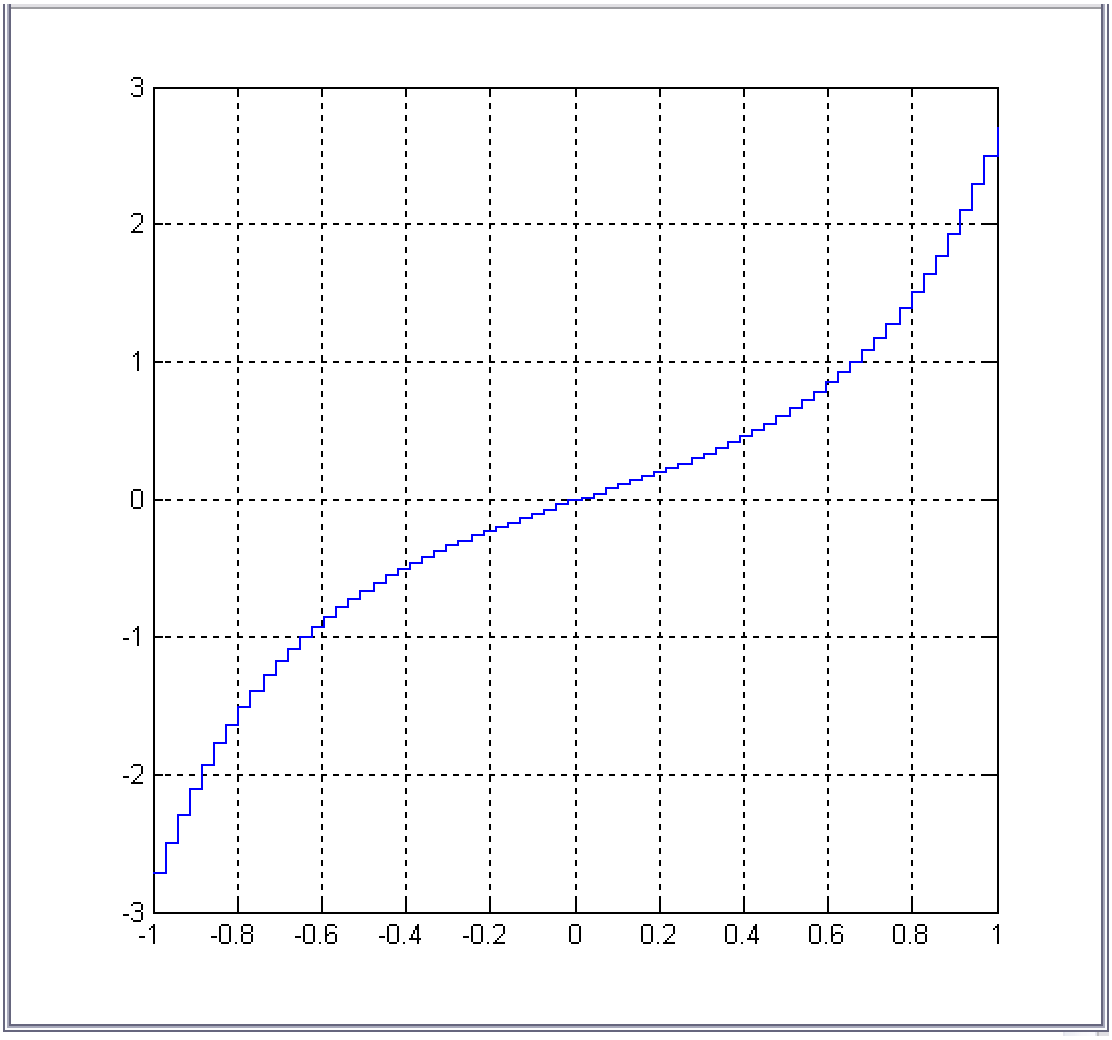
```
>> x = linspace(−1,1,70);
>> y = x.∗ exp(x.^2);
>> barh(x,y)
>> grid
```



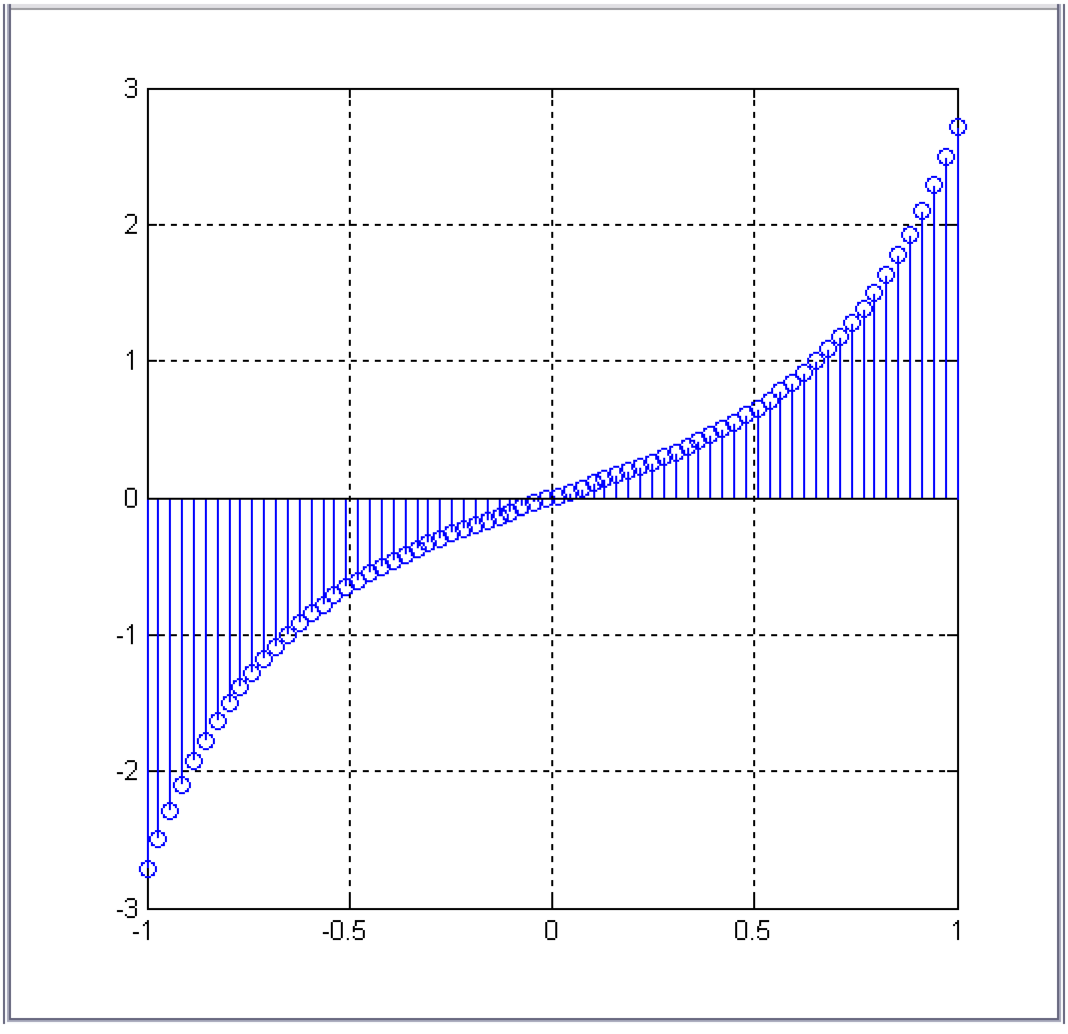
```
>> x = linspace(−1,1,70);
>> y = x.∗ exp(x.^2);
>> area(x,y)
>> grid
```



```
>> x = linspace(−1,1,70);
>> y = x.∗ exp(x.^2);
>> stairs(x,y)
>> grid
```

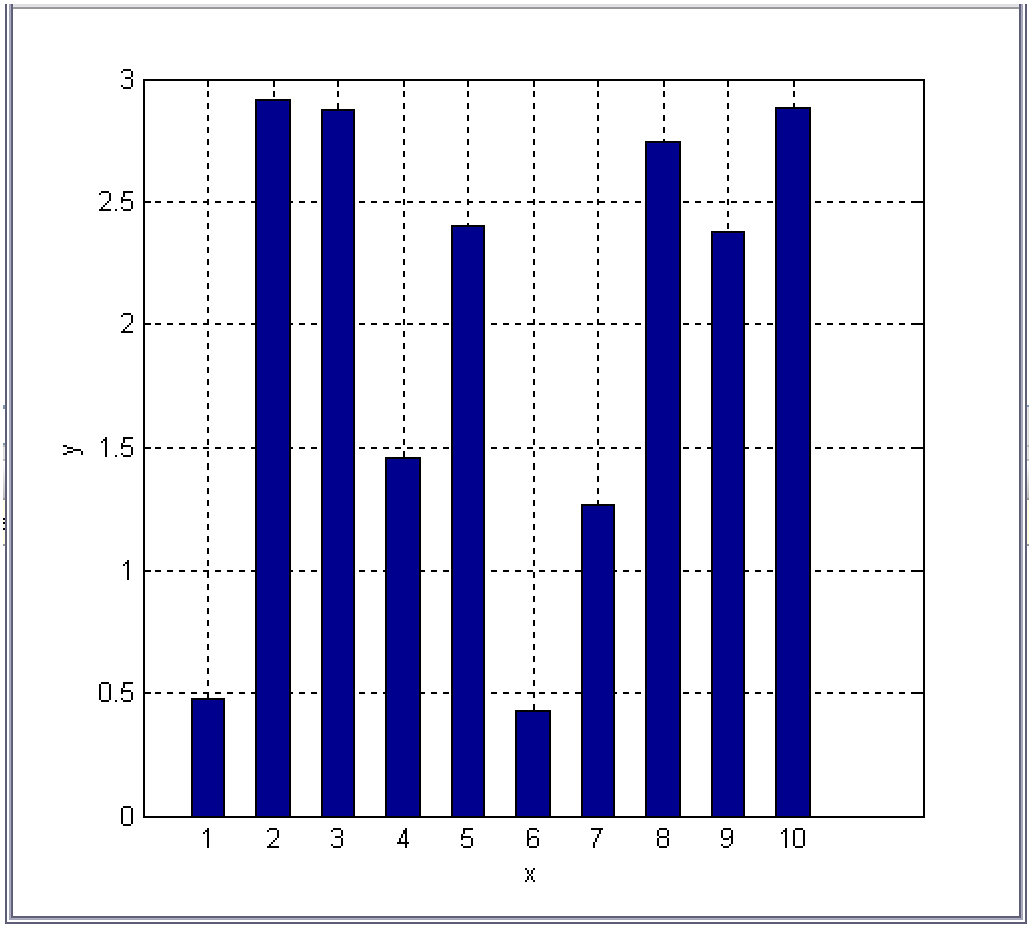


```
>> x = linspace(−1,1,70);
>> y = x.∗ exp(x.^2);
>> stem(x, y)
>> grid
```

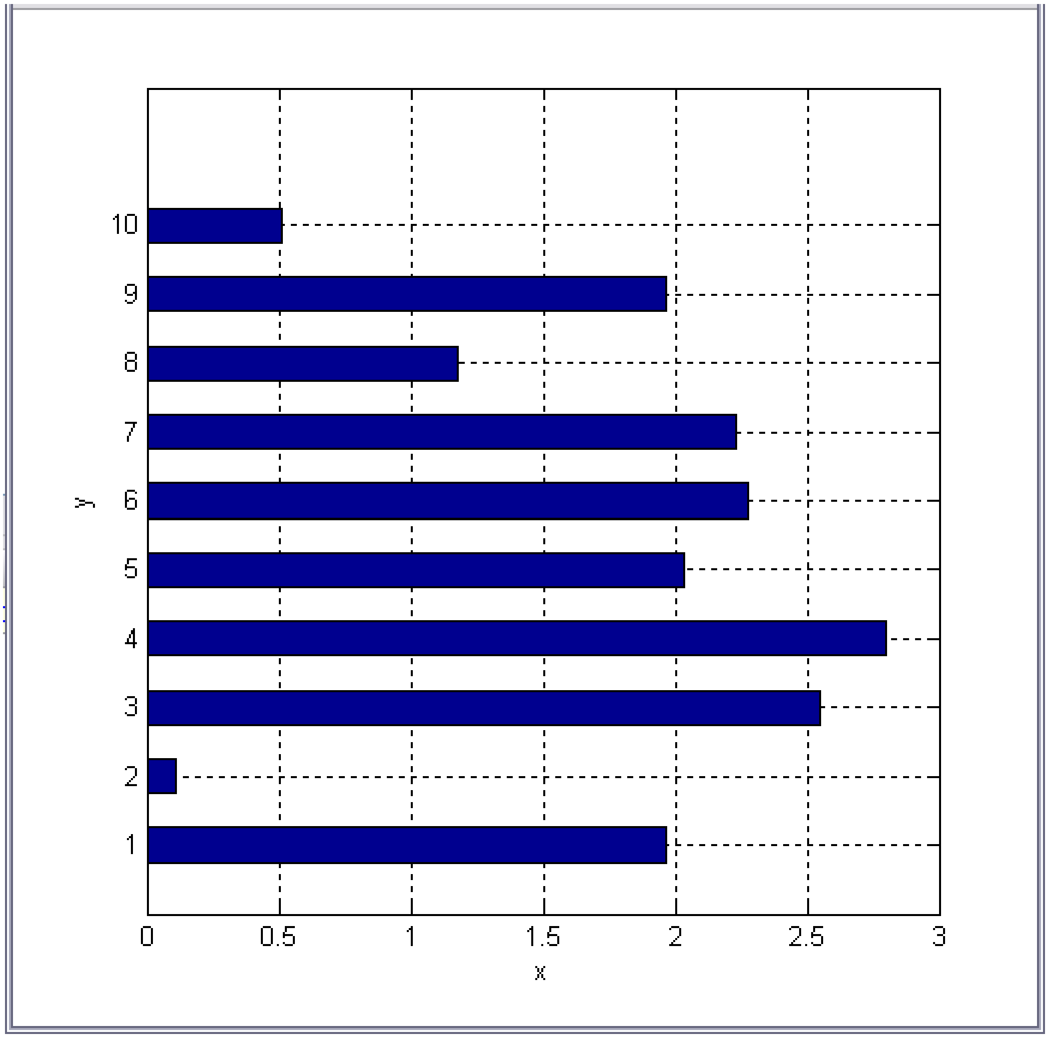


21. ავაგოთ ვერტიკალური, ჰორიზონტალური, სვეტოვანი, ფართობის, საფეხურებიანი და ღეროვანი დიაგრამები შემდეგი მონაცემებით: $x = 1{:}10$, $y = 3\mathrm{rand}(1{,}10)$, დავაწეროთ სახელები x და y ღერძებს.

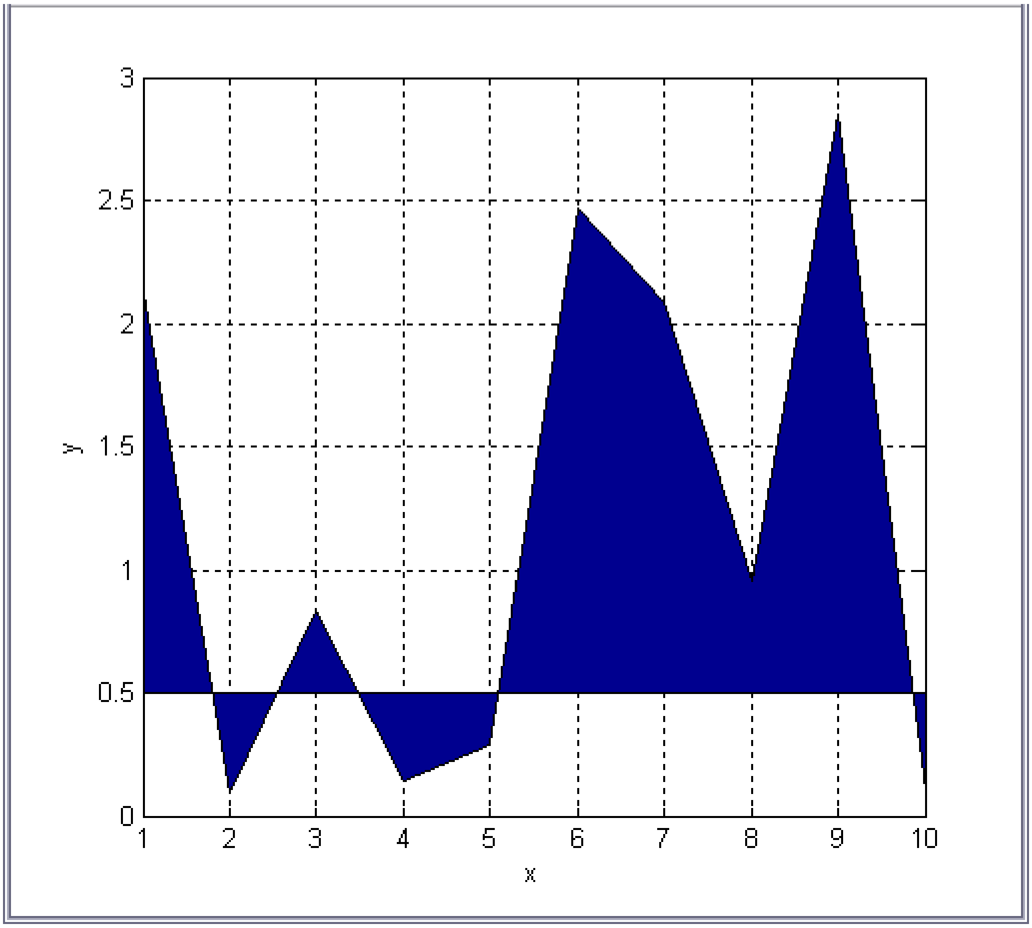
```
>> x = 1:10;
>> y = 3 * rand(1,10);
>> bar(x,y,0.5)
>> grid
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
```



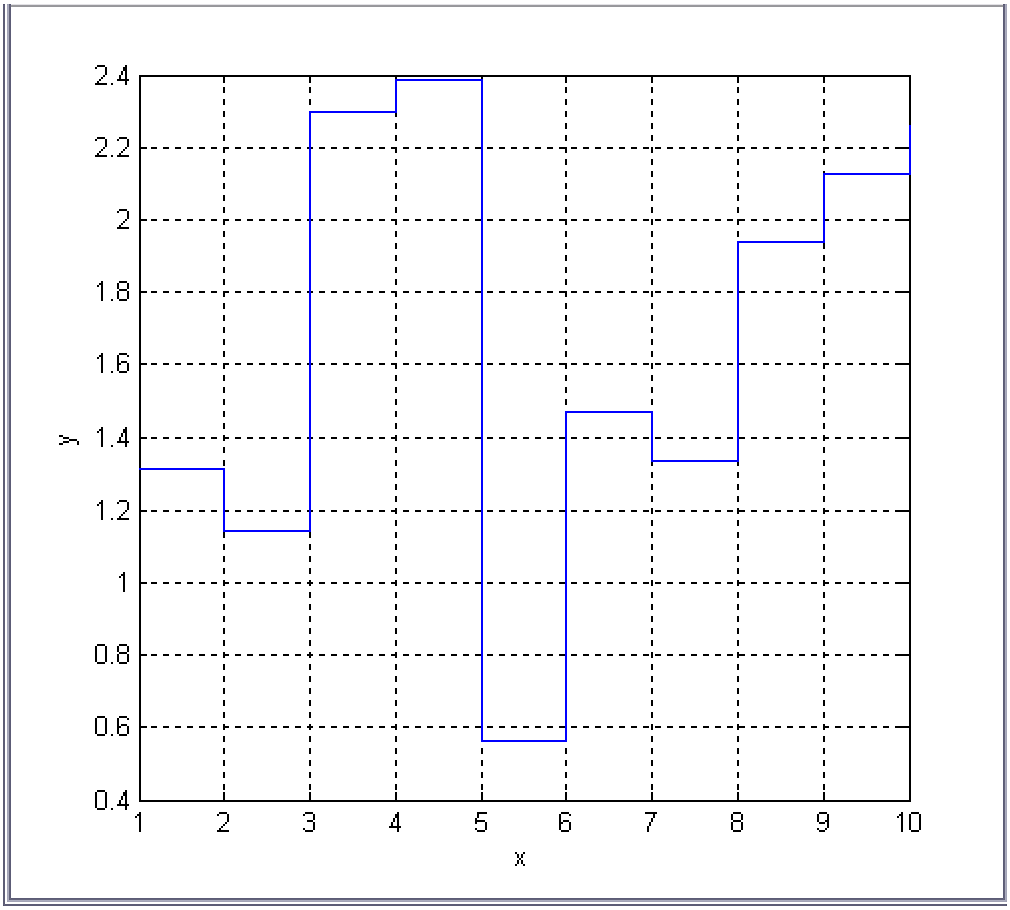
```
>> x = 1:10;
>> y = 3 * rand(1,10);
>> barh(x,y, 0.5)
>> grid
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
```



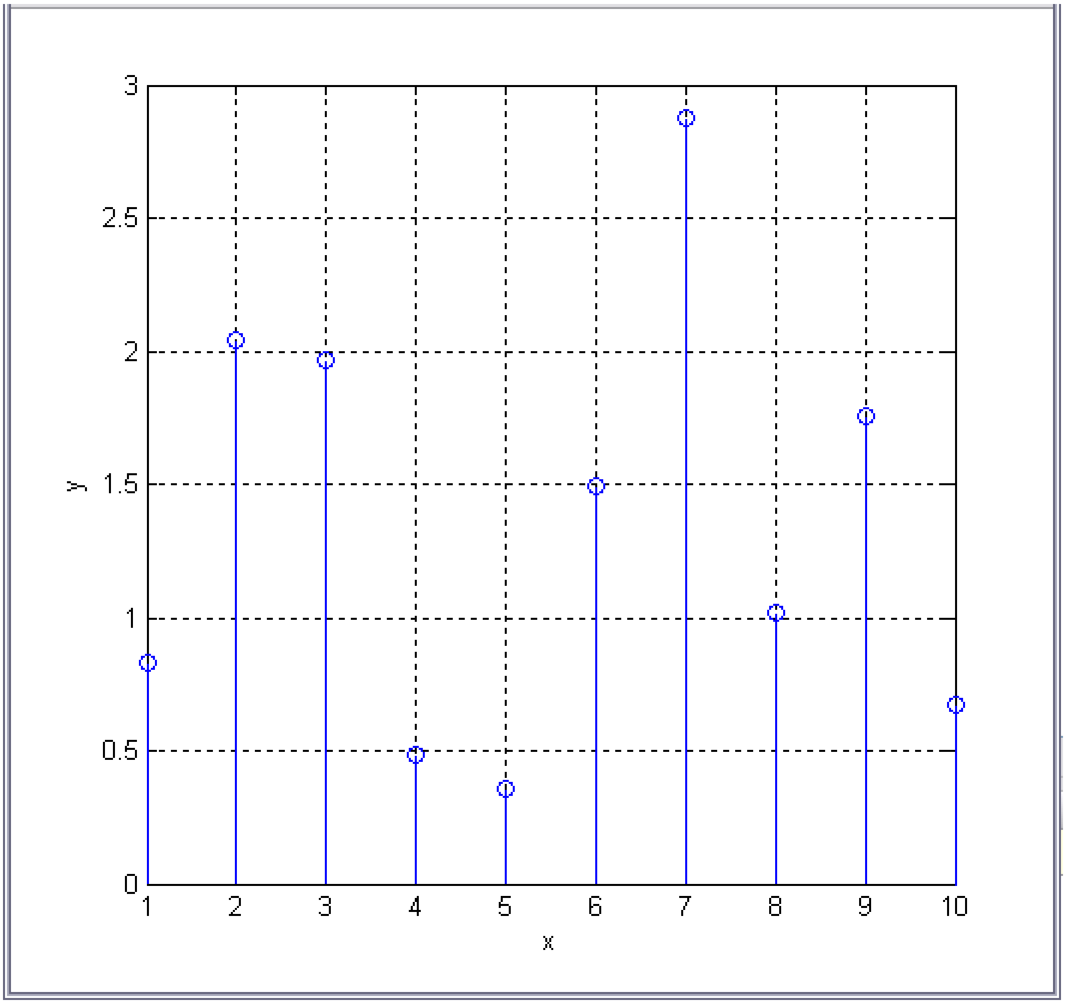
```
>> x = 1:10;
>> y = 3 * rand(1,10);
>> area(x,y)
>> grid
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
```



```
>> x = 1:10;
>> y = 3 * rand(1,10);
>> stairs(x,y)
>> grid
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
```



```
>> x = 1:10;
>> y = 3 * rand(1,10);
>> stem(x, y)
>> grid
>> xlabel('x')
>> ylabel('y')
```

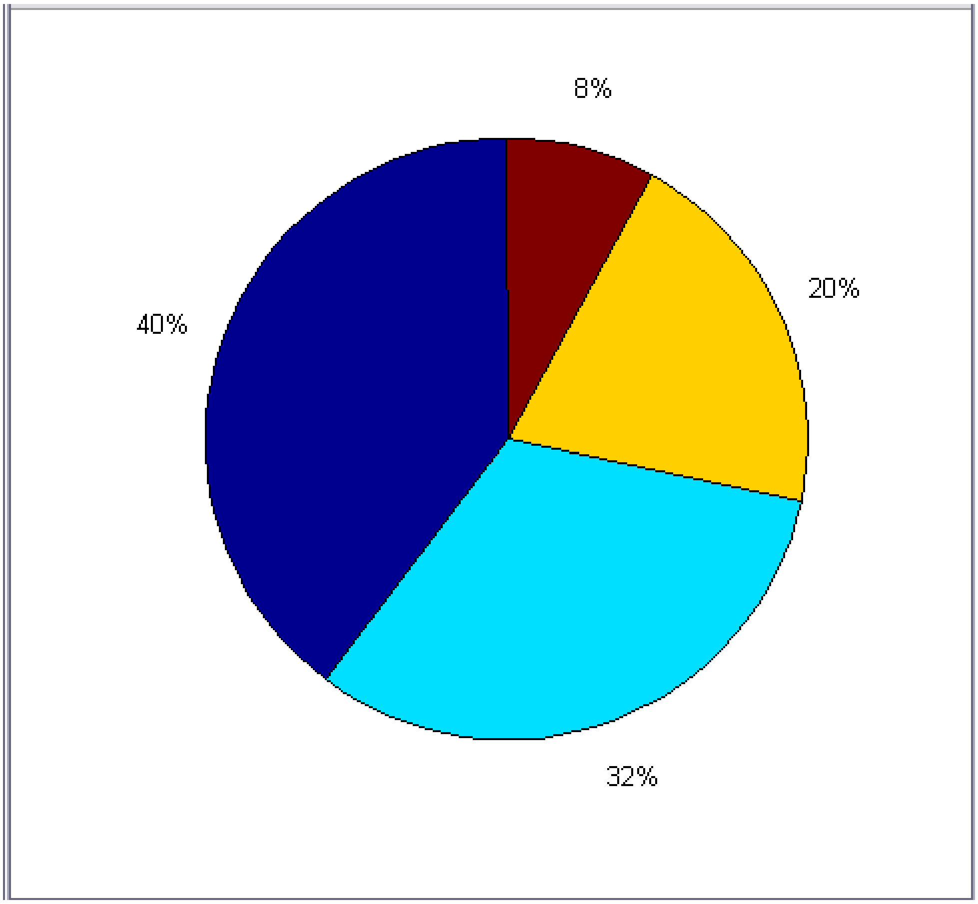


22. ავაგოთ ბრტყელი, მოცულობითი და წრიული დიაგრამები: $x \in [2, 3.5]$, ბიჯით $h = 0,5$, $y = 3\sin x + 2$.

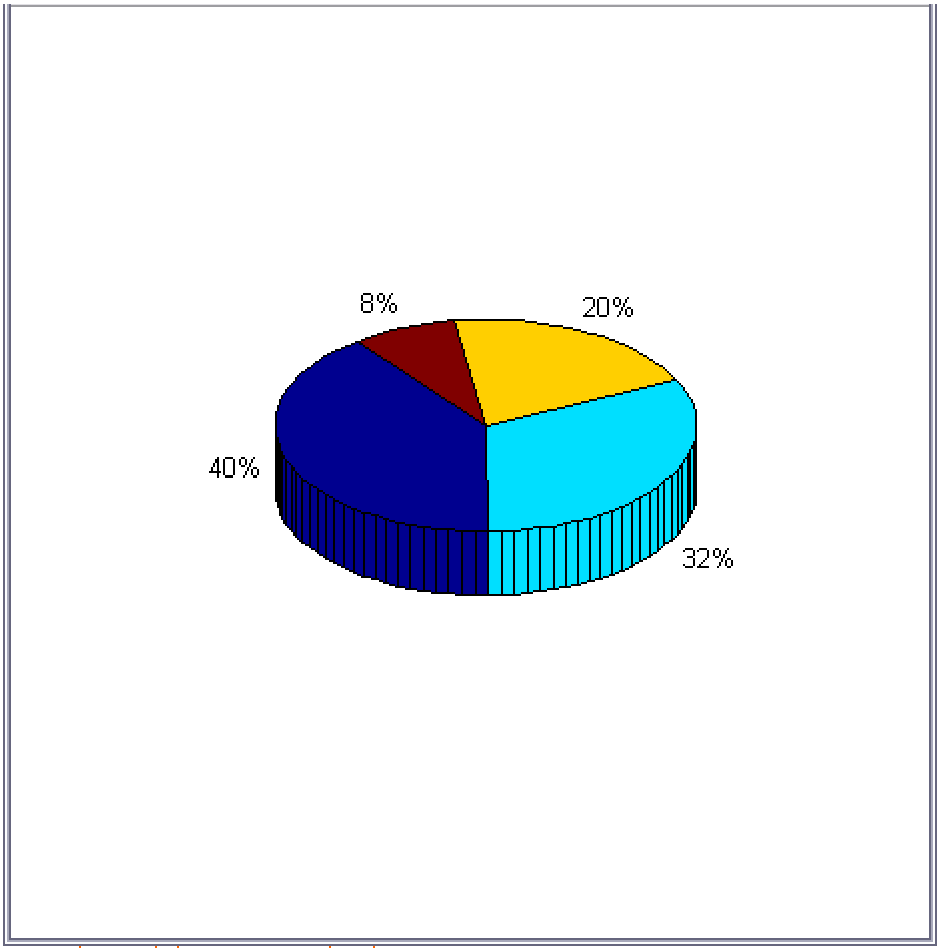
$>>\ \mathrm{x = 2{:}\,0.5{:}\,3.5;}$

$>>\ \mathrm{y = 3 * sin(x) + 2;}$

$>>\ \mathrm{pie(y)}$

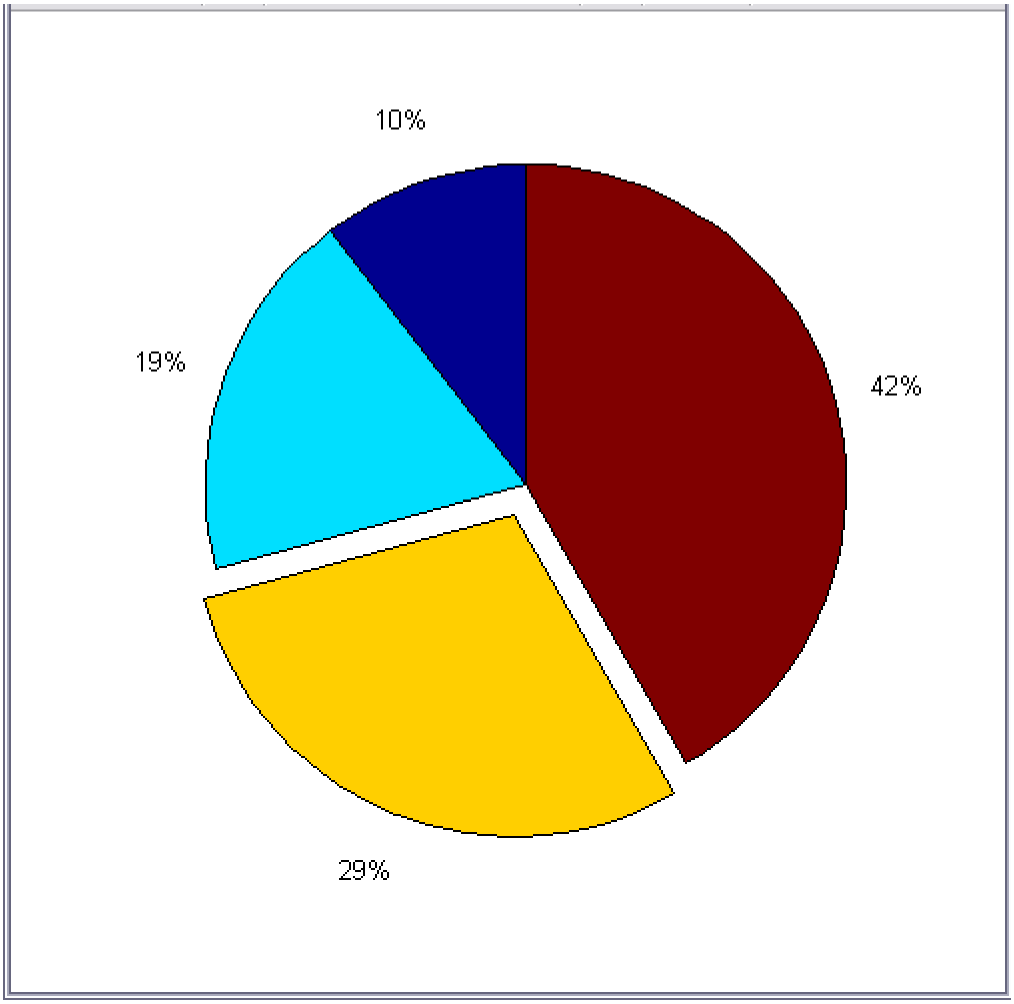


```
>> x = 2:0.5:3.5;
>> y = 3 * sin(x) + 2;
>> pie3(y)
```

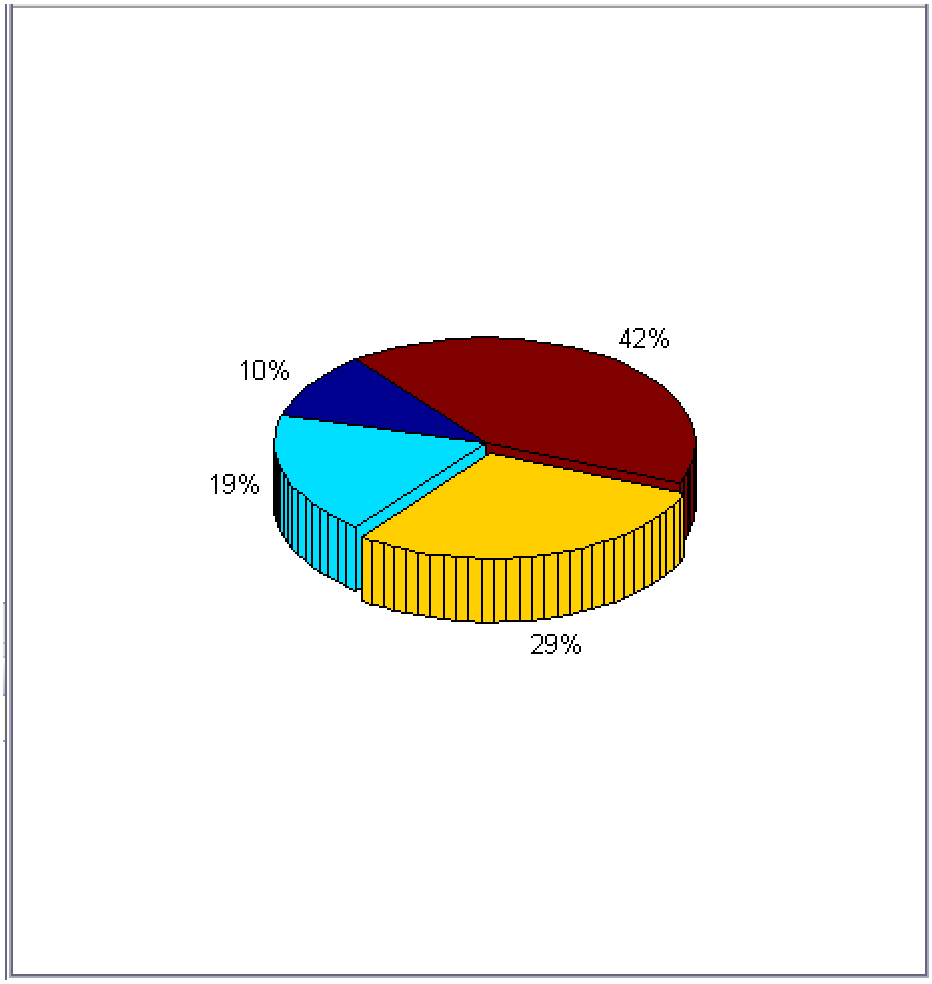


23. მოცემულია ვექტორი x = [5 9 14 20]. გამოვყოთ და წინ წამოვწიოთ მესამე სექტორი. დავხაზოთ შესაბამისი ბრტყელი და მოცულობითი წრიული დიაგრამები:

```
>> x = [5 9 14 20];
>> explode = [0 0 1 0];
>> pie(x,explode)
```



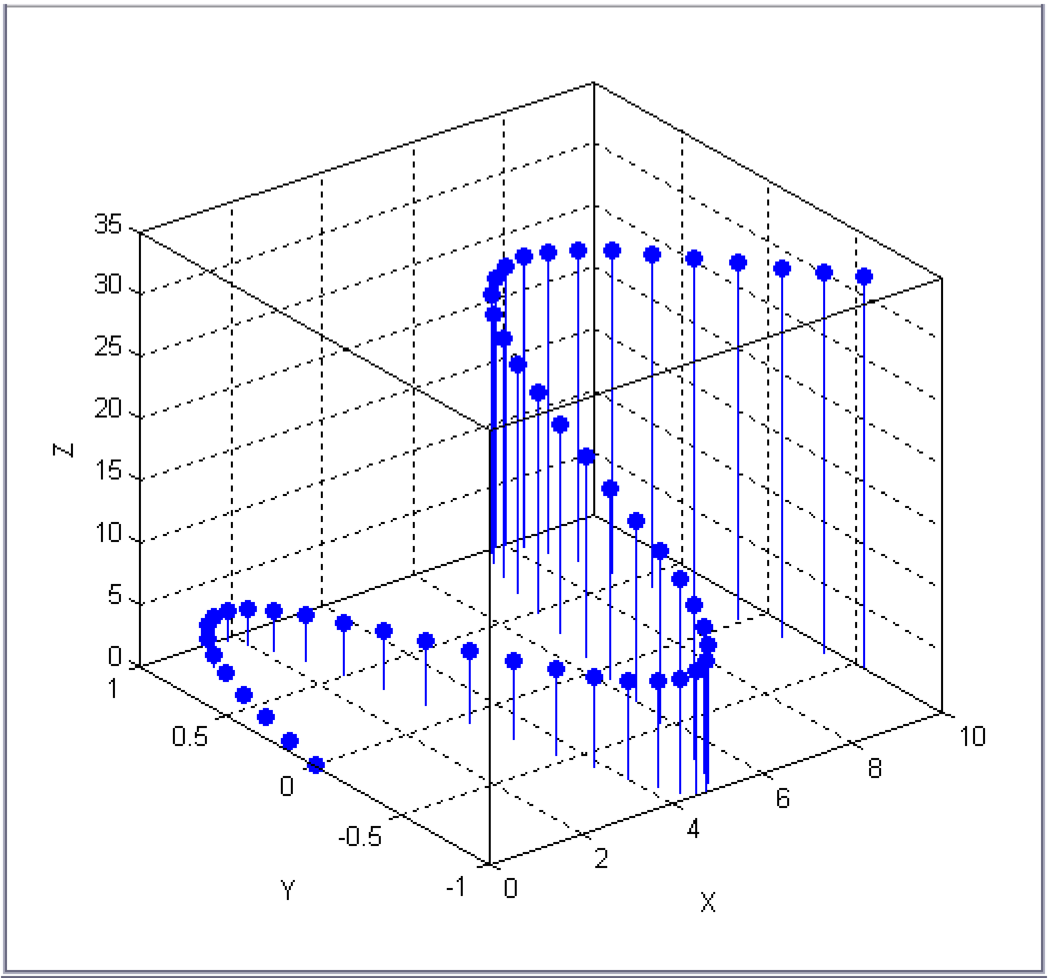
```
>> x = [5 9 14 20];
>> explode = [0 0 1 0];
>> pie3(x,explode)
```



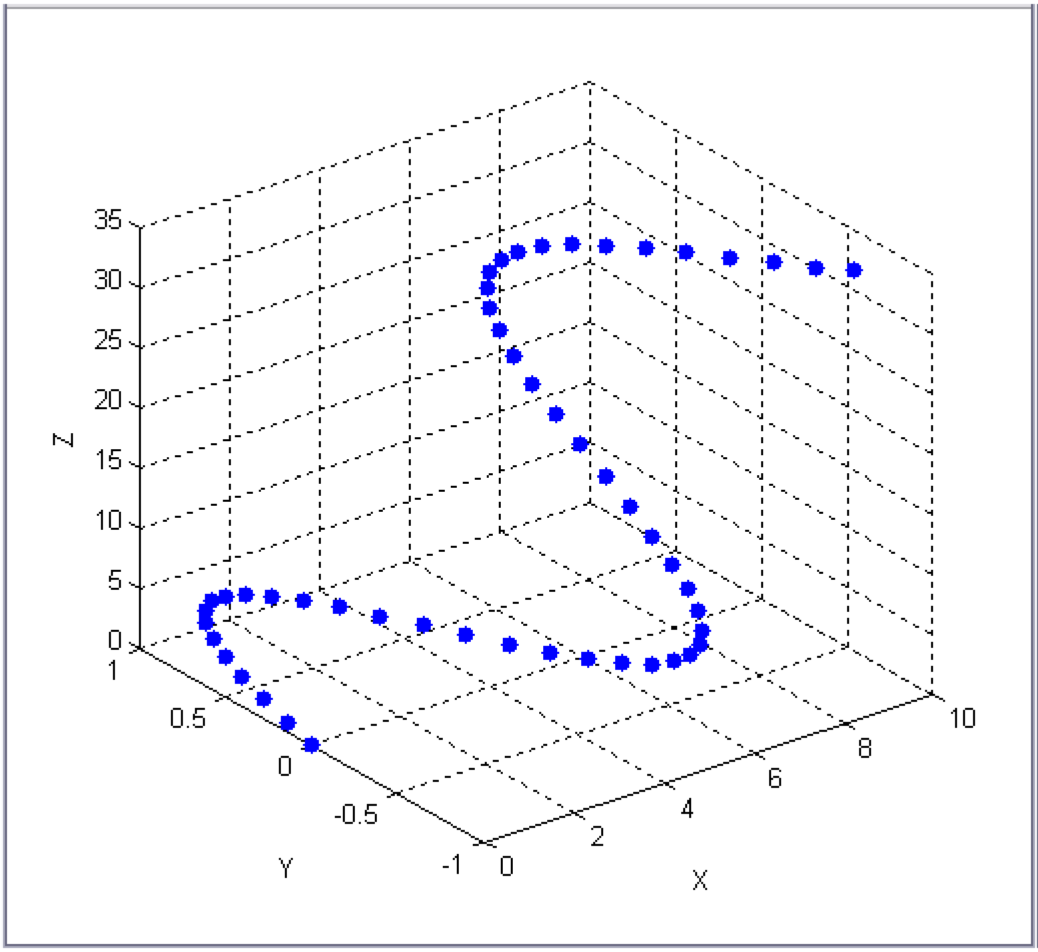
24. ავაგოთ ღეროვანი სივრცითი დიაგრამები stem3 და scatter3 ბრძანებების გამოყენებით:

$$x = t, \quad y = \sin t\,, \quad z = t^{1,5}, \quad t \in [0,10], \text{ ბიჯით } \quad h = 0,2.$$

```
>> t = 0:0.2:10;   x = t;  y = sin(t);  z = t.^1.5;
>> stem3(x,y,z,'fill')
>> grid
>> xlabel('X')
>> ylabel('Y')
>> zlabel('Z')
```

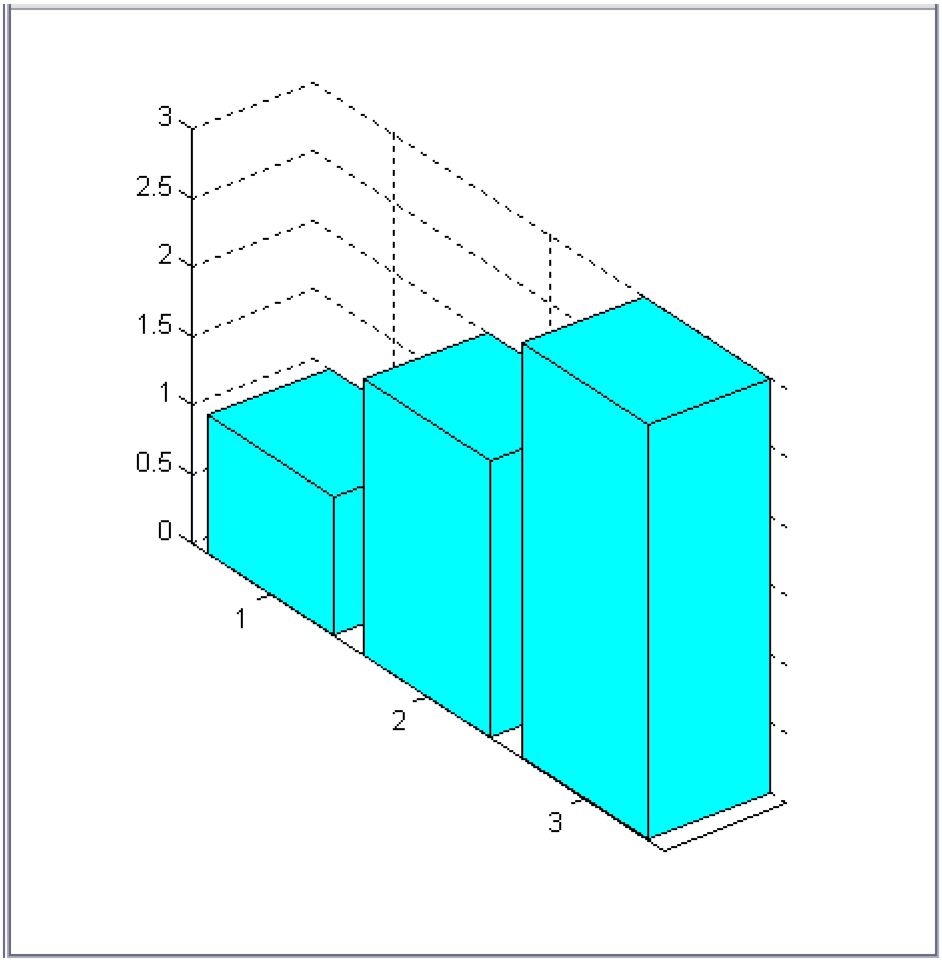


```
>> t = 0: 0.2: 10;
>> x = t;
>> y = sin(t);
>> z = t.^1.5;
>> scatter3(x,y,z,'filled')
>> grid
>> xlabel('X')
>> ylabel('Y')
>> zlabel('Z')
```



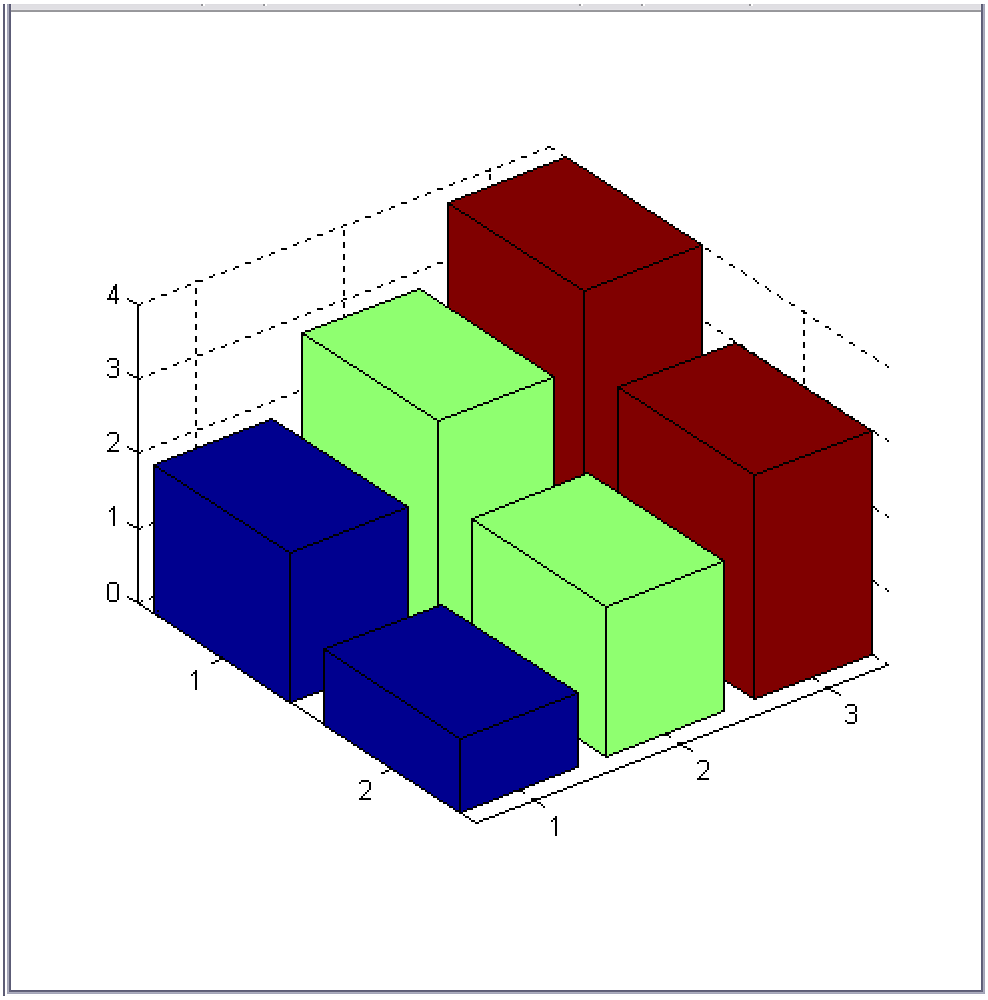
25. ავაგოთ მარტივი სივრცითი დიაგრამა:

```
>> z = [1,2,3];
>> bar3(z)
>> colormap(cool)
```



26. ავაგოთ მატრიცული სივრცითი დიაგრამა:

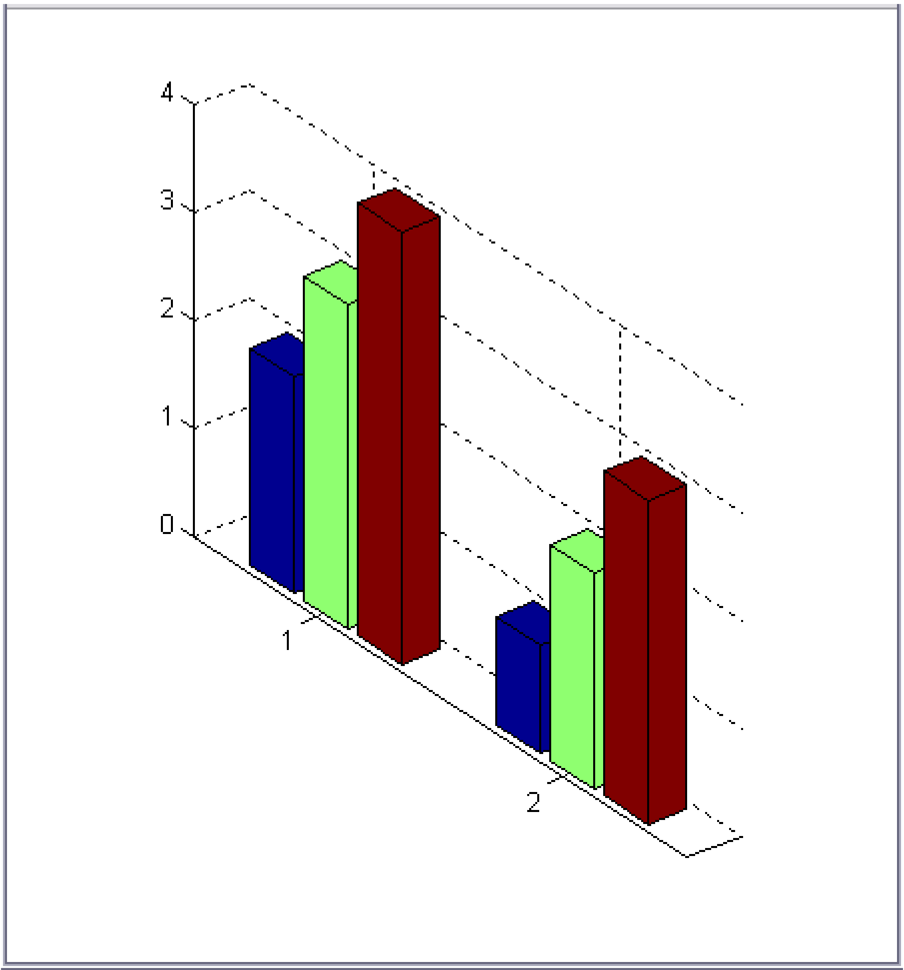
```
>> z = [2,3,4; 1,2,3];
>> bar3(z);
```



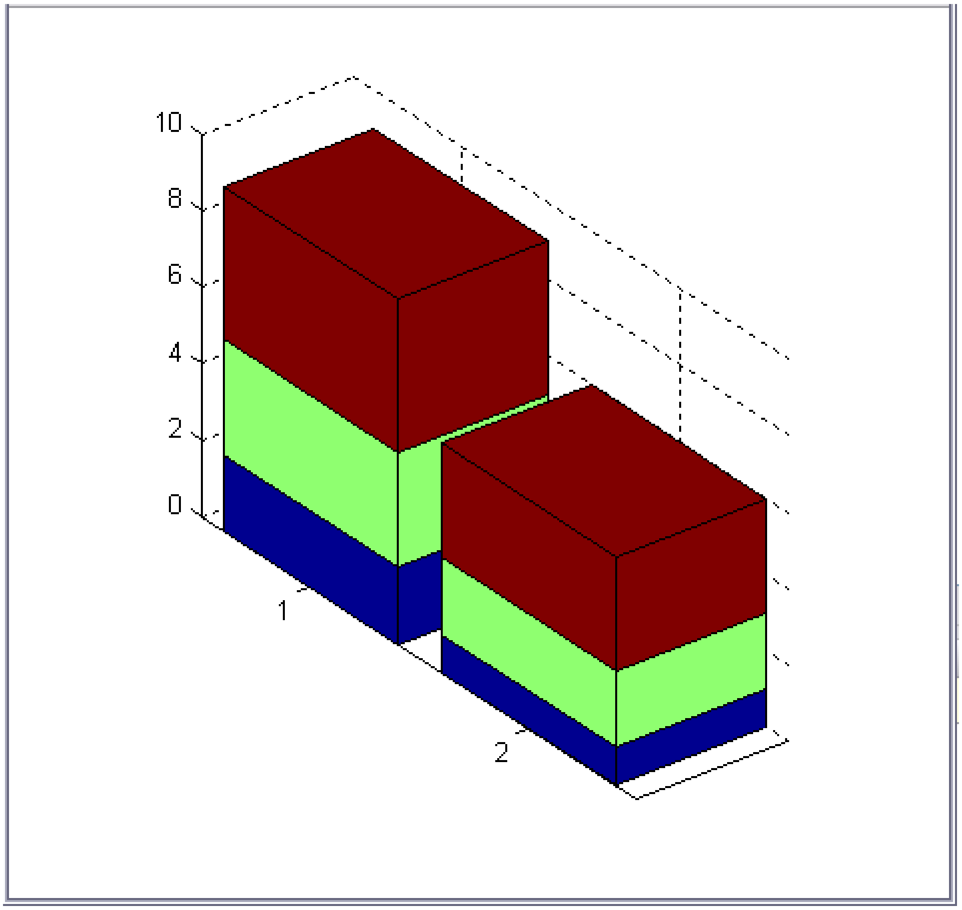
27. დაჯგუფების მეთოდი:

>> z = [2 3 4; 1 2 3];

>> bar3(z,'grouped');



```
>>  z = [2 3 4;1 2 3];
>>  bar3(z,'stacked');
```



სავარჯიშოები

1. ააგეთ დეკარტის კოორდინატებში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

   1) $y = e^x + \sin x\,, \quad x \in [-\pi, \pi]$;
   2) $y = xe^x, \quad x \in [0,3]$;
   3) $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x \in [1,3]$;
   4) $y = 2\sin x + \cos^2 x\,, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{17\pi}{6}\right]$;
   5) $y = e^{-\frac{|x-30|}{30}} \sin x\,, \quad x \in [0,100]$;
   6) $y = 4\sin 2\pi x \cdot \cos 1{,}5\pi x \cdot (1 - x^2)x(2 + x), \quad x \in [-1,1]$;
   7) $y = 1{,}8^{-1{,}5\sqrt{x^2+3x}} \sin x \cos 0{,}5x\,, \quad x \in [-3,3]$.

2. ააგეთ პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციების გრაფიკები სიბრტყეზე:

   1) $x = \ln(1 + t^2)\,, \quad y = 2\,\mathrm{arctg}\, t - t, \quad 0 \le t \le 1$;
   2) $x = 5(2\cos t - \cos 2t), \quad y = 5(2\sin t - \sin 2t), \quad 0 \le t \le 2\pi$;
   3) $x = 6(\cos t - t\sin t), \quad y = 6(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le 8\pi$;
   4) $x = 7\left(\ln \mathrm{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = 7\sin t, \quad \dfrac{\pi}{3} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;
   5) $x = 4t - 5\sin t\,, \quad y = 4 - 5\cos t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$;
   6) $x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4\,, \quad -1{,}5 \le t \le 1{,}5$;
   7) $x = 8\cos^3 t\,, \quad y = 8\sin^3 t\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$;
   8) $x = 2t\cos 10t\,, \quad y = 3t\sin 8t, \quad -\pi \le t \le \pi$.

3. ააგეთ პარამეტრული სახით მოცემულ ფუნქციათა გრაფიკები სივრცეში:

   1) $x = e^{-\frac{|t-50|}{50}} \sin t\,, \quad y = e^{-\frac{|t-50|}{50}} \cos t\,, \quad z = t, \quad 0 \le t \le 100$;
   2) $x = (2 + 4\cos t)\cos t\,, \quad y = (2 + 4\cos t)\sin t\,, \quad z = t^2, \quad 0 \le t \le 20$;
   3) $x = 1{,}5\cos 2\pi t\,, \quad y = 1{,}5\sin 2\pi t\,, \quad z = \dfrac{t}{3}, \quad 0 \le t \le 2\pi$;
   4) $x = e^{-t}, \quad y = e^{-t}\cos t\,, \quad z = e^t, \quad 0 \le t \le \ln 5$;
   5) $x = 10\cos^2 t\,, \quad y = 5\sin 2t\,, \quad -2\pi \le t \le 2\pi$;

6) $x = t\cos t\,,\qquad y = t\sin t\,,\ \ z = t,\quad 0 \le t \le 10\pi;$
7) $x = e^{t},\quad y = e^{-t},\quad z = t\sqrt{2},\qquad 0 \le t \le 1;$
8) $x = 2t\cos 10t\,,\ \ y = 3t\sin 8t\,,\ \ z = t + \pi,\quad -\pi \le t \le \pi.$

4. ააგეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

1) $\rho = 9\sqrt{|\cos 2\varphi|},\quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
2) $\rho = 5\sin 4\varphi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
3) $\rho = 5\cos 3\varphi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
4) $\rho = \dfrac{9}{5 - 4\cos\varphi},\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
5) $\rho = \dfrac{12}{3 + \cos^2\varphi},\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
6) $\rho = \dfrac{3}{2 + \sin\varphi},\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
7) $\rho = 2\sin^2\varphi\,,\qquad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

5. ერთ ფანჯარაში ააგეთ დეკარტის კოორდინატებში მოცემული ორი (ან მეტი) ფუნქციის გრაფიკი:

1) $y_1 = x^3 + 3x^2 + 4x - 13,\quad y_2 = 5x^2 + 3x - 7,\quad -3 \le x \le 3;$
2) $y_1 = x\ln x\,,\quad y_2 = \dfrac{\ln x}{x},\quad 1 \le x \le 4;$
3) $y_1 = \cos^2 x + \sin^3 x\,,\ y_2 = \sin x + \cos 2x\,,\ y_3 = 5\cos x + 3,\ \ 0 \le x \le 2\pi;$
4) $y_1 = xe^{x},\quad y_2 = \dfrac{e^{x}}{x},\quad y_3 = x^2 + 5x + 6,\qquad 1 \le x \le 5;$
5) $y_1 = \sqrt{\dfrac{12}{3 + \cos^2 x}},\quad y_2 = x^2 - 6x^4,\quad y_3 = 3(2\sin x - \sin 2x),\ \ [0, 2\pi];$
6) $y_1 = e^{-3x}\cos 5x,\quad y_2 = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2\,\mathrm{tg}^2\,x}{\mathrm{tg}^4\,x + x^4},\quad \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right].$

6. ააგეთ ერთ ფანჯარაში სიბრტყეზე პარამეტრული სახით მოცემული ორი (ან მეტი) ფუნქციის გრაფიკი:

1) $x_1 = 5\cos t\,,\quad y_1 = 3\sin t,$
$x_2 = 5\cos^3 t\,,\quad y_2 = 3\sin^3 t\,,\ \ 0 \le t \le 2\pi;$

2) $x_1 = 7\cos t, \quad y_1 = 7\sin t,$

$x_2 = 7(\cos t + t\sin t), \quad y_2 = 7(\sin t - t\cos t), \ \ 0 \le t \le 2\pi;$

3) $x_1 = 4t - 8t^3, \quad y_1 = t^2 - 6t^4, \ \ -3 \le t \le 3,$

$x_2 = 8\cos t - \cos 3t, \quad y_2 = 3\sin t - \sin 3t, \ \ 0 \le t \le 2\pi,$

$x_3 = 3(2\cos t + \cos 2t), \quad y_3 = 3(2\sin t - \sin 2t), \ \ 0 \le t \le 2\pi.$

7. ერთ ფანჯარაში ააგეთ პოლარულ კოორდინატებში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

1) $\rho_1 = 6\cos 4\varphi, \ \ \rho_2 = 4\cos^2 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

2) $\rho_1 = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}, \qquad \rho_2 = \dfrac{1}{6 + 3\cos\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

3) $\rho_1 = \dfrac{5}{3 + \sin\varphi}, \ \ \rho_2 = \dfrac{6}{5 - 3\cos\varphi}, \ \ \rho_3 = \sqrt{\dfrac{12}{3 + \cos^2\varphi}}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$

4) $\rho_1 = 5\sin 3\varphi, \qquad \rho_2 = 6\sqrt{|\sin\varphi|}, \ \ \rho_3 = 5\cos 4\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

8. ერთ ფანჯარაში ააგეთ სივრცეში პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

1) $x_1 = 5\cos^2 t, \ \ y_1 = 2{,}5\sin 2t, \ \ z_1 = 5|\sin t|,$

$x_2 = 3\cos t - \cos 3t, \ y_2 = 3\sin t - \sin 3t, \ z_2 = t, \qquad 0 \le t \le 2\pi;$

2) $x_1 = 7\cos t, \qquad y_1 = 7\sin t, \qquad z_1 = 2t,$

$x_2 = t\cos t, \ y_2 = t\sin t, \ \ z_2 = t, \qquad 0 \le t \le 10\pi;$

3) $x_1 = (1 + 2\cos t)\cos t \quad y_1 = (1 + 2\cos t)\sin t, \quad z_1 = t^2,$

$x_2 = t\cos t, y_2 = t\sin t, \ z_2 = t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

9. ააგეთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

1) $y = \begin{cases} 4e^{x+2}, & -6 \le x \le -2, \\ x^2, & -2 < x \le 2, \\ (x + 62)^{\frac{1}{3}}, & 2 < x \le 6. \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 14x, & 0 \le x \le 10, \\ 14 + 5\sin\left(\dfrac{\pi(x - 10)}{10}\right), & 10 < x \le 25, \\ 9, & 25 < x \le 35, \\ 9 - \dfrac{9}{5}(x - 35), & 35 < x \le 40. \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} 2x + 2, & -5 \le x \le -1, \\ x^2 - x - 2, & -1 < x \le 2, \\ -\dfrac{1}{2}x + 1, & 2 < x \le 6. \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} 5\sin\dfrac{\pi x}{2}, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le 1, \\ \lg x + 1, & 1 < x \le 10. \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} (x-1)^2, & -1 \le x \le 0, \\ 5x + 6, & 0 < x \le 1, \\ \sqrt{x}, & 1 < x \le 5. \end{cases}$

6) $y = \begin{cases} -2\sin x, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 5\sin x + 1, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x + 6, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$

7) $y = \begin{cases} x|x|, & -5 \le x \le 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x, & 1 < x \le e, \\ 3\ln x, & e < x \le 2e. \end{cases}$

8) $y = \begin{cases} 2^{x-1} + 2, & -5 \le x \le 1, \\ 2x^2, & 1 < x < 5. \end{cases}$

9) $y = \begin{cases} 3\sin x + 6, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 3\sin x + 4\cos x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 3\cos x + 7, & \dfrac{\pi}{2} < x \le 2\pi. \end{cases}$

10) $y = \begin{cases} x + 2, & -2 \le x \le -1, \\ x^2 + 1, & 1 < x \le 1, \\ x + 3, & 1 < x \le 3. \end{cases}$

10. დაყავით სამუშაო ფანჯარა მითითებული $m \times n$ ზომის ნაწილებად, ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მიღებულ „ქვეფანჯრებში":

1) $m \times n = (3 \times 1)$,
$x_1 \in [-5, 0]$, $y_1 = x^2$,
$x_2 \in [-5, 2]$, $y_2 = x^2 - x - 2$,
$x_3 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $y_3 = 2\sin x + 2\cos x$;

2) $m \times n = 1 \times 3$,
$x_1 \in [-6, -2]$, $y_1 = 4e^{x+2}$,
$x_2 = 2t - 4t^3$, $y_2 = t^2 - 4t^4$, $t \in [-2, 2]$,
$\rho = 2\sin^2\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$;

3) $m \times n = 1 \times 4$
$x_1 = 2\cos t + \cos 2t$, $y_1 = 2\sin t - \sin 2t$, $t_1 \in [0, 2\pi]$,
$x_2 = t\cos t$, $y_2 = t\sin t$, $z_2 = t$, $t_2 \in [0, 10\pi]$,
$x_3 = 5\cos t$, $y_3 = 5\sin t$, $z_3 = 7t$, $t_3 \in [0, 8\pi]$,
$y_4 = \left(\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $x_4 \in [-5, 5]$;

4) $m \times n = 2 \times 3$,
$y_1 = xe^x$, $x_1 \in [0, 3]$,
$y_2 = \frac{\ln x}{x}$, $x_2 \in [1, 3]$,
$y_3 = e^x + \cos x$, $x_3 \in [-\pi, \pi]$,
$y_4 = x\sin x$, $x_4 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$,
$y_5 = \sqrt{\frac{x^3}{10 - x}}$, $x_5 \in [0, 5]$,
$y_6 = \ln(x^2 - 1)$, $x_6 \in [2, 5]$;

5) $m \times n = 2 \times 3$,
$x_1 = 2t - 4t^3$, $y_1 = t^2 - 4t^4$, $t \in [-1.5, 1.5]$,
$x_2 = 4t - 5\sin t$, $y_2 = 4 - 5\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$,
$x_3 = 4\cos^3 t$, $y_3 = 8\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$,

$x_4 = 10\cos^2 t,\quad y_4 = 5\sin 2t\,,\; z_4 = 10|\sin t|,\; t \in [-2\pi,\; 2\pi],$
$\rho_1 = 2\sin^3\varphi,\qquad \varphi \in [0, 2\pi],$
$\rho_2 = \sqrt[3]{4\cos\varphi},\qquad \varphi \in [0, 2\pi];$

6) $m \times n = 3 \times 1,$

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & -3 \le x \le 0, \\ 2, & 0 < x \le 1, \\ e^x + 2, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} \sin 2x, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 2\sin x + 2\cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 3\cos x + 3, & \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

11. ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მითითებულ არეზე. გამოიყენეთ აგების ყველა შესაძლო ბრძანება (surf, mesh, meshz, meshc, surfc, contour3, contour, waterfall):

1) $z = \ln(y^2 - 4x + 8),\quad x \in [-3;\; 2],\;\; y \in [2;\; 6];$

2) $z = \ln(25 - x^2 - y^2) + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}},\;\; x \in [-3{,}1;\; 4],\;\; y \in [-2{,}9;\; 2{,}9];$

3) $z = \ln\dfrac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2},\;\; x \in [-2{,}5;\; 2{,}5],\;\; y \in [1{,}5;\; 6{,}5];$

4) $z = \arcsin\dfrac{x}{y^2} + \arccos(1 - y),$

ა) $x \in [-1;\; 1],\;\; y \in [1;\; 2];$

ბ) $x \in [0{,}6;\; 2{,}5],\;\; y \in [1{,}6;\; 1{,}8];$

5) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{xy}{1 - x^2 - y^2},$

ა) $x, y \in [-0{,}6;\; 0{,}6];$

ბ) $x, y \in [2;\; 3];$

6) $z = \dfrac{\ln(25 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}},\;\; x \in [2;\; 3],\;\; y \in [-1{,}4;\; 1{,}4];$

7) $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)},\;\; x, y \in [-2;\; 2].$

12. დაყავით გრაფიკული ფანჯარა 2×1 ზომის ნაწილებად და განათავსეთ მასში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

1) $z = \sqrt{x^3 + y^3 - 3xy}, \quad x, y \in [2; 5],$

$z = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \ x, y \in [-3;\ 3];$

2) $z = \ln(x^2 + y^2) + 5, \quad x, y \in [1; 4],$

$z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}, \quad x \in [4; 9], \ y \in [-4;\ 4];$

3) $z = \mathrm{arctg}(x^2 - xy + y), \quad x, y \in [-5; 5],$

$z = x^2 e^{2y} - 2xy^2 + y - 10, \quad x \in [2; 3], \ y \in [1;\ 2];$

13. დაყავით გრაფიკული ფანჯარა 1×3 ზომის ნაწილებად და განათავსეთ მასში მოცემული ფუნქციების გრაფიკები:

1) $z = x^2 \cos^2 y - x \ln y - 3y - 5x - 9, \quad x \in [-2; 2], \ y \in [1; 5],$

$z = (x^2 + xy)\cos\frac{x}{y}, \quad x \in [0;\ 3], \ y \in [1; 4],$

$z = x^3 \cos y^2 - x^2 \sin(y - 1) + 3y - 5x + 3, \quad x, y \in [-4; 4];$

2) $z = \sqrt{x^3 + y^3 - 3xy}, \quad x, y \in [3; 5],$

$z = \sin x + \sin y + \cos(x + y), \quad x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$

$z = \sin x \sin y \sin(x + y), \quad x, y \in [0; \pi].$

14. ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ გამოყენებით (ezsurf, ezmesh):

1) $z = \sin x + \sin y + \cos(x - y);$

2) $z = \sin x \sin y \sin(x - y);$

3) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y;$

4) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1;$

5) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x;$

6) $z = \ln \mathrm{tg}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right);$

7) $z = x^5 \operatorname{tg}(3y) - x^3y^2 - (1-x)e^y + 1$;

8) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$;

9) $z = x^2e^{2y} - y^2e^{2x}$;

10) $z = y \sin y - \cos(x - y)$;

11) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} - 4 \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

12) $z = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$;

13) $z = e^{-x^2-y^2}(4x^2 + 5y^2)$;

14) $z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$;

15) $z = \sqrt{|xy|}$.

15. გამოსახეთ მოცემული ფუნქცია ვერტიკალური, ჰორიზონტალური, ფართობის, საფეხურებიანი და ღეროვანი დიაგრამებით:
$y = 2x^2 - 3x + 1,\ \ x \in [-1,1]$, ბიჯით $h = 0,2$.

16. ააგეთ ბრტყელი და მოცულობითი წრიული დიაგრამები:
$y = 4\cos x - 3\sin x,\ \ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ბიჯით $h = \dfrac{\pi}{15}$.

17. მოცემულია ვექტორი: [6,12,15,19,27]. დახაზეთ შესაბამისი ბრტყელი და მოცულობითი წრიული დიაგრამები. გამოყავით და წინ წამოწიეთ მეხუთე სექტორი.

18. ააგეთ ღეროვანი და სივრცითი დიაგრამები stem3 და scatter3 ბრძანებების გამოყენებით:
$x = 7(t - \sin t),\ \ y = 7(1 - \cos t),\ \ z = -7(1 - \sin t),\ \ t \in [0,12]$,
ბიჯით $h = 0.2$.

19. ააგეთ მარტივი სივრცითი დიაგრამა: $z = [2,6,9]$.

20. ააგეთ მატრიცული სივრცითი დიაგრამა: $z = [3,5,7; 1,2,3]$.

7. კოორდინატთა გარდაქმნა

ჩვენ ხშირად საქმე გვაქვს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა (x, y) სისტემასთან სიბრტყეზე და (x, y, z) სისტემასთან სივრცეში, პოლარულ (θ, ρ) კოორდინატებთან სიბრტყეზე, (θ, ρ, z) ცილინდრულ კოორდინატებთან და სფერულ (θ, φ, ρ) კოორდინატებთან სივრცეში. ზოგჯერ საჭირო ხდება კოორდინატთა ერთი სახიდან მეორეზე გადასვლა. MATLAB-ში კოორდინატთა გარდაქმნას ახდენს cart2, pol2, sph2 ფუნქციები.

[theta, ro] = cart2pol(x,y)	დეკარტის x და y კოორდინატები გადაჰყავს პოლარულ (θ, ρ) კოორდინატებში, სადაც $theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, (კუთხე გამოდის რადიანებში), $ro = \sqrt{x^2 + y^2}$.
[theta, ro, z] = cart2pol(x,y, z)	დეკარტის (x, y, z) კოორდინატები გადაჰყავს ცილინდრულ (θ, ρ, z) კოორდინატებში, სადაც $theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$, (კუთხე გამოდის რადიანებში), $ro = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z$.
[theta, phi, ro] = cart2sph(x,y, z)	დეკარტის (x, y, z) კოორდინატები გადაჰყავს სფერულ (θ, φ, ρ) კოორდინატებში, სადაც $theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$, $phi = \mathrm{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $ro = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (კუთხეები გამოდის რადიანებში).
[x,y] = pol2cart(theta, ro)	პოლარული კოორდინატები გადაჰყავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში (კუთხე მიეწოდება რადიანებში).

[x,y,z] = pol2cart(theta,ro,z)	ცილინდრული კოორდინატები გადაჰყავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში (კუთხე მიეწოდება რადიანებში).
[x,y,z] = sph2cart(theta,phi,ro)	სფერული კოორდინატები გადაჰყავს დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში (კუთხეები მიეწოდება რადიანებში).

მაგალითები

1. წერტილი $M(3,5)$ გადავიყვანოთ პოლარულ კოორდინატებში.

```
>> [theta,ro] = cart2pol(3,4)
theta =
      0.9273
ro =
      5
```

2. წერტილი $(3,4,-5)$ გადავიყვანოთ ცილინდრულ და სფერულ კოორდინატებში.

```
>> [theta,ro,z] = cart2pol(3,4,−5)
theta =
       0.9273
ro =
       5
z =
      −5
```

3. წერტილი $M\left(\frac{\pi}{4},5\right)$ გადავიყვანოთ დეკარტის კოორდინატებში.

```
>> [x,y] = pol2cart(pi/4,5)
x =
    3.5355
```

y =
    3.5355

4. $M\left(\frac{\pi}{4},7,5\right)$ გადავიყვანოთ დეკარტის კოორდინატებში.

```
>> [x,y,z] = pol2cart(pi/4,7,5)
x =
    4.9497
y =
    4.9497
z =
     5
```

5. $M\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},5\right)$ გადავიყვანოთ დეკარტის კოორდინატებში.

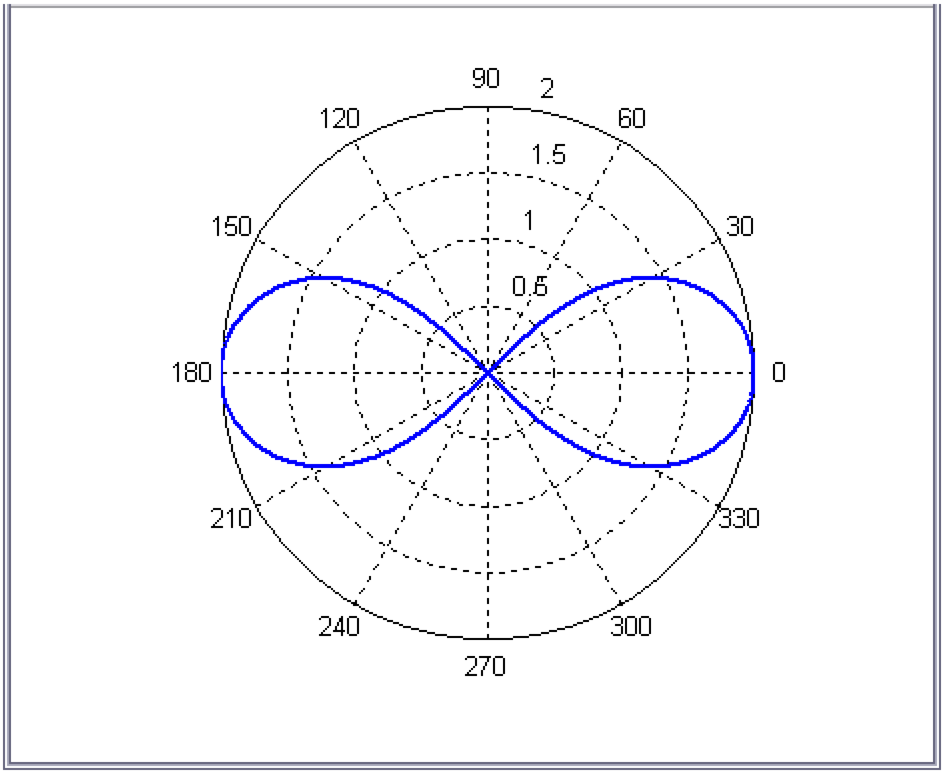
```
>> [x,y,z] = sph2cart(pi/4,pi/3,5)
x =
  1.7678
y =
  1.7678
z =
  4.3301
```

6. მოცემულია მრუდის განტოლება დეკარტის კოორდინატებში

$$y = \pm\sqrt{\frac{-(2x^2+4)+2\sqrt{8x^2+4}}{2}}.$$

გადაიყვანეთ პოლარულ კოორდინატებში და ააგეთ გრაფიკი.

```
>> x = linspace(-2,2,500);
>> y1 = sqrt((-(2*x.^2 + 4) + 2*sqrt(8*x.^2 + 4))/2);
>> y2 = -y1;
>> [theta1,ro1] = cart2pol(x,y1);
>> [theta2,ro2] = cart2pol(x,y2);
>> h1 = polar(theta1,ro1)
>> set(h1,'LineWidth',2);   hold on
>> h2 = polar(theta2,ro2)
>> set(h2,'LineWidth',2);
```



სავარჯიშოები

დეკარტის კოორდინატებში მოცემული ფუნქცია გადაიყვანეთ პოლარულ კოორდინატებში და ააგეთ გრაფიკი:

1. $y = \pm\sqrt{\frac{-(2x^2+9)+\sqrt{12x^3+36x^2+81}}{2}}, \quad x \in [0,4];$

2. $y = \pm\sqrt{-x^2+2x\sqrt{2x}}, \quad x \in [-4,4];$

3. $y = \pm\sqrt{6x-x^2} \qquad x \in [0,3];$

4. $x = \pm\sqrt{8y-y^2}, \qquad y \in [0,4].$

8. ფუნქციათა ინტერპოლაცია

ვთქვათ მოცემულია x არგუმენტის $x_0, x_1, \dots x_n$ მნიშვნელობები. $y = f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებში იყოს $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$.

x_1	…	x_n
y_1	…	y_n

საჭიროა ავაგოთ ისეთი $\varphi(x)$ ფუნქცია, რომელიც დააკმაყოფილებს პირობებს:

$$\varphi(x_1) = y_1, \dots, \varphi(x_n) = y_n.$$

გეომეტრიულად ეს ნიშნავს ისეთი $\varphi(x)$ წირის აგებას, რომელიც გადის $(x_1,\ y_1), \dots, (x_n,\ y_n)$ წერტილებზე. ასეთი $\varphi(x)$ წირი შეიძლება იყოს უამრავი. ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ ფუნქციათა ისეთი კლასი, რომლის ერთადერთი $\varphi(x)$ ფუნქცია დააკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს.

ეს ამოცანა ცალსახა აღმოჩნდება, თუ $\varphi(x)$ ფუნქციად განვიხილავთ $P(x)$ პოლინომს, რომლის ხარისხი არ აღემატება n-ს, ე.ი.

$$P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n.$$

ასეთ ამოცანას პოლინომური ინტერპოლაციის ამოცანა ეწოდება, $P(x)$ პოლინომს – საინტერპოლაციო პოლინომი x_0, $\dots x_n$ კვანძების მიმართ. ამრიგად ინერპოლაციის ძირითადი იდეა ის არის, რომ ცხრილით მოცემული ფუნქცია შევცვალოთ $P(x)$ პოლინომით, რომელიც $f(x)$ ფუნქციის მიახლოებით ანალიზურ გამოსახულებას წარმოადგენს.

მტკიცდება, რომ არსებობს ერთადერთი $P(x)$ პოლინომი, რომლის ხარისხი არ აღემატება კვანძების რაოდენობას და რომელიც დააკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს $P_n(x_i) = y_i$.

MATLAB პროგრამა ინტერპოლაციის ამოცანების გადასაწყვეტად შეიცავს შესაბამის ფუნქციებს. ყველაზე მარტივი ინტერპოლაციის ხერხი, რომელიც პროგრამაშია, არის მიახლოება უმცირეს კვადრატთა მეთოდით.

ბრძანების სინტაქსი ასე გამოიყურება:

$>> \mathrm{x} = [\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}];$

$>> y = [y_1, y_2, \dots, y_n];$

$>> P_n = \text{polyfit}(x, y, n)$

n იმ მრავალწევრის ხარისხია, რომლითაც ხდება ფუნქციის აპროქსიმაცია – მიახლოება.

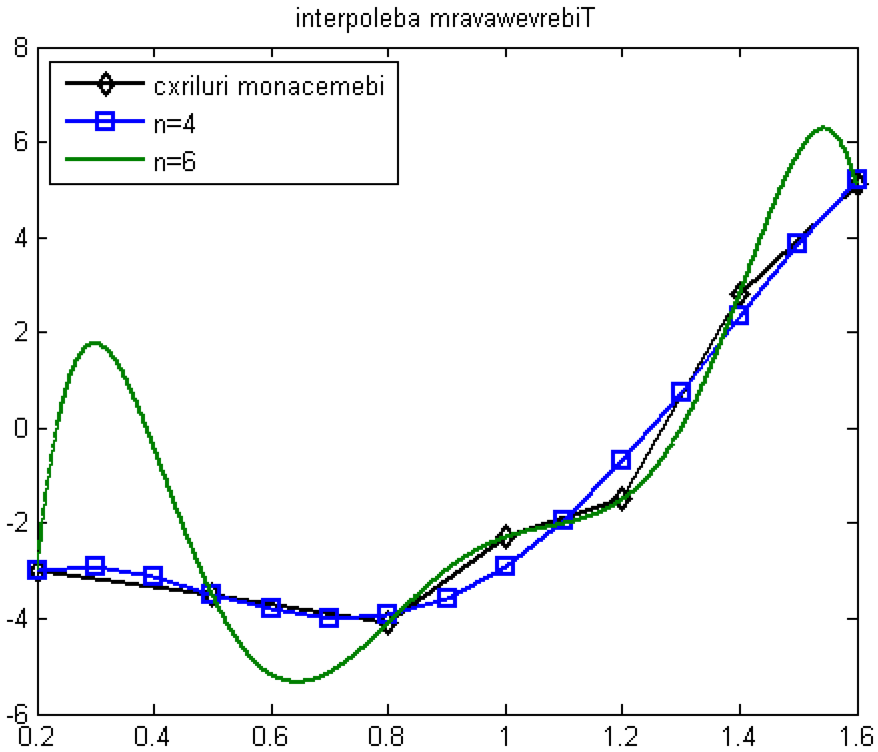
მაგალითები

1. ვთქვათ ფუნქცია მოცემულია ცხრილის სახით:

x_i	0,2	0,5	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
y_i	−3	−3,5	-4,1	-2,3	-1,5	2,8	5,1

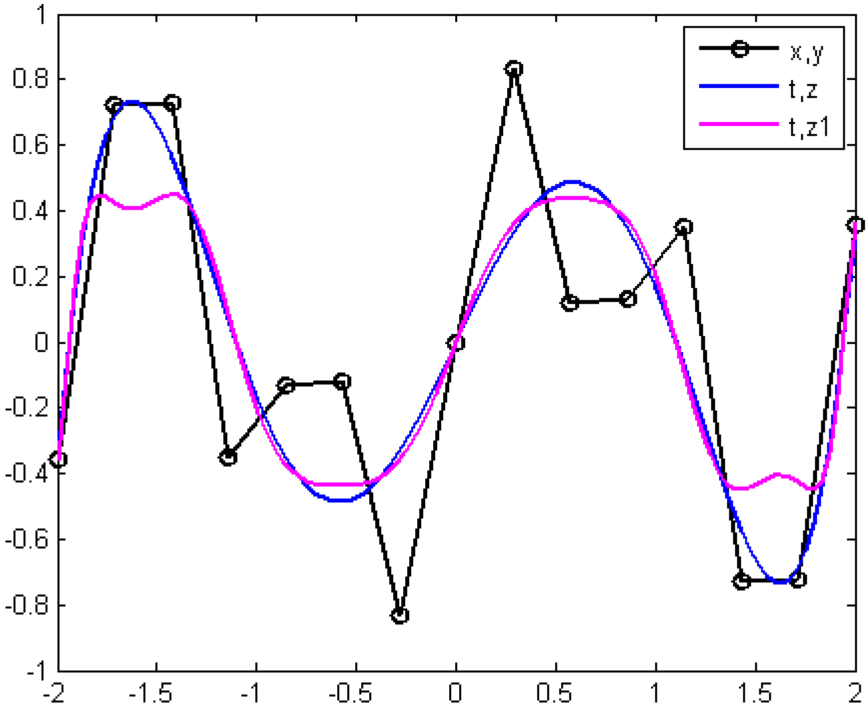
შევადგინოთ პროგრამა მეოთხე და მეექვსე ხარისხის მრავალწევრებით მიახლოებისათვის.

```
>> x = [0.2 0.5 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6];
>> y = [−3 − 3.5 − 4.1 − 2.3 − 1.5 2.8 5.1];
>> figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
>> plot(x,y,'k − d','LineWidth',2)
>> p4 = polyfit(x,y,4);
>> p6 = polyfit(x,y,6);
>> t = 0.2:0.1:1.6;
>> t1 = 0.2:0.001:1.6;
>> p4 = polyval(p4,t);
>> p6 = polyval(p6,t1);
>> hold on
>> p = plot(t,p4,'− s',t1,p6);
>> set(p,'LineWidth',1.5)
>> legend('cxriluri monacemebi','n = 4','n = 6')
>> title('interpoleba mravawevrebiT')
```



2. მოვახდინოთ [-2, 2] შუალედში მოცემული $y = \sin 5x \cos 2x$ ფუნქციის ინტერპოლება მეექვსე და მეცხრე ხარისხის მრავალწევრებით.

```
>> x = linspace(-2,2,15);
>> y = sin(5*x).*cos(2*x);
>> figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
>> plot(x,y,'k-o','LineWidth',1.5)
>> hold on
>> p = polyfit(x,y,6);
>> t = linspace(-2,2,100);
>> z = polyval(p,t);
>> plot(t,z,'b-','LineWidth',1.5)
>> p1 = polyfit(x,y,9);
>> z1 = polyval(p1,z);
>> plot(t,z1,'m-','LineWidth',1.5)
>> hold off
>> legend ('x,y','t,z','t,z1')
```



ინტერპოლაცია სპლაინებით

ფუნქცია interp1 საშუალებას იძლევა მოვახდინოთ ინტერპოლაცია:

ა) მეზობელი ელემენტებით – 'nearest';

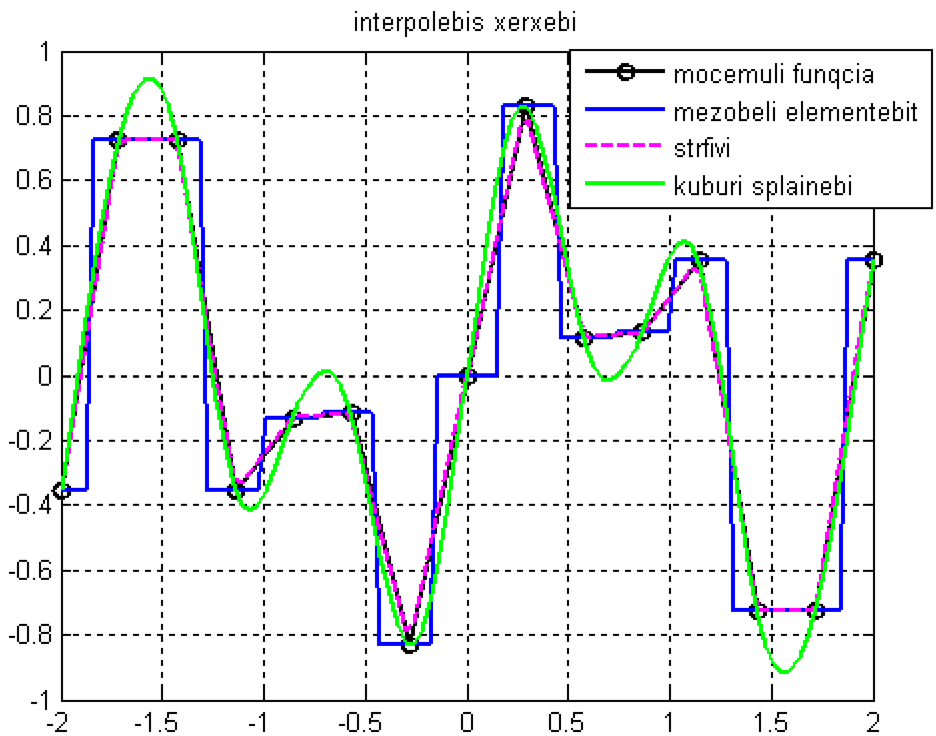
ბ) წრფივი ინტერპოლებით – 'linear';

გ) ინტერპოლაცია კუბური სპლაინებით (უფრო გლუვი ფუნქციის მისაღებად) – 'spline'.

3. მოვახდინოთ [-2, 2] შუალედში მოცემული $y = \sin 5x \cos 2x$ ფუნქციის ინტერპოლება მეზობელი ელემენტებით, წრფივი ინტერპოლებით, კუბური სპლაინებით.

```
>> x = linspace(−2,2,15);
>> y = sin(5 ∗ x).∗ cos(2 ∗ x);
```

```
>> t = linspace(−2,2,100);
>> y1 = interp1(x,y,t,'nearest');
>> y2 = interp1(x,y,t,'linear');
>> y3 = interp1(x,y,t,'spline');
>> plot(x,y)
>> hold on
>> plot(t,y1)
>> hold on
>> plot(t,y2)
>> hold on
>> plot(t,y3)
>> title('interpolebis xerxebi')
>> grid on
>> legend('mocemuli funqcia', 'mezobeli elementebit', ...
    'strfivi','kuburi splainebi')
```



ორგანზომილებიანი ინტერპოლაცია

მისი შესაბამისი ბრძანებაა interp2. იგი ახდენს ინტერპოლაციის ერთ-ერთი ხერხის რეალიზაციას.

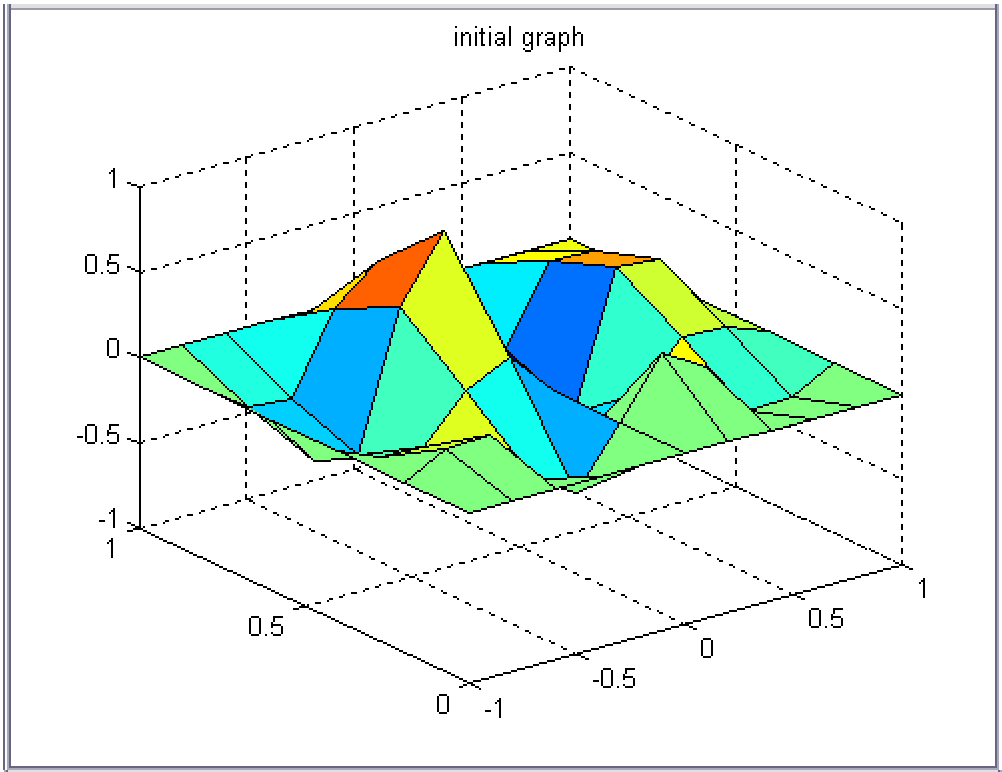
ა) მეზობელი ელემენტებით – 'nearest';

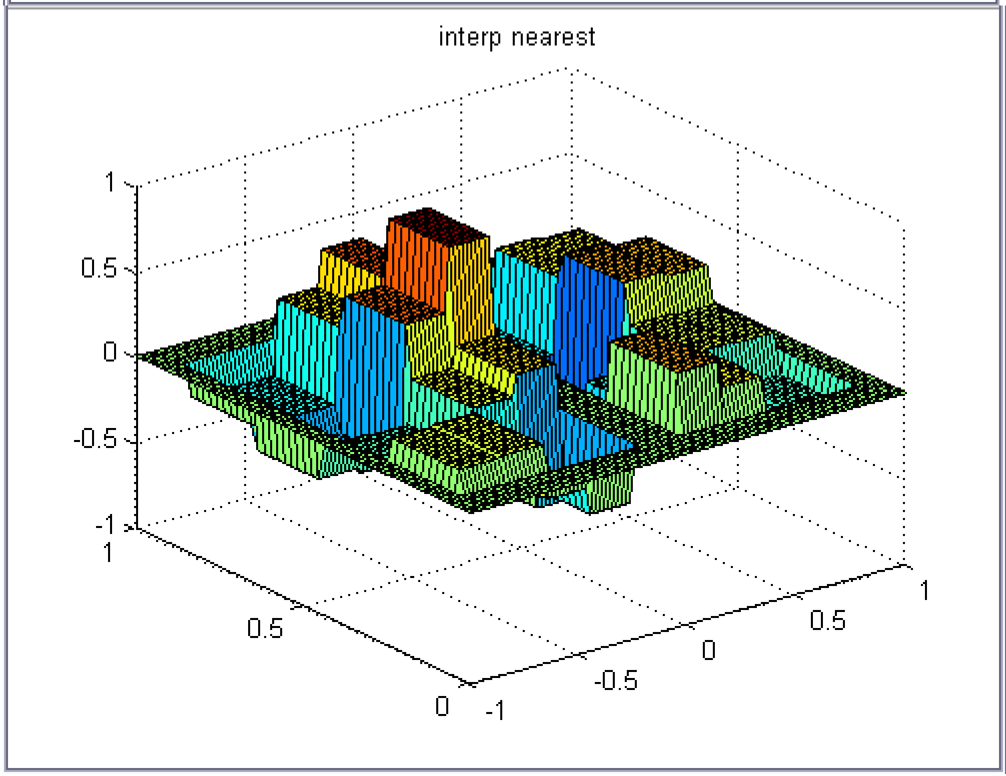
ბ) ბიწრფივი ინტერპოლებით – 'bilinear';

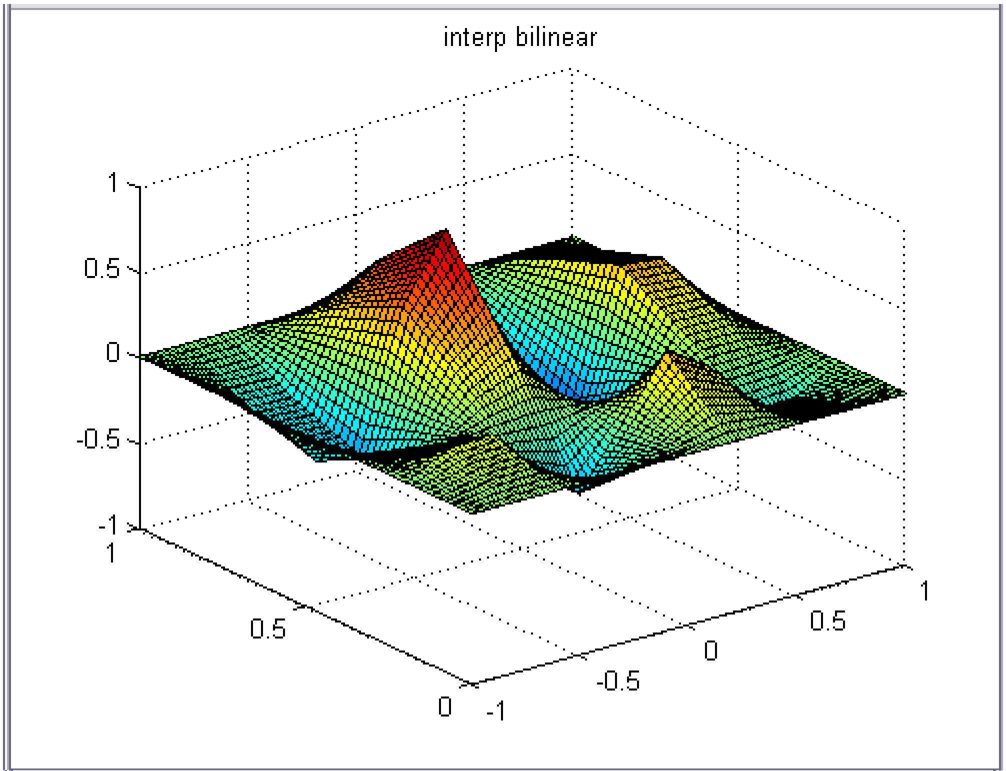
გ) ინტერპოლაცია ბიკუბური სპლაინებით (უფრო გლუვი ფუნქციის მისაღებად) – 'bicubic'.

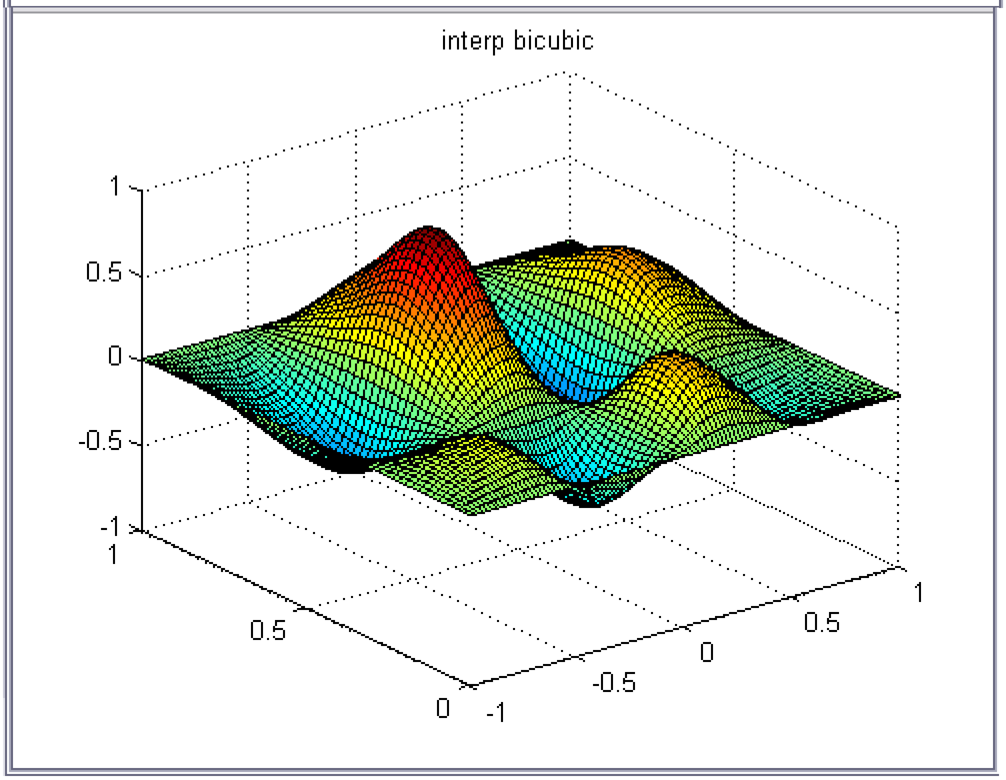
4. მოვახდინოთ $z = 4\sin 2\pi x \cos 1{,}5\pi y\,(1 - x^2)y(1 - y)$ ფუნქციის ინტერპოლება ყველა ხერხით.

```
>> figure1 = figure('Color',[1 1 1]);
>> [X,Y] = meshgrid(-1:0.2:1,0:0.2:1);
>> Z = 4*sin(2*pi*X).*cos(1.5*pi*Y).*(1-X.^2).*Y.*(1-Y);
>> surf(X,Y,Z); title('initial graph');
>> [X1,Y1] = meshgrid(-1:0.02:1,0:0.02:1);
>> figure2 = figure('Color',[1 1 1]);
>> Z1 = interp2(X,Y,Z,X1,Y1,'nearest');
>> surf(X1,Y1,Z1); title('interp nearest');
>> figure3 = figure('Color',[1 1 1]);
>> Z2 = interp2(X,Y,Z,X1,Y1,'bilinear');
>> surf(X1,Y1,Z2); title('interp bilinear');
>> figure4 = figure('Color',[1 1 1]);
>> Z3 = interp2(X,Y,Z,X1,Y1,'bicubic');
>> surf(X1,Y1,Z3); title('interp bicubic');
```


initial graph
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1


interp nearest
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1


interp bilinear
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1


interp bicubic
1
0.5
0
-0.5
-1
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1

სავარჯიშოები

1. ცხრილის სახით მოცემულია ფუნქცია:

x	-5	-4	-2.2	-1	0	1	2.2	4	5	6	7	
y	0.1	0.2	0.8	2.6	3.9	5.4	3.6	2.2	3.3	6.7	8.9	

პირველი, მესამე, მეოთხე და მეათე ხარისხების პოლინომებით ინ-ტერპოლაციის შემდეგ ააგეთ გრაფიკები.

2. მოცემულია წერტილები:

x	1.235	1.246	1.260	1.269	1.284	1.305
y	0.3295	0.3191	0.3058	0.2972	0.2829	0.2627

მეორე, მეოთხე, მეექვსე ხარისხების პოლინომებით ინტერპოლაციის შემდეგ ააგეთ გრაფიკები, იპოვეთ y-ის მნიშვნელობები წერტილებში $x = 1.244,\ x = 1.265,\ x = 1.298.$

3. ჩინეთის პოპულაცია 1940 წლიდან 2000 წლამდე მოცემულია ცხრილში:

წელი	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
პოპულაცია (მილიონი)	537	557	682	826	981	1135	1262

შეასრულეთ მისი ინტერპოლაცია პირველი, მეორე ხარისხის მრავალ-წევრებით, ასევე წრფივი, მეზობელი წერტილებით, კუბური სპლაინე-ბით. თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ პოპულაცია 1955 წლისათვის. (1995 წელს იყო 614,4 მილიონი, რომელმა ინტერპოლაციამ მოგცათ უკეთესი მიახლოება?)

4. შეასრულეთ [a,b] შუალედზე მოცემული ფუნქციების ინტერპოლა-ცია მე-4, მე-6, მე-7 ხარისხების მრავალწევრებით, ასევე წრფივი, მე-ზობელი წერტილებით, კუბური სპლაინებით:

1) $y = 2\sin x + 3\ln(1+x) - 1, \quad [0,2];$
2) $y = e^{x^2} + \ln(1+x) - 1, \quad [1,3];$
3) $y = e^{x} - 3e^{-x} - 2x, \quad [-1,1];$
4) $y = 2x^2 + 2\sin^2 x - 5, \quad [0,\ 2];$
5) $y = 2\sin^2 x - 3\cos x + x - 1, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

5. მოცემულია ორი ცვლადის ფუნქციები. შეასრულეთ მათი ინტერპოლაცია ბიწრფივი, მეზობელი წერტილებით, ბიკუბური სპლაინებით, ნახაზები გამოიყვანეთ ცალ-ცალკე, შემდეგ კი ქვეგრაფიკებით (2 × 2).

1) $z = xe^{y}, \quad 0 \le x, y \le \pi;$
2) $z = e^{3x} + \cos 2xy, \quad -\pi \le x, y \le \pi;$
3) $z = x^2 \cos 4y, \quad -2 \le x, y \le 2;$
4) $z = 2\sin x + \cos 2y, \quad -\frac{\pi}{2} \le x, y \le \frac{17\pi}{6}.$

6. მოცემულია ცხრილი:

x	0.75	0.65	0.55	0.45	0.35
y	25	37	45	56	65
z	1.63	1.96	2.37	3.00	3.96

შეასრულეთ ინერპოლაცია მეზობელი წერტილებით, ბიწრფივი და ბიკუბური სპლაინებით.

9. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა, ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა

$\int_a^b f(x)dx$ განსაზღვრული ინტეგრალის სიმპსონის ფორმულით გამოთვლის სინტაქსს აქვს სახე:

$>>$ MyFun = @(x)f(x) (ანონიმური სახით ავაგეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია და მივანიჭეთ მას გასაღები MyFun, წერტილიანი მოქმედებების ნიშნებით).

$>>$ s = quad(MyFun, a, b)

ან ასე:

f(x) = Inline('f(x)') (Inline სახით ავაგეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია, წერტილიანი ოპერაციების ნიშნებით).

$\int_a^b f(x)\,dx$ განსაზღვრული ინტეგრალის ტრაპეციების ფორმულით გამოთვლის სინტაქსს კი აქვს სახე:

$>>$ x = linspace(a, b, n) (წარმოვადგინეთ x ცვლადი ცხრილის სახით).

$>>$ MyFun = @f(x) (ავაგეთ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია).

$>>$ y = MyFun(x) (წარმოვადგინეთ ფუნქციის მნიშვნელობები ცხრილის სახით).

$>>$ S = trapz(x,y) (ითვლის ინტეგრალს).

$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ ორჯერადი ინტეგრალის მიახლოებითი გამოთვლის სინტაქსს აქვს სახე:

$>>$ MyFun2@(x,y)f(x,y) (წერტილიანი მოქმედებათა ნიშნებით)

$>>$ dblquad(MyFun2, a, b, c, d)

შენიშვნა. $\int f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$-ის ანალიზური სახით გამოთვლა სიმბოლოებში იხ. 13, სიმბოლური მათემატიკა (Symbolic math toolbox).

განსაზღვრული ინტეგრალისა და ორჯერადი ინტეგრალის ზოგიერთი გამოყენება

1. ბრტყელი ფიგურის ფართობი:

ა) $S = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right|$, მრუდი მოცემულია დეკარტის კოორდინატებში, $y = f(x)$;

ბ) $S = \left| \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big) dx \right|$;

გ) $S = \dfrac{1}{2} \int_a^b \rho^2(\varphi) d\varphi$, მრუდი მოცემულია პოლარულ კოორდინატებში, $r = \rho(\varphi\,)$.

2. ბრუნვითი სხეულის მოცულობა

ა) $V_{ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx, \qquad y = f(x);$

ბ) $V_{oy} = \pi \int_c^d g^2(y) dy\,, \qquad x = g(y);$

$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b x f(x) dx\,, \qquad y = f(x);$$

გ) $V = \dfrac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi, \quad r = \rho(\varphi).$

3. $X = f(x)$ ძალის მიერ $[a, b]$ სეგმენტზე **შესრულებული მუშაობა**

$$W = \int_a^b f(x) dx.$$

4. თუ ბრტყელი ფიგურა შემოსაზღვრულია $y = f(x)$ წირით, ox ღერძით და $x = a$, $x = b$ წრფეებით, მაშინ მისი M_x და M_y **სტატიკური მომენტები** ox და oy ღერძების მიმართ გამოითვლება ფორმულებით:

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx, \qquad M_y = \int_a^b xydx.$$

ამავე ფიგურის **სიმძიმის ცენტრის** კოორდინატებია:

$$X_c = \int_a^b xydx \Big/ \int_a^b ydx, \qquad Y_c = \int_a^b y^2 dx \Big/ 2\int_a^b ydx.$$

5. თუ ერთგვაროვანი ფირფიტა შემოსაზღვრულია უწყვეტი $y = f(x)$, $y = g(x)$ წირებით, $x = a$, $x = b$ წრფეებით და $f(x) \geq g(x)$, მაშინ **სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები** განისაზღვრება ფორმულებით:

$$X_c = \int_a^b x(f(x) - g(x))dx \Big/ \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx,$$
$$Y_c = \left| \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx \Big/ \left(2\int_a^b (f(x) - g(x))dx\right) \right|.$$

6. თუ სექტორი შემოსაზღვრულია $r = \rho(\varphi)$ წირითა და $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ პოლარული რადიუსებით, მაშინ მისი **სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები** გამოითვლება ფორმულებით:

$$X_c = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \cos\varphi \, d\varphi \Big/ \left(3\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi\right),$$
$$Y_c = 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^3 \sin\varphi \, d\varphi \Big/ \left(3\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi\right).$$

7. თუ წერტილი მოძრაობს რაიმე წირის გასწვრივ და მისი სიჩქარის აბსოლუტური სიდიდეა $v = f(t)$, მაშინ დროის $[t_1, t_2]$ მონაკვეთის განმავლობაში მის მიერ **გავლილი მანძილი** გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

8. თუ მოცემულია ბრტყელი ფიგურა D და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $f(x,y)$ ფუნქცია, მაშინ ამ D ფიგურის მასა იქნება:

$$m = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები იქნება:

$$X_c = \frac{\iint_D xf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}, \qquad Y_c = \frac{\iint_D yf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}.$$

ინერციის მომენტი x და y ღერძების მიმართ:

$$I_x = \iint\limits_D y^2 f(x,y)dxdy, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2 f(x,y)dxdy.$$

ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ:

$$I_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)f(x,y)dxdy = I_x + I_y.$$

თუ D ფიგურა ერთგვაროვანია, $f(x,y)$ მუდმივია, მაშინ

$$x_c = \iint\limits_D xdxdy \Big/ \iint\limits_D dxdy, \quad y_c = \iint\limits_D ydxdy \Big/ \iint\limits_D dxdy.$$

9. თუ მილში მიედინება $f = f(x,y)$ სიმკვრივის სითხე, მილის განივკვეთში $v = v(x,y)$ სიჩქარით გამდინარე სითხის ნაკადი გამოითვლება ფორმულით:

$$\iint\limits_D f(x,y)\, v(x,y)\, dxdy, \quad D \text{ განხილული კვეთაა.}$$

მაგალითები

1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$S = \int_1^3 (\sin(x^2) - 2\cos(\ln x))dx$$

სიმპსონის ფორმულით (ფუნქცია quad) $\varepsilon = 10^{-10}$ სიზუსტით.

```
>> f = @(x)sin(x.^2) - 2 * cos(log(x));
>> format long
>> s = quad(f,1,3,1e - 10)
s =
   -2.572934168308510
```

2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$T = \int_1^3 (x^2 \sin(x-1))dx$$

ტრაპეციების მეთოდით.

```
>> x = linspace(1,3,2000);
>> y = x.^2 .* sin(x - 1);
>> s = trapz(x,y);
s =
    7.368812476048617
```

3. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი

$$T = \int_{0,5}^3 (3^{\sqrt{x}} \sin(\cos x))dx$$

ტრაპეციების და სიმპსონის მეთოდით. შეადარეთ შედეგები.

```
>> x = linspace(0.5,3,2000);
>> y = 3.^sqrt(x) .* sin(cos(x));
>> s1 = trapz(x,y)
s1 =
    -3.010003509827373
>> f = @(x)3.^sqrt(x).* sin(cos(x));
>> s2 = quad(f,0.5,3)
s2 =
    -3.010003127919410
```

$>> \ s = s2 - s1$
$s \ =$
$3.819079634759248e - 07$

4. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\int_0^1 \left(\int_2^4 x^2 \sqrt{y}\, dx \right) dy.$$

$>> f \ = \ @(x,y) \ x.^\wedge 2 \ .* \ sqrt(y);$
$>> s \ = \ dblquad(f,2,4,0,1)$
$s \ =$
12.4444

5. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი

$$M = \int_{-1}^{2} \left(\int_1^4 \sin(x^2 - 2y^2)\, dx \right) dy$$

$\varepsilon = 10^{-8}$ სიზუსტით.

$>> f \ = \ @(x,y) \ sin(x.^\wedge 2 \ - \ 2 \ * \ y.^\wedge 2);$
$>> s \ = \ dblquad(f,1,4,-1,2,1e-8);$
$s \ =$
0.83452034

6. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც მოთავსებულია $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ და $y = \dfrac{x^2}{2}$ წირებს შორის, $-1 \le x \le 1$.

$>> f \ = \ @(x)1./(1 + x.^\wedge 2) \ - \ x.^\wedge 2/2;$
$>> s \ = \ quad(f,-1,1)$
$s \ =$
1.23746300

7. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $r = 5(1 + \cos\varphi)$ კარდიოიდით.

$>> f \ = \ @(x)25/2 * (1 + cos(x)).^\wedge 2;$
$>> s \ = \ quad(f,0,2 * pi)$

s =
$1.17809724e + 02$

8. გამოთვალეთ $y = \sin x$ და $y = 0$ წირებით შემოსაზღვრული ფიგურის ox და oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობები, $0 \le x \le \pi$.

```
>> f = @(x)sin(x).^2;
>> Vox = pi*quad(f,0,pi)
Vox =
   4.93480220
>> f1 = @(x)x.*sin(x);
>> Voy = 2*pi*quad(f1,0,pi)
Voy =
   19.73920880
```

9. იპოვეთ $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ ლემნისკატით შემოსაზღვრული ფიგურის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

```
>> f = @(x)8*sqrt(cos(2*x)).^3.*sin(x);
>> V = 4*pi/3*quad(f,0,pi/4)
V =
   3.64289164
```

10. მოცემულია ბრტყელი ფიგურა $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $f(x,y) = x\sin(x + y)$ ფუნქცია. იპოვეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები X_c, Y_c.

```
>> f = @(x,y)x.*sin(x+y);
>> fx = @(x,y)x.^2.*sin(x+y);
>> fy = @(x,y)x.*y.*sin(x+y);
>> m = dblquad(f,0,pi,0,pi/2);
>> x = dblquad(fx,0,pi,0,pi/2);
>> y = dblquad(fy,0,pi,0,pi/2);
>> Xc = x/m
```

```
>> Yc = y/m
Xc =
    −0.36228409
Yc =
    −0.18114210
```

სავარჯიშოები

1. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

1) $\int_0^1 \frac{1}{0{,}8x^2+0{,}5x+2}\,dx$;

2) $\int_0^{\pi} \cos^2(0{,}5x)\sin^4(0{,}5x)\,dx$;

3) $\int_0^1 \left(x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\,dx$;

4) $\int_2^{3{,}6} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$;

5) $\int_0^{1{,}44} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,dx$;

6) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{3\sin x+2\cos x}\,dx$;

7) $\int_{-1{,}2}^{0} \frac{\lg(\sqrt{4-x}+\sqrt{x^2+1})}{e^x}\,dx$;

8) $\int_{-1}^{0} x\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx$;

9) $\int_0^{1{,}2} \frac{\sqrt[3]{x+4}+\sin x}{1+\cos x^2}\,dx$;

10) $\int_{1{,}28}^{2{,}56} \frac{x^2+\sin\sqrt{x}}{2+\cos x}\,dx$.

2. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

1) $$\int_0^1\left(\int_2^3 x^3\sqrt{y+1}\,dx\right)dy;$$

2) $$\int_{-2}^4\left(\int_3^7 \cos(x^3+4y^6)\,dx\right)dy;$$

3) $$\iint_D (x^3+y^2)e^{x+y}dxdy, \quad D:\ x\in[1;3], y\in[2;4];$$

4) $$\iint_D x^2ye^{xy}dxdy, \quad D:\ x\in[0;1], y\in[0;2];$$

5) $$\iint_D x^2y\cos(xy^2)\,dxdy, \quad D:\ x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], y\in[0;2];$$

6) $$\iint_D \frac{ydxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad D:\ x\in[0;1], y\in[0;1];$$

7) $$\iint_D (x^4+1)^{y^2-y}dxdy, \quad D:\ x\in[0;2], y\in[0;2];$$

8) $$\iint_D \left(x^2-2\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy, \quad D:\ x\in[0;2], y\in[0;2].$$

3. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=x^2+4x$ პარაბოლითა და $y=x+4$ წრფით, $-4\le x\le 1$.

4. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=2-x^2$ და $y=\sqrt[3]{x^2}$ წირებით.

5. გამოთვალეთ $r=\dfrac{5}{\varphi}$ ჰიპერბოლური ხვიით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი $\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le 2\pi$.

6. გამოთვალეთ $r=4e^{\varphi}$ ლოგარითმული ხვიით შემოსაზღვრული ფიგურის ფართობი, $-\pi\le\varphi\le\pi$.

7. გამოთვალეთ $y=\dfrac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ წირებით, ox და oy ღერძების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობები.

8. გამოთვალეთ $r=9\sin\varphi$ ფიგურის პოლარული ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, $0\le\varphi\le\pi$.

9. იპოვეთ იმ ფიგურის სტატიკური მომენტები ox და oy ღერძების მიმართ და სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, რომელიც შემოსაზღვრულია $y=\dfrac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}})$ ჯაჭვწირით და $-3\le x\le 3$.

10. გამოთვალეთ $y^2=20x$ და $x^2=20y$ პარაბოლებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

11. გამოთვალეთ $r=2(1+\cos\varphi)$ კარდიოიდით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები, $0\le\varphi\le 2\pi$.

12. წერტილი მოძრაობს $v=te^{-0.01\,t}$ მ/წმ სიჩქარით. იპოვეთ მის მიერ გავლილი მანძილი მოძრაობის დაწყებიდან 8 წამის განმავლობაში.

13. მოცემულია ბრტყელი ფიგურა $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$, $0\le y\le 1$ და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $f(x,y)=\dfrac{y}{\cos xy}$ ფუნქცია. იპოვეთ ამ ფიგურის მასა და სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები x_c და y_c.

14. მოცემულია ბრტყელი ფიგურა $0\le x\le 1$, $1\le y\le 2$ და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $f(x,y)=x^2+y$ ფუნქცია. იპოვეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები, ინერციის მომენტები x და y ღერძების მიმართ I_x და I_y, ასევე ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

15. $0\le x\le\pi, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ განივკვეთის მილში მიედინება სითხე $f(x,y)=x\sin(x+y)$ სიმკვრივით და $v(x,y)=x^2+y$ სიჩქარით. იპოვეთ გამდინარე სითხის ნაკადი.

16. გამოთვალეთ $y^2=3x$ პარაბოლითა და $y=x$ წრფით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის კოორდინატები.

17. გამოთვალეთ $\rho=a\varphi$ არქიმედის ხვიითა და $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$ პოლარული რადიუსებით შემოსაზღვრული ფიგურის სიმძიმის ცენტრის დეკარტის კოორდინატები.

18. მატერიალური წერტილის სიჩქარეა $\delta = 0{,}1t^2$ მ/წმ. იპოვეთ მის მიერ გავლილი S მანძილი პირველი 10 წამის განმავლობაში.

19. მოცემულია ბრტყელი ფიგურა $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $f(x,y) = x^2 - y$ ფუნქცია. იპოვეთ ამ ფიგურის მასა.

20. მოცემულია ბრტყელი ფიგურა $3 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 2$ და მისი მასის განაწილების სიმკვრივის უწყვეტი $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ ფუნქცია. იპოვეთ ინერციის მომენტები x და y ღერძების მიმართ I_x და I_y, ასევე ინერციის მომენტი კოორდინატთა სათავის მიმართ.

21. $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 3$ განივკვეთის მილში მიედინება სითხე $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ სიმკვრივით და $v(x,y) = x^2 + y^2$ სიჩქარით. იპოვეთ გამდინარე სითხის ნაკადი.

10. ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნა

ა) ერთი ცვლადის $f(x)$ ფუნქციის მინიმუმებისა და მაქსიმუმების მოძებნას (a, b) ინტერვალში ემსახურება ფუნქცია:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{fval}] = \mathbf{fminbnd}(@\mathbf{fun}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$\mathbf{x} = \mathbf{fminbnd}(@\mathbf{fun}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ – პოულობს x არგუმენტის იმ მნიშვნელობას, რომელშიც ფუნქციას აქვს ლოკალური მინიმუმი (a, b) ინტერვალში. ამრიგად, x არის მინიმუმის წერტილის აბსცისა, ხოლო fval – ფუნქციის მნიშვნელობაა მინიმუმის წერტილში.

შეიძლება ვიხმაროთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$[\mathbf{xmin}, \mathbf{fmin}] = \mathbf{fminbnd}(\mathbf{f}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

მაქსიმუმის მოძებნისას ფუნქციის წინ ვწერთ მინუს ნიშანს და ვპოულობთ ამ ფუნქციის მინიმუმს და $f_{max} = -f_{min}$. (a,b) ინტერვალის დასადგენად მიზანშეწონილია გრაფიკის აგება.

ბ) ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური მინიმუმის მოძებნის სინტაქსი შემდეგია:

$$\mathbf{x} = \mathbf{fminsearch}(\mathbf{fun}, \mathbf{x0}) \quad \text{ან}$$

$$[\mathbf{x}, \mathbf{fval}] = \mathbf{fminsearch}(\mathbf{fun}, \mathbf{x0})$$

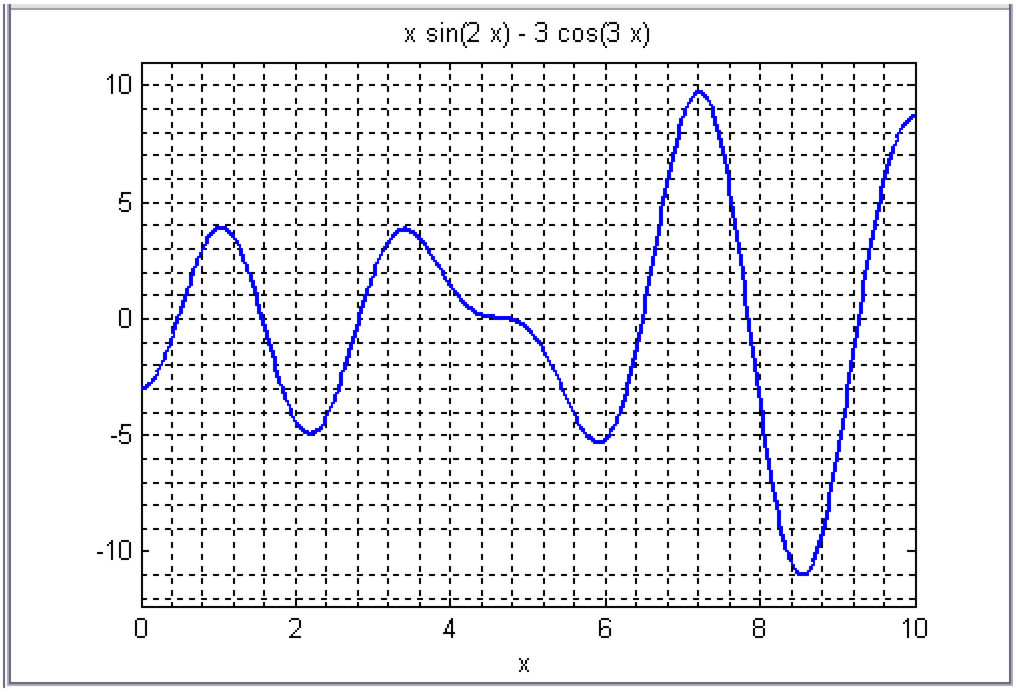
x არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო fval – ლოკალური მინიმუმი.

მაქსიმუმის მოძებნისას ფუნქციის წინ ვწერთ მინუს ნიშანს და ვპოულობთ ამ ფუნქციის მინიმუმს და $f_{max} = -f_{min}$.

მაგალითები

1. იპოვეთ $f(x) = x\sin 2x - 3\cos 3x$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმები და მაქსიმუმები [0,10] შუალედში.

```
>> ezplot('x * sin(2 * x) –  3 * cos(3 * x)', [0 10]);
>> grid('minor')
```



ნახაზიდან ჩანს, რომ ფუნქციის მინიმუმები მოთავსებულია შემდეგ ინტერვალებში: [2,3], [5,6], [8,9], ხოლო მაქსიმუმები კი მოთავსებულია [0,2], [3,4], [7,8] ინტერვალებში.

$>>\ f = @(x)\ x.*\sin(2*x) - 3*\cos(3*x);$

$>>\ f1 = @(x) - (x.*\sin(2*x) - 3*\cos(3*x));$

$>>\ [x, fval] = fminbnd(f, 2, 3)$

$x =$

2.1848

$fval =$

-4.9480

$>>\ [x, fval] = fminbnd(f, 5, 6)$

$x =$

5.9133

$fval =$

-5.3212

$>>$ $[x, fval] = fminbnd(f, 8, 9)$

$x =$

8.5424

$fval =$

-11.0229

$>>$ $f1 = @(x) - (x.* \sin(2 * x) - 3 * \cos(3 * x));$

$>>$ $[x, fval] = fminbnd(f1, 0, 2)$

$x =$

1.0416

$fval =$

-3.9074 , $\quad f_{max} = 3{,}9074$

$>>$ $[x, fval] = fminbnd(f1, 3, 4)$

$x =$

3.4048

$fval =$

$-3.8230,$ $\quad f_{max} = 3{,}8230$

$>>$ $[x, fval] = fminbnd(f1, 7, 8)$

$x =$

$7.2121,$

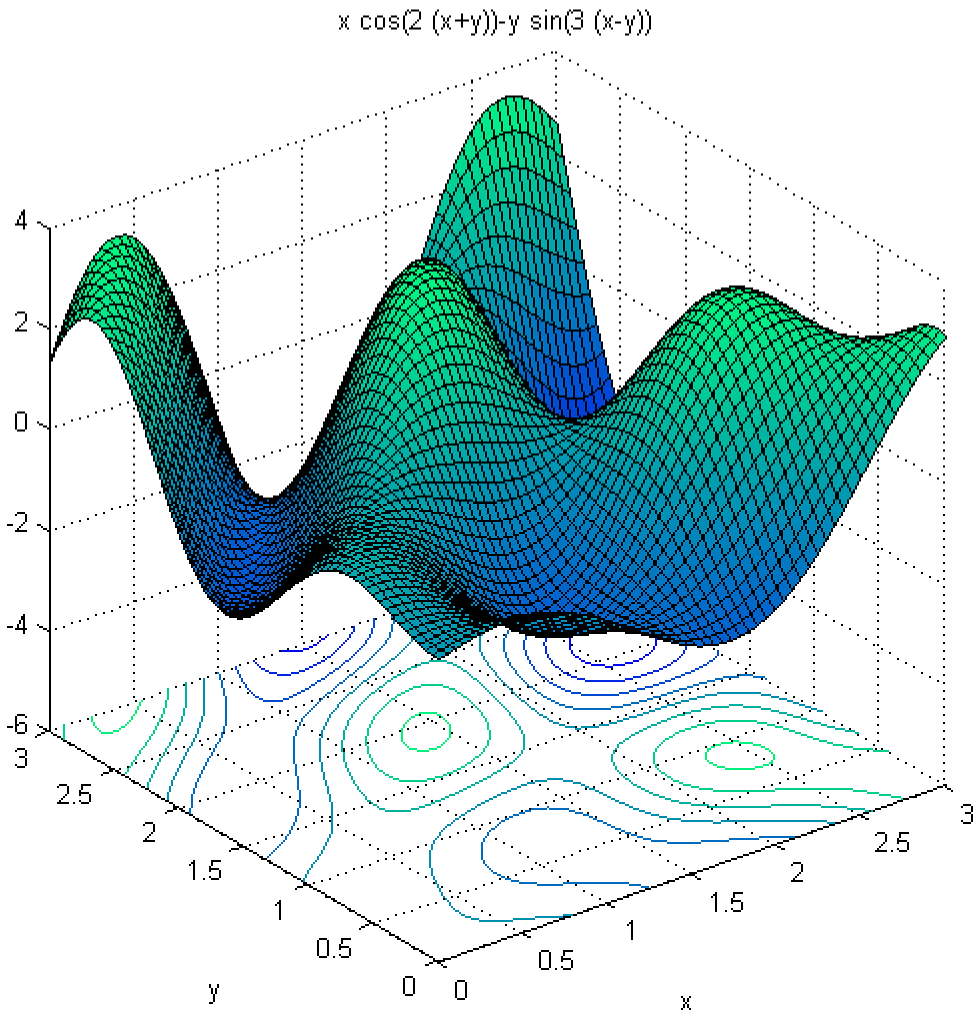
$fval =$

$-9.7301,$ $\quad f_{max} = 9{,}7301$

2. მოცემულია ფუნქცია $g(x,y) = x\cos 2(x+y) - y\sin 3(x-y)$. იპოვეთ ფუნქციის მინიმუმები და მაქსიმუმები $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3$ კვადრატში.

$>>$ $f = @(x,y)\ x .* \cos(2 * (x + y)) - y .* \sin(3 * (x - y));$

$>>$ $ezsurfc(f, [0\ 3\ 0\ 3]);$



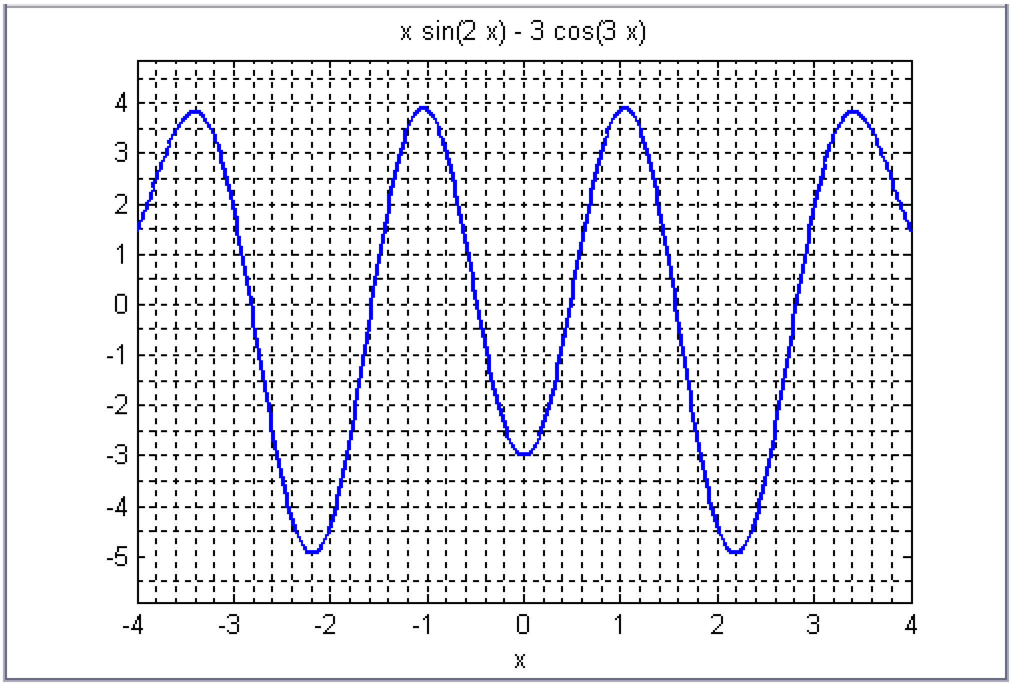

```
>> f1 = @(x) x(1) * cos(2 * (x(1) + x(2))) - x(2) * sin(3 * (x(1) - x(2)));
>> f2 = @(x) - (x(1) * cos(2 * (x(1) + x(2))) - x(2) * sin(3 * (x(1) -
                                                                  x(2))));
>> [x1,fmin1] = fminsearch(f1,[1.17,0.67])
x1 =
     1.1502   0.6345
fmin1 =
     -1.6809
>> [x2,fmin2] = fminsearch(f1,[2.65,2.14])
x2 =
     2.6646   2.1414
```

```
fmin2 =
    -4.7594
>> [x3,fmin3] = fminsearch(f2,[2.39,0.86])
x3 =
     2.4073    0.8378
fmin3 =
    -3.1937
>> [x4,fmin4] = fminsearch(f2,[1.42,1.93])
x4 =
     1.3966    1.9220
fmin4 =
     -3.2320
>> fmax1 = -fmin3;
fmax2 = -fmin4;
>> fmax1 = -fmin3
fmax1 =
    3.1937
>> fmax2 = -fmin4
fmax2 =
     3.2320
```

3. იპოვეთ $f(x) = x\sin 2x - 3\cos 3x$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმები და მაქსიმუმები $[-4, 4]$ შუალედში, იპოვეთ აბსოლუტური მაქსიმუმი ამ შუალედში.

```
a = -4; b = 4;
f = @(x) x.*sin(2*x) - 3*cos(3*x);
f1 = @(x) -(x.*sin(2*x) - 3*cos(3*x));
ezplot(f, [a b]);
grid on
h = (b - a) / 3;
xmin = zeros(1,3);
ymin = zeros(1,3);
for k = 1 : 3
[xmin(k), ymin(k)] = fminbnd(f,a + (k - 1)*h, a + k * h);
```

```
end
xmin,   ymin
xmax = zeros(1,4);   ymax = zeros(1,4);
h = (b − a) / 4;
for k = 1 : 4
[xmax(k),tmp] = fminbnd(f1,a + (k − 1) * h,a + k * h);
ymax(k) = −tmp;
end
xmax,   ymax
GlobMax = max([ymax f(a) f(b)])
```




```
xmin =
  −2.1848     0.0000     2.1848
ymin =
  −4.9480   − 3.0000   − 4.9480
xmax =
```

−3.4048   − 1.0416   1.0416   3.4048

ymax =

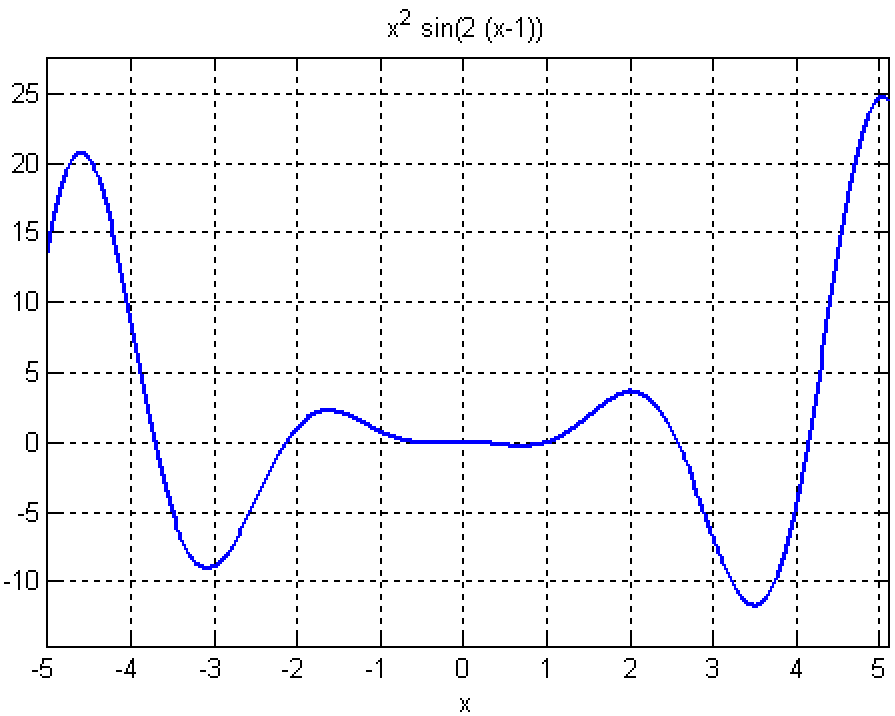
3.8230   3.9074   3.9074   3.8230

GlobMax =

3.9074

4. იპოვეთ $f(x) = x^2 \sin 2(x-1)$ ფუნქციის ლოკალური მინიმუმები და მაქსიმუმები $[-5, 5]$ შუალედში, იპოვეთ აბსოლუტური მინიმუმი.

```
a = −5; b = 5.1;
f = @(x) x.^2.* sin(2 * (x − 1));
f1 = @(x) − (x.^2.* sin(2 * (x − 1)));
ezplot(f, [a b]);
grid on
h = (b − a) / 4;
xmin = zeros(1,4);   ymin = zeros(1,4);
for k = 1 : 4
[xmin(k), ymin(k)] = fminbnd(f, a + (k − 1) * h, a + k * h);
end
xmin,  ymin
xmax = zeros(1,4);   ymax = zeros(1,4);
for k = 1 : 4
[xmax(k), tmp] = fminbnd(f1, a + (k − 1) * h, a + k * h);
ymax(k) = −tmp;
end
xmax,  ymax
GlobMin = min([ymin f(a) f(b)])
```



xmin =

−3.0838 − 0.3864 0.6960 3.4955

ymin =

−9.0460 − 0.0538 − 0.2767 − 11.7474

xmax =

−4.6047 − 1.6312 2.0156 5.0252

ymax =

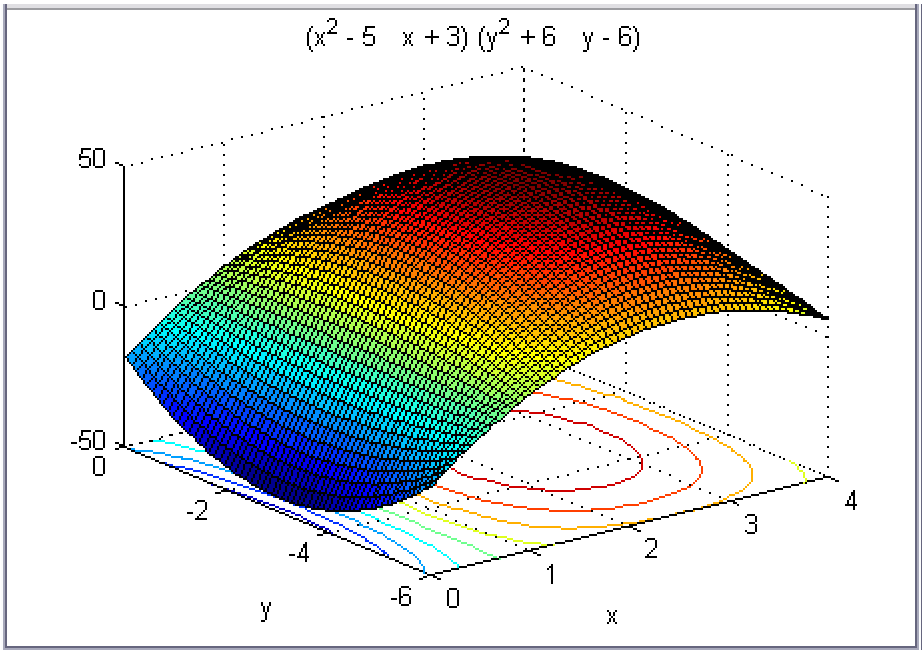
20.7204 2.2684 3.6396 24.7671

GlobMin =

−11.7474

5. მოცემულია ფუნქცია $g(x, y) = (x^2 - 5x + 3)(y^2 + 6y - 6)$. იპოვეთ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა $0 \leq x \leq 4$, $-6 \leq y \leq 0$ მართკუთხედში.

```
f = @(x,y) (x^2 − 5 * x + 3) * (y^2 + 6 * y − 6);
ezsurfc(f, [0 4 − 6 0]);
```




```
f1 = @(x) -(x(1)^2 - 5 * x(1) + 3) * (x(2)^2 + 6 * x(2) - 6);
[x,fval] = fminsearch(f1,[2.5,-3]); fmax = -fval
fmax =
    48.7500
```

სავარჯიშოები

იპოვეთ ფუნქციების ექსტრემუმები მითითებულ შუალედებში:

1. $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \quad [-5,5];$
2. $y = x + \cos 2x, \quad [0,\pi];$
3. $y = x \ln x\ , \quad [0{,}5; e];$
4. $y = x^2 e^{-x}, \quad [-1,3];$
5. $z = x^2 + 3xy - 15x - 12y, \quad x,y \in [-4,4];$
6. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^3+y^2)}, \quad x,y \in [-3,3];$
7. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)\ , \quad x,y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right];$
8. $z = x^4 + y^4 - 2x + 4xy - 2y^2, \quad x,y \in [-4,4];$
9. $z = x^3 + y^3 + 3xy, \quad x,y \in [-3,3];$
10. $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)\ , \quad x,y \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right];$
11. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27, \quad x,y \in [-4,4].$

11. წრფივი პროგრამირება

წრფივი დაპროგრამების ამოცანა შემდეგია: ვიპოვოთ ისეთი x ვექტორი, რომელიც ახდენს მიზნობრივი წრფივი $f(x)$ ფუნქციის მინიმიზაციას და აკმაყოფილებს მოცემულ წრფივ შეზღუდვებს $Ax \leq B$ უტოლობებისა და $A_1x = B_1$ წრფივი განტოლებების სახით. გარდა ამისა, შეიძლება მოცემული იყოს სხვა ორმხრივი შეზღუდვებიც $I_b \leq x \leq U_b$, თუმცა ოპტიმიზაციის ამოცანებში არაა სავალდებულო ყველა სახის შეზღუდვის არსებობა. მაგალითად, ტოლობებით გამოსახული შეზღუდვები შეიძლება არ მონაწილეობდეს.

ამრიგად, წრფივი პროგრამირების ამოცანა ასე გამოიყურება:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \text{ (მიზნის ფუნქცია)},$$

$$Ax \leq B,\ A_1x = B_1,$$

$$x \geq E_{1,}\ \ x \leq E_2,$$

სადაც A უტოლობებით მოცემული შეზღუდვების მარცხენა მხარის შესაბამისი მატრიცაა, B – მათი მარჯვენა მხარეების შესაბამისი სვეტმატრიცა, ანალოგიურად E_1 და E_2 – საძიებელი x ვექტორის დასაშვები მნიშვნელობების ქვედა და ზედა საზღვრებია.

წრფივი პროგრამირების ამოცანის ამოსახსნელად MATLAB-ი შეიცავს ფუნქციას linprog. მისი სინტაქსი ასე გამოიყურება:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{f_{min}}] = \mathbf{linprog(f, A, B, A_1, B_1, I_b, U_b}]$$

თუ რომელიმე შემავალი არგუმენტი არ გვაქვს, მის ადგილზე იწერება [ ]. თუ საძიებელია მაქსიმუმი, f ფუნქციის ნაცვლად იწერება $-f$; თუ შეზღუდვებში გვაქვს $Ax \geq B$, მაშინ უტოლობის ორივე მხარეს ვამრავლებთ (-1)-ზე და A-ს ნაცვლად ვწერთ $(-A)$-ს, ხოლო B-ს ნაცვლად $(-B)$-ს.

მაგალითები

მოვახდინოთ f მიზნის ფუნქციის ოპტიმიზაცია შესაბამისი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

1. $$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 12, \\ x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_1 - x_2 &\ge 3, \\ x_1 + 4x_2 &\ge 4, \end{aligned} \qquad f = 3x_1 + 2x_2 \to min.$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_1 \le 2, \quad x_2 \le 2.$$

რადგან უტოლობის შემცველ შეზღუდვებში უნდა გვქონდეს $Ax \le B$, ამიტომ მოცემული ამოცანა გადავწეროთ ასე:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 12, \\ x_1 + x_2 &\le 6, \\ -x_1 + x_2 &\le -3, \\ -x_1 - 4x_2 &\le -4, \end{aligned} \qquad f = 3x_1 + 2x_2 \to min.$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_1 \le 2, \quad x_2 \le 2.$$

ახლა ამოვწეროთ საჭირო მატრიცები:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad I_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

```
>> A = [-2 3;1 1;-1 1;-1 -4];      B = [12;6;-3;-4];
>> Ib = [0;0];
>> Ub = [2;2];
>> f = [3;2];
>> [x,fmin] = linprog(f,A,B,[ ],[ ],Ib,Ub)
x =
      3.1809
      0.7952
fmin =
      11.1332
```

2. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 440, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 &\le 65, \\ 2x_1 + 2{,}5x_2 &= 320, \\ x_1 + 3x_2 &= 150, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 &\ge 0, \end{aligned} \qquad f = 5x_1 + 12x_2 \to max.$$

```
>> f = [5;12];
>> A = [2 4; 0.5 0.25];      B = [440;65];
```

```
>> Aeq = [2 2.5; 1 3];
>> Beq = [320;150];
>> Ib = [0;0];
>> [x,fmax] = linprog(−f,A,B,Aeq,Beq,Ib,[ ])
 x =
      167.1429
       9.7561
fmax =
      −952.7875
```

3. ავეჯის დამამზადებელ ფირმას შეუკვეთეს ორი სახის სკამები. პირველი სახის სკამის დასამზადებლად 2 $მ^2$ სტანდარტული ფიცარი, 0,5 $მ^2$ გადასაკრავი ქსოვილი და 2 სთ სამუშაო დრო იხარჯება, ხოლო მეორე სკამის დასამზადებლად 4 $მ^2$ ფიცარი, 0,25 $მ^2$ ქსოვილი და 2,5 სთ დრო. პირველი სახის სკამი ღირს 8 ლარი, მეორე – 12 ლარი. როგორი სახის და რა რაოდენობის სკამები უნდა დაამზადოს ფირმამ 320 საათში, რომ მიიღოს მოგების მაქსიმუმი, თუ მოტანილია შემდეგი რაოდენობის მასალა: 440 $მ^2$ სტანდარტული ფიცარი და 65 $მ^2$ ქსოვილი.

ჩავწეროთ დასმული ეკონომიკური ამოცანა მათემატიკური ენით, ანუ შევადგინოთ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი და ვიპოვოთ მისი ოპტიმალური ამონახსენი. ვთქვათ, უნდა დამზადდეს I სახის x_1 რაოდენობის სკამი, ხოლო მეორე სახის − x_2 რაოდენობის.

	ფიცარი	ქსოვილი	დრო	რაოდენობა	ღირებულება
I	2	0,5	2	x_1	8
II	4	0,25	2,5	x_2	12
	440	65	320		

გვექნება:

$$\begin{gathered} 2x_1 + 4x_2 \leq 440, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \leq 65, \\ 2x_1 + 2{,}5x_2 \leq 320, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \end{gathered} \qquad f = 8x_1 + 12x_2 \to max.$$

```
>> f = [8;12];
```

```
>> A = [2 4; 0.5 0.25; 2 2.5];
>> B = [440;65;320];
>> Ib = [0;0];
>> [x,fmax] = linprog(−f,A,B,[ ],[ ],Ib,[ ])
x =
      60.0000
      80.0000
fmax =
   −1.4400e+003
```

4. სამკერვალო ფაბრიკამ უნდა შეკეროს სამი სახის პროდუქცია, სულ 300 ცალი. თითოეული ტიპის პროდუქცია არ უნდა იყოს 30-ზე ნაკლები, მათზე იხარჯება შესაბამისად 5, 6 და 2 მეტრის I ხარისხის ქსოვილი, სულ 840 მეტრი. საჭიროა აგრეთვე 3, 2, 1 მეტრი II ხარისხის ქსოვილი, საერთო რაოდენობით 650 მეტრი. თითოეული ტიპის რამდენი პროდუქცია უნდა შეკეროს ფაბრიკამ, რომ მას ჰქონდეს მაქსიმალური მოგება, თუ ნაწარმის ფასი შესაბამისად 40, 30, 20 ლარია.

ვთქვათ ფაბრიკამ უნდა შეკეროს შესაბამისად x_1, x_2, x_3 პროდუქცია, მაშინ გვექნება

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 300, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\le 840, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 650, \\ x_1 \ge 30,\ \ x_2 \ge 30,\ \ x_3 &\ge 30, \end{aligned} \qquad f = 40x_1 + 30x_2 + 20x_3 \to max.$$

```
>> f = [40; 30; 20];
>> A = [5 6 2;3 2 1];
>> B = [840;650];
>> Aeq = [1 1 1];
>> Beq = [300];
>> Ib = [30;30;30];
>> [x,fmax] = linprog(−f,A,B,Aeq,Beq,Ib,[])
x =
     40.0000
     30.0000
    230.0000
```

fmax =
$-7.1000\mathrm{e}+003$

5. კვების რაციონის ამოცანა. გვაქვს სხვადასხვა ფასიანი სამი სახის საკვები პროდუქტი P_1, P_2, P_3. თითოეული მათგანი შეიცავს განსაზღვრული რაოდენობის U_1, U_2, U_3, U_4 ვიტამინებს. ცნობილია, რომ დღის განმავლობაში საჭიროა U_1 ვიტამინის არანაკლებ 250 ერთეულისა, U_2 – არანაკლებ 60, U_3 – არანაკლებ 100 და U_4 – არანაკლებ 220 ერთეულისა. უნდა ვიპოვოთ მინიმალური დანახარჯი, თუ ცნობილია, რომ პროდუქტების ღირებულებებია: P_1 – 44 ლარი, P_2 – 35, P_3 – 100 ლარი. ცხრილში მოცემულია პროდუქტებში ვიტამინების შემცველობა:

	P_1	P_2	P_3	ვიტამინების რაოდენობა
U_1	4	6	15	250
U_2	2	2	0	60
U_3	5	3	4	100
U_4	7	3	12	220
ღირებულება	44	35	100	
რაოდენობა	x_1	x_2	x_3	

$$\begin{gathered}4x_1+6x_2+15x_3\geq 250,\\ 2x_1+2x_2\geq 60,\\ 5x_1+3x_2+4x_3\geq 100,\\ 7x_1+3x_2+12x_3\geq 220,\\ x_1\geq 0,\;\; x_2\geq 0,\;\; x_3\geq 0,\end{gathered}\qquad f=44x_1+35x_2+100x_3\to min.$$

როგორც ვხედავთ, უტოლობის შემცველ შეზღუდვებში გვაქვს $Ax\geq B$, პროგრამა კი ითხოვს $\leq$-ს, ამიტომ უტოლობას გავამრავლებთ (-1)-ზე, მივიღებთ $-Ax\leq -B$, ე.ი. A-ს როლს შეასრულებს $(-A)$, ხოლო B-ს როლს – $(-B)$.

```
>> A = [4 6 15; 2 2 0; 5 3 4; 7 3 12];
>> A = -A;
>> B = [250; 60; 100; 220];
>> B = -B;
>> lb = [0; 0; 0];
```

```
>>  f = [44;35;100];
>>  [x,fmin] = linprog(f,A,B,[ ],[ ],Ib,[ ])
x  =
      13.2143
      16.7857
       6.4286
fmin  =
       1.8118e+003
```

სავარჯიშოები

მოახდინეთ z მიზნის ფუნქციის ოპტიმიზაცია შესაბამისი შეზღუდვების გათვალისწინებით:

1. $$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \le 20, \\ &-x_1 + 4x_2 \le 20, \qquad z = 3x_1 + 4x_2 \to max. \\ &x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &8x_1 - 3x_2 \ge 4, \\ &x_1 + x_2 \le 6, \qquad z = -x_1 - 3x_2 \to min. \\ &x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} &-x_1 + 3x_2 \le 10 \\ &x_1 + x_2 \le 6, \\ &x_1 - x_2 \ge 3, \qquad z = x_1 + 2x_2 \to max. \\ &-x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ &x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} &2x_1 + 4x_2 \le 9, \\ &3x_1 + x_2 \le 6, \qquad z = -6x_1 + 2x_2 \to min. \\ &x_1 \ge 0 \;\; x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

5. ქიმწმენდას სჭირდება A და B სახის ბენზინის ნარევი. აქვთ 50 კგ პირველი ხარისხის და 30 კგ მეორე ხარისხის ბენზინი. 1 კგ A ნარევი, რომელიც შეიცავს 60% პირველი ხარისხის და 40% მეორე ხარისხის ბენზინს, ღირს 10 თეთრი, ხოლო 1 კგ B ნარევი, რომელიც შე-

იცავს 80% პირველი ხარისხის და 20% მეორე ხარისხის ბენზინს, ღირს 12 თეთრი. საჭიროა განისაზღვროს A და B ნარევის ის რაოდენობა, რაც მისცემს ქიმწმენდას მაქსიმალურ მოგებას.

6. სამკერვალო ფაბრიკა ორი სახის კოსტიუმებს კერავს, პირველის შესაკერად იხარჯება 3 მ^2 ქსოვილი, 2 მ^2 სასარჩულე და 5,5 სთ სამუშაო დრო, ხოლო მეორე სახის შესაკერად 4 მ^2 ქსოვილი, 1 მ^2 სასარჩულე და 6 სთ სამუშაო დრო. პირველი სახის კოსტიუმის ღირებულება 25 ლარია, მეორესი 30 ლარი. როგორი სახის და რა რაოდენობის კოსტიუმი უნდა შეკეროს ფაბრიკამ, რომ მაქსიმალური მოგება მიიღოს, თუ გვაქვს 240 მ^2 საკოსტიუმე ქსოვილი, 120 მ^2 სასარჩულე ქსოვილი და 380 სთ სამუშაო დრო.

7. ფირმა ორი სახის ნაკეთობას ამზადებს, რომელთა გასაღების ბაზარი შემოუსაზღვრელია. ყოველ ნაკეთობას ამზადებს სამი დანადგარი. თითოეული ნაკეთობის დამზადებისათვის საჭირო დრო საათებში და თითოეული დანადგარის სამუშაო დრო 1 კვირაში მოცემულია ცხრილში

დანადგარი / ნაკეთობა	I	II	III
I	0.5	0.4	0.2
II	0.25	0.3	0.4
დანადგ. სამუშაო დრო	40	36	36

I ნაკეთობა 12 ლარი ღირს, II – 15 ლარი. რა რაოდენობით უნდა დაამზადოს ფირმამ ნაკეთობები, რომ მიიღოს მაქსიმალური მოგება.

8. $$\begin{aligned} &60x + 20y \geq 120,\\ &20x + 20y \geq 80,\\ &40x + 120y \geq 240,\\ &x \leq 7, y \leq 7, x \geq 0, y \geq 0, \end{aligned} \qquad f = 400x + 340y \to min.$$

9. $$\begin{aligned} &40x + 20y \geq 900,\\ &x - 3y \geq 0,\\ &x \leq 7, y \leq 7, x \geq 0, y \geq 0, \end{aligned} \qquad f = 400x + 340y \to min.$$

10. $x + y \leq 16,$
$x + y \geq 8,$ $\qquad f = -x + y \rightarrow min.$
$x \geq 1, y \geq 1,$

11. $x + 4y \geq 8,$
$x + y \geq 8,$
$x + y \geq 5,$ $\qquad f = 3x + 2y \rightarrow min.$
$2x + y \geq 6,$
$x \geq 0, \quad y \geq 0,$

12. ფირმამ გადაწყვიტა გამოუშვას ორი ახალი A_1 და A_2 ტიპის კომპიუტერები. A_1 ტიპის ერთი კომპიუტერის დამზადება ფირმას უჯდება 1200 \$, ხოლო A_2 ტიპისა – 1600 \$. რისკის ფაქტორის გათვალისწინებით ფირმამ შეზღუდა ყოველკვირეული წარმოების დანახარჯი 40000 \$-მდე. გარდა ამისა, კვალიფიციური სპეციალისტების დეფიციტის გამო, ერთ კვირაში არ შეუძლია დაამზადოს 30-ზე მეტი კომპიუტერი. A_1 ტიპის თითოეული კომპიუტერიდან ფირმას აქვს 600 \$-ის მოგება, ხოლო A_2 ტიპის კომპიუტერიდან – 700 \$. როგორ უნდა ააწყოს ფირმამ წარმოება, რომ მისი მოგება მაქსიმალური იყოს?

13. მხატვარი სუვენირების სახით გასაყიდად ამზადებს სურათებს და ფაიფურის ნივთებს. ერთი სურათის შექმნაზე მხატვარი ხარჯავს 2 \$, ხოლო ფაიფურის ნივთზე – 2.25 \$. მას შეუძლია კვირაში დაამზადოს არაუმეტეს 15 სუვენირი, ამასთან მხატვარს სურს, რომ კვირაში დაამზადოს 2 სურათი და 2 ფაიფურის ნივთი მაინც. მასალის სიმცირის გამო მას არ შეუძლია დაამზადოს 5-ზე მეტი ფაიფურის ნივთი. სურათი იყიდება 6 \$-ად, ხოლო ფაიფურის ნივთი 7,5 \$. რამდენი სურათი და ფაიფურის ნივთი უნდა დაამზადოს მხატვარმა კვირაში, რომ მისი მოგება მაქსიმალური იყოს?

12. ტრანსცენდენტული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნა

ფუნქცია fzero ეძებს განტოლების ამონახსნს მოცემულ $[a,b]$ ინტერვალში ან წინასწარ დასახელებულ საწყის x_0 მნიშვნელობასთან მდებარე უახლოეს ფესვს. ფუნქციის გამოყენების სინტაქსი ასეთია:

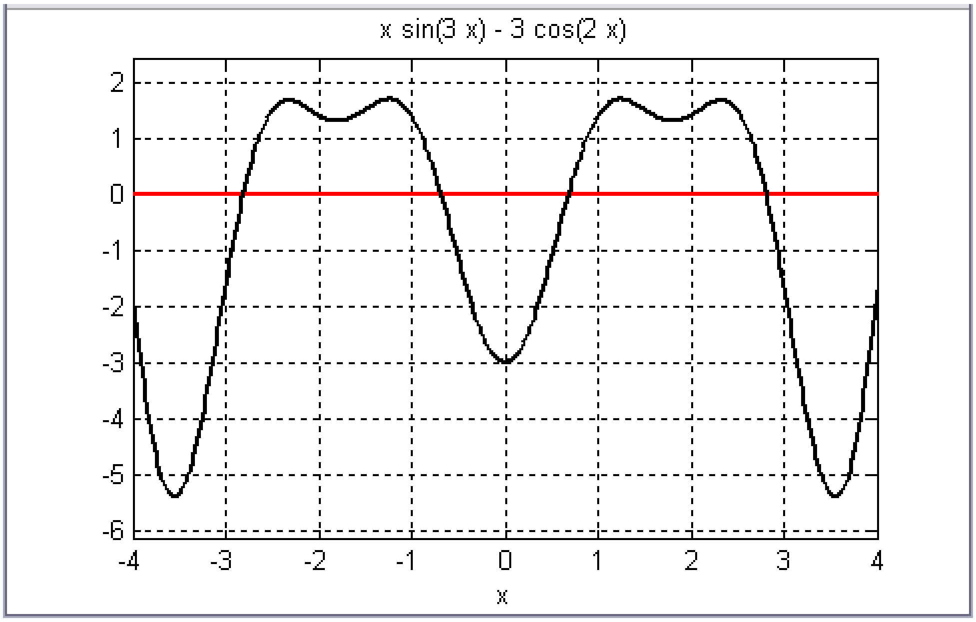
$$\mathbf{fzero('fun',x_0)} \quad \text{ან} \quad \mathbf{fzero('fun',[a,b])}$$

ფესვების პოვნამდე მიზანშეწონილია ფუნქციის გრაფიკის აგება. განტოლების ფესვები იქნება გრაფიკის ox ღერძთან გადაკვეთის აბსცისები.

მაგალითები

1. ამოვხსნათ განტოლება: $x\sin 3x - 3\cos 2x = 0$.

```
>> f = @(x)x.* sin(3 * x) - 3 * cos(2 * x);
>> ezplot(f, [-4 4])
>> grid on
```



როგორც ვხედავთ, განტოლების ფესვები მოთავსებულია $[-3,-2.5]$, $[-1,-0.5]$, $[0.5,1]$, $[0.5,\ 1]$, $[2.5,3]$ შუალედებში.

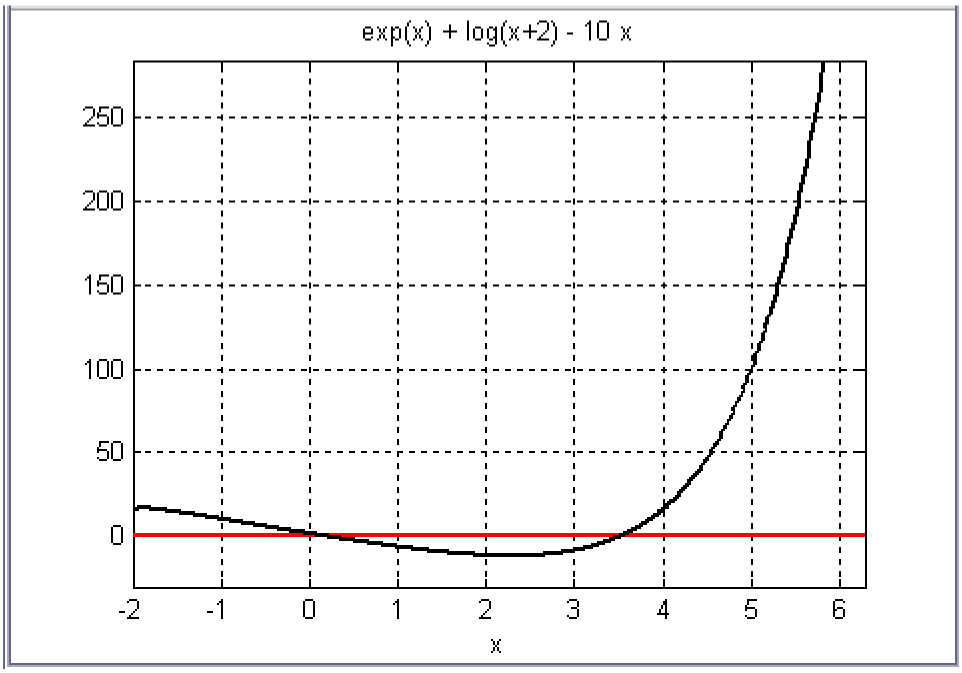
$>>\ f = @(x)x.*\sin(3*x) - 3*\cos(2*x);$

$>>\ x1 = \text{fzero}(f,[-3,-2.5]);$
$>>\ x2 = \text{fzero}(f,[-1,-0.5]);$
$>>\ x3 = \text{fzero}(f,[0.5,1]);$
$>>\ x4 = \text{fzero}(f,[2.5,3]);$
$>>\ X = [x1,x2,x3,x4]$
$X\ =$
$\qquad -2.8090 \quad -0.6836 \quad 0.6836 \quad 2.8090$

2. ამოვხსნათ განტოლება $e^x + \ln(x+2) - 10x = 0$

$>>\ f = \text{inline}('\exp(x) + \log(x+2) - 10*x');$

$>>\ \text{ezplot}(f);$
$>>\ \text{hold on}$
$>>\ \text{ezplot}('0')$



ფესვები მოთავსებულია 0-თან ახლოს და $[3,4]$ შუალედში.

```
>>  x1 = fzero(f,0)
x1  =
      0.2012
>>  x2 = fzero(f,[3,4])
x2  =
     3.5077
```

სავარჯიშოები

ამოხსენით განტოლებები:

1. $2\sin x + 3\ln(1+x) - 1 = 0;$
2. $3e^{-x} - \ln(1+x) - 1 = 0;$
3. $e^{x} - 3e^{-x} - 2x + 23 = 0;$
4. $\cos\frac{\pi x}{6} - x^2 + 1 = 0;$
5. $\operatorname{arctg} x + \sqrt{x} - 1 = 0;$
6. $\operatorname{ch} x + \frac{1}{x^2+4} - 10 = 0;$
7. $\frac{1}{1+x^2} + e^{x} - 21 = 0;$
8. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - 1 = 0;$
9. $x^3 - e^{x}(x^2-1) + 100 = 0;$
10. $1 + \pi \operatorname{sh} x - x^2 = 0;$
11. $x^2 - \cos(0.5x^2+1) - 3 = 0;$
12. $x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sin\sqrt{\frac{\pi}{3}x} = 0;$
13. $\ln(1+x) + \sqrt{1+x^2} - 1.5 = 0;$
14. $e^{x} - \operatorname{arctg}(1+x) - 20 = 0;$
15. $\sqrt{x-1} - 0.5\sin 2x = 0;$
16. $\pi \sin\sqrt{1+x^2} - 10x = 0;$
17. $\sin\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right) - e^{x} + 8 = 0;$

18. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4} - \sqrt{1+x} + 0.5 = 0;$

19. $\cos x = 2x^3;$

20. $2\sin x + 2\sqrt{x} - 2.5 = 0;$

21. $e^x + \cos x - 7x - 1 = 0;$

22. $0.1e^{-\frac{1}{x+1}} - \sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0;$

23. $e^x - \left(14 + \sqrt{x+1}\right) = 0;$

24. $\dfrac{25.12x}{1+x^2} - \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, e^{\frac{x}{3}} = 0;$

25. $e^x - \cos\dfrac{\pi x}{2} - 17 = 0;$

26. $3\cos 2x - x\sin 3x = 0, \quad x \in [-4, 2];$

27. $x\sin 2x - 3\cos 3x = 0, \quad x \in [-2, 3];$

28. $x\cos x - 3\sin x = 0, \quad x \in [-1, 5];$

29. $(x-1)\cos x - 1 = 0, \quad x \in [-5, 10];$

30. $\sin 5x \cos 2x = 0, \quad x \in [-2, 1].$

13. სიმბოლური გამოთვლები

MATLAB-ის შემადგენლობაში შედის სიმბოლური მათემატიკის დანართი (Symbolic Math Toolbox), რომლის დანიშნულებაა გამოთვლების ჩატარება სიმბოლური სახით. გამოსახულებათა გარდაქმნა, წრფივი ალგებრის ამოცანათა ანალიზური ამოხსნა, დიფერენციალური და ინტეგრალური აღრიცხვა, შედეგის მიღება ნებისმიერი სიზუსტით – ეს არის არასრული ჩამონათვალი იმ შესაძლებლობებისა, რაც გააჩნია ამ დანართს.

მოქმედებების ძირითადი სიმბოლური ოპერაციებია:

ბრძანება	დანიშნულება
expand	ფრჩხილების გახსნა
factor	მამრავლებად დაშლა
collect	მსგავსი წევრების შეერთება
simple და simplify	ფორმულების გამარტივება
solve	ალგებრული განტოლებების ამოხსნა
x = solve(equation,var) ან fsolve	წრფივი და არაწრფივი განტოლებათა სისტემების ამოხსნა
numden	რაციონალური წილადიდან მრიცხველისა და მნიშვნელის გამოყოფა
pretty	მიღებული პასუხის ჩაწერა ჩვენთვის ცნობილი მათემატიკური სახით
det(A)	როგორც სიმბოლოებში, ასევე რიცხვით ფორმაში მოცემული კვადრატული მატრიცის დეტერმინანტის მოძებნა
inv(A)	შებრუნებული მატრიცის პოვნა
eig	საკუთრივი რიცხვების და საკუთრივი ვექტორების პოვნა
sym2poly	მრავალწევრის გარდაქმნა სიმბოლური ფორმიდან რიცხვით ფორმაში

poly2sym	მრავალწევრის გარდაქმნა რიცხვითი ფორმიდან სიმბოლურ ფორმაში
double და vpa	სიბოლური მონაცემების რიცხვით ფორმაში გადაწერა
ezplot	ანალიზურად მოცემული ფუნქციის, ასევე არაცხადი ან პარამეტრული სახით მოცემული ფუნქციის გრაფიკის აგება
diff ('f(x)',x,n) ან f(x) =' … ' , diff (f)	$f(x)$ ფუნქციიდან n რიგის წარმოებულის პოვნა x ცვლადით
int ('f(x)',x,)	$f(x)$ ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალი
int (f,x,a,b) შემდეგ pretty ან pretty (int(F,x,a,b)) int(f,x,a,inf), int(f,x,inf,b) F = f(x,y) $\mathrm{int(int(F,x,a_1,b_1),y,a_2,b_2)}$	განუსაზღვრელი ინტეგრალი f ფუნქციიდან $[a,b]$-ზე და გამარტივება. ინტეგრალი უსასრულო ზედა და ქვედა საზღვრებით. ორჯერადი ინტეგრალი $f(x,y)$ ფუნქციიდან $x\epsilon[a_1,b_1]$, $y\epsilon[a_2,b_2]$
$\mathrm{int(int(int(f,x,a_1,b_1),y,a_2,b_2),z,a_3,b_3)}$	სამჯერადი ინტეგრალი $f(x,y,z)$ ფუნქციიდან $x\epsilon[a_1,b_1]$ $y\epsilon[a_2,b_2]$ $z\epsilon[a_3,b_3]$
limit (f,x,a)	f ფუნქციის ზღვარი, როცა $x\to a$
limit (f(x),x,a,'left')	$f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი, როცა $x\to a,\ x<a$
limit (f(x),x,a,'right')	$f(x)$ ფუნქციის მარჯვენა ზღვარი, როცა $x\to a,\ x>a$

ცვლადებისა და ფუნქციების შექმნა

სიმბოლური ობიექტი იქმნება syms ფუნქციის საშუალებით. ბრძანება

>> syms x a b

ქმნის სამ სიმბოლურ ცვლადს x, a და b-ს. სიმბოლური ცვლადებისათვის გამოყოფილი მეხსიერება საკმაოდ დიდია და როგორც წესი შეადგენს 126 ბაიტს. სიმბოლური ცვლადების გამოყენებით სიმბოლური ფუნქციების აგება ჩვეულებრივი არითმეტიკული ოპერაციებისა და სტანდარტული მათემატიკური ფუნქციების გამოყენებით ხდება. მაგალითად:

```
>> f = (sin(x) + a)^2 * (cos(x) + b)^3 / sqrt(abs(a^3 – b^3))
f =
((b + cos(x))^3 * (a + sin(x))^2)/abs(a^3 − b^3)^(1/2)
```

ფორმულის ჩაწერა ერთ სტრიქონში ყოველთვის არ არის მოსახერხებელი. ჩვეული სახის მიცემა გამოსახულებისათვის შეიძლება ფუნქციით pretty:

```
>> pretty(f)
                3               2
 (b + cos(x))   (a + sin(x))
 ---------------------------
         | 3    3|1/2
         |a  - b |
```

შემოღებული f ფუნქცია ასევე სიმბოლური ცვლადია.

არსებული სიმბოლური ცვლადებით და ფუნქციებით შეიძლება ახალი სიმბოლური გამოსახულებების შექმნა. სიმბოლური ფუნქციის შექმნა შეიძლება სიმბოლური ცვლადების წინასწარი გამოცხადების გარეშეც sym ფუნქციის გამოყენებით:

```
>> z = sym('c^2 / (d + 2)')
z =
c^2/(d + 2)
>> pretty(z)
   2
  c
 -----
 d + 2
```

მატრიცები და ვექტორები

სიმბოლური ცვლადები შეიძლება იყოს მატრიცების და ვექტორების ელემენტები. ისევე, როგორც ჩვეულებრივი მატრიცების შემთხვევაში, სტრიქონის ელემენტები, შეტანისას გამოიყოფა ერთმანეთისაგან ადგილის გამოტოვებით ან მძიმით, ხოლო სვეტების ელემენტები – წერტილ-მძიმით.

```
>>  syms  a b c d e f g h
>>  A  =  [a b; c d]
A  =
[a, b]
[c, d]
>>  B  =  [e, f;  g, h]
B  =
[e, f]
[g, h]
>>  C  =  A ∗ B
C  =
[ a∗ e  +  b ∗ g, a ∗ f  +  b ∗ h]
[ c∗ e  +  d ∗ g, c ∗ f  +  d ∗ h]
>>  F  =  A.∗ B
F  =
[ a∗ e, b ∗ f]
[ c ∗ g, d ∗ h]
```

სიმბოლური მატრიცების ან ვექტორების ელემენტებისადმი მიმართვა ხორციელდება ინდექსების, მათ შორის ორწერტილის ან ინდექსთა ვექტორის გამოყენებით:

```
>>  F2  = F(2, :)
F2  =
[ c ∗ g, d ∗ h]
```

სიმბოლური მატრიცის სვეტის ან სტრიქონის წასაშლელად გამოიყენება ცარიელი მასივი:

```
>>  C(1, : ) = [ ]
C  =
[ c∗ e  +  d ∗ g, c ∗ f  +  d ∗ h]
```

გამოთვლები სიმბოლური ცვლადებით

სიმბოლური ოპერაციები გამოსახულებათა ზუსტი ან რაგინდ დიდი სიზუსტით გამოთვლის საშუალებას იძლევა. რიცხვითი ცვლადის სიმბოლურად გარდასაქმნელად გამოიყენება ფუნქცია sym:

```
>> A = [1.1 3.5 −1.7
     −2.4 1.9 7.8];
>> B = sym(A)
B =
[ 11/10,  7/2,−17/10]
[ −12/5,19/10,  39/5]
```

რიცხვითი გამოსახულებებიდან სიმბოლურზე გადასვლისას გამოიყენება რიცხვთა რაციონალური წილადის სახით წარმოდგენა. შესაძლებელია სხვა სახით წარმოდგენაც, რაც sym ფუნქციას მეორე არგუმენტით მიეთითება. გამოთვლებში რაციონალური წილადების გამოყენებისას ყოველთვის მიიღება ზუსტი შედეგი, რომელიც არ შეიცავს დამრგვალების ცდომილებებს. ამიტომ შესაძლებელია შედეგის მიღება ნებისმიერი სიზუსტით. სიმბოლური გამოსახულებების გამოთვლისათვის გამოიყენება vpa ფუნქცია:

```
>> c = sym('sqrt(2)');
>> cn = vpa(c)
cn =
1.4142135623730950488016887242097
```

როგორც წესი, შედეგი შეიცავს 32 ნიშნად ციფრს. vpa ფუნქციის მეორე დამატებითი პარამეტრი განსაზღვრავს შედეგის სიზუსტეს:

```
>> cn = vpa(c,50)
cn =
1.4142135623730950488016887242096980785696718753769
```

შენიშვნა. vpa ფუნქციის მეორე არგუმენტი განსაზღვრავს შედეგის სიზუსტეს მხოლოდ ფუნქციის მიმდინარე გამოძახებისას. სიზუსტის გლობალური ცვლილებისათვის გამოიყენება ფუნქცია digits, რომლის არგუმენტი განსაზღვრავს საჭირო სიზუსტეს.

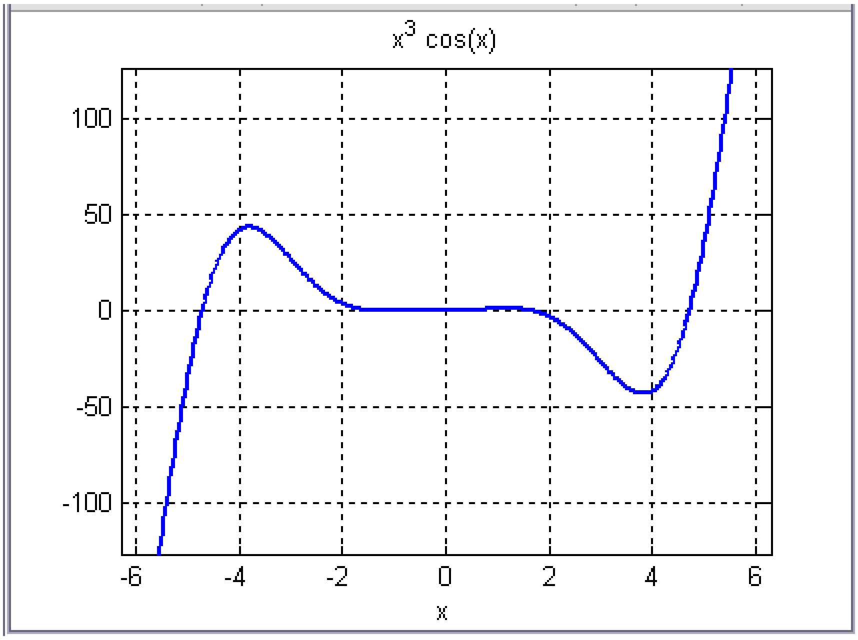
vpa ფუნქციის გამოყენებით მიღებული ცვლადი კვლავ სიმბოლური ცვლადია. სიმბოლური ცვლადების რიცხვითში გადასაყვანად გამოიყენება double ფუნქცია:

```
>> cnum = double(cn)
cnum =   1.4142
```

ფუნქციის გრაფიკული წარმოდგენა

ერთი ცვლადის სიმბოლური ფუნქციის გრაფიკული წარმოდგენისათვის გამოიყენება ezplot ფუნქცია. ამ ფუნქციის გამოყენების უმარტივესი ვარიანტია სიმბოლური ფუნქციის ერთადერთი არგუმენტის სახით მითითება. ამ შემთხვევაში გრაფიკი იგება $[-2\pi, 2\pi]$ შუალედში:

```
>> f = sym('x^3 * cos(x)');
>> ezplot(f)
```



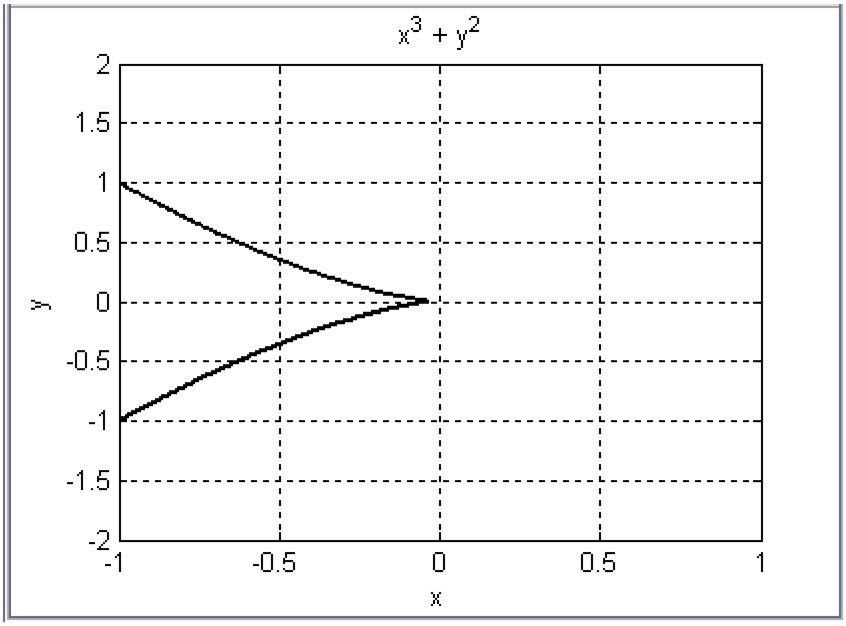
ფუნქციაში ezplot მეორე არგუმენტად შეიძლება მივუთითოთ იმ შუალედის ბოლოებით შედგენილი ვექტორი, რომელშიც გვსურს გრაფიკის აგება:

```
>> ezplot(f, [-1 4])
```

ezplot-ში შეიძლება გამოვიყენოთ ორი ცვლადის სიმბოლური ფუნქ-ციაც:

$>> \ f \ = \ sym('x^\wedge 3 \ + y^\wedge 2');$
$>> \ ezplot(f, [-1 \ 1 \ -2 \ 2])$

ამ შემთხვევაში აიგება წირი, რომელზეც მოცემული გამოსახულება ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს:



ცვლილების საზღვრები განისაზღვრება არგუმენტების სახელებით. პირველი ორი რიცხვი შეესაბამება იმ არგუმენტს, რომელიც ანბანში უფრო წინ დგას.

ezplot ფუნქციის საშუალებით შესაძლებლია პარამეტრულად მოცე-მული ფუნქციის გრაფიკის აგებაც.

გარდა ezplot ფუნქციისა, სიმბოლური მათემატიკის დანართი შეი-ცავს ფუნქციათა მთელ წყებას სიმბოლური ფუნქციების გრაფიკული წარმოდგენისათვის. ესენია:

ezmesh, ezmeshc, ezplot3, ezpolar, ezsurf, ezsurfc.

მაგალითისათვის, ezsurf ფუნქცია სიმბოლური ფუნქციის გრაფიკს აგებს მხოლოდ არგუმენტთა დასაშვები მნიშვნელობებისათვის, რაც ორი ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არის დადგენის საშუალებას იძლევა.

გამოსახულებათა გამარტივება, გარდაქმნა და გამოთვლა

სიმბოლური მათემატიკის დანართი შეიცავს რიგ ფუნქციებს, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია სიმბოლურ გამოსახულებათა სხვადასხვა გარდაქმნები.

მრავალწევრებზე ოპერაციებისათვის გამოიყენება შემდეგი ფუნქციები: collect, expand, horner და factor.

დამოუკიდებელი ცვლადის ხარისხთა კოეფიციენტების გამოსათვლელად გამოიყენება ფუნქცია collect.

```
>> p = sym('(x - a)^4 + (x - 1)^3 - a*x^2 + x - 7');
>> pc = collect(p);
>> pretty(pc)
```

$$x^4 + (1 - 4a)\,x^3 + (6a^2 - a - 3)\,x^2 + (4 - 4a^3)\,x + a^4 - 8$$

როგორც წესი, ცვლადად მიჩნეულია x, მაგრამ შეიძლებოდა ჩაგვეთვალა, რომ დამოუკიდებელი ცვლადია a, ხოლო x შედის a-ზე დამოკიდებული მრავალწევრის კოეფიციენტებში. collect ფუნქციის მეორე არგუმენტი განკუთვნილია იმ ცვლადის მისათითებლად, რომლის ხარისხებთანაც უნდა ვეძიოთ კოეფიციენტები:

```
>> pc1 = collect(p,'a');
>> pretty(pc1)
```

$$a^4 + ((-4)\,x)\,a^3 + (6\,x^2)\,a^2 + (-4\,x^3 - x^2)\,a + x + (x - 1)^3 + x^4 - 7$$

ფუნქცია expand მრავალწევრს ჩაწერს ხარისხთა ჯამის სახით მსგავსი წევრების შეერთების გარეშე:

```
>> pc2 = expand(p);
>> pretty(pc2)
```

$$a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2 - 4ax^3 - ax^2 + x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 8$$

expand ფუნქციის არგუმენტი შეიძლება იყოს არა მხოლოდ მრავალწევრი, არამედ ტრიგონომეტრიული, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების შემცველი სიმბოლური გამოსახულებებიც.

```
>> f = sym('sin(arccos(2*x)) + exp(4*log(x))');
>> f1 = expand(f);
>> pretty(f1)
```

$$x^4 + (1 - 4x^2)^{1/2}$$

სიმბოლური მრავალწევრების მამრავლებად დაშლისათვის გამოიყენება factor ფუნქცია, თუ მიღებული მამრავლების კოეფიციენტები რაციონალური რიცხვებია.

```
>> p = sym('4*x^5 - 8*x^4 + 3*x^3 + 2*x^2 - x');
>> p1 = factor(p);
>> pretty(p1)
                                    2
 x (2 x - 1) (2 x + 1) (x - 1)
```

ფუნქცია factor გამოიყენება აგრეთვე მთელი რიცხვის მარტივ მამრავლებად დაშლისათვის.

```
>> syms a
>> a = sym('270820');
>> a1 = factor(a)
 a1 =
   2^2*5*11*1231
```

ზოგადი სახის გამოსახულებათა გასამარტივებლად გამოიყენება ფუნქციები simple და simplify. ფუნქცია simplify მძლავრი ინსტრუმენტია, რომელსაც შეუძლია როგორც ტრიგონომეტრიული, მაჩვენებლიანი და ლოგარითმული ფუნქციების, ასევე სპეციალური ფუნქციების, კერძოდ, ჰიპერგეომეტრიული, ბესელის და გამა-ფუნქციის შემცველი გამოსახულებების გამარტივება. გარდა ამისა, ამ ფუნქციას შეუძლია სიმბოლური ახარისხების და ინტეგრების შემცველი გამოსახულებების გამარტივებაც. simple ფუნქცია ეძებს სიმბოლური გამოსახულების უფრო ნაკლები რაოდენობით სიმბოლოების შემცველი სახით წარმოდგენას.

```
>> syms x
>> simplify(sin(x)^2 + cos(x)^2)
ans =
   1
>> syms a b c
>> simplify(exp(c*log(sqrt(a+b))))
ans =
   (a + b)^(c/2)
>> syms x
>> S = (x^2 + 5*x + 6)/(x + 2);
```

```
>> R = simplify(S)
R =
  x + 3
```

ფუნქციას subs, შეუძლია ერთი გამოსახულების ჩასმა მეორეში. ზოგადი სახით ფუნქციის გამოძახება ხდება სამი არგუმენტით. ესენია: სიმბოლური ფუნქციის სახელი, იმ ცვლადის სახელი, რომელიც უნდა შეიცვალოს, და გამოსახულება, რომლითაც უნდა შეიცვალოს ცვლადი. კერძოდ, ფუნქცია subs შეიძლება გამოვიყენოთ გარკვეული სტრუქტურის მქონე დიდი სიმბოლური გამოსახულებების შეტანის მიზნით.

```
>> f = sym('(a^3 + b^3)/(a^2 - b^2) + a^5/b^5');
>> f = subs(f,{'a','b'},{'(exp(x) + log(x))','(sin(2*x) + cos(3*x))'});
>> pretty(f)
                       5                           3                    3
  (exp(x) + log(x))        (cos(3 x) + sin(2 x))  + (exp(x) + log(x))
 ---------------------- - ----------------------------------------------
                        5                          2                    2
 (cos(3 x) + sin(2 x))     (cos(3 x) + sin(2 x))  - (exp(x) + log(x))
```

თუ ცვლადის ნაცვლად ჩავსვამთ მის რიცხვითი მნიშვნელობას, მივიღებთ სიმბოლური ფუნქციის მნიშვნელობას არგუმენტის მითითებული მნიშვნელობისათვის.

```
>> f = sym('((x*y - y^2)/(x^2 - y^2) + x/(x+y))*x*y');
>> a = subs(f,{'x','y'},{'65/7','7/13'});
>> pretty(a)
  5
```

წრფივი ალგებრის ამოცანების ამოხსნა

სიმბოლური მათემატიკის დანართში შემავალი ფუნქციები მატრიცებსა და ვექტორებზე ოპერაციებს სიმბოლური სახით აწარმოებენ. ამასთან შესაბამის ფუნქციებს იგივე სახელები აქვთ, რაც რიცხვითი გამოთვლებისას. მაგალითად, დეტერმინანტი გამოითვლება det ფუნქციის გამოყენებით:

```
>> A = sym('[a b c; c b a; a c b]');
>> D = det(A)
 D =
a^2*b - a^2*c + a*b^2 - a*b*c - b^2*c + c^3
```

ფუნქცია inv გამოიყენება სიმბოლური A მატრიცის შებრუნებულის გამოსათვლელად:

```
>> AI = inv(A);
>> pretty(AI)
```

```
+-                                                                              -+
|                 2                                                              |
|           a c - b                     b + c                   b                 |
|  - --------------------------, - ------------------,  -------------------      |
|    (a - c) (b - c) (a + b + c)   (a - c) (a + b + c)  (b - c) (a + b + c)      |
|                                                                                |
|                 2                                                              |
|           b c - a                      a                       a + c            |
|  - --------------------------,  ------------------,  - -------------------    |
|    (a - c) (b - c) (a + b + c)  (a - c) (a + b + c)     (b - c) (a + b + c)    |
|                                                                                |
|                 2                                                              |
|           a b - c                      a                       b                |
|  - --------------------------,  ------------------,  -------------------      |
|    (a - c) (b - c) (a + b + c)  (a - c) (a + b + c)   (b - c) (a + b + c)      |
+-                                                                              -+
```

მატრიცის x ცვლადზე დამოკიდებული მახასიათებელი მრავალწევრი მოიძებნება poly ფუნქციის გამოყენებით:

```
>> pA = poly(A);
>> pretty(pA)
```

```
 3                   2
x + (- a - 2 b) x  + (a b - 2 a c - b c + b (a + b)) x -
     2
c (c  + a b) - a (a b + a c) - b (a b - b c) + 2 a c (a + b)
```

სიმბოლური მატრიცების და ვექტორების ელემენტები შეიძლება იყოს არა მხოლოდ სიმბოლური ცვლადები, არამედ გამოსახულებები და რაციონალური რიცხვებიც.

წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის სიმბოლური ფორმით ამოსახსნელად გამოიყენება „\“ ოპერაცია. მაგალითად:

```
>> A = sym(’[a b; c d]’);
>> B = sym(’[e; f]’);
```

```
>> X = A \ B
X =
 -(b*f - d*e)/(a*d - b*c)
 (a*f - c*e)/(a*d - b*c)
```

შეჯამება და მწკრივად გაშლა

ტეილორის მწკრივად ფუნქციის გაშლისათვის გამოიყენება ფუნქცია taylor. მაგალითად:

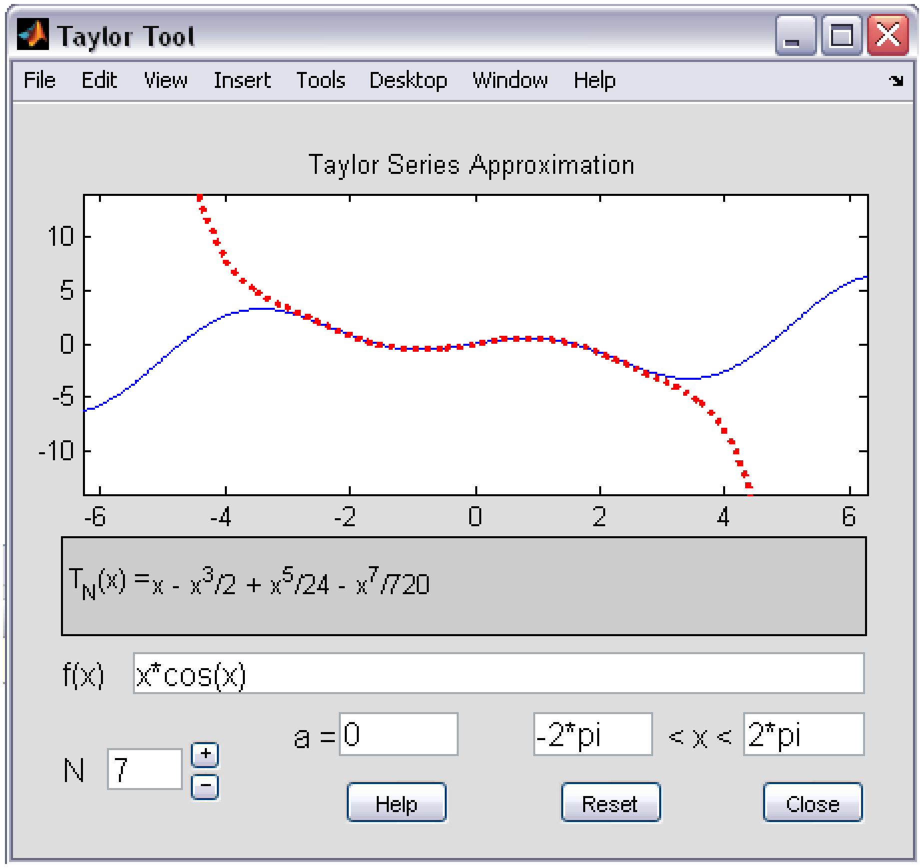
```
>> f = sym('1/(1 + 3*x)');
>> tf = taylor(f);
>> pretty(tf)
        5        4        3       2
 - 243 x  + 81 x  - 27 x  + 9 x  - 3 x + 1
```

თუ არ მივუთითებთ დამატებით პარამეტრებს, მაშინ მიიღება გაშლა ნულის მიდამოში და მოყვანილი იქნება გაშლის პირველი ექვსი წევრი. მწკრივად გაშლაში წევრთა რაოდენობა შეიძლება მივუთითოთ მეორე პარამეტრის გამოყენებით, ხოლო მესამე პარამეტრი მიუთითებს, რომელი ცვლადის მიმართ უნდა გავშალოთ მწკრივად (თუ სიმბოლური ფუნქცია რამდენიმე ცვლადს შეიცავს):

```
>> syms x y
>> g = 1/(x + y); tg = taylor(g,4,y);
>> pretty(tg)
  2      3
 y      y      y     1
--- -- ---- -- ----- + ---
  3      4      2    x
 x      x      x
```

წერტილი, რომლის მიდამოშიც გვსურს მწკრივად გაშლა, მიეთითება მეოთხე პარამეტრის სახით.

სიმბოლური მათემატიკის დანართში შედის ინსტრუმენტი გრაფიკული გარსით – taylortool, რომელიც გამოიყენება სხვადასხვა ფუნქციათა მწკრივად გაშლის თვალსაჩინო წარმოდგენისათვის. მისი გამოძახება ხდება ბრძანებათა ფანჯარაში taylortool ბრძანების შესრულებით. გამოჩნდება შემდეგი ფანჯარა:



ეს ინსტრუმენტი საკმაოდ იოლად გამოსაყენებელია და არ საჭი-როებს დამატებით განმარტებებს.

სიმბოლური შეჯამებისათვის გამოიყენება symsum ფუნქცია, რომ-ლის საშუალებით შესაძლებელია მწკრივის ჯამის პოვნაც. ზოგადი სახით ფუნქციას გააჩნია ოთხი პარამეტრი: შესაკრები სიმბოლური ფორმით, რომელიც ინდექსზეა დამოკიდებული, თვით ინდექსი, ჯამის ქვედა და ზედა საზღვრები. მაგალითად,

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

ჯამი გამოითვლება შემდეგი ბრძანებების გამოყენებით:

```
>> syms k
>> s = symsum('(-1)^k/k^2',k,1,Inf)
s =
-pi^2/12
```

შესაძლებელია ისეთი წევრების შეჯამებაც, რომლებიც არა მხოლოდ ინდექსზეა დამოკიდებული, არამედ რაიმე სიმბოლურ ცვლადზეც. თუ შესაკრები შეიცავს ფაქტორიალს, მაშინ ფაქტორიალის გამოსახულება უნდა მოვათავსოთ sym ფუნქციაში. მაგალითად,

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ჯამი გამოითვლება შემდეგი ბრძანებების გამოყენებით:

```
>> syms k x
>> s = symsum((-1)^k*x^(2*k+1)/sym('(2*k+1)!'),k,0,Inf)
s =
sin(x)
```

ზღვარი, წარმოებული და ინტეგრალი

ფუნქციის ზღვრის საპოვნელად რაიმე წერტილში (მათ შორის პლუს ან მინუს უსასრულობაში), გამოიყენება limit ფუნქცია. პირველი პარამეტრი სიმბოლური გამოსახულებაა, მეორე – ცვლადი, ხოლო მესამე – წერტილი, რომელშიც ვითვლით ზღვარს. მაგალითად,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{ax}$$

ზღვრის გამოსათვლელად საჭიროა შემდეგი ბრძანებების გამოყენება:

```
>> syms a x
>> limit((1+1/x)^(x*a),x,Inf)
ans =
exp(a)
```

ამ ფუნქციის გამოყენებით შესაძლებელია ცალმხრივი ზღვრების პოვნაც. ამისათვის საჭიროა მეოთხე დამატებითი პარამეტრის მითითება. 'right' პარამეტრის მითითებით ვითვლით მარჯვენა, ხოლო 'left' პარამეტრის მითითებით – მარცხენა ზღვარს.

თუ გამოვიყენებთ წარმოებულის განსაზღვრას, limit ფუნქცია შეგვიძლია გამოვიყენოთ წარმოებულის გამოსათვლელადაც. მაგალითად,

$$(\arcsin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\arcsin(x+h)-\arcsin x}{h},$$

ამიტომ შეგვიძლია გამოვიყენოთ შემდეგი ბრძანებები:

```
>> syms h x
>> L = limit((asin(x + h) − asin(x))/h,h, 0);
>> pretty(L)
       1
 -----------------
          2 1/2
 (1 − x  )
```

ნებისმიერი რიგის წარმოებულების გამოსათვლელად უფრო მოსახერხებელია diff ფუნქციის გამოყენება. მისი პირველი პარამეტრი ფუნქციის სიმბოლური გამოსახულებაა, მეორე – ცვლადი, რომლის მიმართაც ხდება გაწარმოება, ხოლო მესამე – წარმოებულის რიგია. მაგალითად,

```
>> P = diff('asin(x)',x, 1);
>> pretty(P)
      1
 -----------------
          2 1/2
 (1 − x  )
```

ცხადია, მიიღება იგივე შედეგი.

სიმბოლური მათემატიკის დანართის გამოყენებით შესაძლებელია როგორც განუსაზღვრელი, ასევე განსაზღვრული ინტეგრალების პოვნა. სიმბოლური ფუნქციიდან განუსაზღვრელი ინტეგრალის საპოვნელად გამოიყენება int ფუნქცია. პარამეტრებად მიეთითება სიმბოლური ფუნქცია და ცვლადი, რომლის მიმართაც ხდება ინტეგრება. მაგალითად:

```
>> syms x
>> f = sym('exp(2 * x) * cos(3 * x)');
>> I = int(f,x)
I =
 (exp(2 * x) * (2 * cos(3 * x) + 3 * sin(3 * x)))/13
```

ცხადია, int ფუნქციას ყველა ფუნქციის ინტეგრება არ შეუძლია. ზოგ შემთხვევაში პირველადი გამოსახულია სპეციალური ფუნქციების გამოყენებით: მაგალითად,

$$\int e^{\sin^2 x} \cos x \, dx$$

ინტეგრალის პოვნისას გვექნება:

```
>> syms x
>> f = exp(sin(x)^2) * cos(x);
```

```
>> I = int(f,x);
>> pretty(I)
   1/2
 pi   erfi(sin(x))
-----------------------
       2
```

მიღებული პასუხი შეიცავს შემდეგი სახის სპეციალურ ფუნქციას:

$$\operatorname{erfi}(z) = \frac{\operatorname{erf}(iz)}{i}\,, \qquad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

გარდა ამისა, მიღებული შედეგი შეიცავს კომპლექსურ ერთეულს, თუმცა თავდაპირველი ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ნამდვილი ცვლადის იყო. საჭიროა დამატებითი გარდაქმნები საბოლოო პასუხის მისაღებად.

განსაზღვრული ინტეგრალის საპოვნელად, int ფუნქციაში საჭიროა მესამე და მეოთხე პარამეტრის მითითება, რომლებიც, შესაბამისად, განსაზღვრული ინტეგრალის ქვედა და ზედა საზღვრებია.

```
>> f = sym('(x^3 + 1)/(x^2 + 1)');
>> I = int(f,x,a,b);
>> pretty(I)
        2                2                                   2      2
 log(a  + 1)      log(b  + 1)                                a      b
 ---------------- -- ---------------- -- atan(a) + atan(b) -- --- + ---
        2                2                                   2      2
```

ორჯერადი ინტეგრალები გამოითვლება int ფუნქციის განმეორებითი გამოყენებით. მაგალითად,

$$\int_c^d \int_a^b x\cos y\,dx dy$$

ინტეგრალის გამოსათვლელად საჭიროა შემდეგი ბრძანებების გამოყენება:

```
>> syms a b c d x y
>> f = x * cos(y);
>> I = int(int(f,x,a,b),y,c,d);
>> pretty(I)
   2    2
 (a  − b ) (sin(c) − sin(d))
 --------------------------------------
                 2
```

ანალოგიურად გამოითვლება სხვა ჯერადი სიმბოლური ინტეგრალებიც.

განტოლებებისა და სისტემების ამოხსნა

მეოთხე რიგამდე ჩათვლით, შესაძლებელია ალგებრული განტოლებების ამონახსნთა ზუსტი მნიშვნელობების პოვნა. ფუნქცია solve ამონახსნებს წარმოადგენს რაციონალური რიცხვების ხარისხების შემცველი გამოსახულების სახით.

მაგალითი. ამოხსენით $x^3 - 4x^2 + 2x - 1 = 0$ განტოლება.

ამოხსნა:

```
>> syms x
>> f = x^3 - 4*x^2 + 8*x - 1;
>> r = solve(f,x);
>> pretty(r)
 +-                            -+
 |          8                   |
 |   #2 - ------ + 4/3          |
 |         9 #2                 |
 |                              |
 |    4       #2                |
 | ------- - ----  + 4/3 + #1   |
 |  9 #2       2                |
 |                              |
 |    4       #2                |
 | ------- - ---  + 4/3 - #1    |
 |  9 #2      2                 |
 +-                            -+
 where

         1/2 /    8            \
        3    | --------  + #2  | i
             \  9 #2           /
   #1 = ----------------------------
                    2

         /     1/2   1/2              \1/3
         | 108   731                  |
   #2 =  | ----------------- -- 133/54|
         \     108                    /
```

განტოლების მარცხენა მხარის გამოსახულებაში დასაშვებია სიმბოლური ცვლადების გამოყენება. მაგალითად,

```
>> syms a b c x
>> f = a*x^2 + b*x + c; pretty(solve(f,x))
```

```
+-                      -+
|         2         1/2  |
|    b + (b  - 4 a c)    |
|  - -------------------  |
|           2 a          |
|                        |
|         2         1/2  |
|    b - (b  - 4 a c)    |
|  - -------------------  |
|           2 a          |
+-                      -+
```

მაღალი რიგის ალგებრული განტოლებების და ტრანსცენდენტული განტოლებების ამონახსნები მოიძებნება მიახლოებით.

ფუნქცია solve ასევე გამოიყენება არაწრფივ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად. ამ შემთხვევაში ფუნქცია solve-ს პარამეტრები სისტემაში შემავალ განტოლებათა მარცხენა მხარეები და ის ცვლადებია, რომელთა მიმართაც უნდა ამოიხსნას სისტემა.

მაგალითი. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y - 10 = 0, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y - 10 = 0. \end{cases}$$

ამოხსნა.

```
>> syms x y
>> f1 = 2*x^2 - 5*x*y + 3*x - 2*y - 10;
>> f2 = 5*x*y - 2*x^2 + 7*x - 8*y - 10;
>> s = solve(f1,f2,x,y); pretty(s.x), pretty(s.y)
```

```
+-   -+
|  3  |
|     |
|  2  |
|  -  |
|  3  |
+-   -+

+-     -+
|   1   |
|       |
|   4   |
| - -   |
|   3   |
+-     -+
```

თუ ანალიზური ამოხსნა შეუძლებელია, მაშინ მოყვანილი იქნება ფესვების რიცხვითი მნიშვნელობები.

მაგალითი. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} x(2-y) = \cos x\, e^{y}, \\ 2 + x - y = \cos x + e^{y}. \end{cases}$$

ამოხსნა.

```
>>  syms x y
>>  f1 = x * (2 - y) - cos(x) * exp(y);
>>  f2 = 2 + x - y - cos(x) - exp(y);
>>  s = solve(f1,f2,x,y);
>>  pretty(s.x),  pretty(s.y)
  0.73908513321516064165531208767387
  0.44285440100238858314132799999934
```

დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამოხსნა

სიმბოლური მათემატიკის დანართი საშუალებას გვაძლევს, ვიპოვოთ დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამონახსნები ანალიზური სახით. შესაძლებელია როგორც ზოგადი, ასევე კერძო ამონახსნების პოვნა. დიფერენციალური განტოლებებისა და სისტემების ამოსახსნელად გამოიყენება ფუნქცია dsolve, რომლის პარამეტრებია სტრიქონები განტოლებებით, სასაზღვრო ან საწყისი პირობებით (მათი არსებობის შემთხვევაში) და დამოუკიდებელი ცვლადი. თუ დამოუკიდებელი ცვლადი არ არის მითითებული, ასეთად იგულისხმება t. წარმოებულები სტრიქონებში ჩაიწერება შემდეგი სახით: $\mathrm{D}y, \mathrm{D}2y, \ldots$

მაგალითი. ამოხსენით დიფერენციალური განტოლება:

1) $y' - \dfrac{y}{x-3} = \dfrac{x-3}{x^2+2}$;
2) $y' + 3x^2 y = e^{-x^3} \sin^2 x$;
3) $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$;
4) $y'' + 9y = 12\sin 3x + 26xe^{2x}$;
5) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$;

6) $yy'' + y'^2 = 1.$

ამოხსნა. **1**)

```
y = dsolve('Dy - y/(x - 3) = (x - 3)/(x^2 + 2)','x');
>> pretty (y)
```

```
                           /   1/2   \
                 1/2       |  2    x |
                2     atan| --------- | (x - 3)
                           \    2    /
C (x - 3) + --------------------------------------
                            2
```

2)

```
>> y = dsolve('Dy + 3*x^2*y = exp(-x^3)*sin(x)^2','x');
>> pretty(y)
```

```
           3              3  / x      sin(2 x) \
C exp(- x  ) + exp(- x  ) | --- -- ---------- |
                             \ 2          4     /
```

3)

```
>> y = dsolve('Dy + 4*x*y = 2*x*exp(-x^2)*sqrt(y)','x');
>> pretty(y)
```

```
+-                                      -+
|                   0                    |
|                                        |
|   /                     2        \2    |
|   |    C3              x         |     |
|   |  -------- + ----------       |     |
|   |          2              2    |     |
|   \ exp(x )    2 exp(x )  /     |
+-                                      -+
```

4)

```
>> y = dsolve('D2y + 9*y = 12*sin(3*x) + 26*x*exp(2*x)','x');
>> pretty(simplify(y))
sin(3 x)     8 exp(2 x)
----------- -- ------------ -- 2x cos(3 x) + 2x exp(2 x) + C1cos(3 x) + C2 sin(3 x)

    3              13
```

5)

```
>> y = dsolve('x^3*D2y + x^2*Dy = 1','x');
>> pretty(simplify(y))
```

```
                     1
C1 + C2 log(x) + ---
                     x
```

6)

```
>> y = dsolve('y*D2y + Dy^2 = 1','x');
>> pretty(y)
```

```
+-                                -+
|         /                 2 \1/2 |
|    1/2 |         (C8 + x)    |   |
|   2    | C11 + ---------- |     |
|        \             2      /    |
|                                  |
|         /                 2 \1/2 |
|     1/2 |         (C8 + x)    |  |
|  - 2    | C11 + ---------- |    |
|         \             2      /   |
+-                                -+
```

მაგალითი. ამოხსენით დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

1) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + 4x, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2 + \dfrac{16}{3}e^{2x}, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \qquad y_2(0) = 1.$

ამოხსნა: 1)

```
>> [y1,y2] = dsolve('Dy1 = -y1 + y2','Dy2 = 3*y2');
>> pretty(y1),pretty(y2)
```

```
exp(-t) (4 C1 + C2 exp(4 t))
---------------------------------
              4

C3 exp(3 t)
```

2)

```
>> [y1,y2] = dsolve('Dy1 = -y1 + y2 + 4*x',...
'Dy2 = -y1 - 3*y2 + 16/3*exp(2*x)',...
'y1(0) = 0','y2(0) = 1','x');
>> pretty(simplify(y1)),pretty(simplify(y2))
```

```
          5 exp(-2 x)     exp(2 x)    2 x exp(-2 x)
3 x + -------------- + ---------- + --------------- - 2
               3             3             3
```

$$\exp(2\,x) - \exp(-2\,x) - x - \frac{2\,x\ \exp(-2\,x)}{3} + 1$$

მაგალითები

1. გახსენით ფრჩხილები:

ა) $(4x^4 + 5x^2 - 6x + 8)(2x^2 + 7x - 1)$;

ბ) $(a + b)^2$.

ამოხსნა: **ა)** პირველი გზა:

```
>> syms x
>> expand((4*x^4 + 5*x^2 − 6*x + 8)*(2*x^2 + 7*x − 1))
ans =
8*x^6 + 28*x^5 + 6*x^4 + 23*x^3 − 31*x^2 + 62*x – 8
```

მეორე გზა:

```
>> syms x
>> p = 4*x^4 + 5*x^2 − 6*x + 8;
>> q = 2*x^2 + 7*x − 1;
>> expand(p*q)
ans =
8*x^6 + 28*x^5 + 6*x^4 + 23*x^3 − 31*x^2 + 62*x – 8
```

ბ)

```
>> syms a b
>> expand((a + b)^2)
ans =
a^2 + 2*a*b + b^2
```

2. დაშალეთ მამრავლებად:

ა) $a^2 - b^2$;

ბ) $x^3 + 3x^2 + 3x + 9$.

ამოხსნა: **ა)**

```
>> syms a b
>> factor(a^2 − b^2)
ans =
(a − b)*(a + b)
```

ბ)

```
>> syms x
>> factor(x^3 + 3*x^2 + 3*x + 9)
ans =
 (x + 3)*(x^2 + 3)
```

3. გაამარტივეთ გამოსახულება:

ა) $\cos^2 a + \cos^2(a+b) - 2\cos a \cos(a+b)$;

ბ) $(1+\sin a+\cos a)(1-\sin a+\cos a)(1+\sin a+\cos a)(-1+\sin a+\cos a)$;

გ) $\sin 3a \sin^3 a + \cos 3a \cos^3 a$;

დ) $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)\cos(a+3\pi)}{\operatorname{ctg}(3\pi-a)\cos\left(\frac{7\pi}{2}-a\right)}$;

ე) $4\cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{2}+a\right)-4\sin\left(\frac{5\pi}{2}-a\right)\cos^3\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)$;

ვ) $\sin a \cos a \cos 2a \cos 4a \cos 8a$;

ზ) $4\sin a \sin\left(\frac{\pi}{3}-a\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+a\right)$.

ამოხსნა: ა)

```
>> syms a b
>> simplify(cos(a)^2 + cos(a + b)^2 - 2*cos(a)*cos(a + b))
ans =
 (cos(a + b) - cos(a))^2
```

ბ)

```
>> syms a
>> simplify((1 + sin(a) + cos(a))*(1 - sin(a) + cos(a))...
*(1 + sin(a) - cos(a))*(-1 + sin(a) + cos(a)))
ans =
sin(2*a)^2
```

გ)

```
>> syms a
>> simplify(sin(3*a)*sin(a)^3 + cos(3*a)*cos(a)^3)
ans =
cos(2*a)^3
```

დ)

```
>> syms a
>> simplify((cot(3*pi/2 + a)*cos(a + 3*pi))/(cot(3*pi - a)*cos(7...
```

```
* pi/2 − a)))
ans =
tan(a)
```

ე)

```
>> syms a
>> simplify(4 * cos(a − pi/2) * sin(pi/2 + a)^3 − 4 * sin(5 * pi/2 − a) ...
* cos(3 * pi/2 + a)^3)
ans =
sin(4 * a)
```

ვ)

```
>> syms a
>> simplify(sin(a) * cos(a) * cos(2 * a) * cos(4 * a) * cos(8 * a))
ans =
sin(16 * a)/16
```

ზ)

```
>> syms a
>> simplify(4 * sin(a) * sin(pi/3 − a) * sin(pi/3 + a))
ans =
sin(3 * a)
```

4. ჩაწერეთ pretty ბრძანების გამოყენებით:

$$f = \frac{\sqrt{e^x + y}(\ln z + \sin(xy))}{x^2 + y^2}.$$

ამოხსნა:

```
>> syms x y z
>> f = sqrt(exp(x) + y) * (log(z) + sin(x* y))/(x^2 + y^2);
>> pretty(f)
                           1/2
 (sin(x y) + log(z)) (y     + exp(x))
 -------------------------------------
                 2     2
                x  +  y
```

5. იპოვეთ $f(x) = 7x^5 + 4x^3 + 3x^2 - 6x + 3$ ფუნქციის წარმოებული.
ამოხსნა:

```
>> syms x
>> diff(7 * x^5 + 4 * x^3 + 3 * x^2 − 6 * x + 3)
```

ans =
35 * x^4 + 12 * x^2 + 6 * x – 6

6. იპოვეთ $T = f \cdot g/s$ ფუნქციის II რიგის წარმოებული, სადაც $f = \sin^2 x$, $g = \mathrm{tg}\, 2x$, $s = \cos 3x$.

ამოხსნა:

```
>> syms x
>> T = (sin(x)^2 * tan(2 * x)/cos(3 * x));
>> pretty(simplify(diff(T,x,2)))
            11            9            7            5           3
 -128sin(x)  - 320sin(x) + 856sin(x)  - 360sin(x)  + 6sin(x)  + 12sin(x)
----------------------------------------------------------------------------
         12             10              8            6            4          2
512sin(x) - 1152sin(x) + 1056sin(x) - 504sin(x) + 132sin(x) - 18sin(x) + 1
```

7. იპოვეთ ინტეგრალები:

ა) $\int x e^{7x+1} dx$; ბ) $\int x^2 e^{x^3+1} dx$;

გ) $\int \frac{(3x^2-4x+7)(x+4)}{(x-1)(x+2)} dx$; დ) $\int 3^x \sin^3(4x)\, dx$.

ამოხსნა: ა)

```
>> syms x
>> f = x * exp(7 * x + 1);
>> int(f,x)
ans =
exp(7 * x + 1) * (x/7 - 1/49)
```

ბ)

```
>> syms x
>> int(x^2 * exp(x^3 + 1),x)
ans =
 (exp(1) * exp(x^3))/3
```

გ)

```
>> syms x
>> f = (3 * x^2 - 4 * x + 7) * (x + 4)/((x - 1) * (x + 2));
>> int(f,x)
```

```
ans =
5*x + 10*log(x - 1) - 18*log(x + 2) + (3*x^2)/2
```

დ)

```
>> syms x
>> f = 3^x*sin(4*x)^3;
>> pretty(simplify(int(f,x)))
   x / 3 (4 cos(4 x) - sin(4 x) log(3))     12 cos(12 x) - sin(12 x) log(3) \
  3  | ------------------------------------ -- -------------------------------- |
     |               2                                     2                   |
     \         log(3)  + 16                          log(3)  + 144             /
-- ---------------------------------------------------------------------------
                                   2
                             log(3)  + 16
```

8. იპოვეთ ინტეგრალი:

$$\int_{3}^{5} \frac{e^x \sin x}{x+1}\,dx.$$

ამოხსნა:

```
>> syms x
>> f = (exp(x)*sin(x))/(x + 1);
>> pretty(int(f,x,3,5))
 Ei(4 i + 4) exp(- i - 1) i     Ei(4 - 4 i) exp(i - 1) i
 ------------------------------ -- ----------------------------
               2                               2
  Ei(6 - 6 i) exp(i - 1) i     Ei(6 i + 6) exp(- i - 1) i
+ ---------------------------- -- ------------------------------
               2                               2
```

9. იპოვეთ ინტეგრალი:

$$\iint_D (x^3+y^2)e^{x+y}\,dxdy, \qquad D:\ x\in[1;3], y\in[2;4].$$

ამოხსნა:

```
>> syms x y
>> f = (x^3 + y^2)*exp(x + 4);
>> int(int(f,x,1,3),y,2,4)
ans =
 (4*exp(5)*(32*exp(2) - 11))/3
```

10. იპოვეთ ინტეგრალი:

$$\iiint_D (x+y+z)e^{xyz}dxdydz, \quad D\colon\ x\in[0;1], y\in[0;2], z\in[1;3].$$

ამოხსნა:

```
>> syms x y z
>> f = (x + y + z) * exp(x * y * z);
>> int(int(int(f,x, 0,1),y, 0,2), z, 1,3)
ans =
6 * Ei(6) − 4 * Ei(2) − 2 * eulergamma + 2 * exp(2) − exp(6)
 − log(2916) + 1
```

11. იპოვეთ ზღვარი:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(e^{x^2}-1\right)}{\sqrt[5]{x^4+1}-1}.$$

ამოხსნა:

```
>> syms x
>> f = x^2 * sin(exp(x^2) − 1)/((x^4 + 1)^(1/5) − 1);
>> limit(f,x, 0)
ans =
5
```

12. ამოხსენით $ax^3-b=0$ განტოლება:

ამოხსნა:

```
>> syms a b x
>> x = solve('a * x^3 − b',x);
>> pretty(x(1,1)),pretty(x(2,1)),pretty(x(3,1))
  1/3
 b
----
  1/3
 a
```

```
         /  1/2          \
   1/3  |  3     i        |
  b     | ------  -- 1/2  |
         \  2            /
  ------------------------
             1/3
            a
          /          1/2 \
    1/3  |          3   i |
   b     | 1/2 + ------   |
          \          2   /
--  ---------------------
             1/3
            a
```

13. ამოხსენით არაწრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = e^{-x_1}, \\ -x_1 + 2x_2 = e^{-x_2}. \end{cases}$$

ამოხსნა:

```
>> syms  x1 x2
>> [x1,x2] = solve('2*x1 - x2 = exp(-x1)','-x1 + 2*x2 ...
 = exp(-x2)',x1,x2)
x1 =
0.56714329040978387299996866221036
x2 =
0.56714329040978387299996866221036
```

14. ამოხსენით განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} a\sin x - b\cos y + c = 0, \\ a\cos x + b\sin y - c = 0. \end{cases}$$

```
>> syms a b c x y
>> f1 = a*sin(x) - b*cos(x) + c;
>> f2 = a*cos(x) + b*sin(y) - c;
>> A = solve(f1,f2,x,y);
>> pretty(A.x(1)),pretty(A.y(1))
```

```
        /      2     2     2 1/2        \
        |    (a  + b  - c )      + c i |
  - log| - ----------------------- | i
        \            a - b i          /

       /          2     2         2     2     2 1/2              \
       |      a (c  - a  - c (a  + b  - c )      i + a b i) |
       | c - ------------------------------------------------ |
       |                          2     2     2 1/2              |
       |          (a - b i) ((a  + b  - c )      + c i)         |
  asin| ---------------------------------------------------- |
       \                           b                          /
```

>> pretty(A.x(2)),pretty(A.y(2))

```
       /     2     2     2 1/2       \
       |   (a  + b  - c )      + c i |
 - log| - ----------------------- | i
       \           a - b i         /

            /          2     2         2     2     2 1/2              \
            |      a (c  - a  - c (a  + b  - c )      i + a b i) |
            | c - ------------------------------------------------ |
            |                          2     2     2 1/2              |
            |          (a - b i) ((a  + b  - c )      + c i)         |
 pi - asin| ---------------------------------------------------- |
            \                           b                          /
```

>> pretty(A.x(3)),pretty(A.y(3))

```
      /             2     2     2 1/2 \
      |    c i - (a   + b   - c )     |
 - log| - ----------------------- | i
      \             a - b i           /

     /             2     2     2 1/2       2     2           \
     |     a (c (a   + b   - c )     i - a   + c   + a b i) |
     | c - ------------------------------------------- |
     |                             2     2     2 1/2       |
     |         (a - b i) (c i - (a   + b   - c )    )      |
asin| ----------------------------------------------- |
     \                         b                          /
```

>> pretty(A.x(3)),pretty(A.y(3))

```
      /            2     2     2 1/2 \
      |   c i - (a   + b   - c )     |
 - log| - ----------------------- | i
      \            a - b i           /

             /            2     2     2 1/2      2     2          \
             |     a (c (a   + b   - c )     i - a   + c   + a b i) |
             | c - ------------------------------------------ |
             |                           2     2     2 1/2       |
             |        (a - b i) (c i - (a   + b   - c )    )     |
pi - asin| ---------------------------------------------- |
             \                        b                         /
```

15. იპოვეთ $f(z) = \int\limits_0^z x\,\mathrm{tg}^2\,x\,dx$, შემდეგ ამოხსენით $f(z) = 0.1$ განტოლება.

>> syms x

>> f = x*tan(x)^2;

```
>> F = int(f) - 0.1;
>> solve(F,x)
ans =
 -227.75668794676864792546167991888
```

სავარჯიშოები

1. გახსენით ფრჩხილები და შეკრიბეთ მსგავსი წევრები:

$(2a^4+5a^3b-3a^2b^2-ab^3)+(8a^4-8a^3b+2a^2b^2-6ab^3)$;

$\left(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^2-1\right)\left(3x^2-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^2y-2xy^2\right)$;

$(5m^2+10mn-4n^2)\left(-\frac{1}{2}mn\right)$;

$(1{,}44p^2+0{,}6pq+0{,}25q^2)(1{,}2p-0{,}5q)$;

$(3x^4-6x^3y+4x^2y^2-9xy^3-y^4)(x^2-2xy+y^2)$;

$\left(\frac{4}{5}a^3b^3-1\frac{1}{4}a^2b^3\right)^2$.

2. დაშალეთ მამრავლებად:

$18ab^3-9b$;
$15x^3y^2+10x^3y-20x^2y^3$;
$ax^2-bx^2-bx+ax-a+b$;
$6by-15bx-4ay+10ax$;
$(4b+7a)^2-(8a-9b)^2$;
$4a^2-4a^2b^2+b^4$;
$125m^3+75m^2+15m+1$;
$x^4-2x^3+3x^2-5x-2$.

3. წარმოადგინეთ ნამრავლის სახით:

$1-\cos 70°-\cos 140°+\cos 150°$;

$1+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

წარმოადგინეთ ჯამის სახით:
$\sin 35° \sin 70° \cos 75°$.

4. გახსენით ფრჩხილები, პასუხები ჩაწერეთ pretty ბრძანებით:

$(1.44p^2 + 0.6pq + 0.25q^2)(1.2p - 0.5q)$;
$(6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5)(x^2 + 5x - 1)$;
$\left(\frac{3}{5}a^2 b + 5a^3 b^2\right)^2$;
$(7p^3 + 9p^4)^3 \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q\right)^2$;
$\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$;
$(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$.

5. დაშალეთ მამრავლებად. პასუხები ჩაწერეთ pretty ბრძანებით:

$10a^2 + 21xy - 14ax - 15ay$;
$12a^2 - 6ab + 3b^2 - 6ab$;
$12a^2b^2 - 6abc + 3ac^2 - 6a^2bc - c + 2ab$;
$\sin 10° + \sin 11° + \sin 15° + \sin 16°$;
$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$;
$\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha$;
$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha$.

6. იპოვეთ $F(x) = \dfrac{(x^3 + 4x^2 + 7x)(2x - 3)}{x^2 + 4}$ ფუნქციის I და II რიგის წარმოებულები.

7. იპოვეთ:

$$\int \frac{5x^2 - 7x + 4}{(x - 1)(x + 2)(x - 1)}dx;$$

$$\int x \cos 5x \, dx;$$

$$\int x^5 \ln x \, dx;$$

$$\int x^2 \sin(7x^3 + 4) \, dx;$$

$$\int x^2 e^{3x+4} dx.$$

8. იპოვეთ:

$$\int_{1}^{3}(x^2+4x+7)dx\,;$$

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos 6x\,dx;$$

$$\int_{1}^{3}x^2\ln x\,dx\,;$$

$$\int_{0}^{4}\left(\cos\left(x-\sqrt{2}\right)e^{\sin x}-1\right)dx\,;$$

$$\int_{-5}^{3}(\sin x-x^2\cos x)dx.$$

9. იპოვეთ $\iint(4x^2+6y^3)\sin(x^2+y^2)dxdy,\quad x\epsilon[2,3],\quad y\epsilon[1,4].$

10. იპოვეთ $\iiint(2x^2+y^2)\,cos(xz)zdxdydz,\ \ x\epsilon[0,1],\ \ y\epsilon[1,2],\ \ z=[3,4].$

11. იპოვეთ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-2\sin^2x+\sin x}{1+2\sin^2x-3\sin x};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)\sin(x-1)}{(x-1)^2};$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}.$$

12. ამოხსენით განტოლება x ცვლადის მიმართ:

$7(2x-a)-3(4x-a)-5(3x+2a)+a=0;$

$c(d+x)=ab-(x-c)d;$

$$\frac{x}{a-b}+\frac{3}{a+b}=\frac{4bx}{a^2-b^2};$$

$$5+\frac{96}{x^2-16}=\frac{2x-1}{x+4}-\frac{3x-1}{4-x};$$

$$x^3+px+q=0.$$

13. ამოხსენით განტოლება:

$$3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0;$$

$$\sin 3x-4\sin x\cos 2x=0;$$

$$e^x=8x-4;$$

$$2\sin^2\sqrt{1+x}-x^2+1=0;$$

$$\sin\frac{\pi}{2}x+\sqrt{1-x}-2=0;$$

$$x^2-\cos(0.5x^2+1)-3=0;$$

$$x-1+0.25\ln(1+x^2)-2=0;$$

$$e^x-\sin x+10x=0;$$

$$x-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos^2(x+0.2)=0;$$

$$\sqrt{5x+2}-e^x+10=0;$$

$$\operatorname{sh}x+\ln x-12=0;$$

$$\operatorname{ch}x-2\sqrt{x+1}-5=0.$$

14. გამოიყენეთ ფუნქცია fsolve და ამოხსენით სისტემები:

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=\sqrt{3},\\ x+y=\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x^2-y=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x^2+4y^2=3,\\ x^2-y^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\lg y-x=0,\\ xy-y=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}xyz=-1,\\ x^2+2y^2+4z^2=7,\\ 2x^2+y^3+6z=7,\end{cases}\qquad [x_0,y_0,z_0]=[1,1,1];$$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 34, \\ x^2 + 9y^2 - 5z^2 = 40, \\ x^2 z - y = 7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 2, \\ 2x - 3y + 7z = -1, \\ x - 6y + z = 3, \end{cases} \qquad [x_0, y_0, z_0] = [1, 1, 1].$$

14. დანართი
სავარაუდო ბილეთები I ტესტირებისათვის

№1

1. გამოთვალეთ:

$$A = \frac{\sqrt{\sin 2y + \cos 4y + \sqrt{e^{3x} + e^{-3x}}}}{(e^{3x} + e^{-3x})(\sin 2y + \cos 4y + 3)^3}\text{ , თუ } x = 1, \dots, 5,\ \ h_1 = 0{,}5;$$
$$y = 2, \dots, 6,\ h_2 = 0{,}5.$$

2. მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{a} = \left(31, -14, 6, e^{-3}, \cos\frac{\pi}{18}, \ln 5\right),\ \ \vec{b} = \left(\sqrt{47}, 2, 1, \sin 7\,, \operatorname{tg} 57°, \arcsin\frac{3}{5}\right),$$
$$\vec{c} = \left(\sqrt[3]{562}, -5, \cos 2\,, \sin 37°, \operatorname{tg} 47°\,, e^4\right).$$

იპოვეთ სკალარული ნამრავლები: $\vec{a} \cdot \vec{c}$ და $\vec{b} \cdot \vec{c}$.

3. შეადგინეთ მეოთხე რიგის ტეპლიცის T და პასკალის P მატრიცები. იპოვეთ მათი ჩვეულებრივი ნამრავლი $T \cdot P$, ელემენტობრივი ნამრავლი და $3T + 2P$.

4. მოცემულია პოლინომები:

$$P = x^7 \ln 5 + x^5 \sin 2 - e^4 x^4 + \sqrt{123}x^2 - x \operatorname{tg} 0{,}53 + 6,$$
$$Q = x^5 \cos 58° + x^3 \log_5 3 + \sqrt[3]{257}x^2 - x \arcsin\frac{2}{3} - 15.$$

იპოვეთ $P \pm Q,\ P \cdot Q$.

5. ამოხსენით ალგებრულ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases} \sqrt{327}x + y \ln 6 + e^3 z = \sqrt[3]{237}, \\ x \arccos\dfrac{4}{5} + 3\sqrt[3]{1056}y - 5z \ln 4 = 15, \\ x \operatorname{arctg} 1{,}73 - 4\sqrt[4]{312}y + 6e^{-3{,}5}z = -13. \end{cases}$$

№2

1. გამოთვალეთ:

$$B = \frac{2 + \arccos(\sin 3y)}{3^x + 2^{-x}} + \left(\frac{3^x + 2^{-x} - 4}{2 + \arccos(\sin 3y)}\right)^3,$$

თუ $x = 2, \dots, 8,\ \ h_1 = 1;\ \ y = 0°, \dots, 90°,\ h_2 = 15°.$

2. მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{a} = (51, -17, e^2, \cos 57°, \ln 6),\quad \vec{b} = \left(\sqrt{124}, 12, \sin 7, \operatorname{ctg} 33°, \arccos 0.85\right).$$

იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

3. შეადგინეთ მეოთხე რიგის მაგიური მატრიცა M. იპოვეთ მისი რანგი, დეტერმინანტი და შებრუნებული მატრიცა.

4. მოცემულია პოლინომები:

$$P = x^5 e^3 + x^4 \arccos\frac{3}{5} + \sqrt{247}x^3 - x^2 \operatorname{ctg} 46° + 4x - 12,$$

$$Q = x^4 \ln 3 - x^3 \operatorname{arctg} 1{,}72 - \sqrt[4]{235}x^2 + xe^{4{,}53} - 10.$$

იპოვეთ განაყოფი P/Q. მოძებნეთ ნაშთი.

№3

1. ჭურვის ტრაექტორია, რომელიც გასროლილია v_0 საწყისი სიჩქარით და α კუთხით ჰორიზონტისადმი, განისაზღვრება ფორმულით:

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} \cdot \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}, \quad g = 9{,}8.$$

გამოთვალეთ y, თუ

$$v_0 = 1, \dots, 5,\ \ h_1 = 1;\ \ x = 2, \dots, 10;\ h_2 = 2;\ \ \alpha = 0, \dots, \frac{\pi}{3},\ \ h_3 = \frac{\pi}{12}.$$

2. მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{a} = \left(13, 5, \sin 2, \operatorname{tg} 3, \sqrt{41}\right),\quad \vec{b} = \left(\ln 5, \cos 3, e^{-4}, 6, \sqrt{312}\right).$$

იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

3. ააგეთ მეხუთე რიგის მაგიური მატრიცა M. იპოვეთ $e^M, \ln M$.

4. მოცემულია პოლინომები:

$$P = e^2 x^6 - x^5 \arcsin\frac{3}{5} + \sqrt[5]{513}x^4 + 7x^2 - 6x + 15,$$

$$Q = x^6 \ln 6 - x^4 \operatorname{arcctg} 0{,}56 - \sqrt[3]{1029}x^3 + e^{2{,}53}x - 13.$$

იპოვეთ $(P \cdot Q)'$, $(P/Q)'$.

5. ამოხსენით სისტემა:

$$\begin{cases} 0{,}7x_1 + 1{,}2x_2 - 4{,}3x_3 + 4{,}25x_4 = 6{,}27, \\ 2{,}3x_1 + 2{,}4x_2 - 9{,}1x_3 + 2{,}15x_4 = 2{,}58, \\ 5{,}4x_1 - 6{,}24x_2 - 10{,}4x_3 + 4{,}71x_4 = -6{,}15, \\ \quad 9x_1 + 11x_2 + 12x_3 - 13x_4 = 0{,}25. \end{cases}$$

№4

1. დაკიდებული ხიდის ბაგირით მოხაზული წირის სიგრძე გამოითვლე-ბა ფორმულით:

$$s = \sqrt{y^2 + 4x^2} + \frac{e^2}{2^x}\operatorname{arcsh}\left(\frac{2^x}{y}\right).$$

იპოვეთ ბაგირის სიგრძე, თუ

$$y = 0,\ldots,100, \;\; h_1 = 20; \quad x = 0,\ldots,20, \;\; h_2 = 4.$$

2. მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{a} = (\ln 5, \sin 2, \operatorname{tg} 0{,}31, \cos 58^\circ), \quad \vec{b} = \left(\arcsin\frac{2}{3}, \operatorname{ctg} 47^\circ, e^2, \sqrt{524}\right),$$

$$\vec{c} = \left(\sqrt[3]{314},\; e^{-3}, \sin 72^\circ, 81\right).$$

იპოვეთ $\left|2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}\right|$.

3. ააგეთ მატრიცა:

$$A = \begin{pmatrix} \sin 1 & \dfrac{3}{19} & e^{-3} \\ 6\pi & 2^{-1{,}7} & \log_5 2 \\ \sqrt{327} & \sqrt[3]{443} & \cos 4 \end{pmatrix}.$$

იპოვეთ $\sqrt{A}$, $\cos A$.

4. მოცემულია პოლინომი:

$$Q = x^8 \operatorname{tg} 46^\circ + 4e^{-5}x^7 + x^5 \log_4 5 + \sqrt[4]{1275}x^4 - 5x^3 \arcsin\frac{2}{9} + 4x \sin 75^\circ + 7.$$

იპოვეთ მისი ფესვები.

5. ამოხსენით სისტემა:

$$\begin{cases} 1{,}57x_1 - 2{,}43x_2 - 9{,}15x_3 + 4x_4 = 6{,}27, \\ 2{,}37x_1 + 4{,}71x_2 - 1{,}58x_3 - 8{,}15x_4 = 9{,}15, \\ 3{,}15x_1 - 5{,}72x_2 + 6{,}15x_3 + 7{,}25x_4 = -8{,}27, \\ 9{,}12x_1 + 2{,}15x_2 - 5{,}24x_3 - 3{,}19x_4 = 2{,}15. \end{cases}$$

№5

1. გამოთვალეთ

$$z = e^{(x-\sin y)(x-\sin y)} + \sqrt{(x-\sin y)(x-\sin y)},$$

თუ $x = 4,\dots,6,\ \ h_1 = 0{,}5;\quad y = 8,\dots,10,\ \ h_2 = 0{,}5.$

2. მოცემულია ვექტორები:

$$\vec{a} = \left(\arcsin\frac{3}{5}, \sqrt[3]{612}, e^2\right), \quad \vec{b} = \left(\arccos\frac{2}{3}, \cos 5, \ln 3\right), \quad \vec{c} = (3, 7, -5).$$

იპოვეთ ამ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის და ტეტრაედრის მოცულობები.

3. ამოხსენით მატრიცული განტოლება $A \cdot X \cdot B = C$, სადაც

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \sin 4 & \cos 3 & \operatorname{tg} 1 \\ e^2 & \cos 55^\circ & \sin 57^\circ \\ \sqrt{5} & \sqrt[3]{3} & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e^2 & \ln 4 & \cos 15^\circ \\ \sin 14 & 6 & 7 \\ \sqrt[3]{5} & \sqrt{57} & -6 \end{pmatrix}.$$

4. მოცემულია მრავალწევრი:

$$P = \ln 6\, x^5 - x^4 \operatorname{arctg} 0{,}37 + \sqrt[4]{1257}x^3 + x^2 \operatorname{tg} 58^\circ - x \sin 47^\circ - 4.$$

იპოვეთ მისი მნიშვნელობები წერტილებში: $x = 3, -4,\ 5,\ 4.$

5. ამოხსენით სისტემა:

$$\begin{cases} x\cos 54^\circ - y \operatorname{tg} 13^\circ + 4\sqrt{128}z = \ln 3, \\ e^2 x + 2y\cos 3 + 3z = \sqrt{157}, \\ 5x + 3y - 6z = 13. \end{cases}$$

სავარაუდო ბილეთები II ტესტირებისათვის

№1

1. ერთ ფანჯარაში ააგეთ გრაფიკები, მიეცით სხვადასხვა შეფერილობა:

   ა) $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x \in [1;\ 3],$

   ბ) $x = 6(\cos t - t\sin t), \quad y = 6(\sin t - t\cos t), \ 0 \le t \le 8\pi.$

2. ააგეთ სივრცითი წირის გრაფიკი:

$$x = e^{-\frac{|t-50|}{50}}\sin t\,, \quad y = e^{-\frac{|t-50|}{50}}\cos t\,, \quad z = t, \quad 0 \le t \le 100.$$

3. ააგეთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

$$y = \begin{cases} -2\sin x\,, & -\pi \le x \le -\dfrac{\pi}{2}, \\ 5\sin x + 1, & -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x + 6, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

4. ააგეთ z ფუნქციის გრაფიკი surf, mesh, meshz, surfc, meshc, countour, waterfall ფუნქციების დახმარებით:

   $z = \ln(\mathrm{y}^2 - 5\mathrm{x} + 10)\,, \quad x,\ y \in [2{,}5;\ 5], \quad \mathrm{h} = 0{,}05.$

5. ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ (ezplot, ezplot3, ezsurf, ezmesh) ბრძანებების გამოყენებით:

   ა) $x = \ln(1 + t^2)\,, \ y = 2\,\mathrm{arctg}\,t - t, \ 0 \le t \le 1,$

   ბ) $z = \sqrt{|x\mathrm{y}|}, \quad x,\ y \in [-4;\ 4].$

6. დაყავით სამუშაო ფანჯარა 1×3 ზომის მატრიცად, ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მიღებულ ქვეფანჯრებში:

   ა) $y = 5x^2 + 3x - 7, \quad -3 \le x \le 3,$

   ბ) $z = \ln(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}) \quad \mathrm{x},\mathrm{y} \in [-5;\ 5], \quad \mathrm{h} = 0{,}1,$

   გ) $z = 25 - x^2 - y^2, \quad \mathrm{x},\mathrm{y} \in [-5;\ 5], \quad \mathrm{h} = 0{,}1.$

7. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

   $\ln(1 + x) + \sqrt[3]{1 + x^2} - 1.5 = 0.$

№2

1. ერთ ფანჯარაში ააგეთ გრაფიკები, მიეცით სხვადასხვა შეფერილობა:

   ა) $y = 2\sin x + \cos^2 x\,, \quad x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{17\pi}{6}\right],$

   ბ) $x = 7\left(\ln \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = 7\sin t, \quad \dfrac{\pi}{3} \le t \le \dfrac{\pi}{2}\,.$

2. ააგეთ სივრცითი წირის გრაფიკი:

   $x = (2 + 4\cos t)\cos t\,,\ \ y = (2 + 4\cos t)\sin t\,,\ \ z = t^2, \quad 0 \le t \le 20.$

3. ააგეთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

$$y = \begin{cases} x|x|\,, & -5 \le x \le 1, \\ \log_{\frac{1}{2}} x\,, & 1 < x \le e, \\ 3\ln x\,, & e < x \le 2e. \end{cases}$$

4. ააგეთ z ფუნქციის გრაფიკი surf, mesh, meshz, surfc, meshc, countour, waterfall ფუნქციების დახმარებით:

   $z = (x^2 + 1), \qquad x, y \in [-5;\ 5], \quad \mathrm{h} = 0{,}1.$

5. ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ (ezplot, ezplot3, ezsurf, ezmesh) ბრძანებების გამოყენებით:

   ა) $x = 5(2\cos t - \cos 2t), \quad y = 5(2\sin t - \sin 2t),\ \ 0 \le t \le 2\pi;$

   ბ) $z = \sqrt{|x^2 - y^2|}, \qquad x,\ y \in \left[-4;\ 4\right].$

6. დაყავით სამუშაო ფანჯარა 1×3 ზომის მატრიცად, ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მიღებულ ქვეფანჯრებში:

   ა) $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad 1 \le x \le 4;$

   b) $z = \dfrac{3x}{3x^2 - 4y^2}, \qquad x,\ y \in [-6;\ 6], \ \ \mathrm{h} = 0{,}1;$

   გ) $z = \sin(2x + 3y)\,, \qquad x,\ y \in \left[-2\pi;\ 2\pi\right], \ \ h = \pi/18.$

7. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

   $e^{3x} - \operatorname{arctg}(1 + x) - 2 = 0.$

№3

1. ერთ ფანჯარაში ააგეთ გრაფიკები, მიეცით სხვადასხვა შეფერილობა:

ა) $y = e^{-\frac{|x-30|}{30}} \sin x, \quad x \in [0;\ 100];$
ბ) $x = 4t - 5\sin t, \quad y = 4 - 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

2. ააგეთ სივრცითი წირის გრაფიკი:

$$x = 1{,}5\cos 2\pi t, \quad y = 1{,}5\sin 2\pi t, \quad z = \frac{t}{3}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

3. ააგეთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

$$y = \begin{cases} 2^{x-1} + 2, & -5 \le x \le 1, \\ 2x^2, & 1 < x < 5. \end{cases}$$

4. ააგეთ z ფუნქციის გრაფიკი surf, mesh, meshz, surfc, meshc, countour, waterfall ფუნქციების დახმარებით:

$$z = \ln \mathrm{tg}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right), \quad x,\ y \in [-4\!:\ 4], \quad h = 0{,}1.$$

5. ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ (ezplot, ezplot3, ezsurf, ezmesh) ბრძანებების გამოყენებით:

ა) $x = 6(\cos t - t\sin t), \quad y = 6(\sin t - t\cos t), \ 0 \le t \le 8\pi;$
ბ) $z = x^3\cos y^2 - x^2\sin(y-1) + xy - 5x + 3, \quad x,\ y \in [-5;\ 5].$

6. დაყავით სამუშაო ფანჯარა 1×3 ზომის მატრიცად, ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მიღებულ ქვეფანჯრებში:

ა) $y = \sin x + \cos 2x, \quad 0 \le x \le 2\pi;$
ბ) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}, \quad x,\ y \in [-4;\ 4], \quad h = 0{,}1;$
გ) $z = \sin(x + y), \quad x,\ y \in [-2\pi;\ 2\pi], \quad h = \pi/18.$

7. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$\sqrt[4]{x-1} - 0.5\sin 2x = 0.$$

№4

1. ერთ ფანჯარაში ააგეთ გრაფიკები, მიეცით სხვადასხვა შეფერილობა:

   ა) $y = 4\sin 2\pi x \cdot \cos 1{,}5\pi x \cdot (1 - x^2)x(2 + x), \quad x \in [-1;\ 1];$

   ბ) $x = 2t - 4t^3, \quad y = t^2 - 3t^4, \quad -1{,}5 \le t \le 1{,}5.$

2. ააგეთ სივრცითი წირის გრაფიკი:

   $x = e^{-t}, \quad y = e^{-t}\cos t, \quad z = e^{t}, \quad 0 \le t \le \ln 5.$

3. ააგეთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

$$\mathrm{y} = \begin{cases} 3\sin x + 6, & -\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0, \\ 3\sin x + 4\cos x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 3\cos x + 7, & \dfrac{\pi}{2} < x \le 2\pi. \end{cases}$$

4. ააგეთ z ფუნქციის გრაფიკი surf, mesh, meshz, surfc, meshc, countour, waterfall ფუნქციების დახმარებით:

   $z = \sin^2 x + \cos^2 x, \qquad x,\ y \in [-5;\ 5], \qquad h = 0{,}1.$

5. ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ (ezplot, ezplot3, ezsurf, ezmesh) ბრძანებების გამოყენებით:

   ა) $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t, \quad 0 \le t \le 10\pi;$
   ბ) $\mathrm{z} = \ln(4x^2 + 4y^2 - 1), \qquad x,\ y \in [-6\colon\ 6].$

6. დაყავით სამუშაო ფანჯარა 1×3 ზომის მატრიცად, ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მიღებულ ქვეფანჯრებში:

   ა) $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}, \quad 1 \le x \le 5;$
   ბ) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \qquad x,\ y \in [-5;\ 5], \qquad \mathrm{h} = 0{,}1;$
   გ) $z = \cos(0{,}52x + 0{,}63y), \qquad x,\ y \in [-2\pi;\ 2\pi], \qquad h = \pi/18.$

7. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

   $\pi \sin \sqrt[5]{1 + x^2} - 10x = 0.$

№5

1. ერთ ფანჯარაში ააგეთ გრაფიკები, მიეცით სხვადასხვა შეფერილობა:

   ა) $y = 1{,}8^{-1{,}5\sqrt{x^2+3x}} \sin x \cos 0{,}5x, \qquad x \in [-3;\ 3];$

   ბ) $x = 8\cos^3 t,\ \ y = 8\sin^3 t,\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

2. ააგეთ სივრცითი წირის გრაფიკი:

   $x = 10\cos^2 t,\ \ y = 5\sin 2t,\ \ z = 10|\sin t|,\quad -2\pi \le t \le 2\pi.$

3. ააგეთ უბან-უბან მოცემული ფუნქციის გრაფიკი:

$$y = \begin{cases} x+2, & -2 \le x \le -1, \\ x^2+1, & 1 < x \le 1, \\ x+3, & 1 < x \le 3. \end{cases}$$

4. ააგეთ z ფუნქციის გრაფიკი surf, mesh, meshz, surfc, meshc, countour, waterfall ფუნქციების დახმარებით:

   $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad x,\ y \in [-3;\ 3], \quad h = 0{,}05.$

5. ააგეთ ფუნქციათა გრაფიკები „მარტივი გრაფიკის“ (ezplot, ezplot3, ezsurf, ezmesh) ბრძანებების გამოყენებით:

   ა) $x = \mathrm{e}^t,\ \ y = \mathrm{e}^{-t},\ \ z = t\sqrt{2},\quad 0 \le t \le 1;$

   ბ) $z = \ln(x^2 + y), \quad x, y \in [-5;\ 5].$

6. დაყავით სამუშაო ფანჯარა 1×3 ზომის მატრიცად, ააგეთ მოცემული ფუნქციების გრაფიკები მიღებულ ქვეფანჯრებში:

   ა) $y = x^2 - 6x^4, \quad [0;\ 2\pi];$

   ბ) $z = x^2 + y^2 - 16, \quad x, y \in [-4;\ 4], \quad h = 0{,}1;$

   გ) $z = \cos(2x - 3y), \quad x,\ y \in [-2\pi;\ 2\pi] \quad h = \pi/18.$

7. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2} + 1\right) - \mathrm{e}^{5x} + 1 = 0.$$

სავარაუდო ბილეთები დასკვნითი გამოცდისათვის

№1

1. ააგეთ inline და Anonymous ფუნქციები და იპოვეთ მათი მნიშვნელობები მითითებულ წერტილებში:

ა) $f = x\,\mathrm{arctg}\,x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - 1, \qquad x = 3;$

ბ) $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)\,, \quad x = 4.$

2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:
ა) სიმპსონის ფორმულით; ბ) ტრაპეციების ფორმულით. პასუხები შეადარეთ.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{3\sin x + 2\cos x}\,dx.$$

3. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2+3}dxdy, \qquad 1 \le x, y \le 2.$$

4. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$\sin^2\sqrt{1+x} - (1+x^2) = 0.$$

5. იპოვეთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1, \qquad [-5;\ 5].$$

6. იპოვეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^3+y^2)}, \qquad x, y \in [-3;\ 3].$$

№2

1. ააგეთ inline და Anonymous ფუნქციები და იპოვეთ მათი მნიშვნე-ლობები მითითებულ წერტილებში:

ა) $f = x^3 - e^x(x^2 - 1)$, $\quad x = 5$;

ბ) $z = x^4 + y^4 - 2x + 4xy - 2y^2$, $\quad x = 3$, $\quad y = 4$.

2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:
ა) სიმპსონის ფორმულით; ბ) ტრაპეციების ფორმულით. პასუხები შეადარეთ.

$$\int_{-1,2}^{0} \frac{\lg(\sqrt{4-x} + \sqrt{x^2+1})}{e^x}\, dx.$$

3. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy, \qquad 0 \le x, y \le 1.$$

4. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$\sin\frac{\pi}{2}x + \sqrt{1-x} - 2 = 0.$$

5. იპოვეთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$y = x + \cos 2x, \qquad [0;\, \pi].$$

6. იპოვეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)\,, \qquad x, y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

№3

1. ააგეთ inline და Anonymous ფუნქციები და იპოვეთ მათი მნიშვნე-ლობები მითითებულ წერტილებში:

ა) $f = 1 + \pi \operatorname{sh} x - x^2, \quad \mathrm{x} = 0{,}5;$

ბ) $z = x^3 + y^3 + 3xy, \quad x = 3, \quad y = 4.$

2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:
ა) სიმპსონის ფორმულით; ბ) ტრაპეციების ფორმულით. პასუხები შეადარეთ.

$$\int_{-1}^{0} x \arccos\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}\,dx.$$

3. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint_D \sqrt{xy + y^2}dxdy, \quad 2 \le x \le 3, \quad 1 \le y \le 2.$$

4. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$x^2 - \cos(0.5x^2 + 1) = 0.$$

5. იპოვეთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$y = x \ln x\ , \quad [0{,}5; e].$$

6. იპოვეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$z = x^4 + y^4 - 2x + 4xy - 2y^2, \quad x, y \in [-4;\ 4].$$

№4

1. ააგეთ inline და Anonymous ფუნქციები და იპოვეთ მათი მნიშვნელობები მითითებულ წერტილებში:

   ა) $f = x^2 - \cos(0.5x^2 + 1)$, x = 6;

   ბ) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$, $x = 3$, $y = 5$.

2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:
   ა) სიმპსონის ფორმულით; ბ) ტრაპეციების ფორმულით. პასუხები შეადარეთ.

$$\int_0^{1,2} \frac{\sqrt[3]{x+4} + \sin x}{1 + \cos x^2}\, dx.$$

3. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\, dxdy, \quad 1 \le x, y \le 2.$$

4. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$x - 1 + 0.25\ln(1 + x^2) - 10x = 0.$$

5. იპოვეთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$y = x^2 e^{-x}, \quad [-1; 3].$$

6. იპოვეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$z = x^3 + y^3 + 3xy, \quad x, y \in [-3;\ 3].$$

№5

1. ააგეთ inline და Anonymous ფუნქციები და იპოვეთ მათი მნიშვნე-ლობები მითითებულ წერტილებში:

ა) $f = x - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \sin\sqrt{\dfrac{\pi}{3}x}, \qquad x = 2{,}57;$

ბ) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27, \qquad x = 4, \quad y = 5.$

2. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:
ა) სიმპსონის ფორმულით; ბ) ტრაპეციების ფორმულით. პასუხები შეადარეთ.

$$\int_{1,28}^{2,56} \frac{x^2 + \sin\sqrt{x}}{2 + \cos x}\, dx.$$

3. გამოთვალეთ ორჯერადი ინტეგრალი:

$$\iint_D (4x^2 + 6y^3)\sin(x^2 + y^2)dxdy, \quad x \in [2;3], \quad y \in [1;4].$$

4. ამოხსენით ტრანსცენდენტული განტოლება:

$$e^x - \sin x + 10x = 0.$$

5. იპოვეთ ერთი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$z = x^2 + 3xy - 15x - 12y, \qquad x, y \in [-4;\ 4].$$

6. იპოვეთ ორი ცვლადის ფუნქციის ლოკალური ექსტრემუმი:

$$z = \sin x + \sin y + \cos(x+y), \qquad x, y \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right].$$

გამოყენებული ლიტერატურა

1. თ. ბუჩუკური, MATLAB-ი ლექციების კონსპექტი.
2. კ. ნინიძე, შესავალი MATLAB დაპროგრამებაში, სოხუმის სახ. ნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2009 წ.
3. ზ. ბაიაშვილი, MATLAB პროგრამული პაკეტის გამოყენების საფუძვლები, თბილისი, სტუ, 2010 წ.
4. ნ. მჭედლიშვილი, ი. დავითაშვილი, თ, ხუციშვილი, ი. მოსაშვილი, მოდელირების ინსტრუმენტული საშუალება MATLAB-ი (I ნაწილი), თბილისი, სტუ, 2009 წ.
5. И. Ануфриев, А. Смирнов, Е. Смирнова, MATLAB 7 (наиболее полное руководство), 1097 ст.
6. Ю. Кетков, А. Кетков, М. Шульц, MATLAB 7 (программирование, численные методы), Санкт-Петербург, 2005 г. (753 ст.)
7. Л. Боловко, Т. Бутусов, MATLAB для студента, Санкт-Петербург, 2005 г. (318 ст.)
8. П. Мироновский, К. Петрова, Введение в MATLAB, учебное пособие, Санкт-Петербург, 2006 г. (163 ст.)
9. Amos Gilat, MATLAB – An introduction with applications, Department of Mechanical Enginering The Ohio State University.
10. დ. ნატროშვილი, ლ. გიორგაშვილი, . . . „მათემატიკა ეკონომისტებისათვის“, თბილისი, 1999 წ.

სარჩევი

შესავალი 3
1. მუშაობის პირველი ნაბიჯები, სამუშაო მაგიდის მოკლე მიმოხილვა 7
2. უმარტივესი გამოთვლები, გამოთვლების შედეგების ფორმატირება, ცვლადები 9
3. ვექტორები, მატრიცები, მასივები, წრფივ განტოლებათა სისტემები 29
ა) ვექტორები: კონსტრუირება და ოპერაციები 29
ბ) მატრიცები 39
გ) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის ხერხები.. 59
4. პოლინომები 65
5. ფუნქცია, მისი აგების სახეები 74
6. გრაფიკა 80
ა) ორგანზომილებიანი გრაფიკა 80
ბ) სამგანზომილებიანი გრაფიკა 83
7. კოორდინატთა გარდაქმნა 177
8. ფუნქციათა ინტერპოლაცია 181
9. განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლა, ორჯერადი ინტეგრალის გამოთვლა 191
10. ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნა 202
11. წრფივი პროგრამირება 211
12. ტრანსცენდენტული განტოლებების რიცხვითი ამოხსნა 219
13. სიმბოლური გამოთვლები 223
14. დანართი 258
გამოყენებული ლიტერატურა 272

რედაქტორი ნ. ქაფიანიძე

გადაეცა წარმოებას 10.03.2014. ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17.04.2014. ქაღალდის ზომა 60X84 1/8. პირობითი ნაბეჭდი თაბახი 17.

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, თბილისი, კოსტავას 77

Verba volant,
scripta manent