საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ელგუჯა ყუბანეიშვილი

ბიოსიგნალების ციფრული დამუშავება

ლექციების კურსი

თბილისი 2013

შესავალი

ადამიანის ორგანიზმში მიმდინარე ფიზიოლოგირი პროცესები წარმოადგენენ რთულ მოვლენებს, რომლებიც შეიცავენ შემავალ და გამომავალ ნაკადებს, რომლებიც შეიძლება იყოს როგორც მექანიკური, ასევე ელექტრული და ბიოქიმიური. მრავალი ფიზიოლოგირი პროცესი შეიძლება წარმოდგენილი იყოს სიგნალის სახით, რომელსაც ბიოელექტრული ან მოკლედ ბიოსიგნალი ეწოდება. ცნობილია დიაგნოსტიკის მრავალი მეთოდი და საშუალება, რომელიც ეფუძნება ადამიანის ორგანიზმის სხვადასხვა ორგანოების მიერ გენრირებული ბიოსიგნალების რეგისტრაციას, რომლებიც წარმოადგენენ დაავადების დიაგნოსტიკისა და მკურნალობის პროცესში ორგანისზმის სხვადახხვა ორგანოების ფუნქციონალური მდგომარეობის შეფასების მეთოდს. თავის მხრივ ბიოსიგნალები შეიძლება იყოს ელექტრული – პოტენციალის ან დენის სახით, ბიოქიმიური – ჰორმონების და ნეიროტრანსმიტერების სახით, ფიზიკრი – წნევის და ტემპერატრის სახით.

სამკურნალო–დიაგნოსტიკური პროცესი მოიცავს შემდეგ ეტაპებს: მონაცემების მიღება, მონაცემთა ანალიზი, გადაწყვეტილების მიღება და მკურნალობა. მონაცემთა მიღების ეტაპი გულისხმობს პაციენტის მდგომარეობაზე მაქსიმალურად შესაძლო ინფორმაციის მიღებას. ექიმს თვითოონ შეუძლია იმსჯელოს პაციენტის მდგომარეობაზე გარეგანი დათვალიერების და გამოკითხვის შედეგად. მაგრამ ხშირ შემთხვევაში დიაგნოზის დასმისათვის და მკურნალობის დასანიშნად ექიმის გრძნობის ორგანოები არ არის საკმარისი, ამ შემთხვევაში ექიმს ეხმარება შესაბამისი ხელსაწყოები და აპარატები, რომელთა საშალებით შესაძლებელია პაციენტის მდგომარეობის უფრო სრული სურათის წარმოდგენა. ასეთ ხელსაწყოების მაგალითებია: სიცხის გამზომი თერმომეტრები, სისხლის წნების მანომეტრები, სპირომეტრები, *PH* - მეტრები და სხვა. გარდა ამისა, გამოიყენება უფრო რთული მონიტორები, ექოსკანერები, ტომოგრაფები და ა.შ.

მონაცემთა ანალიზის ეტაპი ასევე გულისხმობს სხვადასხვა ხელსაწყოს ფართო გამოყენებას, ძირითადად მიკროპროცესორულს და კომპიურეტულს. მაგალითისთვის ამ ეტაპზე საჭიროა შეიქმნას მონაცემთა სტატისტიკური დამუშავების სისტემა, მონაცემთა ბაზის შევსების და მასში არსებული ინფორმაციის გამოყენება და ა.შ, რაც შეეხება მკურნალობის ეტაპს, ამ შემთხვევაში მექანიკური და ელექტრული საშალებების გამოყენება მოითხოვს სპეციალურ მომზადებას და ცოდნას.

დავადება ან რომელიმე ბიოლოგიური სისტემის დეფექტი იწვევს ნორმალური ფიზიოლოგიური პროცესის სახეცვლილებას, რომელსაც მივყევართ ნორმალურისაგან განსხვავებულ პათოლოგიურ პროცებთან. აქედან გამომდინარე, შესაძლებელია ბიოსიგნალის ანალიზის საფუძველზე შევაფასოთ სისტემის მდგომარეობა.

ფიზიოლოგირი სისტემების კვლევისათვის პირველ ნაბიჯს წარმოადგენს შესაბაისი გადამწოდების და აპარატის შექმნა შესასწავლი პროცესის ელექტრლ სიგნალში გარდაქმნისათვის. შემდეგ ეტაპს წარმოადგენს მიღებული ბიოსიგნალის დამუშავება, რომელიც ექიმისათვის ყოველთვის არ წარმოადგენს მარტივ ამოცანას. ასე მაგალითად, ხშირად კლინიკურად საჭირო ინფორაცია ბიოსიგნალში შენიღბულია ხმაურით. გარდა ამისა, როგორც წესი, ბიოსიგნალის პარამეტრების უშუალოდ ვიზუალურად აღქმა შეუძლებელია სხვადასხვა მიზეზის გამო, მაგალითად გულის ტონების სიხშირული დიაპაზონი ახლოსაა

ან სულაც დაბალია ადამიანის მიერ ბგერის აღქმის სიხშირესთან; ზედაპირული ელექტრომიოგრაფიული სიგნალი საკმაოდ რთულია ვიზულური ანალიზისათვის. გარდა ამისა, სხვადასხვა ექიმის და სპეციალისტის სუბიექტური მოსაზრებიდან გამომდინარე შეუძლებელს ხდის მოვლენის საიმედო შეფასებას და სხვა ასეთი ფაქტორები. ამის გამო საჭირო ხდება არა მარტო თანამედროვე აპარატურის შექმნა, არამედ ბიოსიგნალების ობიექტური ანალიზის მეთოდების დამუშავება.

ბიოსიგნალების ანალიზის ძირითადი მიზნებია:

- ინფორმაციის შეგროვება, მოვლენის რაოდენობრივი შეფასების და გამოსაკვლევი სისტემის ინტერპრეტაციისათვის;
- დიაგნოსტიკა, პათოლოგიური დარღვევების გამოვლენისათვის;
- მონიტორინგი, გამოსაკვლევ სისტემაზე უწყვეტად ან პერიოდულად ინფორმაციის მიღებისათვის;
- თერაპია და მართვა, სისტემის მოდიფიცირება გარკვეული შედეგის უზრუნელყოფისათვის;
- შეფასება, მკურნალობის ეფექტის რაოდენობრივი შეფასება.

ზოგადად ბიოსიგნალები შეიძლება დავყოთ ორ დიდ ჯგუფად:

- ბიოსიგნალები, რომლებიც მოიხსნებიან ობიექტებიდან პირდაპირი ელექტრული ძაბვის სახით (კარდიოგრამა, მიოგრამა, ენცეფალოგრამა, რეოგრამა და ა.შ);
- ბიოსიგნალები, რომლებიც ასახავენ ორგანოს მდგომარეობას გამზომი - გარდამქნელების დახმარებით, სადაც ხდება არაელექტრული მაჩვენებლების (წნევა, ტემპერატურა, სიმკვრივე და ა.შ) გარდაქმნა ელექტრულ სიგნალებში.

დღეისთვის კლინიკურ-ექსპერიმენტალურ კვლევებში ფართოდ გამოიყენებიან შემდეგი ბიოსიგნალები:

- კარდიოგრამა, გულის ელექტრული აქტივობის გამოკვლევისათვის;
- ენცეფალოგრამა, თავის ტვინის ელექტრული აქტივობის გამოკვლევისათვის;
- ელექტრომიოგრამა, კუნთების ელექტრული აქტივობის გამოვკვლევისათვის;
- აუდიოგრამა, სმენის უნარის შესწავლისათვის;
- პლეტიზმოგრამა, ორგანოების ან სხეულის ნაწილის მოცულობის ცვლილებების შესასწავლად;
- ფონოკარდიოგრამა, გულის ტონების და ხმაურის რეგისტრაცია და დიაგნოსტიკური ინტერპრეტაციისათვის;
- გასტროგრამა, კუჭისა და ნაწლავების მოქმედების შესწავლისათვის და ბევრი სხვა.

ბიოსიგნალების მოხსნის პროცედურები შეიძლება დავყოთ შედეგ კატეგორიებად: ინვაზიური ან არაინვაზიური, აქტიური ან პასიური. ინვაზიური პროცედურა ითვალისწინებს ორგანიზმის შიგნით გადამწოდის ან სხვა მოწყობილობის მოთავსებას. პაციენტებისათვის უფრო მისაღებია სხვადასხვა რისკის თავიდან აცილებისათვის არაინვაზიური პროცედურები, რომლებსაც მიეკუთვნებიან, მაგალითად კანის ზედაპირიდან ელექტროდების საშუალებით ბიოსინალების მოხსნა.

მონაცემთა მოხსნის აქტიური მეთოდები მოითხოვენ სისტემაზე გარე სტიმულების ზემოქმედებას საჭირო რეაქციის ან სიგნალის მიღებისათის. მაგალითად ელექტრომიოგრამის რეგისტრაციისათვის საჭიროა კუნთების შეკუმშვა. პასიური პროცედურები არ მოითხოვენ პაციენტისაგან რაიმე მოქმედებას, მაგალითად კარდიოგრმის რეგისტრაცია.

მიღებული ბიოსიგნალები ექვემდებარებიან დამუშავებას სიგნალების დამუშავების თეორიაში არსებულ მეთდებს, აქედან გამომდინარე, საჭიროა შევისწავლოთ სიგნალების დისკრეტული დამუშავების მეთოდები.

1. სიგნალების ანალიზის საფუძვლები

1.1 სიგნალის ცნება

ბუნებაში მიმდინარე რეალური ფიზიკური მოვლენები უმეტესწილად დროზე დამოკიდებული პროცესებია, რომლებიც წარმოდგენილნი არიან სიგნალების სახით. აქედან გამომდინარე, სიგნალი ეწოდება რომელიმე პროცესს, რომელიც გამოიყენება შეტყობინების ასახვის, რეგისტრაციისა და გადაცემისათვის. არსებობს სიგნალების გადაცემის და დამუშავების უამრავი მაგალითი. მაგალითად, ადამიანის გრძნობის ორგანოები (მხედველობით, სმენითი, ყნოსვის და სხვა) სიგნალების მეშვეობით ტვინს გადასცემენ უამრავ ინფორმაციას, სადაც ხდება მათი დამუშავება და შესაბამისი რეაგირება.

სიგნალის დამუშავების ამოცანაა სიგნალში არსებლი ინფორმაციული მონაცემების აღმოჩენა და მათი გარდაქმნა მოხერხებულ ფორმაში, შემდგომში მისი გამოყენებისათვის. სიგნალის ანალიზს ქვეშ იგულისხმება არა მარტო მისი მათემატიკური გარდაქმნა, არამედ ამ გარდაქმნის შედეგად შესაბამისი პროცესების და ობიექტების სპეციფიკურ თავისებურებებზე დასკვნების გაკეთება.

სიგნალის ანალიზის მიზანია:

- სიგნალის რიცხვითი პარამეტრების განსაზღვრა (ენერგია, საშალო სიმძლავრე, საშუალო კვადრატული მნიშვნელობა და ა.შ);
- სიგნალის დაშლა ელემენტარულ მდგენელებად სხვადასხვა სიგნალების თავისებურებების შესადარებლად;
- სიგნალებს შორის დამოკიდებულებების რაოდენობრივი განსაზღვრა და შეფასება ასეთი შეფასებები მიიღებიან კორელაციური და სპექტრული ანალიზის მეთოდების გამოყენებით;

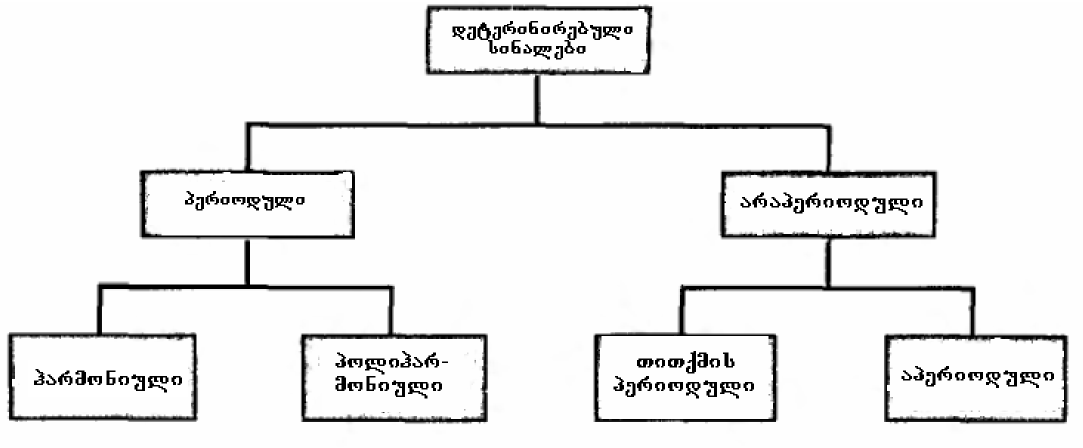
სიგნალები ზოგადად შეიძება დავყოთ ორ ჯგუფად: დეტერმინირებულ და შემთხვევით სიგნალებად. დეტერმინირებულია ისეთი სიგნალი რომელიც ზუსტად აღიწერება მათემატიკური ფორმულებით ე.ი. დროის ნებისმიერ მომენტში შესაძლებელია მისი ზუსტი მნიშვნელობის განსაზღვრა.

სიგნალს ეწოდება შემთხვევითი, როცა მისი აღწერა ზუსტი მათემატიკური ფორმულებით შეუძლებელია. შემთხვევითი სიგნალი გარკვეული ალბათობით ღებულობს კონკრეტულ მნიშვნელობებს.

სიგნალების დამუშავების თეორიაში ხშირად იხმარება ტერმინები: სიხშირე, პერიოდი, ციკლური სიხშირე. გავიხსენოთ, რომ თუ რაიმე სიგნალი წამში მეორდება მაგალითად, 10-ჯერ, მაშინ ამბობენ, რომ ამ სიგნალის ციკლური სიხშირე ტოლია $f = 10$ ჰც (ციკლი წამში), ხოლო პერიოდი $T = 1/10$ (წმ). როგორც ცნობილია, პერიოდი და სიხშირე უკუპროპორციული სიდიდეებია, ე.ი. $T = 1/f$, ხოლო კუთხური სიხშირე ω, რომელიც რადიანებში იზომება, ციკლურ სიხშირესთან არის შემდეგ დამოკიდებულებაში: $\omega = 2\pi f$.

1.2 დეტერმინირებული სიგნალების კლასიფიკაცია.

დეტერმინირებული სიგნალების კლასიფიკაცია წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



პერიოდულ სიგნალების მიეკუთვნებიან ჰარმონიული და პოლიჰარმონიული სიგნალები. ჰარმონიულ სიგნალებს მიეკუთვნებიან ტრიგონომეტრიული ფუნქციები (სინუსი, კოსინუსი). სინუსოიდური სიგნალი აღიწერება შემდეგი მათემტიკური დამოკიდებულებით:

$$x(t) = A\sin(2\pi\, f_0 t + \varphi) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

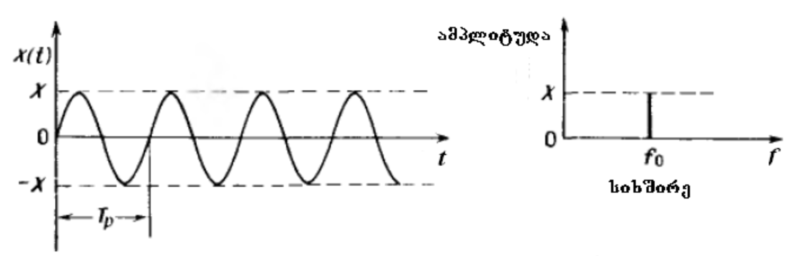
სადაც A - ამპლიტუდაა და f_0 სიგნალის ციკლური სიხშირე ჰერცებში $\omega = 2\pi f_0$-კუთხური სიხშირე რადიანებში, φ - საწყისი ფაზური კუთხე რადიანებში. სინუსოიდის რხევის პერიოდი ტოლია:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

პრაქტიკულ კვლევებში ხშირად ფაზურ კუთხეს იღებენ $\varphi = 0$ ტოლს ან სულაც უგულებელყოფენ, მაშინ გვექნება:

$$x(t) = A\sin(2\pi\, f_0)$$

ასეთი სინუსოიდის რეალზაცია წარმოდგენილია ნახ. 1.1ა და მისი შესაბამისი სპექტრი ნახ. 1.1ბ. აქ A = 1.



ა ბ

ნახ. 1.1

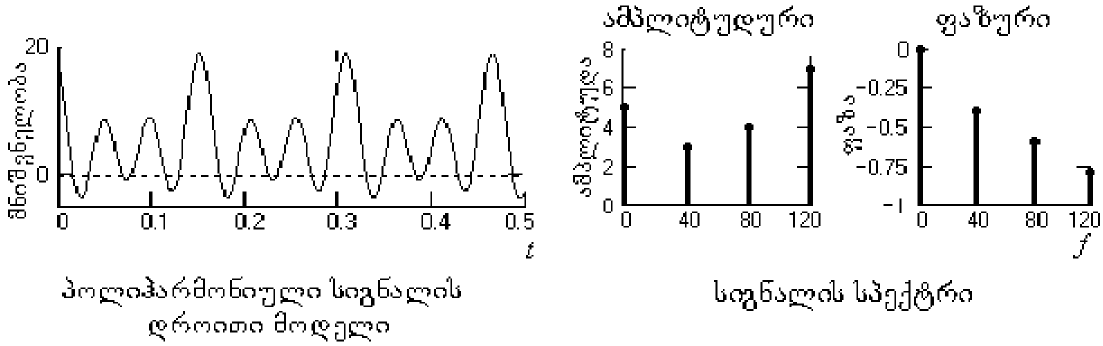
პოლიჰარმონიული სიგნალები ზუსტად იმეორებენ თავიანთ მნიშვნელობებს გარკვეული დროით ინტერვალის შემდეგ ე.ი

$$x(t) = x(t \pm nT), \quad n = 1,2,3,...... \qquad (1.1)$$

პოლიჰარმონიული სიგნალები წარმოადგენენ პერიოდულ სიგნალების ყველაზე გავრცელებულ ჯგუფს და აღიწერებიან ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით

$$x(t)=\sum_{k=0}^{N} A_k \sin(\omega_k t+\varphi_k)\,,\quad k=0,1,2,.....$$

ქვემოთ მოყვანილ ნახ. 1.2 წარმოდგენილია პოლიჰარმონიული სიგნალის მაგალითი ოთხი მდგენელით და შესაბამისი ამპლიდტუდური და ფაზური სპექტრებით.



ნახ. 1.2

ამ სიგნალის მათემატიკური მოდელი ანუ ფორმულა შემდეგია:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{3} A_k \cos(2\pi\, f_k t+\varphi_k) \qquad (1.2)$$

სადაც $A_k=(5,3,4,7)$ - ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდებია, $f=(0,\ 40,\ 80,\ 120)$- ჰარმონიული მდგენელების სიხშირეებია, ხოლო $\varphi_k=(0,\ -0{,}4,\ -0{,}6,\ -0{,}8)$ შესაბამისი საწყისი ფაზური წანაცვლებებია.

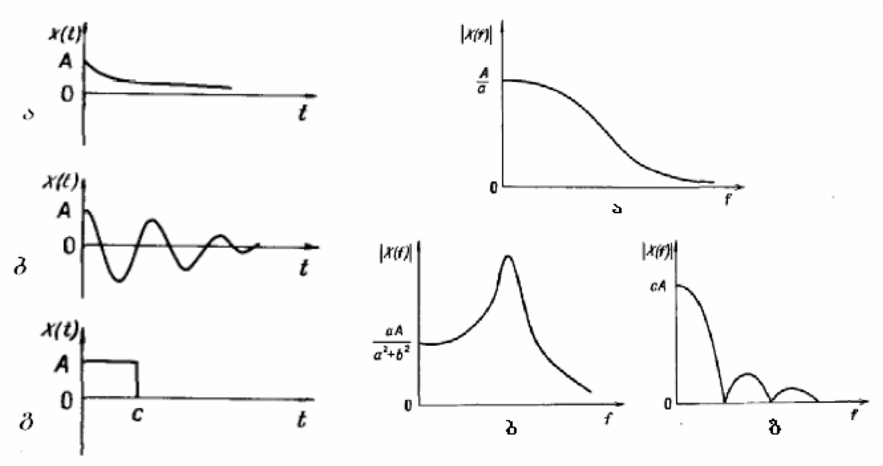
ამრიგად, ნებისმიერი ფორმის სიგნალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ ძირითადი რხევის სიხშირის $f_0=\frac{1}{T}$ ან $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ ჯერადი სიხშირეების ჰარმონიული რხევების ჯამით. ასევე უნდა შევნიშნოთ, რომ პერიოდული სიგნალების სპექტრი დისკრებულია.

თითქმის პერიოდული სიგნალები ძალზე წააგავენ პოლიჰარმონიულ სიგნალებს. მაგრამ თუ სიგნალი შექმნილია სხვადასხვა სიხშირის ორი ან მეტი ჰარმონიული სიგნალების ჯამისაგან, მაშინ ასეთი სიგნალი არ იქნება პერიოდული. პერიოდული იქნება მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა ნებისმიერი ორი სიხშირის ფარდობა იქნება რაციონალური რიცხვი. ამ შემთხვევაში არსებობს ძირითადი (ფუნდამენტალური) სიხშირე, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) განტოლებას. აქედან გამომდინარე სიგნალი

$$x(t)=A_1\sin(2t+\varphi_1)+A_2\sin(3t+\varphi_2)+A_3\sin(7t+\varphi_3)$$

პერიოდულია, რადგან 2/3, 2/7, და 3/7 რაციონალური რიცხვებია (ფუნდამენტალური პერიოდი უსასრულოდ დიდია). თითქმის პერიოდული სიგნალები განისაზრებიან (1.2) გამოსახულებით და მათ სპექტრიც დისკრეტულია.

აპერიოდული სიგნალები წარმოადგენენ არაპერიოდული სიგნალების ძირითად ჯგუფს და განისაზღვრებიან ნებისმიერი დროითი ფუნქციებით. აპერიოდულ სიგნალებს მიეკუთნებიან გარდამავალი (იმპულსური) სიგნალები, რომლებიც წარმოდგენილნი არიან ნახ. 1.3 - ზე თავიანთი სპექტრებით.



ნახ. 1.3

სადაც $|X(f)|$ სპექტრის მოდულია.

1.3 სიგნალის ენერგია და სიმძლავრე

დავიწყოთ ენერგიის და სიმძლავრის ფიზიკური ცნებებით. თუ R წინაღობის რეზისტორს მოვდებთ მუდმივ ძაბვას, მაშინ რეზისტორის გამოყოფილი სიმძლავრე ტოლია:

$$P = \frac{U^2}{R}$$

T დროის განმავლობაში რეზისტორი გამოყოფს თბურ ენერგიას, რომელიც ტოლია:

$$E = \frac{U^2 T}{R}$$

დავუშვათ იგივე რეზისტორს მოვდეთ არა მუდმივი, არამედ $x(t)$ სიგნალი. რეზისტორში გაბნეული სიმძლავრე, დამოკიდებულია დროზე ანუ ამ შემთხვევაში საქმე გვაქვს მყისიერ სიმძლავრესთან

$$P(t) = \frac{x^2(t)}{R}$$

იმისთვის, რომ გამოვთვალოთ T დროის განმავლობაში გამოყოფილი ენერგია საჭიროა მყისიერი სიმძლავრის ინტეგრირება

$$E = \int_0^T x^2(t)dt = \frac{1}{R}\int_0^T x^2(t)dt$$

თუ შემოვიტანთ სიმძლავრის საშუალო მნიშვნელობის ცნებას, მასში

$$\overline{P} = \frac{E}{T} = \frac{1}{RT}\int_0^T x^2(t)dt$$

ყველა ამ ფორმულაში შედის R წინაღობა, მაგრამ თუ ენერგიას და სიმძლავრეს გავნიხილავთ არა როგორც ფიზიკურ სიდიდეებს, არამედ როგორც სიგნალების შესადარებელ საშუალებას, მაშინ ეს პარამეტრი შეგვიძლია ფორმულიდან გამოვრიცხოთ (ჩავთვალოთ,რომ R=1), მაშინ ჩვენ ვღებულობთ

სიგნალების თეორიაში მიღებულ ენერგიას, მყისიერ სიმძლავრეს და საშუალო სიმძლავრეს:

$$E = \int_0^T x^2(t)dt; \quad P(t) = x^2(t); \quad \overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$$

სიგნალის ენერგია შეიძლება იყოს სასრული და უსასრულო, მაგალითად ნებისმიერ სასრულო სიგრძის სიგნალს გააჩნია სასრული ენერგია (თუ ის არ შეიცავს დელტა-ფუნქციას). ნებისმერ პერიოდულ სიგნალს, პირიქით გააჩნია უსასრულო ენერგია.

თუ სიგნალის ენერგია უსასრულოა, მაშინ შესაძლებელია მისი საშუალო ენერგიის განსაზღვრა დროის მთელ ღერძზე. ამისთის უნდა გამოვიყენოთ $\overline{P}$ განსაზღვრის ფორმულა და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $T \to \infty$

$$\overline{P} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)dt$$

საშუალო სიმძლავრიდან კვადრატული ფესვი გვაძლევს სიგნალის საშუალო კვადრატულ (მოქმედ) მნიშვნელობას:

$$\sigma = \sqrt{\overline{P}} = \sqrt{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{=T/2}^{T/2} x^2(t)dt}$$

T პერიოდის მქონე პერიოდულ სიგნალებისათვის ზღვარზე გადასვლა არ არის აუცილებელი, საკმარისია სიგნალის პერიოდით გასაშუალება.

1.4 სიგნალების ციფრული დამუშავების ძირითადი ოპერაციები

სიგნალების ციფრული დამუშავებისას გამოიყენება ძირითადად ერთ და იგივე ოპერაციები: ნაკეცი, კორელაცია, ფილტრაცია, გარდაქმნა და მოდულაცია. უნდა აღინიშნოს, რომ სიგნალების ციფრული დამუშავებისას ამ ძირითადი ოპერაციების გამოიყენებას სჭირდება მხოლოდ მარტივი არითმეტიკული მოქმედებები – გამრავლება, შეკრება, გამოკლება და ძვრის ოპერატორი. მოკლედ განვიხილოთ ეს ოპერაციები.

ნაკეცი. სიგნალების ციფრული დამუშავებისას ნაკეცი წარმოადგენს ყველაზე უფრო გამოყენებად ოპერაციას. მაგალითად, ნაკეცი წარმოადგენს ციფრული ფილტრაციის ძირითად ოპერაციას. ორი N_1 და N_2 სიგრძის $x(n)$ და $h(n)$ თანმიმდევრობის ნაკეცი განისაზღვრება როგორც

$$y(n) = h(n) \otimes x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n)x(n-k), \quad n = 0,1,2,....,N-1,$$

სადაც $\otimes$ სიმბოლო გამოიყენება ნაკეცის აღნიშვნისათვის, $N = N_1 + N_2 - 1$.

კორელაცია. არსებობს კორელაციის ორი ფორმა: ავტოკორელაცია და ურთიერთკორელაცია. ურთიერთკორელაცია გვიჩვენებს ორ სიგნალს შორის მსგავსებას ან საერთო თვისებებს. ავტოკორელაციური ფუნქცია გულისხმობს ერთი სიგნალის არსებობას და იძლევა ინფორმაციას სიგნალის სტრუქტურაზე ან მის დროში ქცევაზე. ის წარმოადგენს ურთიერთკორელაციური ფუნქციის კერძო შემთხვევას. კორელაციური ფუნქციების გამოყენების სფეროებია:

სპექტრული ანალიზი, სიგნალის დეტექტირება (აღდგენა), რომელიც არ ჩანს ხმაურიან სიგნალში, სიგნალში არსებული ფარული პერიოდის გამოვლენა და სხვა.

ციფრული ფილტრები. სიგნალების ციფრული დამუშავების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ოპერაციას წარმოადგენს სიგნალის წრფივი ციფრული ფილტრაცია, რომელიც სრულდება შემდეგი გამოსახულების გამოყენებით:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) \ ,$$

სადაც $h(k),\ k = 0,1,2,\ldots,N-1$ ფილტრის კოეფიციენტებია, $x(k)$ და $y(k)$ შესაბამისად ციფრული ფილტრის შემავალი და გამოსავალი სიგნალებია.

უნდა დინიშნოს, რომ ფილტრაცია ფაქტიურად წარმოადგენს დროში სიგნალის ნაკეცს ფილტრის იმპულსური $h(k)$ მახასიათებლით. ფილტრის დანიშნულებაა სასარგებლო სიგნალიდან ხმაურის გამორიცხვა ან შერმცირება.

დისკრეტული გარდაქმნები. დისკრეტული გარდაქმნები აღწერენ დისკრეტულ სიგნალებს სიხშირულ კოორდინანტებში ან საშუალებას იძლევიან სიგნალის დროის არედან სიხშირულ არეში გადასვლას. დროის არედან სიხშირულ არეში გადასვლის ოპერაცია ფართოდ გამოიყენება სიგნალების ციფრული დამუშავების ბევრ ალგორითმში. მაგალითად, ასეთი გარდაქმნები ეფექტურად გამოიყენება ისეთ ალგორითმებში, როგორიცაა ფილტრაცია, ნაკეცი და კორელაცია.

არსებობს მრავალი დისკრეტული გარდაქმნები, რომელთაგან ყველაზე უფრო გავრცელებულია ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა, რომელიც შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}$$

და რომელსაც სიგნალი გადაყავს დროით არედან სიხშირულ არეში. არსებობს ფურიეს უკუგარდაქმნა, რომელსაც სიგნალი სიხშირულ არედან გადაყავს დრიოით არეში

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}}$$

სიგნალების ციფრული დამუშავებისას ფართოდ გამოიყენება Z – გარდაქმნა, რომელიც ზოგ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია მისი გამოყენება ვიდრე ფურიეს გარდაქმნა. ნებისმიერი დისკრეტული $x(k),\ k = 0,1,2,\ldots,N-1$ თანმიმდევრობა შეიძლება კომპლექსური z ცვლადით წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)Z^{-k}$$

რომელსაც $x(k)$ სიგნალის Z – გარდაქმნა ეწოდება.

მოდულაცია. ხშირად საჭიროა ციფრული სიგნალის დიდ მანძილზე გადაცემა. ამისათვის უნდა მოვახდინოთ სიგნალის მოდულირება ისე, რომ მისი სიხშირული მახასიათებლები დაემთხვეს გადაცემის ან შენახვის სისტემის მახასიათებლებს. არსებობს სიგნალის ციფრული მოდულაციის სამი ყველაზე უფრო გავრცელებული სქემა: ამპლიტუდური, ფაზური და სიხშირული.

სიგნალის ციფრული დამუშავების პროცესორები. სიგნალის ციფრული დამუშავების სისტემები ხასიათდებიან რეალურ დროში დამუშავების

ოპერაციების შესრულებით, თანაც აქცენტი კეთდება გამტარუნარიანობის მაღალ სიჩქარეზე. სტანდარტული მიკროპროცესორების სტრუქტურები ვერ აკმაყოფილებენ სიგნალის ციფრული დამუშავების მახასიათებლებს. სწორედ ამან გამოიწვია ახალი პროცესორების შექმნა, რომელთა სტრუქტურა განკუთვნილია სპეციალურად სიგნალის ციფრული დამუშავების ოპერაციების შესრულებისათვის. ახალ პროცესორებს ანუ ჩიპებს გააჩნიათ შემდეგი თავისებურებები:

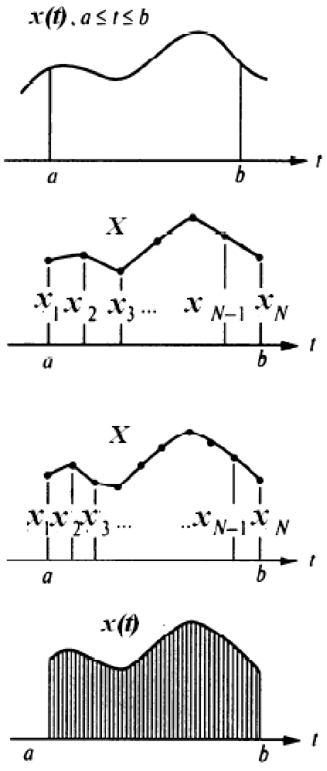
- ჩაშენებული მამრავლები, რომლებიც განკუთვნილნი არიან სწრაფად მოახდინონ გამრავლების ოპერაციები;
- ცალკე მეხსიერება პროგრამების და მონაცემების შესანახად;
- ბრძანებებში არსებული ციკლები, რომლებიც გამოიყენებიან განშტოებების და ციკლების შექმნისათვის. ასეთი ბრძანებები მნიშვნელოვნად ამცირებენ ციკლების რაოდენობას;
- საკმაოდ დიდი სისწრაფე. მაგალითად, *TMS*320*C*25 პროცესორის ტაქტური სიხშირე 40 მგჰ, ხოლო ერთი ტაქტის სიჩქარე – 100ნანოწამ-ია;
- კონვეინერული დამუშავების გამოყენება, რაც იწვევს ბრძანებების შესრულების დროის შემცირებას და სისწრაფის ზრდას.

ახალი ჩიპები სწრაფი და მრავალფუნქციონალურები არიან. დღეისათვის ზოგიერთ ჩიპს შეუძლია მცოცავი მძიმით არითმეტიკული მოქმედებების შესრულება, შეიცავენ მიმდებრობითი გადაცემის არხებს, გაფართოებული მეხსიერების არეს, ტაიმერებს და წყვეტის მრავალდონიან სისტემებს.

1.5 სიგნალის მათემატიკური წარმოდგენა

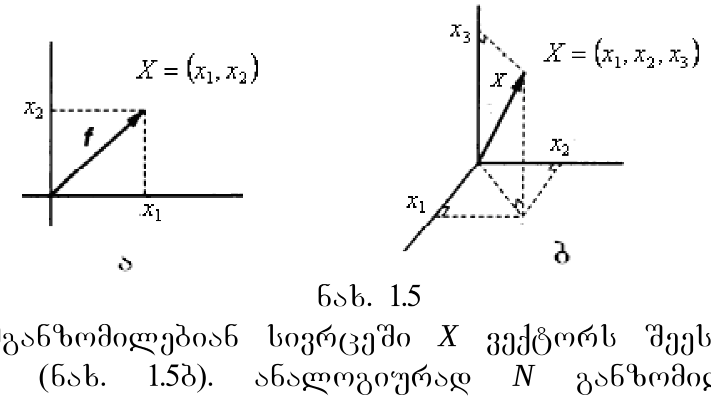
როგორც ვიცით, ანალოგური სიგნალი გარდაიქნება დისკრეტულ სიგნალად, სადაც ანათვლები წაროდგენილია ციფრულ ფორატში. თუ დროის რაიმე $[a,b]$ ინტერვალში $x(t)$ ანალოგურ სიგნალს წაროვადგენთ დისკრეტულ ფორმაში $x(\Delta tn),\ n=1,2,....,N$ და მას ჩავწერთ როგორც $X=(x_1,x_2,....,x_N)$ ვექტორის სახით, მაშინ $x_1,x_2,.....,x_N$ დისკრეტული ანათვლები $x(t)$ სიგნალის კომპონენტები იქნებიან.

საწყისი სიგნალის აღდგენა დამოკიდებულია N სიდიდეზე ანუ დისკრეტიზაციის Δt ინტერვალზე. რაც უფრო შევამცირებთ Δt-ს, მით უფრო გაიზრდება N და მით უფრო კარგად წარმოვადგენთ საწყის სიგნალს. თუ $N\to\infty$, მაშინ X ვექტორი გადაიქცევა $x(t)$ სიგნალად (ნახ. 1.4).



ნახ. 1.4

ორგანზომილებიან ვექტორს, რომელიც მოთავსებულია ორგანზომილებიან სივრცეში, ანუ სიბრტყეზე, შეესაბამება რომელიმე წერტილს სიბრტყეზე (ნახ. 1.5ა).



ნახ. 1.5

ასევე სამგანზომილებიან სივრცეში X ვექტორს შეესაბამება მხოლოდ ერთი წერტილი (ნახ. 1.5ბ). ანალოგიურად N განზომილებიან ვექტორს შეესაბამება ერთი წერტილი $N-$ განზომილებიან ცივრცეში $X=(x_1,x_2,....,x_N)'$, მაგრამ მათი გეომეტრიული წარმოდგენა შეუძლებელია.

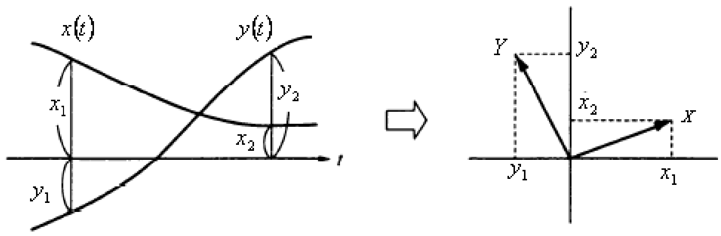
თუ წარმოვადგენთ უსასრულოდ დიდ განზომილების N სივრცეს, მაშინ $x(t)$ უწყვეტ სიგნალს ამ სივრცეში შეესაბამება ერთი წერტილი. ამ უსასრულო განზომილების სივრცეს **ფუნციის სივრცე** ეწოდება.

ამრიგად, ნებისმიერი $x(t)$ სიგნალი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც $N-$ განზომილებიანი ვექტორი X, რომლის კომპონენტებია $x_1,x_2,.....,x_N$ და რომელსაც $N-$ განზომილებიან ცივრცეში შეესაბამება ერთი წერტილი.

$N-$ განზომილებიან სივრცეში შესაძლებელია განისაზღვროს ვექტორის სიგრძე, მანძილი ორ ვექტრს შორის, კუთხე ვექტორებს შორის და სკალარული

ნამრავლი. თუ ასევე ვიმსჯელებთ სიგნალების მიმართ, მაშინ იგივე შეგვიძლია ჩავატაროთ სივრცის ფუნქციების მიმართ. ე.ი. თუ სივრცის ფუნქციების მიმართ განვსაზღვრავთ მანძილს და სკალარულ ნამრავლს, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ვიმსჯელოთ ფუნქციების სიდიდეზე და მათ შორის კუთხეზე, რაც საშუალებას იძლევა მოვიპოვოთ ინფორმაცია სიგნალის თვისებებზე.

განვიხილოთ ორგანზომილებიან ვექტორებს შორის სკალარული ნამრავლი და მათ შორის მანძილი. დაუშვათ $x(t)$ სიგნალიდან ავიღეთ x_1 და x_2 მნიშვნელობები (ნახ. 1.6). ასევე ავიღოთ $y(t)$ სიგნალიდან y_1 და y_2 მნიშვნელობები



ნახ. 1.6

რასაკვირველია სიგნალიდან აღებული ორი მნიშვნელობით შეუძლებელია საწყისი სიგნალის აღდგენა. ეს პრობლემა შეიძლება გადაწყდეს თუ გავზრდით გაზომვათა რაოდენობას. ამრიგად, გვაქვს ორი X და Y ორგანზომილებიანი ვექტორი $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$. გამოვიკვლიოთ ეს ორი ვექტორი. პირველი რაც უნდა დავადგინოთ არის ის თუ რამდენად არიან ვექტორები ერთმანეთისაგან დაშორებულები ანუ უნდა განისაზღვროს ვექტორებს შორის მანძილი. როგორც ცნობილია, ევკლიდეს სივრცეში მანძილი ორ ვექტორს შორის განისაზღვრება შედეგი ფორულით:

$$d(X,Y)=\|X-Y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\ ,$$

სადაც $\|X\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ წარმოადგენს X ვექტორის აბსოლუტურ მნიშვნელობას, რომელსაც ვექტორის ნორმას უწოდებენ. ამრიგად, მანძილი წარმოადგენს ერთ-ერთ პარამეტრს, რომელიც ზომავს ვექტორებს შორის კავშირის ძალას. მაგრამ შესაძლებელია ისეთი სიტუაცია, როცა, მაგალითად, Y და Z ვექტორები ერთნაირი მანძილით არიან დაშორებულნი X ვექტორისაგან. აქედან გამომდინარე, მხოლოდ მანძილით დადგენა ვექტორებს შორის კავშირის სიძლიერეზე შეუძლებელია. საჭიროა გავითვალისწინოთ ვექტორებს შორის კუთხის სიდიდე. მათემატიკიდან ცნობილია, რომ კუთხე ორი X და Y ვექტორს შორის განისაზღვრება შემდეგნაირად: ამისათვის განვიხილოთ ვექტორებს შორის სკალარული ნარავლი

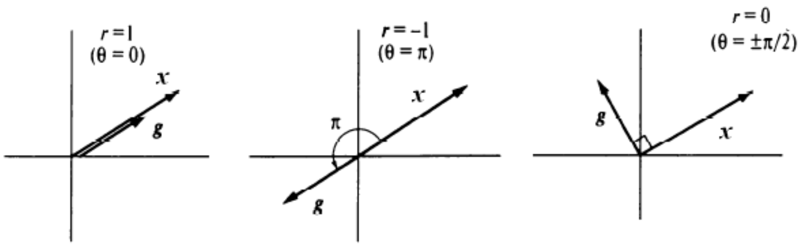
$$\langle X,Y\rangle=\|X\|\|Y\|\cos\theta \quad \text{აქედან} \quad co\theta=\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|} \qquad (1.3)$$

ავღნიშნოთ (1.3) გამოსახულება r- ით, ე.ი.

$$r=\frac{\langle X,Y\rangle}{\|X\|\|Y\|} \qquad (1.4)$$

მიღებული (1.4) გამოსახულება წარმოადგენს კორელაციის კოეფიციენტს, რომელიც დამოკიდებულია ორ ვექტორს შორის კუთეზე და არ არის დამოკიდებული ვექტორების ნორმაზე. რადგან $-1\le r\le 1$, ამიტომ $-1\le\cos\theta\le 1$.

ე.ი. კორელაციის კოეფიციენტი r აღნიშნავს X და Y ვექტორებს შორის კავშირის ძალას, მათ შორის კუთხის სიდიდის საშუალებით. ასე მაგალითად, თუ $\theta = 0$, მაშინ r აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას $r = 1$. კუთხის ზრდასთან ერთად r მცირდება. როცა $r = 0$, მაშინ $\langle X, Y \rangle = 0$ ანუ X და Y ვექტორები ურთიერთპერპენდიკულარები არიან (ნახ. 1.7).



ნახ. 1.7

ვექტორის კომპონენტების გამოყენებით ორ ვექტორს შორის სკალარული ნამრავლი ტოლია: $\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$. ვექტორის თავისთავზე სკალარული ნამრავლი ტოლია: $\langle X, X \rangle = x_1^2 + x_2^2 = \|X\|^2$, რაც გვიჩვენებს სკალარულ ნამრავლსა და ვექტორის ნორმას შორის კავშირს.

ჩვენ უკვე ვიცით ორგანზომილებიან სივრცეში ვექტორებს შორის სკალარული ნამრავლი და მათ შორის მანძილი. ეხლა განვიხილოთ X ვექტორი n განზომილებიან სივრცეში. $X = (x_1 x_2 .....x_n)'$ ვექტორის ნორმა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

იმისათვის, რომ მრავალგანზომილებიან სივრცეში X ვექტორის ნორმა არ იყოს დამოკიდებული სივრცის n განზომილებაზე, იყენებენ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\|X\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2} \; .$$

n განზომილებიან სივრცეში მანძილი ორი X და Y ვექტორს შორის განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2} \; ,$$

ხოლო სკალარული ნამრავლი

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \; .$$

თუ განვიხილავთ ფუნქციის სივრცეს, მაშინ $x(t), (a \le t \le b)$ ფუნქციის ნორმა ტოლია:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t) dt} \; .$$

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, რაც უფრო დიდია ინტერვალი, მით უფრო დიდია ნორმის მნიშვნელობა. ამის თავიდან აცილებისათვის უფრო მიზანსეწონილია ფუნქციის ნორმის გამოთვლის შემდეგი გამოსახულება:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2(t)dt}\ .$$

მანძილი $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს შორის განისაზღვრება ფორმულით:

$$d(x(t), y(t)) = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [x(t)-y(t)]^2 dt}\quad ,$$

ეს თანაფარდობა ხშირად გამოიყენება საშუალო კვადრატული ცდომილების განსაზღვრისათვის. ორ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს შორის სკალარული ნამრავლი ტოლია:

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)y(t)dt$$

ხოლო $x(t)$ ფუნქციის თავისთავზე სკალარული ნამრავლი ტოლია:

$$\langle x(t), x(t)\rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2(t)dt = \|x(t)\|^2 .$$

თუ ფუნქციის სივრცეში $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს შორის არსებობს კუთხე, მაშინ კორელაციის კოეფიციენტი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$r = \frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b x(t)y(t)dt}{\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2(t)dt}\ \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2(t)dt}} .$$

აქაც კორელაციის კოეფიციენტი ღებულობს მნიშვნელობებს $[-1.1]$ ინტერვალიდან. რაც უფრო მეტია r – ის მნიშვნელობა აბსოლუტური სიდიდით, მით უფრო დიდია კავშირი ფუნქციებს შორის, ანუ სხვა სიტყვებით ისინი უფრო მსგავსები არიან.

თუ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციები ურთიერთპერპენდიკულარულნი არიან, მაშინ მათი სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია, ე.ი. $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$. მაგალითად ორი $x(t)= t$ და $y(t)= 1$ ფუნქცია$[-1.1]$ ინტერვალში ურთიერთპერპენდიკულარულნი არიან. მართლაც $\langle t,1\rangle = \int_t^1 tdt = \frac{t^2}{2}\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = 0$.

1.6 კომპლექსური სიგნალები

კომპლექსური სიგნალების თეორია ეფუძნება კომპლექსური რიცხვების გამოყენებას. კომპლექსური სიგნალები, რომლებიც წარმოდგენილი არიან კომპლექსური რიცხვებით, ფართოდ გამოიყენებიან მეცნიერებისა და ტექნიკის პრაქტიკულად ყველა სფეროში. აქედან გამომდინარე, ჯერ გავიხსენოთ კომპლექსური რიცხვის ცნება.

1. კომპლექსური რიცხვები. განვიხილოთ უმარტივესი კვადრატული განტოლება $x^2+1=0$, რომლის ამონახსენია $x=\sqrt{-1}$. საზოგადოდ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში არ არსებობს ლუწი ხარისხის ფესვი უარყოფით რიცხვიდან. ამიტომ მათემატიკაში შემოიტანეს ახალი სიდიდე $j=\sqrt{-1}$, რომელსაც წარმოსახვითი ერთეული უწოდეს.

განვიხილოთ შემდეგი კვადრარული განტოლება $x^2+2x+5=0$, რომლის ამონახსენია

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot5}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16\cdot(-1)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm4\sqrt{-1}}{2}=-1\pm2\sqrt{-1}=-1\pm2j$$

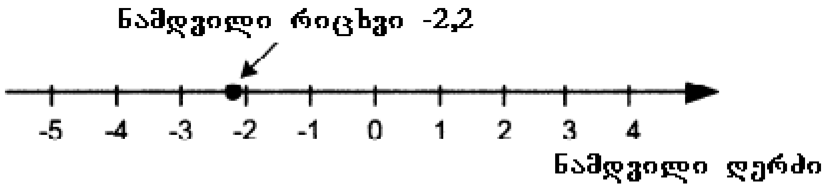
განტოლების ამონახსენები $-1+2j$ და $-1-2j$ წარმოადგენენ კომპლექსურ რიცხვებს, რომელთაც გააჩნიათ შემდეგი სახე: $a+jb$, სადაც a – რიცხვის ნამდვილი ნაწილია, ხოლო b–წარმოსახვით.

<u>შენიშვნა</u>. $y=x^2+2x+5$ გრაფიკი არ გადაკვეთს ox ღერძს, ამიტომ $x^2+2x+5=0$ განტოლებას არ გააჩნია ნამდვილი ფესვები.

ცხადია, რომ

$$j^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1;\quad j^3=j^2j=(-1)j=-j;\quad j^4=j^2j^2=(-1)(-1)=1.$$

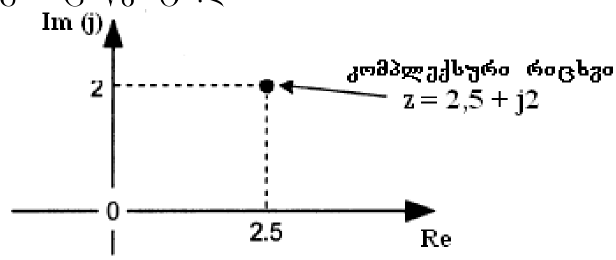
თუ ნამდვილი რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ წერტილის სახით კოორდინანტთა ერთგანზომილებიან ღერძზე (ნახ. 1.8),



ნახ. 1.8

მაშინ კომპლექსური რიცხვის წარმოსადგენად გვჭირდება ორგანზომილებიანი სიბრტყე, რომელსაც გააჩნია ერთი ნამდვილი ღერძი და ერთი კომპლექსური.

ქვემოდ მოყვანილ ნახ. 1.9 ნახაზზე ნაჩვენებია კომპლექსური z რიცხვი, სადაც ის წარმოდგენილია როგორც წერტილი.



ნახ. 1.9

კომპლექსური რიცხვები შეიძლება განლაგებულნი იყვნენ ნებისმიერ ადგილზე ორგანზომილებიან სიბრტყეზე, რომელსაც კომპლექსური სიბრტყე ეწოდება. კომპლექსურ სიბრტყეს გააჩნია როგორც ნამდვილი (R_e) ასევე წარმოსახვითი (Im) ღერძები. მაგალითად, ნახ. 1.9-ზე კომპლექსური რიცხვი $z=2{,}5+j2$ წარმოდგენილია წერტილი სახით, რომელიც არ მდებარეობს არც ნამდვილ და არც წარმოსახვით ღერძზე. ჩვენ ამ წერტილში შეგვიძლია მისვლა

თუ კოორდინატთა სათავედან ნამდვილ ღერძზე გადავზომავთ +2,5 ერთეულს, ხოლო წარმოსახვით ღერძზე +2 ერთეულს.

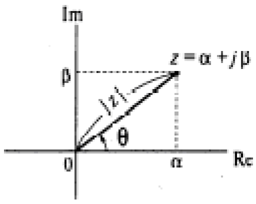
ამრიგად, კომპლექსური z რიცხვი ზოგადად გამოისახება ნამდვილი და წარმოსახვითი სიდიდით (ნახ. 1.10). არსებობს კომპლექსური რიცხვის ჩაწერის რამოდენიმე სახე. ასე მაგალითად:

– ალგებრული ფორმა $z=\alpha+j\beta\ ;\alpha=\mathrm{Re}(z),\quad \beta=\mathrm{Im}(z)$ (1.5)

– ტრიგონომეტრიული ფორმა $z=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$; (1.6)

– პოლარული კორდინატების ფორმა $z=e^{j\theta}$, (1.7)

სადაც $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ და მას ეწოდება z რიცხვის აბსოლუტური მნიშვნელობა ან მოდული, $\theta=arctg\dfrac{\beta}{\alpha}$ და იგი წარმოადგენს z რიცხვის არგუმენტს.



ნახ. 1.10

თუ (1.6) და (1.7) გაუტოლებთ ერთმანეთს, მივიღებთ ეილერის ცნობილ ფორმულას:

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta\ . \tag{1.8}$$

თუ (1.8) ფორმულაში j-ს მაგივრად ჩავსვამთ $-j$-ს, მაშინ მივიღებთ:

$$e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta. \tag{1.9}$$

თუ მიღებულ (1.8) და (1.9) ფორმულებიდან განვსაზღვრავთ $j\sin\theta$ მნიშვნელობებს

$$j\sin\theta=e^{j\theta}-\cos\theta$$

$$j\sin\theta=\cos\theta-e^{-j\theta}$$

და მიღებულ განტოლებებს გაუტოლებთ ერთმანეთს და ამოვხსნით კოსინუსის მიმართ , მაშინ მივიღებთ:

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right). \tag{1.10}$$

ანალოგიური გზით მიიღება სინუსისათვის

$$\sin\theta=\frac{1}{2j}\left(e^{j\theta}-e^{-j\theta}\right). \tag{1.11}$$

მიღებულ (1.10) და (1.11) ფორმულებს ეილერის იგვეობას უწოდებენ.

ისმება კითხვა, რის საფუძველზე ვღებულობთ კომპლექსური სიდიდის წარმოდგენას ნატურალური ლოგარითმის e ფუძის საშუალებით? ამისათვის $e^{j\theta}$ სიდიდე გავშალოთ ტეილორის მწკრივად

$$\begin{aligned} e^{j\theta}&=1+j\theta+\frac{(j\theta)^2}{2!}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\frac{(j\theta)^4}{4!}+\frac{(j\theta)^5}{5!}+\frac{(j\theta)^6}{6!}+\cdots\cdots= \\ &=1+j\theta-\frac{\theta^2}{2!}-j\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+j\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1.12}$$

თუ დავაკვირდებით (1.12) მწკრივს ადვილად შევნიშნავთ, რომ კენტი წევრები ქმნიან კოსინუსის მწკრივად გაშლას

$$\cos(\theta)=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots,$$

ხოლო ლუწი წევრები წარმოადგენენ სინუსის ფუნქციის მწკრივად გაშლას

$$j\sin(\vartheta)=j\theta-j\frac{\theta^3}{3!}+j\frac{\theta^5}{5!}-\cdots,$$

ე.ი. ვღებულობთ (1.8) ფორმულას. თუ (1.8) ფორმულაში ჩავსვამთ $\theta=\pi/2$, მაშინ მივიღებთ:

$$e^{j\pi/2}=\cos(\pi/2)+j\sin(\pi/2)=0+j\cdot 1, \quad \text{ე.ი.} \quad e^{j\pi/2}=j.$$

კომპლექსური სიდიდის პოლარულ კოორდინანტებში წარმოდგენა სასარგებლოა შემდეგი მიზეზების გამო:

– ამარტივებს მათემატიკურ გამოთვლებს;

– გარდაქმნის რთულ სიგნალებს მარტივ კომპლექსურ რიცხვების შეკრებაზე (ვექტორული შეკრება);

– ჩაწერის ყველაზე მოკლე ფორმაა.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ გვინდა ორი $z_1=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$ და $z_2=\cos(2\theta)-j\sin(2\theta)$ კომპლექსური რიცხვის გადამრავლება.

$$z_1z_2=[\cos(\theta)+j\sin(\theta)][\cos(2\theta)-j\sin(2\theta)]=$$
$$=\cos(\theta)\cos(2\theta)+\sin(\theta)\sin(2\theta)+j[\sin(\vartheta)\cos(2\theta)-\cos(\theta)\sin(2\vartheta)]$$

თუ ფუნქციების ნამრავლისათვის გამოვიყენებთ ტრიგონომეტრიულ იგივეობებს, მაშინ მივიღებთ:

$$z_1z_2=\frac{1}{2}[\cos(-\theta)+\cos(3\theta)+\cos(-\theta)-\cos(3\theta)]+j\frac{1}{2}[\sin(3\theta)+\sin(\theta)-\sin(3\theta)+\sin(-\theta)]=$$
$$=\cos(-\theta)+j\sin(-\theta)=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$$

გაცილებით მარტივია ამ პროცედურის ჩატარება პოლარული ფორმის გამოყენებით, მართლაც

$$z_1z_2=e^{j\theta}e^{-j2\theta}=e^{-j\theta}=\cos(\theta)-j\sin(\theta).$$

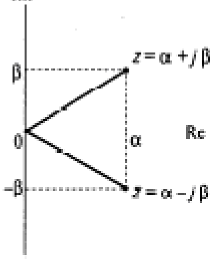
ამრიგად. ზოგადად ორი კომპლექსური სიდიდის ნამრავლი ტოლია:

$$z_1\cdot z_2=|z_1|e^{j\theta_1}|z_2|e^{j\theta_2}=|z_1||z_2|e^{j(\theta_1-\theta_2)},$$

ხოლო ორი კომპლექსური რიცხვის ფარდობა გვაძლევს

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

ორ $z=\alpha+j\beta$ და $z^*=\alpha-j\beta$ კომპლექსურ რიცხვებს კომპლექსურად შეუღლებულები ეწოდებათ.



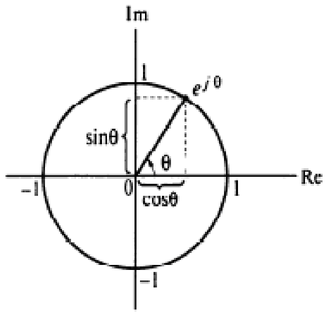
ნახ. 1.11

ცხადია, რომ

$$z + z^* = 2\alpha = 2\,\mathrm{Re}(z)$$
$$z - z^* = 2\beta\,\mathrm{Im}(z)$$
$$z \cdot z^* = (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ z^2 $|z|^2$ განსხვავებული სიდიდეებია. მაგალითად, თუ $z = j$ და $\alpha = 0,\ \beta = 1$ $\ z^2 = -1$, მაშინ $|z|^2 = 1$.

დაუშვათ წერტილი მოთავსებულია კომპლექსური სიბრტყის ერთნულოვან წრეწირზე ისე, რომ ამ წერტილის კოორდინანტთა სათავესთან შეერთების წრფე ნამდვილ ღერძთან ადგენს θ კუთხეს, ისე, როგორც ეს ნაჩვენებია (2.12) ნახაზზე.



ნახ. 1.12

ერთნულოვან წრეწირზე წერტილის კოორდინანტები შეიძლება ასე წარმოვადგნოთ: $\cos\theta + j\sin\theta$. ეილერის ფორმულის თანახმად

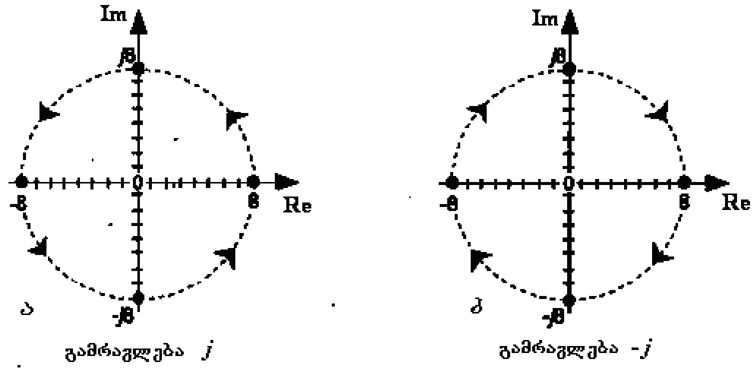
$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$$

სადაც e წარმოადგენს ნატურალური ლოგარითმის ფუძეს და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828...... \qquad \left|e^{j\theta}\right| = 1.$$

j შეგვიძლია განვიხილოთ არა როგორც რიცხვი, არამედ რიცხვებზე მოქმედი ოპერაცია. კერძოდ, j ოპერატორი აღნიშნავს კომპლექსური რიცხვის მობრუნებას 90^0-ით საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

ნამდვილ ღერძზე მდებარე ნებისმიერი რიცხვის j-სთან ნამრავლი გვაძლევს წარმოსახვით მნიშვნელობას, რომელიც მდებარეობს კომპლექსური სიბრტყის წარმოსახვით ღერძზე (ნახ. 1.13)

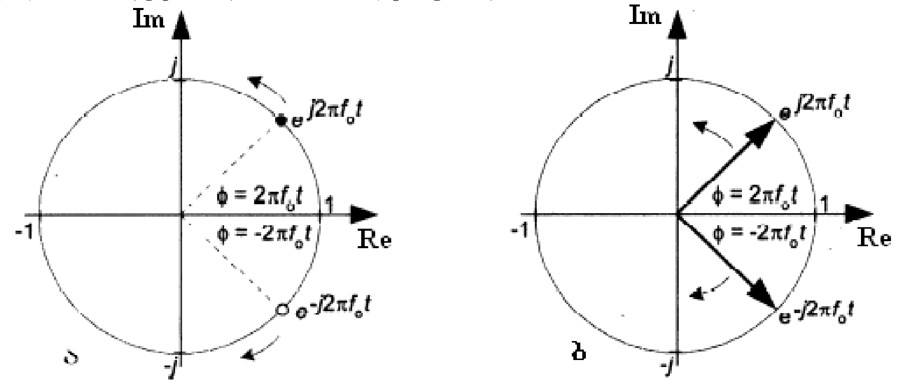


ნახ. 1.13

როგორც ნახ. 1.13ა-დან ჩანს, თუ +8-ს გავამრავლებთ j-ზე, მაშინ მივიღებთ $+j8$ წარმოსახვით რიცხვს, რომელიც მდებარეობს წარმოსახვით ღერძის დადებით ნაწილზე, ე.ი. მოხდა +8 რიცხვის 90^0-ით მობრუნება. ანალოგიურად, თუ $+j8$ გავამრავლებთ j-ზე, მაშინ ხდება კიდევ ერთი მობრუნება 90^0-ით და მივიღებთ -8 რიცხვს, რომელიც მდებარეობს ნამდვილი ღერძის უარყოფით ნაწილში. თავის მხრივ, -8 რიცხვის ნამრავლს j-ზე მივყევართ კიდევ 90^0-ით შემობრუნებაზე და მივიღებთ $-j8$ რიცხვს, რომელიც მდებარეობს წარმოსახვით ღერძის უარყოფით ნაწილზე და ა.შ.

ამრიგად, ნებისმიერი რიცხვის j-ზე გამრავლება იძლევა შედეგს საათის ისრის მოძრაობის საწინაღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 1.13ა), რომელიც 90^0-ით არის დაძრული, ხოლო თუ რიცხვს გავამრავლებთ - j-ზე, მაშინ შედეგი მიიღება 90^0-ით დაძრული, ოღონდ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით (ნახ. 1.13ბ).

2. **კომპლექსური სიგნალის ცნება**. კომპლექსური სიგნალი წარმოადგენს დროზე დამოკიდებულ ორგანზომილებიან სიგნალს, რომელიც შეიცავს ნამდვილ და წარმოსახვით ნაწილებს. განვიხილოთ რიცხვი, რომლის მოდული ერთის ტოლია და რომლის ფაზური კუთხე იცვლება დროში. ეს კომპლექსური რიცხვი ნახ. 1.24ა-ზე წარმოდგენილია $e^{j2\pi f_0 t}$ წერტილით.

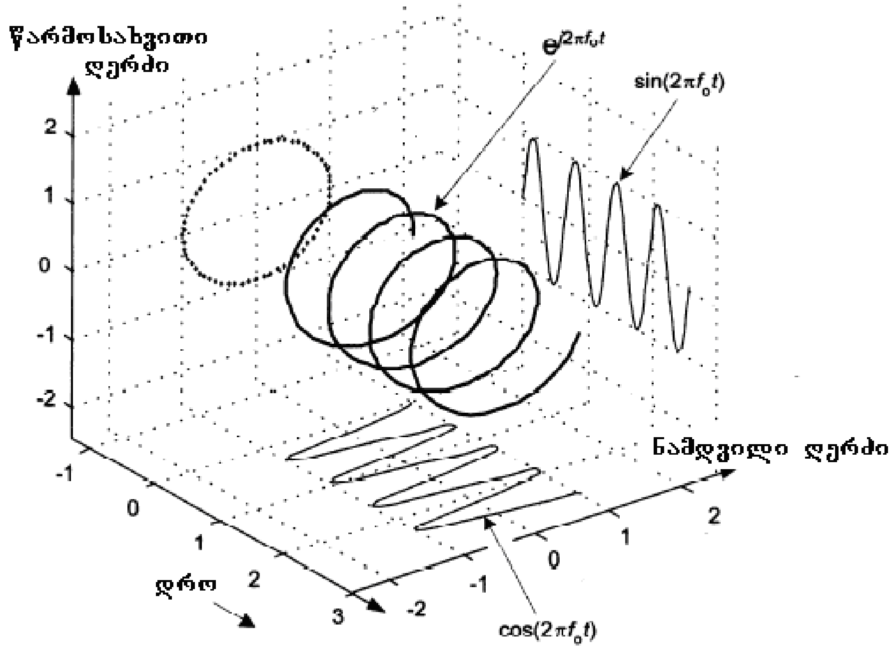


ნახ. 1.14

დროის ზრდასთან ერთად კომპლექსური რიცხვის ფაზური კუთხეც იზრდება და რიცხვი კომპლეწსურ სიბრტყეზე კოორდინანტთა სათავის მიმართ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ შემოწერს წრეს. ნახ. 1.24ა-ზე ნაჩვენებია ეს რიცხვი დაფიქსირებული დროის გარკვეულ მომერტებში. ასე მაგალითად, თუ $f_0 = 2$ჰც, მაშინ წერტილი წრეს წამში შემოუვლის ორჯერ. რაც შეეხება $e^{-j2\pi f_0 t}$ კომპლექსურ რიცხვს (ნახაზზე თეთრი წერტილი) იგი მოძრაობს საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით და მისი ფაზური კუთხე დროის ზრდასთან ერთად ხდება უფრო უაროფითი.

ორ კომპლექსურ $e^{j2\pi f_0 t}$ და $e^{-j2\pi f_0 t}$ გამოსახულებას **კომპლექსურ სიგნალს** უწოდებენ, რომელსაც გააჩნია ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები და ორივე წარმოადგენს დროის ფუნქციას. $e^{j2\pi f_0 t}$ და $e^{-j2\pi f_0 t}$ სიგნალები შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ვექტორები, რომლებიც მოძრაობენ ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულებით (ნახ. 1.14ბ). ზოგჯერ კომპლექსურ სიგნალს **კვადრატულ სიგნალსაც** უწოდებენ.

ნახ. 1.15-ზე წარმოდგენილია $e^{j2\pi f_0 t}$ კომპლექსური სიგნალის ტრაექტორია სამგანზომილებიან სივრცეში, სადაც ის აღწერს დროზე დამოკიდებულ თავის მოძრაობის ტრაექტორიას.



ნახ. 1.15

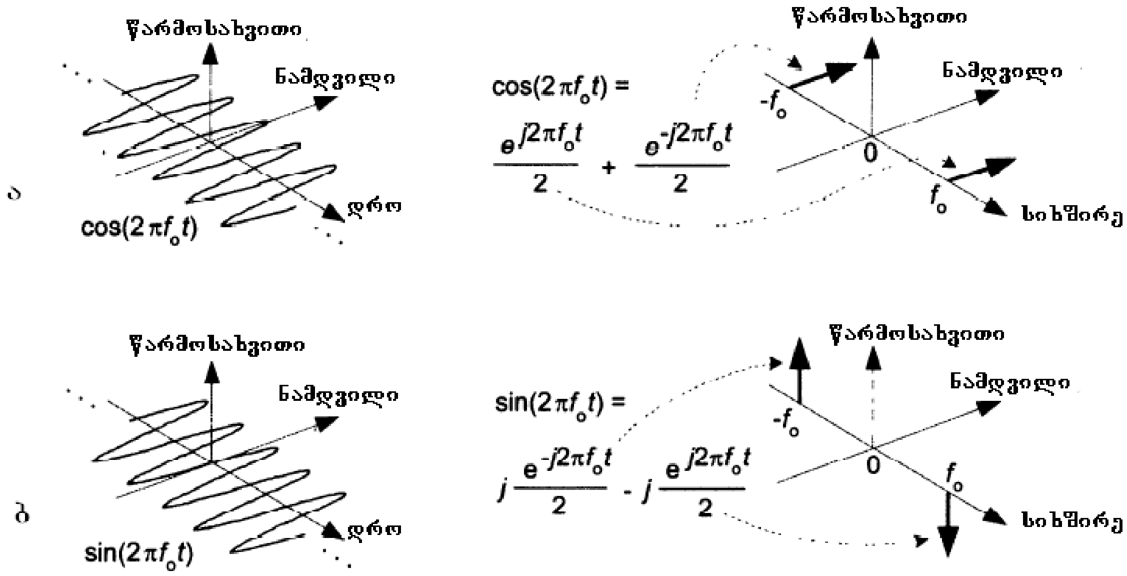
ნახ. 1.15-ზე წარმოდგენილი $e^{j2\pi f_0 t}$ კომპლექსური სიგნალის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები ნაჩვენებია როგორც სინუსის და კოსინუსის პროექციები, რაც კიდევ უფრო ნათელ ხდის ეილერის ფორმულის (1.8) თანაფარდობას.

ამრიგად, კომპლექსური $e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$ სიგნალი არ წარმოადგენს მათემატიკურ აბსტრაქციას. იგი შედგება ნამდვილ და წარმოსახვით სიგნალებისაგან. j ოპერატორის საშუალებით ეს ორი სიგნალი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ორთოგონალური სიგნალები, ე.ი. მათ შორის კუთხე 90^0 ტოლია. (1.10) და (1.11) ფორმულები თანახმად გვექნება:

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right), \quad \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{-j2\pi f_0 t} - e^{j2\pi f_0 t}\right) \quad . \tag{1.13}$$

მიღებული გამოსახულები (1.13) წარმოადგენენ კოსინუსოიდალური და სინუსოიდალური კომპლექსური სიგნალების სტანდარტულ გამოსახულებებს.

3. **კომპლექსური სიგნალები სიხშირულ არეში.** კომპლექსური სიგნალების სიხშირულ არეში წარმოსადგენად განვიხილოთ ნამდვილი კოსინუსოიდალური და სინუსოიდალური სიგნალების წარმოდგენა როგორც დროით ასევე სიხშირულ არეებში (ნახ. 1.16).

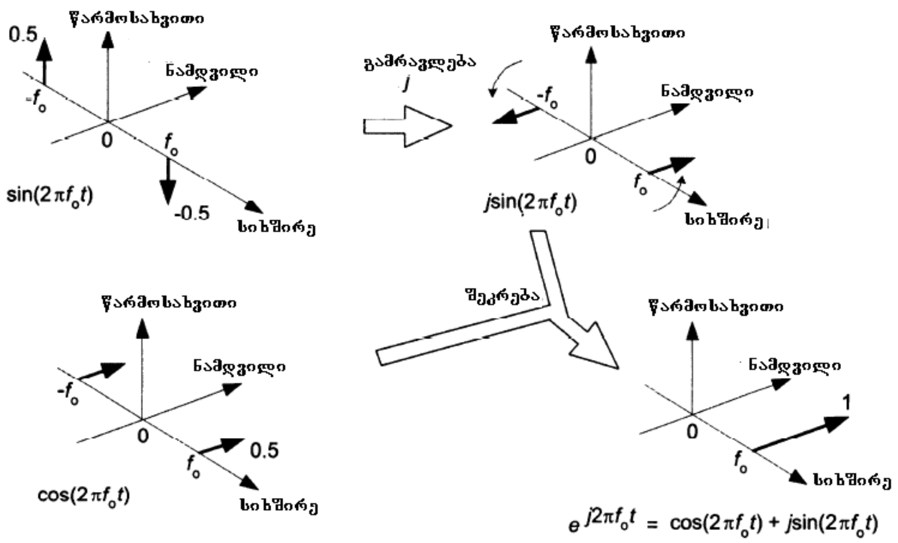


ნახ. 1.16

ნახ. 1.16ა-ზე წარმოდგენილია ნამდვილი კოსინუსოიდალური და სინუსოიდალური სიგნალები, ხოლო ნახ. 1.15ბ-ზე ნაჩვენებია სიხშირულ არეში მათი კომპლექსური წარმოდგენა. მსხვილი ისარი არ წარმოადგენს ფაზით ბრუნვის მიმართულებას, ის აღნიშნავს სიხშირულ არეში სპექტრული იმპულსების მიმართულებას.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, $\cos(2\pi f_0 t)$ სიგნალს გააჩნია ნამდვილი სპექტრი. ეს იმიტომ ხდება, რომ $\cos(2\pi f_0 t)$ სიგნალი დროით ლუწი ფუნქციაა $\cos[2\pi f_0(-t)] = \cos(2\pi f_0 t)$. ე.ი. დროის უარყოფით t მნიშვნელობებისთვის კოსინუსის მნიშვნელობები დადებითი t დროის მნიშვნელობების ტოლია. რაც შეეხება $\sin(2\pi f_0 t)$ სიგნალს იგი კენტი ფუნქციაა და მისი სპექტრი წარმოსახვითია, რადგან უარყოფითი t დროს მნიშვნელობები ტოლია შებრუნებული ნიშნის დადებითი t დროის მნიშვნელობებისა. ე.ი. $\sin[2\pi f_0(-t)] = -\sin(2\pi f_0 t)$. აქედან გამომდინარე, $\sin(2\pi f_0 t)$ სიგნალს სპექტრი ყოველთვის წარმოსახვითია.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ეილერის ფორმულის რეალიზაცია კომპლეწსური სიხშირის არეში., რომელიც წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



დასაწყისისათვის ნამდვილ სინუსოიდალურ $\sin(2\pi f_0 t)$ სიგნალს ვამრავლებთ j-ზე და შემდეგ მას უმატებთ იგივე სიხშირის ნამდვილ კოსინუსოიდალურ $\cos(2\pi f_0 t)$ სიგნალს, რომლის შედეგადაც ვღებულობთ ერთ კომპლექსურ ექსპონანტას $e^{j2\pi f_0 t}$, რითაც გრაფიკულად დასტურდება ეილერის იგივეობა.

4. უარყოფითი სიხშირის ცნება. უარყოფითი სიხშირე წარმოადგენს არა ფიზიკურ, არამედ აბსტრაქტულ, მათემატიკურ ცნებას, რომელიც გამოიყენება კომპლექსური სიდიდეების წარმოსადგენად. უარყოფითი სიხშირის გამოყენება აუცილებელია როცა ჩვენ გვინდა ნამდილი სიგნალის წარმოდგენა კომპლექსური ფორმის სახით.

გავიხსენოთ, რომ უარყოფითი რიცხვები დაკავშირებულია მიმართულებასთან. კერძოდ, კოორდინატთა სათავის მიმართ დადებითი რიცხვები მიმართულნი არიან მარჯვნივ, ხოლო უარყოფითი რიცხვები მარცხნივ. რაც შეეხება სიხშირეს აქ საქმე უფრო რთულადაა.

ნახ. 1.14-ზე წარმოდგენილ $e^{j2\pi f_0 t}$ სიგნალს უწოდებენ დადებითი სიხშირის მქონე კომპლექსურ ექსპონენტას იმიტომ, რომ იგი საწყისი კოორდინანტის სათავის მიმართ f_0 სიხშირით დადებითი მიმართულებით მოძრაობს წრიულად ანუ საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ. ანალოგიურად, $e^{-j2\pi f_0 t}$ სიგნალს უწოდებენ უარყოფითი სიხშირის მქონე კომპლექსურ ექსპონენტას იმიტომ, რომ იგი საწყისი კოორდინატის სათავის მიმართ f_0 სიხშირით წრიულად მოძრაობს უარყოფითი მიმართულებით ანუ საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით.

როგორც ვხედავთ, უარყოფითი სიხშირე განისაზღვრება მხოლოდ სიხშირულ არეში. რაც შეეხება დროით არეს, შეიძლება ითქვას, რომ აქ უარყოფითი სიხშირეები ფიზიკურად არ არსებობენ.

1.7 კორელაციური ფუნქციები

კორელაციური ანალიზი სპექტრულ ანალიზთან ერთად სიგნალების თეორიაში თამაშობს დიდ როლს. მისი მთავარი მიზანია სხვადასხვა

სიგნალების მსგავსების ზომის რაოდენობრივი განსაზღვრა. ამისთვის გამოიყენება კორელაციური ფუნქცია.

ორი შემთხვევით პროცესებს შორის ან ერთი შემთხვევითი პროცესის მნიშნენელობებს შორის წრფივი კავშირის დასადგენად გამოიყენება კორელაციური ფუნქციები. არსებობს კორელაციური ფუნქციების ორი სახე. ავტოკორელაციური და ურთიერთკორელაციური ფუნქციები.

ავტოკორელაციური ფუნქცია. დაუშვათ მოცემულია $\{X\}$ შემთხვევითი სტაციუნარული პროცესის რეალიზაცია $x(t)$ რომელსაც გააჩნია სასრულო ენერგია, განვხილოთ ინტეგრალი

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt \tag{1.6}$$

რომელიც აკავშირებს $x(t)$ რეალიზაციის მნიშვნელობებს t და $t+\tau$ დროის მომენტებში. τ-ს უწოდებენ ძვრას. (1.6) ფუნქციას ავტოკორელაციური ფუნქცია ეწოდება. ავტოკორელაციურ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. ავტოკორელაციური ფუნქცია $R_{xx}(\tau)$, როცა $\tau = 0$ ტოლია სიგნალის ენერგიისა, ე.ი.

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = E_x \quad .$$

2. $R_{xx}(\tau)$ ფუნქცია თავისი τ არგუმენტის მიმართ ყოველთვის ლუწი ფუნქციაა, ე.ი. $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$;

3. $\tau = 0$ დროს ავტოკორელაციური ფუნქცია აღწევს თავის მაქსიმალურ მნიშვნელობას ე.ი. $R_{xx}(\tau) \le R_{xx}(0)$;

4. τ - ს აბსოლიტური სიდიდის ზრდისას ხდება სიგნალის ენერგის ჩაქრობა, ე.ი. $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_{xx}(\tau) = 0$.

5. თუ $x(t)$ რეალიზაცია არ შეიცავს გარკვეულ თავისებურებებს, მაგალითად დელტა-ფუნქციის სახით, მაშინ $R_{xx}(\tau)$ ფუნქციას წყვეტა არ გააჩნია ე.ი. იგი უწყვეი ფუნქციაა.

მაგალითისთვის განვიხილოთ მართკუთხა იმპულსის (1.5) ავტოკორელაციური ფუნქციის განსაზღვრა:

– როცა $0 \le \tau \le T$, მაშინ $R_{xx}(\tau) = \int_{-\tau}^{T} A^2 dt = A^2(T-\tau)$;

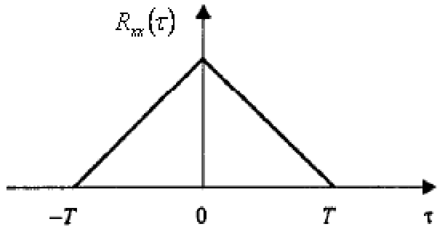
– როცა $-T \le \tau < 0$, მაშინ $R_{xx}(\tau) = \int_{-\tau}^{T} A^2 dt = A^2(T+\tau)$;

– როცა $|\tau| > T$, მაშინ $R_{xx}(\tau) = 0$.

თუ ამ შედეგებს გავაერთიანებთ მაშინ გვექნება:

$$R_{xx}(\tau) = \begin{cases} A^2(T-|\tau|), & |\tau| \le T \\ 0 , & |\tau| > T \end{cases}$$

მართკუთხა იმპულსის ავტოკორელაციური ფუნქცია წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



პერიოდული სიგნალების დროს და ზოგადად T პერიოდის უსასრულო ენერგიის მქონდე ნებისმიერი სიგნალისთვის ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)x(t+\tau)dt\,,$$

რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. როცა $\tau=0$, მაშინ $R_{xx}(\tau)$ ტოლია არა ენერგიისა, არამედ სიგნალის საშუალო სიმძლავრისა ე.ი.

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt=\bar{p}$$

2. ფუნქციის ლუწობა შენარჩუნებულია, ე.ი $R_{xx}(\tau)=R_{xx}(-\tau)$;
3. $R_{xx}(\tau)$ მნიშვნელობა როცა $\tau=0$ კვლავ წარმოადგენს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. ე.ი. $R_{xx}(\tau)\le R_{xx}(0)$;
4. პერიოდული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია წარმოადგენს იგივე სიხშირის პერიოდულ სიგნალს ანუ $R_{xx}(\tau)=R_{xx}(\tau+T)$;
5. თუ სიგნალი არ შეიცავს დელტა–ფუნქციას მაშინ მისი ავტოკორელაციური ფუნქცია უწყვეტ ფუნქციას წარმოადგენს.

მაგალითისთვის განვიხილოთ $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ პერიოდული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია. კორელაციური ინტეგრალი განისაზთვრება იმის გათვალისწინებით, რომ ასეთი სიგნალის პერიოდი ტოლია $2\pi/\omega_0$ სიდიდისა.

$$R_{xx}(\tau)=\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)A\cos(\omega_0(t-\tau)+\varphi_0)dt=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)\,.$$

როგორც ვხედავთ ჰარმონიული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქცია ჰარმონიულ ფუნქციას წარმოადგენს. მეტად მნიშვნელოვან ფაქტს წარმოადგენს ის, რომ მიღებული შედეგი არ არის დამოკიდებული ჰარმონიული სიგნალის საწყის ფაზაზე. (φ პარამეტრი შემდეგში აღარ არის წარმოდგენილი).

ურთიერთკორელაციური ფუნქცია. თუ მოცემულია ორი $\{X(t)\}$ და $\{Y(t)\}$ სტაციონალური შემთხვევითი პროცესის $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციები, მაშინ კორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt$$

რომელსაც ურთიერთკორელაციური ან კროსკორელაციური ფუნქცია ეწოდება და რომელიც აკავშირებს $x(t)$ რეალიზაციის t დროის მნიშვნელობას $y(t)$ რეალიზაციის $t+\tau$ დროის მნიშვნელობასთან.

ცხადია, რომ როცა ორივე სიგნალი ერთნაირია, მაშინ ავტოკორელაციური ფუნქცია წარმოადგენს კროსკორელაციური ფუნქციის კერძო შემთხვევას. ე.ი $x(t)=y(t)$. მაგალითისთვის განვიხილოთ მართკუთხა და სამკუთხა იმპულსების ურთიერთკორელაციური ფუნქცია. ე.ი მოცემულია

$$x(t)=\begin{cases} A, & 0\le t\le T \\ 0, & t<0, t>T \end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases} A\dfrac{t}{T}, & 0\le t\le T \\ 0, & t<0, t>T \end{cases}$$

– როცა $0\le \tau\le T$, მაშინ მივიღიებთ: $R_{xy}(\tau)=\int_0^T A^2\dfrac{t-\varsigma}{T}dt=\dfrac{A^2}{2T}(T-\tau)^2$;

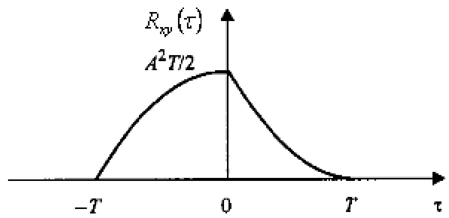
– როცა $-T\le \tau\le 0$, მაშინ $R_{xy}(\tau)=\int_0^{T+\tau} A^2\dfrac{t-T}{T}dt=\dfrac{A^2}{2\&}\left(T-\tau^2\right)$;

– როცა $|\tau|>T$, მაშინ $R_{xy}(\tau)=0$.

თუ ამ შედეგებს გავაერთიანებთ მაშინ გვექნება:

$$R_{xy}(\tau)=\begin{cases} \dfrac{A^2}{2T}(T-\tau)^2, & 0\le\tau\le T \\ \dfrac{A^2}{2T}\left(T^2-\tau^2\right), & -T\le\tau<0 \\ 0, & |\tau|>T \end{cases}$$

მითითებული ურთიერთკორელაციური ფუნქცია წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



ურთიერთკორელაციურ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\left|R_{xy}(\tau)\right|\le\sqrt{E_xE_y}$, სადაც E_x და E_y შესაბამისად $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციების ენერგიებია;

2. გააჩნია ანტიმეტრიის თვისება ანუ თუ $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციებს ადგილებს შევუცვლით მაშინ $R_{xy}(-\tau)=R_{yx}(\tau)$;

3. $R_{xy}(\tau)$ ფუნქციებისათვის არ არის აუცილებელი რომ იგი აღწევდეს მაქსიმუმს $\tau=0$ წერტილში;

4. $|\tau|$ გაზრდისას სასრული ენერგიის სიგნალების ურთიერთკორელაციური ფუნქციის მნიშვნელობა ნულისაკენ მიისწრაფვის ე.ი. $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} R_{xy}(\tau) \to 0$;

5. თუ $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციები არ შეიცავენ დელტა–ფუნქციას, მაშინ მათ ურთიერთკორელაციურ ფუნქციას არ გააჩნია წყვეტა ე.ი. იგი უწყვეტი ფუნქციაა.

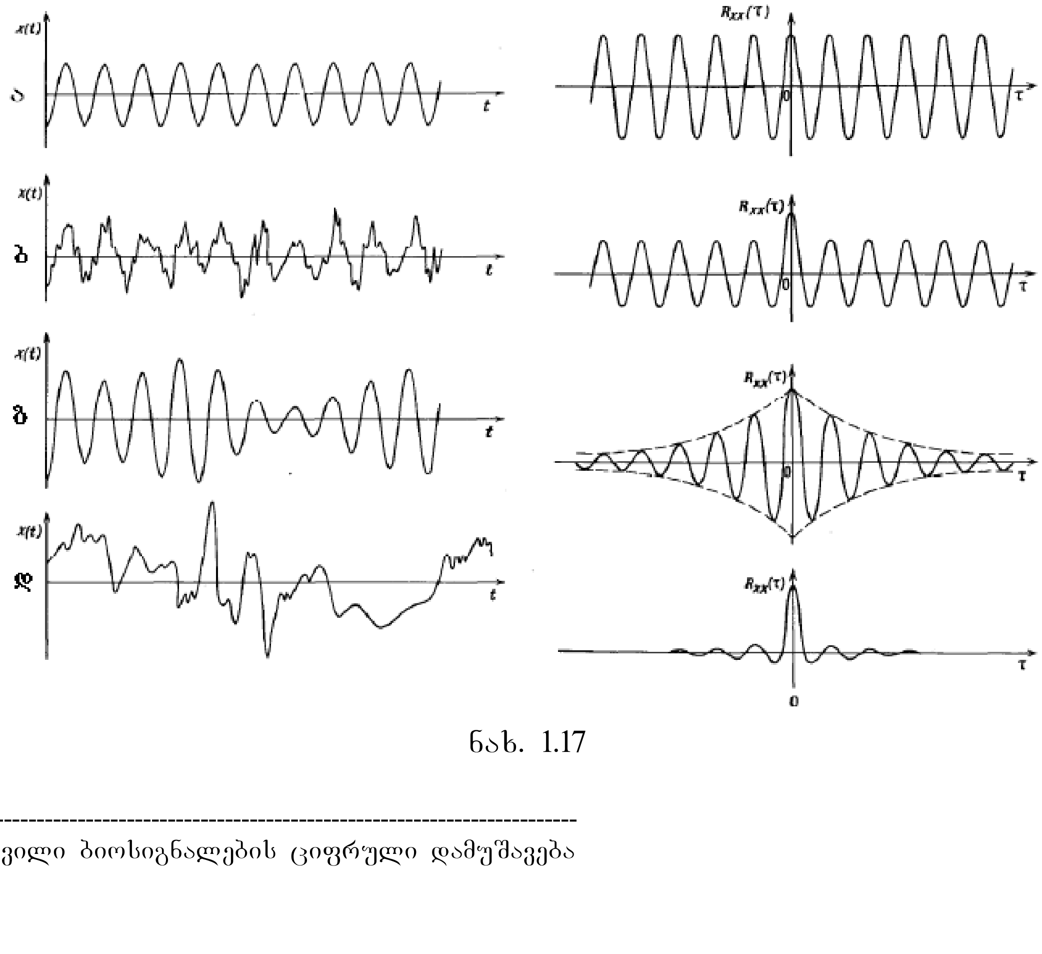
პერიოდული სიგნალებისავის ურთიერთკორელაციური ფუნქციის ცნება ზოგადად არ გამოიყენება გარდა იმ შემთხვევისა როცა $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციებს გააჩნიათ ერთნაირი პერიოდი.

კორელაციის ინტერვალი. როგორც აღვნიშნეთ, შემთხვევითი პროცესის კორელაციის ფუნქცია τ ძვრის გაზრდასთან ერთად მიისწრაფვის ნულისაკენ. რაც უფრო სწრაფად შემცირდება $R(\tau)$ ფუნქცია, მით უფრო ნაკლებია სტატისტიკური კავშირი შემთხვევითი სიგნალის დროში დაძრულ ორ მყისიერ მნიშვნელობას შორის.

შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციის ცვლილების სიჩქარის მახასიათეველს წარმოადგენს კორელაციური ინტერვალი τ_k რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\tau_k = \frac{1}{R_{xx}(0)} \int_0^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau$$

კორელაციური ფუნქციის ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ ოთხი ტიპიური შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციები (ნახ. 1.17): ჰარმონიული პროცესი (ა), ჰარმონიულ პროცესს დამატებული ფართოზოლიანი შემთხვევითი ხმაური (ბ), ვიწროზოლიანი შემთხვევითი პროცესი (გ), ფართოზოლიანი შემთხვევითი პროცესი (დ) და მათი შესაბამისი ავტოკორელაციური ფუნქციები



ნახ. 1.17

ჰარმონიული პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია არის კოსინუსოიდა, რომლის ამპლიტუდა ტოლია ჰარმონიული პროცესის საშუალო სიდიდის კვადრატისა. ამ პროცესისათვის დამახასიათებელია ის, რომ ადვილია დროის ნებისმიერი მომენტისათვის პროცესის სიდიდის ზუსტი წინასწარმეტყველება.

ფართოზოლიანი შემთხვევითი ხმაურის ფონზე ჰარმონიული პროცესის ავტოკორელაციური ფუნქცია ტოლია ჰარმონიული რხევის კორელაციური ფუნქციისა და ფართოზოლიანი შემთხვევითი ხმაურის კორელაციური ფუნქციიების ჯამისა და როგორც ნახაზიდან ჩანს ავტოკორელაციური ფუნქცია სწრაფად უახლოვდება მის კოსინუსოიდალურ ნაწილს. ეს გვაძლევს იმის საშუალებას, რომ დროის საკმაოდ დიდ დიაპაზონში მოვახდინოთ პროცესის მომავალი სიდიდეების საკმაოდ ზუსტი პროგნოზირება.

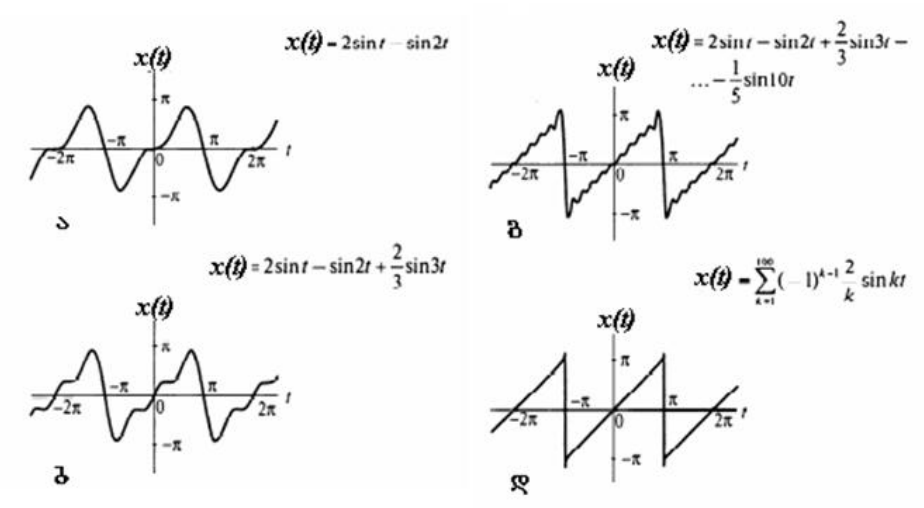
ვიწროზოლიანი პროცესის დროს ავტოკორელაციური ფუნქცია ნელა მილევადია. ასეთი პროცესის მომავალი სიდიდის პროგნოზირების სიზუსტე უფრო მცირეა, ვიდრე ჰარმონიული პოცესისა და რაც უფრო იზრდება t პროგნოზირების ცდომილებაც იზრდება.

ფართოზოლიანი პროცესის შემთხვევაში ავტოკორელაციური ფუნქცია სწრაფად მილევადია. ამ შემთხვევაში პროცესის მომავალი სიდიდის პროგნოზირება თითქმის შეუძლებელია. მართლაც, თუ საწყის რეალიზაციას (დ) დავაკვირდებით შევნიშნავთ, რომ პროცესს გააჩნია ქაოტიურად განვითარების ტენდეცია, რაც შეუძლებელს ხდის დროით დაცილებულ სიდიდეებსის პროგნოზირებას.

2. ფურიეს ანალიზი

2.1 ფურიეს მწკრივები

ფრანგმა მათემატიკოსმა ფურიემ (1768-1830) წამოაყენა ჰიპოთეზა რომლის თანახმად ბუნებაში არ არსებობს ფუნქცია, რომ არ შეიძლებოდეს მისი გაშლა ტრიგონომეტრიული მწკრივების სახით. მართლაც, ნებისმიერი პერიოდული სიგნალი შეიძლება დაიშალოს სხვადასხვა სიხშირეების სინუსოიდებად ან პირიქით, სხვადასხვა სიხშირეების სინუსოიდების აჯამვით შესაძლებელია სასურველი ფორმის სიგნალის მიღება. განვიხილოთ მაგალითი. ქვემოთ მოყვანილ 2.1ა ნახაზზე წარმოდგენილია $x(t)=2\sin t - \sin 2t$ ფუნქციის გრაფიკული გამოსახულება, რომელიც წარმოადგენს ორი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ჯამს.



ნახ. 2.1

$x(t)$ ფუნქციას დაუმატოთ ერთი წევრი და მივიღებთ ახალ სამწევრიან მწკრივს

$$x(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t$$

რომლის გრაფიკული გამოსახულება წარმოდგენილია ნახ. 2.1ბ-ზე. კიდევ დაუმატოთ რამოდენიმე წევრი მივიღებთ ახალ ტრიგონომეტრიულ მწკრივს, რომლიც 10 წევრისაგან შედგება (ნახ. 2.1გ)

$$x(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{2}{5}\sin 5t - \frac{1}{3}\sin 6t + \frac{2}{7}\sin 7t -$$
$$- \frac{1}{4}\sin 8t + \frac{2}{9}\sin 9t + \frac{1}{5}\sin 10t$$

მიღებული ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები აღვნიშოთ b_k-თი, სადაც k მთელი რიცხვია. თუ ყურადღებით დავაკვირდებით შევნიშნავთ, რომ ეს კოეფიციენტები შეიძლება აღიწეროს შემდეგი დამოკიდებულებით:

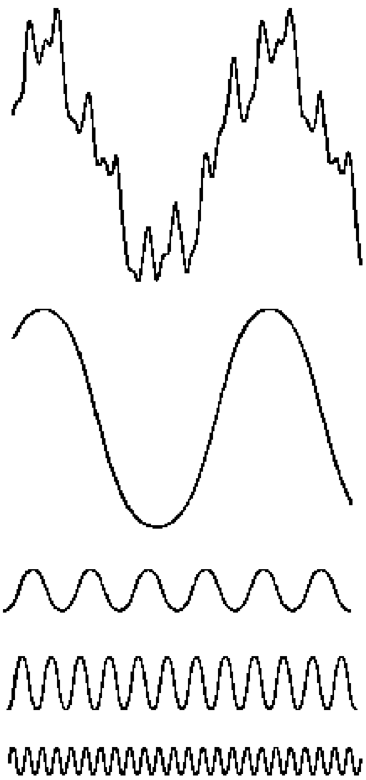
$$b_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k} \quad ,$$

მაშინ $x(t)$ ფუნქცია შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} b_k \sin kt$$

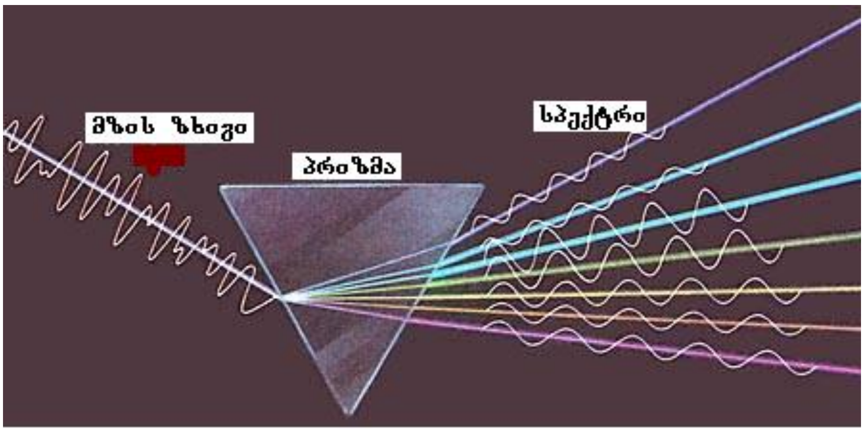
b_k კოეფიციენტები წარმოადგენენ k კუთხური სიხშირის სინუსოიდების ამპლიტუდებს. ნახ. 2.1გ-ზე წარმოდგენილია შემთხვევა, როცა k = 10, ე.ი. M = 10. თუ M - ს გავზრდით 100-მდე, მივიღებთ $x(t)$ ფუნქციის გრაფიკს (ნახ. 2.1დ), რომელიც ფორმით უახლოვდება ხერხისებურ ფუნქციას. ამ მაგალითის საფუძველზე შეიძლება გავაკეთოდ დასკვნა ფურიეს ჰიპოთეზის სამართლიანობაზე.

ნახ. 2.2 ნაჩვენებია სიგნალის დაშლა სხვადასხვა სიხშირის სინუსოიდებად.



ნახ. 2.2

სამყაროში ბევრია მოვლენები, რომლებიც შეიძლება წარმოვადგინოთ სხვადასხვა სიხშირეების რხევების სახით. მაგალითისათვის განვიხილოთ თეთრი ფერის სიგნალი. ფიზიკიდან ცნობილია, რომ თუ თეთრი ფერის სხივს გავატარებთ პრიზმაში, მაშინ მივიღებთ შვიდი ფერის სპექტრს (ნახ. 2.3).



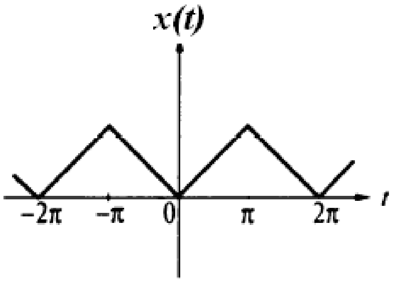
ნახ. 2.3

ეს იმიტომ ხდება, რომ პრიზმის მინის გარდატეხის კოეფიციენტი იცვლება ელექტრომაგნიტური ტალღის სიგრძის ცვლილებასთან ერთად. სწორედ ეს შედეგი ერთხელ კიდევ გვიჩვენებს ფურიეს ჰიპოთეზის სამართლიანობას ანუ თეთრი ფერი არის სინათლის სხვადასხვა სიგრძის ტალღების ჯამი.

ამრიგად, სიგნალის დაშლა სხვადასხვა სიხშირეების მდგენელებად საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ მოცემული სიგნალის წარმოშობა, ანუ სხვა

სიტყვებით, ჩვენ შეგვიძლია სიგნალის წარმოშობაზე ინფორმაციის მიღება. ასეთი ანალიზის მეთოდს **სპექტრული ანალიზი** ან **ფურიეს ანალიზი** ეწოდება.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ხერხისებრივი ფუნქციის $x(t)=t,\ -\pi \le t \le \pi$ ფურიეს მწკრივებად გაშლისას გამოყენებული იყო მხოლოდ სინუსები. მაგრამ, თუ ავიღებთ $x(t)=|t|$ ფუნქციას (ნახ. 2.4)

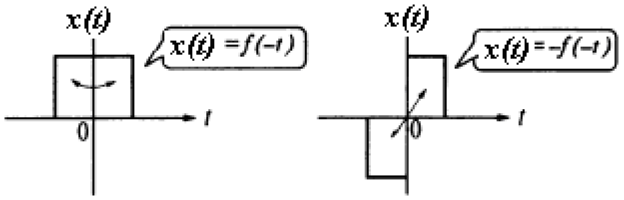


ნახ. 2.4

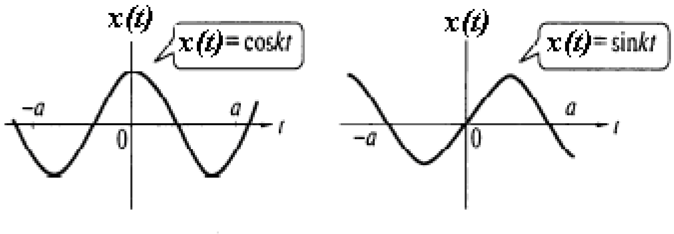
და გავშლით ფურიეს მწკრივად აღმოჩნდება, რომ ამ შემთხვევაში სინუსები გაქრებიან და რჩება მხოოდ კოსინუსები, ე.ი მივიღებთ:

$$x(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\left(\cos t+\frac{1}{9}\cos 3t+\frac{1}{25}\cos 5t+\cdots\cdots\right)$$

მივაქციოთ ყურადღება $x(t)=|t|$ ფუნქციას, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისება: $x(t)=x(-t)$ ანუ ის სიმეტრულია ორდინატის ღერძის მიმართ. ასეთ ფუნქციებს ლუწი ფუნქციები ეწოდებათ. ხერხისებრივ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისება: $x(t)=-x(-t)$ ანუ ის სიმეტრიულია ათვლის წერტილის მიმართ. ასეთ ფუნქციებს კენტ ფუნქციებს უწოდებენ. ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია კენტი და ლუწი ფუნქციებს შორის განსხვავება.



ცხადია, რომ $\cos kt,\ k=0,1,2,....$ ლუწი ფუნქციაა, ხოლო $\sin kt$- კენტი (ნახ. 2.5)



ნახ. 2.5

ადვილად მტკიცდება, რომ ინტეგრალი კენტი x(t) და ლუწი y(t) ფუნქციების ნამრავლიდან ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt=0\,.$$

დასკვნის სახით შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: **ლუწი ფუნქციის ფურიეს მწკრივი შედგება მხოლოდ კოსინუსებისგან, ხოლო კენტი – სინუსებისგან.**

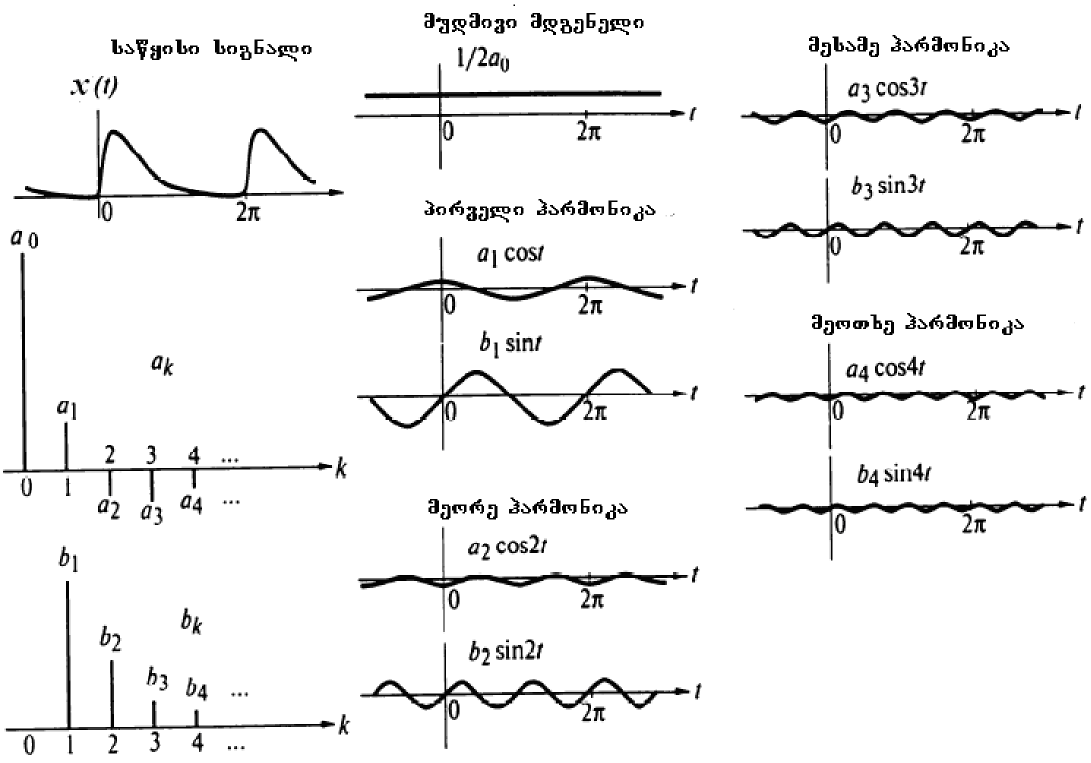
ზოგადად პერიოდული $x(t)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + a_3 \cos 3t + \cdots + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + b_3 \sin 3t + \cdots$$
$$\cdots = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right), \quad (2.1)$$

სადაც a_0 ,a_k ,b_k ფურიეს კოეფიციენტები ეწოდებათ. სიგნალის ასეთ წარმოდგენას ფურიეს მწკრივად გაშლა ეწოდება. ზოგჯერ ასეთ წარმოდგენას ფურიეს მწკრივად ნამდვილ გაშლას უწოდებენ, ხოლო კოეფიციენტებს - ფურიეს ნამდვილ კოეფიციენტებს. ტერმინი „ნამდვილი“ შემოაქვთ იმიტომ, რომ განვასხვაოთ ფურიეს მწკრივის კომპლექსური გაშლისგან.

(2.1) თანაფარდობის ყველაზე დიდი პერიოდის რხევას ეწოდება **ძირითადი (ფუნდამენტური) სიხშირის რხევა ანუ პირველი ჰარმონიკა.** რხევას, რომლის პერიოდი ძირითადი პერიოდის ნახევარია, ეწოდება მეორე ჰარმონიკა. რხევას, რომლის პერიოდი ძირითადი პერიოდის მესამედია, ეწოდება მესამე ჰარმონიკა და ა.შ.

როგორც (2.1) ფორმულიდან ჩანს, a_0 წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს, რომელიც $x(t)$ ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობის ტოლია. ქვემოდ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია სიგნალი და მისი ფურიეს მწკრივად გაშლა ნამდვილ მდგენელად და სხვადასხვა სიხშირეების ჰარმონიკებად.



პირველი ჰარმონიკა წარმოადგენს პერიოდულ სიგნალს 2π პერიოდით. სხვა სიხშირეებსაც გააჩნიათ 2π პერიოდის ჯერადი პერიოდები.

2.2 ფურიეს მწკრივების ზოგადი წარმოდგენა

აქამდე $x(t)$ ფუნქცია მოცემული იყო t დროის $[-\pi;\pi]$ ინტერვალში ზოგადად T პერიოდის მქონე სიგნალის ფურიეს მწკრივად გაშლისათვის უნდა გამოვიყენოთ $\left[-T/2;T/2\right]$ დროის ინტერვალი. თუ $[-\pi;\pi]$ ინტერვალს გავზრდით (ან შევამცირებთ) $\left[-T/2;T/2\right]$ ინტერვალამდე, მაშინ პირველი ჰარმონიკის პერიოდი T იზრდება (ან მცირდება) 2π-დან T-მდე. რადგან ამ გარდაქმნის ჯერადობა $T/2\pi$ ტოლია, ამიტომ პირველი ჰარმონიკა მიიღებს შემდეგ სახეს: $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. k-ური ჰარმონიკისათვის გვექნება: $\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$. $\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$.

მაშინ x(t) ფუნქციის ფურიეს მწკრივად გაშლა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)+b_k\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)\right] \qquad (2.2)$$

თუ პირველი ჰარმონიკის კუთხურ სიხშირეს აღვნიშნავთ $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$, მაშინ (2.2) გამოსახულება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(\omega_0 kt)+b_k\sin(\omega_0 kt)\right] \qquad (2.3)$$

ფორმულაში შემავალ $k\omega_0$ სიდიდეებს უწოდებენ ჰარმონიკებს, რომლებიც k ინდექსით ინომრებიან და მათ $k-$ური ჰარმონიკა ეწოდებათ.

ფურიეს მწკრივში a_k და b_k კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\cos(k\omega_0 t)dt \quad k=0,1,2,.....$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\sin(k\omega_0 t)dt \quad k-0,1,2,......$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)dt\ .$$

a_0 წარმოადგენს სიგნალის მუდმივ მდგენელს, რომელიც დროზე არ არის დამოკიდებული და იგი ტოლია T პერიოდში სიგნალის საშუალო მნიშვნელობისა. ინტეგრირების საზღვრები არ არის აუცილებელი იყოს $\left[-T/2;T/2\right]$. იგი შეიძლება იყოს ნებისმიერი T სიგრძის ინტერვალიდან, მაგალითად 0-დან T- მდე ან $-T$-დან 0-მდე. თუ x(t) ლუწი ფუნქციაა, მაშინ ყველა b_k = 0 და ფურიეს მწკრივის ფორმულაში მხოლოდ კოსინუსის მდგენელები რჩებიან. თუ x(t) კენტი ფუნქციაა, მაშინ ფორმულაში მხოლოდ სინუსები რჩებიან.

2.3 ფურიეს მწკრივის წარმოდგენის ნამდვილი ფორმა

ფურიეს მწკრივის წარმოდგენა სინუსების და კოსინუსების ჯამის სახით ქმნის გარკვეულ უხერხულობას, რადგან ყოველი აჯამვის k ინდექს შესაბამება ორი მდგენელი სინუსი და კოსინუსი. რადგან თითოეულ ჰარმონიკას გააჩნია ამპლიტუდა A_k და საწყისი φ_k ფაზა, ამიტომ ფურიეს კოეფიციენტები შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$a_k = A_k \cos\varphi_k\,, \quad b_k = A_k \sin\varphi_k$$

რადგან $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\,, \quad tg\varphi_k = \dfrac{b_k}{a_k}$ და თუ მათ ჩავსვამთ (2.3) ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ ფრო მოსახერხებელ ფორმულას:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) \tag{2.4}$$

თუ $x(t)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ φ_k ფაზა მიიღებს ნულოვან და π მნიშვნელობებს, ხოლო თუ $x(t)$ კენტი ფუნქციაა, მაშინ φ_k ფაზის შესაძლო მნიშვნელობები $\pm\dfrac{\pi}{2}$ ტოლია.

2.4 ფურიეს მწკრივის წარმოდგენის კომპლექსური ფორმა

თუ ფურიეს მწკრივის წარმოდგენის ნამდვილი ფორმის ფორმულაში (2.4) $\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ სიდიდეს ეილერის ფორმულით (1.10) წარმოვადგენთ, მაშინ მივიღებთ ფურიეს მწკრივის წარმოდგენის კომპლექსურ ფორმას:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2}\left[\exp\{jk\omega_0 t + j\varphi_k\} + \exp\{-jk\omega_0 t - j\varphi_k\}\right]$$

მუდმივი მდგენელი $a_0/2$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც მწკრივის წევრი ნულოვანი ნომრით. მაშინ ეილერის ფორმულის თანახმად მივიღებთ ფურიეს მწკრივის ჩაწერის კომპლექსურ ფორმას:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk\omega_0 t}$$

მწკრივის კომპლექსური კოეფიციენტები დაკავშირებულია A_k ამპლიტუდებთან და φ_k ფაზებთან შემდეგი მარტივი თანაფარდობებით:

$$C_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}\,, \quad A_k = 2|C_k|, \quad \varphi_k = \arg(C_k)$$

მარტივად გამოისახება სინუს–კოსინუსიანი მწკრივის a_k და b_k კოეფიციენტებთან კავშირი

$$C_k = \frac{a_k}{2} - j\frac{b_k}{2}, \quad a_k = 2\,\mathrm{Re}(C_k), \quad b_k = -2\,\mathrm{Im}(C_k)$$

აქედან გამომდინარეობს კომპლექსური ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების განსაზღვრის ფორმულა.

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j\omega_k t}dt \qquad (2.5)$$

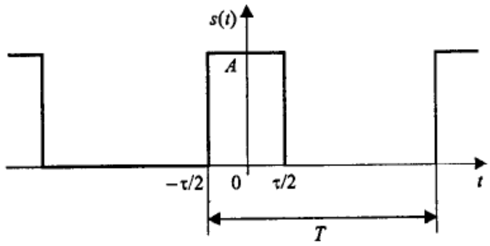
თუ $x(t)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ კოეფიციენტები იქნებიან ნამდვილი რიცხვები, ხოლო თუ $x(t)$ კენტი ფუნქციაა, მაშინ კოეფიციენტები იქნებიან წარმოსახვითი.

ფურიეს მწკრივის ამპლიტუდური ჰარმონიკების ერთობლიობას ეწოდება **ამპლიტუდური სპექტრი**, ხოლო ფაზების ერთობლიობას - **ფაზური სპექტრი.**

2.5 ფურიეს მწკრივად გაშლის მაგალითები

1. მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა

მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



სადაც A - τ ხანგრძლიობის მართკუთხა იმპულსის ამპლიტუდაა, $T-$ გამეორების პერიოდია. რადგან მოცემული სიგნალი ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right).$$

T პერიოდის ფარდობას იმპულსის ხანგრძლივობასთან ეწოდება **იმპულსის სიმეჩხრე**, რომელიც აღინიშნება q სიმბოლოთი, ე.ი $q=\frac{T}{\tau}$ თუ ამ პარამეტრს შევიტანთ ფურიეს მწკრის კოეფიციენტების განსაზღვრის ფორმულაში და შემდეგ ფორმულას დავიყვანოთ $\frac{\sin x}{x}$ სახემდე, გვექნება:

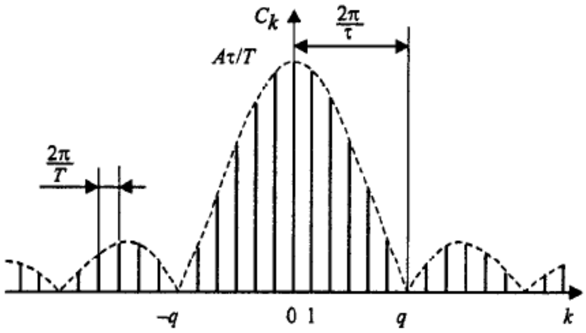
$$a_k = \frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q}\frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}} \qquad (2.6)$$

ხშირად სიმეჩხრის მაგივრად იყენებენ მის შებრუმებულ $\frac{\tau}{T}$ სიდიდეს, რომელსაც **შევსების კოეფიფიციენტი** ეწოდება.

მიღებულ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ როცა $x \to 0,\ \frac{\sin x}{x} \to 1.$ ეხლა შესაძლებელია მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის ჩაწერა ფურიეს მწკრივის სახით.

$$x(t)=\frac{A}{q}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)$$

ფურიეს მწკრივის ამპლიტუდების ჰარმონიკები $\frac{\sin x}{x}$ გამოსახულების კანონით დამოკიდებულნი არიან ჰამონიკის რიგით ნომერზე. ფურიეს მწკრივის კოეფიეიენტები წარმოდგენილია ნახ. 2.12 -ზე:



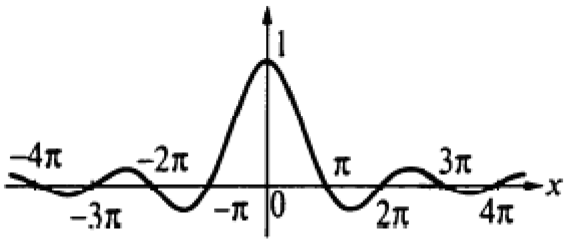
ნახ. 2.12

როგორც ნახაზიდან ჩანს, მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის სპექტრში სიმეჩხრის ჯერადობის ჰარმონიკები არ არიან, რადგან მათი ამპლიტუდები ნულის ტოლია. მანძილი ორ მეზობელ ჰარმონიკებს შორის $2\pi/T$ სიდიდის ტოლია. სპექტრის რხევის სიგანე, რომელიც იზომება სიხშირის ერთეულში ტოლია $2\pi/\tau$ ანუ იმპულსის ხანგრძლივობის შებრუნებული სიდიდისა. რაც უფრო მოკლეა სიგნალი, მით უფრო ფართოა მისი სპექტრი.

თუ ფურიეს კოეფიციენტების განსაზღვრის ფორმულაში შემოვიტანთ $\pi k/q = x$ აღნიშვნას, მაში (2.6) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$a_k=\frac{2A}{q}\frac{\sin x}{x}$$

$\frac{\sin x}{x}$ ფუნქცია გრაფიკულად წამოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:

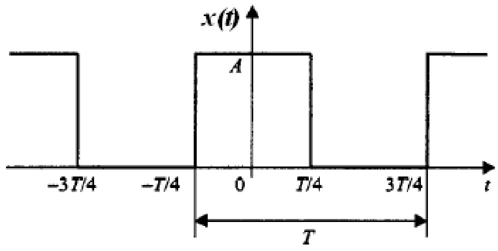


ნახ. 2.13

ხშირად ამ ფუნქციას უწოდებენ ამორჩევის (ერთეულოვანი ანათვლის) ფუნქციას.

2. მეანდრა.

მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს მეტად მნიშვნელოვანი სიგნალი, რომელსაც მეანდრა ეწოდება. მეანდრა წარმოადგენს ისეთი მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობას, რომელთაც გააჩნიათ ორის ტოლი სიმეჩხრე და ამის გამო იმპულსის ხანგრძლიობა და იმპულსებს შორის ინტერვალი ერთმანეთის ტოლია (ნახ. 2.14).



ნახ. 2.14

თუ (2.6) ფორმულაში ჩავსვამთ q = 2, მაშინ მივიღებთ:

$$a_k = A\frac{\sin\left(\pi k/2\right)}{\pi k/2} = \begin{cases} A, & k = 0, \\ 0, & k = 2m,\ m \neq 0, \\ \dfrac{2A}{\pi k}, & k = 4m+1 \\ -\dfrac{2A}{\pi k}, & k = 4m-1 \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ, მეანდრას სპექტრში მხოლოდ კენტი ჰარმონიკები იმყოფებიან. აქედან გამომდინარე, მეანდრას წარმოდგენა ფურიეს მწკრივის სახით შემდეგია:

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}T\right) - \cdots\right]$$

მეანდრას ჰარმონიულ მდგენელებს გააჩნიათ ცვალებადი ნიშნის ამპლიტუდები, რომლებიც ჰარმონიკის ნომრების პროპორციულია.

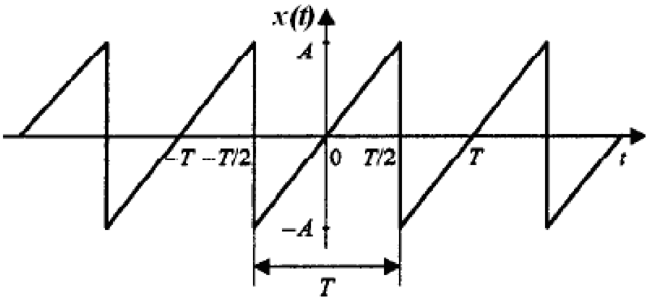
3. ხერხისებრივი სიგნალი.

ხერხისებრივი სიგნალი, რომელიც წარმოდგენილია ნახ. 2.15 აღიწერება შემდეგი წრფივი ფუნქციით:

$$x(t) = \frac{2A}{T}(t - kT), \quad (k - \frac{1}{2})T < t \leq (k + \frac{1}{2})T$$

ხერხისებრივი სიგნალი წარმოადგენს კენტ ფუნქციას, ამიტომ მისი ფურიეს მწკრივი შედგება მხოლოდ სინუსების მდგენელებისაგან

$$x(t) = \frac{2A}{\pi}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{4}\sin\left(4\frac{2\pi}{T}t\right) + \ldots\right)$$

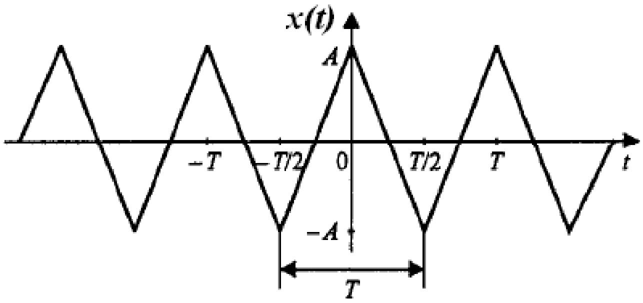


ნახ. 2.15

ზემოდ მოყვანილ მართკუთხა და ხერხისებრივი პერიოდული სიგნალებისათვის არის ერთი საერთო თვისება, კერძოდ ჰარმონიკების ამპლიტუდები მათი რიგითი k ნომრის გაზრდისას მცირდებიან k –ს პროპორციულად.

4. სამკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა

სამკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობა, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



წარმოადგენს პერიოდულ სიმეტრიულ ფუნქციას, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$x(t) = A\left(1 - 4\frac{|t-kT|}{T}\right), \qquad \left(k-\frac{1}{2}\right)T \le t < \left(k+\frac{1}{2}\right)T$$

რადგან $x(\mathrm{t})$ სიგნალი ლუწია, ამიტომ ფურიეს მწკრივში იქნება მხოლოდ კოსინუსების მდგენელები

$$x(t) = \frac{8A}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{3^2}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5^2}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) + \cdots\cdots\right].$$

ფურიეს კოეფიციენტები განისაზღვრებიან შემდეგნაირად:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} A\left(1-4\frac{|t|}{T}\right)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)dt = \frac{4A}{(\pi k)^2}\left(1-(-1)^k\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ \dfrac{8A}{(\pi k)^2}, & k = 2m+1 \end{cases}$$

როგორც ვხედავთ, სამკუთხა პერიოდული სიგნალის ამპლიტუდის ჰარმონიკები მცირდებიან ჰარმონიკის ნომრის კვადრატის პროპორციულად. ეს მიგვანიშნებს იმაზე, რომ სპექტრის ჩაქრობის სიჩქარე დამოკიდებულია სიგნალის სიგლუვის ხარისხზე. მართკუთხა და ხერხისებრ სიგნალებს გააჩნიათ პირველი რიგის წყვეტა (ნახტომი), სადაც სპექტრში მონაწილეობს $1/k$ მამრავლი. სამკუთხა სიგნალი წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას (თუმცა მის

პირველ წარმოებულს გააჩნია წყვეტები) და მისი ფურიეს მწკრივის ამპლიტურ ჰარმონიკებს გააჩნიათ $1/k^2$ მდგენელი.

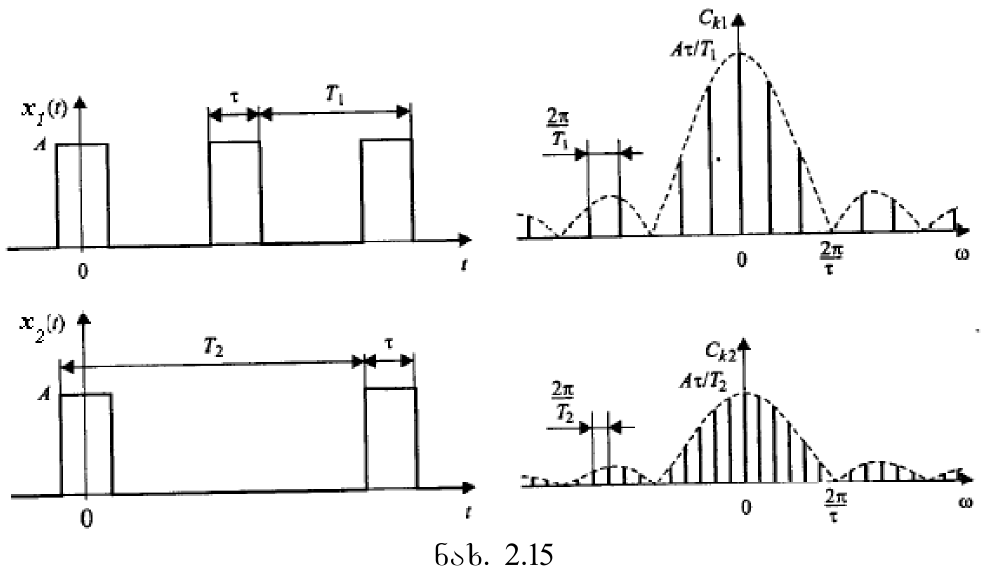
2.6 ფურიეს გარდაქმნა

ფურიეს გარდაქმნა წარმოადგენს არაპერიოდული სიგნალების სპექტრული ანალიზის ინსტრუმენტს, თუმცა მისი გამოყენება შესაძლებელია პერიოდული სიგნალებისთვისაც.

ფურიეს მწკრივიდან ფურიეს გარდაქმნაზე გადასვლის თვალსაჩინოებისათვის განვიხილოთ თანმიმდევრული პერიოდული იმპულსების ფურიეს მწკრივი. შემდეგ ერთეულოვანი იმპულსების ფორმის შეუცვლელად გავზარდოთ იმპულსის გამეორების T პერიოდი და კვლავ განვსაზღვროთ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები ჩვენთვის ცნობილი (2.5) ფორმულით:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt .$$

როგორც ამ ფორმულიდან ჩანს, საჭიროა იგივე ინტეგრალის გამოთვლა ოღონდ სიხშირეების უფრო მჭიდრო განლაგებისათვის $\omega_k = k\omega_0$. ამ შემთხვევაში ინტეგრირების ზღვრების შეცვლა არავითარ როლს არ თამაშობს. ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე ნაჩვენებია მართკუთხა იმპულსების თანმიმდევრობის სიხშირის პერიოდის ორჯერ გაზრდის შემთხვევა:



ნახ. 2.15

ამრიგად, პერიოდის გაზრდასთან ერთად ფურიეს მწკრივის ჰარმონიკები განლაგდებიან ერმანეთის მიმართ უფრო მჭიდროდ. ამ დროს (2.5) ინტეგრალის სახე არ იცვლება. თუ ჩვენ T-ს გავზრდით უსასრულოდ ე.ი $T \to \infty$, მაშინ სპექტრის ჰარმონიკები უფრო მჭიდროდ განლაგდებიან მთელი სიხშირული ღერძის მიმართ, ხოლო მათი ამპლიტუდების მნიშვნელობები მცირდებიან ნულამდე.

არაპერიოდული სიგნალების სპექტრული ანალიზის დროს ხდება ფურიეს კომპლექსური მწკრივის კოეფიციენტების განსაზღვრის ფორმულის მოდიფიცირება შემდეგნაირად:

- სიხშირე დისკრეტულად ცვლადი სიდიდე აღარ არის, ის ხდება გარდაქმნის უწვეტი პარამეტრი. (2.5) ფორმულაში $k\omega_0$ იცვლება ω–თი;

- ფორმულაში გამოირიცხება $1/T$ მამრავლი;

- გამოთვლების შდეგად C_k კოეფიციენტების ნაცვლად ვღებულობთ $X(\omega)$ სიხშირის ფუნქციას, რომელიც *x(t)* სიგნალის სპექტრული ფუნქცია ან სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია ეწოდება.

ამრიგად (2.5) ფორმულის მოდიფიკაციას მივყევართ ფურიეს ინტეგრალამდე

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (2.7)$$

რომლსაც დროითი $x(t)$ ფუნქცია გადაყავს სიხშირულ $X(\omega)$ ფუნქციაში და მას ფურიეს პირდაპირი გარდაქმნა (ან სპექტრი) ეწოდება. ფურიეს პირდაპირი გარდაქმნა მოკლედ შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $X(\omega)=F[x(t)]$.

ფურის გარდაქმნა შექცევადია ე.ი გააჩნია უკუ გარდაქმნა, რომლის შედეგად $X(\omega)$ სიხშირული ფუნქციიდან მიიღება $x(t)$ საწყისი ფუნქცია

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}df \quad . \qquad (2.8)$$

ეს გარდაქმნა მოკლედ ასე შეიძლება ჩაიწეროს: $x(t)=F^{-1}[X(\omega)]$. თუ კუთხური ω სიხშირის ნაცვლად გამოვიყენებთ $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$ ციკლურ სიხშირეს, მაშინ მივიღებთ:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad \text{და} \quad x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$$

უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზოგადად $X(f)$ წარმოადგენს სიხშირის კომპლექსურ ფუნქციას, რომელიც შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ნამდვილი და წარმოსახვითი მდგენელების ჯამი:

$$X(f)=X_R(f)-jX_I(f)$$

სადაც

$$X_R(f)=|X(f)|\cos\varphi(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cos(2\pi ft)dt$$

$$X_I(f)=|X(f)|\sin\varphi(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\sin(2\pi ft)dt$$

$X(f)$ ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ პოლარულ კორდინატებში

$$X(f)=|X(f)|e^{-j\varphi(t)},$$

სადაც $|X(f)|$ წარმოადგენს ამპლიტუდურ სპექტს, ხოლო $\varphi(f)$ ფაზურ სპექტრს.

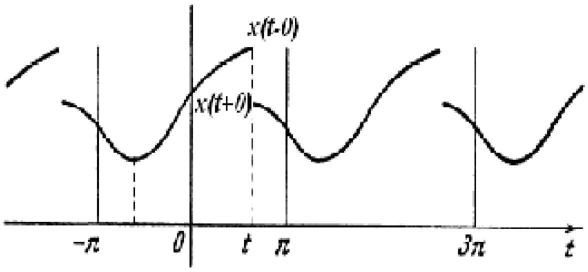
იმისათვის, რომ ფურიეს გარდაქმნა გამოვიყენოთ სიგნალი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ მოთხოვნებს:

- უნდა სრულდებოდეს დირიხლეს პირობა;

- სიგნალი უნდა იყოს აბსოლუტურად ინტეგრებადი. ეს იმას ნიშნავს რომ სიგნალის მოდულიდან ინტეგრალი უნდა იყოს სასრული მნიშვნელობის.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{2.9}$$

დირიხლეს პირობით სიგნალი არ უნდა შეიცავდეს მეორე რიგის წყვეტას (უსასრულობაში მიმავალი ფუნქციის შტოებით), ან წყვეტა უნდა იყოს სასრულო რაოდენიბის (ნახ. 2.16).



ნახ. 2.16

თუ $x(t)$ ლუწი ფუნქციაა, მაშინ, ისევე როგორც ფურიეს მწკრივის დროს, სპექტრი იქნება ნამდვილი ფუნქცია და შესაბამისად იგი იქნება ლუწი ფუნქცია. თუ $x(t)$ ფუნქცია კენტია, მაშინ $X(f)$ ფუნქცია იქნება კენტი და წარმოსახვითი.

2.7 ფურიეს ფინიტური გარდაქმნა

თუ $x(t)$ წარმოადგენს სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის (სიგნალის) რეალიზაციას, რომელიც განსაზღვრულია $[-\infty;\infty]$ ინტერვალიდან $t-$ს ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის, მაშინ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

აქედან გამომდინარე, $x(t)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა არ არსებობს, რადგან (2.9) უტოლობა არ სრულდება. აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ არავითარი დაკვირვებები (გაზომვები) არც ლაბორატორიულ და არც ბუნებრივ პირობებში შეუძლებელია ჩავატაროთ უსასრულოდ ანუ $t-$ს ნებისმიერი ნიშვნელობისათვის.

რეალურად $x(t)$ რეალიზაციაზე გაზომვები ხდება რაღაც სასრულო T დროის განმავლობაში. ასე რომ, $X(f)$ სპექტრული ფუნქციის შეფასება ხდება ფურიეს ფინიტური გარდაქმნით, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$X_T(f) = X_T(f,T) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

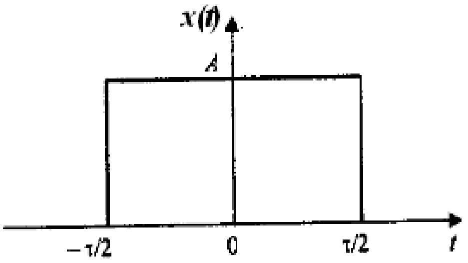
ამრიგად, შეზღუდული სიგრძის სტაციონარული შემთხვევითი სიგნალის ფურიეს ფინიტური გარდაქმნა ყოველთვის არსებობს, რადგან სრულდება (2.8) პირობა.

2.8 ფურიეს გარდაქმნის მაგალითები

1. მართკუთხა იმპულსი

მართკუთხა იმპულსის ფურიეს გარდაქმნა წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ოპერაციას სიგნალების ციფრული დამუშავების დროს. იგი

ფართოდ გამოიყენება დისკრეტიზაციის თეორიაში, სპექტრულ ანალიზში და განსაკუთრებით ციფრული ფილტრების პროექტირების დროს. განვიხილოთ კოორდინატთა სათავის მიმართ სიმეტრიული მართხუკხა იმპულსი:



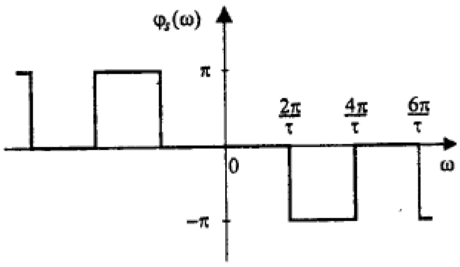
$$x(t)=\begin{cases} A, & |t|\le \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2} \end{cases}$$

ნახ. 2.17

განვსაზღვროთ სპექტრული ფუნქცია

$$X(\omega)=\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t}dt=-\frac{A}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{2A}{\omega}\cdot\frac{e^{j\omega\tau/2}-e^{-j\omega\tau/2}}{2j}=\frac{2A}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)=A\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

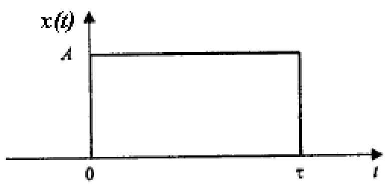
როგორც ვხედავთ, სპექტრი წარმოადგენს $\frac{\sin x}{x}$ ფუნქციის სახეს (ნახ. 2.13), ხოლო ფაზურ სპექტრი წარმოდგენილია ნახ. 2.18-ზე.



ნახ. 2.18

როგორც ვხედავ, ფაზური სპექტრი ღებულობს მხოლოდ 0 ან π მნიშვნელობას. გარდა ამისა, სპექტრული ფუნქცია $|X(\omega)|$ ნულოვან სიხშირეზე ტოლია იმპულსის ფართობისა $A\tau$.

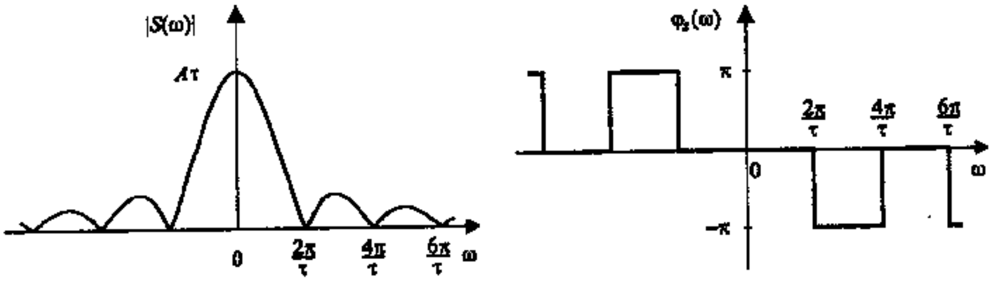
ეხლა განვიხილოთ თუ რა შეიცვლება, როდესაც ხდება იმპულსის დაძვრა τ დროით, როგორც ეს წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



ნახ. 2.19

განვსაზღვროთ ფურიეს გარდაქმნა და ავაგოთ ამპლიტუდური და ფაზური სპექტრები

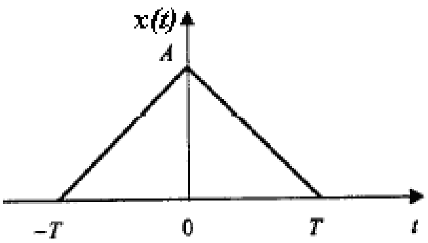
$$X(\omega)=\int_0^{\tau} A e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{j\omega}\left(1-e^{-j\omega\tau}\right)=A\tau\frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}\exp\left\{-j\frac{\omega\tau}{2}\right\}$$



ნახ. 2.20

როგორც ვხედავთ, იმპულსის დროით დაძვრის შედეგად მისი ამპლიტუდური სპექტრი რჩება იგივე, ხოლო ფაზური სპექტრი დროში განიცდის ძვრას, რომელიც წრფივად არის დაკავშირებული სიხშირესთან. ამპლიტუდური სპექტრის $|X(\omega)|$ გრაფიკული გამოსახულებიდან ჩანს, რომ იგი ω–ს ზრდასთან ერთად ნელ-ნელა განიცდის ჩაქრობას. ამიტომ საჭირო ხდება სპექტრის ეფექტური სიგანის ცნების შემოტანა. როგორც გრაფიკული გამოსახულებიდან ჩანს, სპექტრს ეფექტური სიგანედ შეიძლება მივიღოთ მთავარი რხევის სიგანე ანუ $2\pi/\tau$, რომელიც უკუპროპორციულია იმპულსის ხანგრძლიობისა.

2. სიმეტრიული სამკუთხა იმპულსი



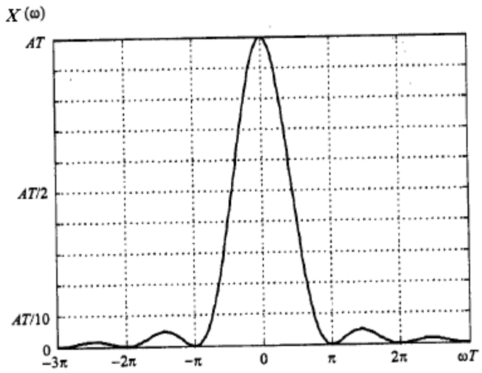
$$x(t)=\begin{cases} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right), & |t|\le T \\ 0\ , & |t|>T \end{cases}$$

ნახ. 2.21

განვსაზღვროთ სპექტრული ფუნქცია:

$$X(\omega)=\int_{-T}^{T} A\left(1-\frac{|t|}{T}\right)e^{=j\omega t}dt=AT\frac{\sin^2\left(\omega T/2\right)}{\left(\omega T/2\right)^2}$$

რომლის ამპლიტუდურ სპექტრს აქვს შემდეგი სახე:



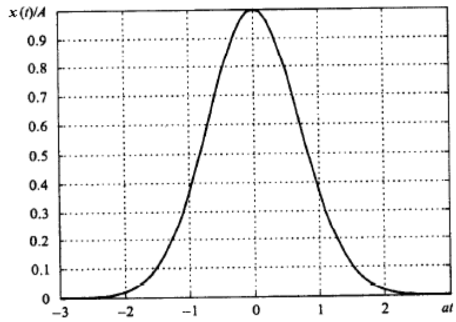
ნახ. 2.22

როგორც ამ გრაფიკიდან ჩანს, სპექტრის ეფექტური სიგანე ტოლია $2\pi/T$, ისევე როგორც მართკუთხა იმპულსის დროს, მაგრამ სიგნალის ხანგრძლივობა ორჯერ მეტია ($2T$).

როგორც ვხედავთ, სპექტრული ფუნქცია წარმოადგენს არაუარყოფით ნამდვილ ფუნქციას, ამიტომ ფაზური სპექტრი ამ შემთხვევაში ნულის ტოლია და მისი გრაფიკის აგება უაზრობაა.

3. გაუსის იმპულსი

გაუსის იმპულსი $x(t) = Ae^{-a^2t}$ მეტად მნიშვნელოვან სიგნალს წარმოადგენს, რომელსაც ორივე დროითი ღერძის მიმართ გააჩნია უსასრულო ხანგრძლივობის შტოები.

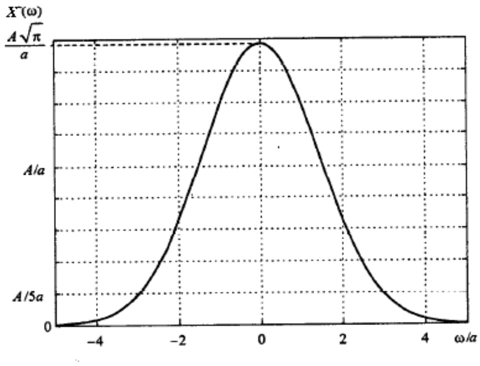


ნახ. 2.23

განვსაზღვროთ სპექტრი

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-a^2t^2} e^{-j\omega t} dt = \frac{A\sqrt{\pi}}{a} \exp\left\{-\frac{\omega^2}{4a^2}\right\}$$

რადგან სიგნალი ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ მისი სპექტრი ნამდვილია და გრაფიკულად წარმოვადგენთ მხოლოდ ამპლიტუდურ სპექტრს.



ნახ, 2.24

გაუსის იმპულსის მნიშნელოვან თვისებას წარმოადგენს ის, რომ მისი სპექტრი აღიწერება გაუსის ფუნქციით.

4. ჰარმონიული სიგნალი.

განვიხილოთ ფუნქცია $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$, სადაც A –ამპლიტუდაა, ω_0– კუთხური სიხშირე, φ – საწყისი ფაზა. მოვახდინოთ $x(t)$ სიგნალის ფურიეს გარდაქმნა.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(\omega_0 t+\varphi)\exp(-j\omega t)dt=$$

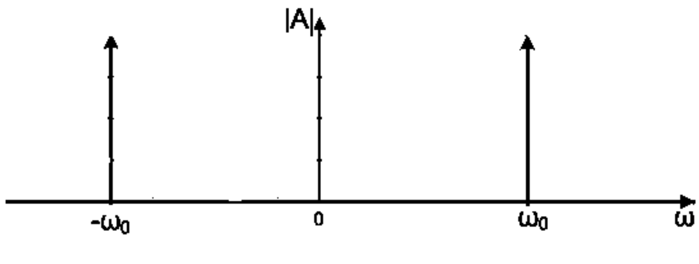
$$\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(j\omega_0 t+j\varphi)\exp(-j\omega t)dt+\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-j\omega_0 t-j\varphi)\exp(-j\omega t)dt=$$

$$=\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(j\varphi)\exp[-j(\omega-\omega_0)t]dt+\frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-j\varphi)\exp[-j(\omega+\omega_0)t]dt=$$

$$=\frac{A}{2}\exp(j\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-j(\omega-\omega_0)t]dt+\frac{A}{2}\exp(-j\varphi)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp[-j(\omega+\omega_0)t]dt=$$

$$=A\pi\exp(j\varphi)\delta(\omega-\omega_0)+A\pi\exp(-j\varphi)\delta(\omega+\omega_0)$$

როგორც ვხედავთ, ჰარმონიული სიგნალის ფურიეს გარდაქმნის შედეგი წარმოადგენს $\pm\omega$ სიხშირეზე წყვილ დელტა–ფუნქციას. ჰარმონიული სიგნალის ამპლიტუდური სპექტრი მოცემულია შემდეგ ნახაზზე:



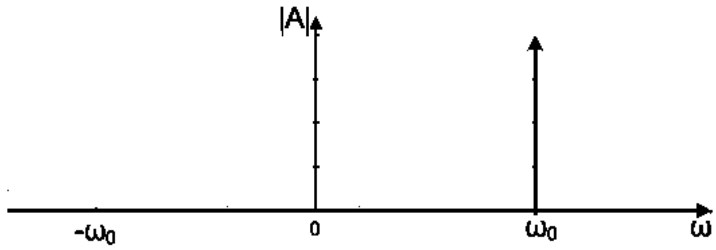
6. კომპლექსური ექსპონენტა.

განვიხილოთ კომპლექსური ფუნქცია $x(t)=Ae^{j\omega_0 t}$ და მისი ფურიეს გარდაქმნა

$$\boldsymbol{X}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{f}(t)\exp(-j\omega t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}A\exp(j\omega_0 t)\exp(-j\omega t)\,dt=$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-j(\omega-\omega_0)t)dt=2A\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

როგორც ვხედავთ, კომპლექსური ექსპონენტას სპექტრული ფუნქცია (ჰარმონიული სიგნალისაგან განსხვავებით) შეიცავს მხოლოდ ერთ დელტა–ფუნქციას, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



2.9 ფურიეს გარდაქმნის ძირითადი თვისებები

განვიხილოთ ფურიეს გარდაქმნის ზოგიერთი თვისება.

1. **წრფიობა.** დაუშვათ $X_1(\omega)$ და $X_2(\omega)$ წარმოადგენენ $x_1(t)$ და $x_2(t)$ სიგნალების ფურიეს გარდაქმნებს:

$$X_1(\omega)=F[x_1(t)],\quad X_2(\omega)=F[x_2(t)]$$

ფურიეს გარდაქმნა წრფივია, თუ სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$F[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega),\quad a_1,a_2=const$$

ე.ი. სიგნალის სპექტრი, რომელიც მიღებულია ორი $a_1x_1(t)$ და $a_2x_2(t)$ სიგნალების ჯამისაგან, ტოლია ამ სიგნალების სპექტრების ჯამისა. მართლაც

$$F[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]e^{-j\omega t}dt=$$

$$=a_1\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)e^{-j\omega t}dt+a_2\int_{-\infty}^{\infty}x_2(t)e^{-j\omega t}dt=a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

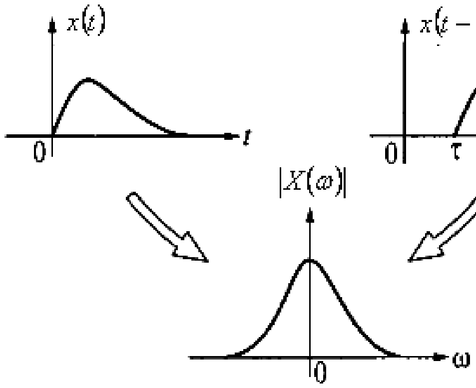
2. **დაყოვნება.** განვიხილოთ თუ როგორ მოქმედებს სპექტრულ ფუნქციაზე სიგნალის დროში დაყოვნება. ვთქვათ τ არის დაყოვნების დრო, მაშინ $x(t-\tau)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა ტოლია:

$$F[x(t-\tau)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\quad .$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $u=t-\tau$, მაშინ გვექნება:

$$F[x(t-\tau)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega(u+\tau)}du=e^{-j\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty}x(u)e^{-j\omega u}du=e^{j\omega\tau}X(\omega)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ სიგნალის ძვრისას $\left|e^{-j\omega\tau}X(\omega)\right| = \left|X(\omega)\right|$ ამპლიტუდური სპექტრი არ იცვლება, იცვლება მხოლოდ ფაზური სპექტრი, რომელიც დამატებით იძენს სიხშირესთან წრფივად დამოკიდებულ $\omega\tau$ მდგენელს (ნახ. 2.25).



ნახ. 2.25

3. დროის ღერძის მასშტაბის ცვლილება. თუ საწყის $x(t)$ სიგნალში დროის მასშტაბს შევცვლით ისე, რომ t არგუმენტი მრავლდებოდეს რაიმე a მუდმივაზე, მაშინ $x(at)$ სიგნალის სპექტრი განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F[x(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt\,.$$

შემოვიტანოთ ახალი ცვლადი $u=at$, მაშინ $dt = {}^{1}\!/\!_{adu}$. თუ $a>0$, მაშინ

$$F[x(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}du = \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

როცა $a<0$, მაშინ

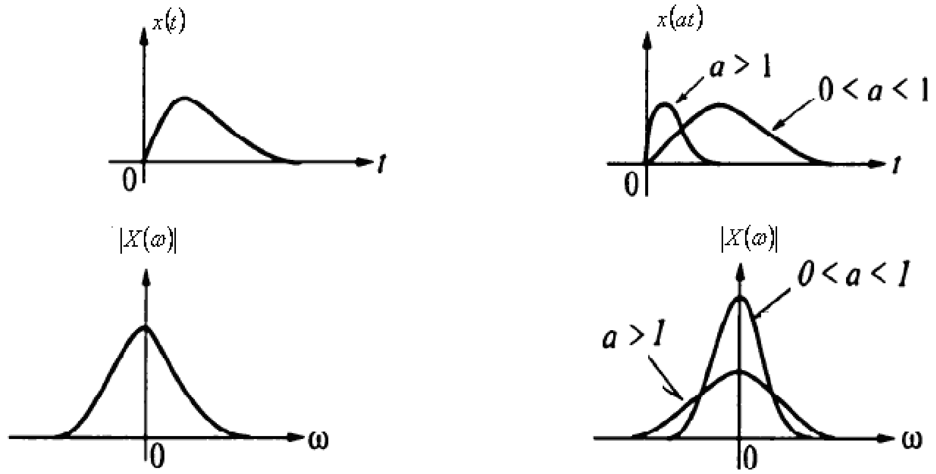
$$F[x(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}du = -\frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

თუ ამ ორ გამოსახულებას გავაერთიანებთ, მაშინ მივიღებთ:

$$F[x(t)] = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

თუ $|a|<1$ მაშინ $x(t)$ სიგნალი გაიშლება a –ჯერ, ამიტომ სიგნალის სიხშირეები აღმოჩნდებიან დაბალსიხშირის არეში და შესაბამისად სპექტრი სიხშირის ღერძის მიმართ იკუმშება, მაშინ როდესაც ორდინანტთა ღერძის მიმართ იზრდება ${}^{1}\!/\!_{|a|}$ – ჯერ.

თუ $|a|>1$, მაშინ სიგნალის სიხშირე იზრდება, რაც იწვევს აბსცისათა ღერძის მიმართ სპექტრის გაფართოებას, ხოლო ორდინანტთა ღერძის მიმართ სპექტრის შეკუმშვას (ნახ. 2.26).



ნახ. 2.26

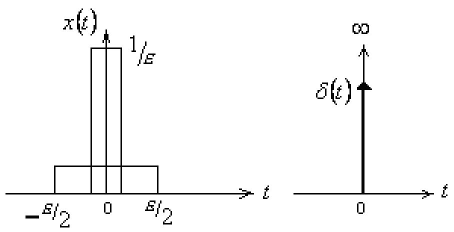
4. პარსაველის ტოლობა. პარსაველის თეორემა სამართლიანია არა მარტო ფურიეს მწკრივისათვის, არამედ ფურიეს გარდაქმნისათვისაც. პარსაველის თეორემის თანახმად ენერგია სიხშირულ და დროით არეებში ერთნაირია, რაც გამოისახება შემდეგი ტოლობით:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2\,d\omega\ .$$

2.10 დელტა – ფუნქცია და თეთრი ხმაური

დელტა – ფუნქცია და თეთრი ხმაური არის ორი მსგავსი და ამასთან სხვადასხვა სიგნალი, რომლებიც ფართოდ გამოიყენებიან სიგნალების ანალიზისათვის.

დელტა–ფუნქცია. ფურიეს გარდაქმნასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული დელტა–ფუნქციის ცნება. განვიხილოთ t = 0 წერტილის მიმართ სიმეტრიული მართკუთხა $x(t)$ ფუნქცია, რომლის სიგანეა ε, ხოლო სიმაღლე $1/\varepsilon$:



ნახ. 2.27

ცხადია, რომ $x(t)$ ფუნქციით შემოსაზღვრული ფართობი ერთის ტოლია. დაუშვათ, რომ $x(t)$ ფუნქციის სიგანე კლებულობს, ხოლო მისი სიმაღლე ისე იზრდება, რომ შენარჩუნებული იყოს ფართობის ერთთან ტოლობის პირობა. თუ გადავალთ ზღვარზე $\varepsilon \to \infty$, მაშინ საქმე გვაქვს მართკუთხა იმპულსთან, რომლის სიმაღლე მიისწრაფის უსასრულობისაკენ, ხოლო ფართობი რჩება ერთის ტოლი. თუ ამ იმპულს აღვნიშნავთ $\delta(t)$ სიმბოლოთი, მაშინ გვექნება:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty\ , & t=0\\ 0\ , & t\neq 0\end{cases}\qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1.$$

$\delta(t)$ იმპულს **დელტა - ფუნქცია ან დირაკის ფუნქცია** ეწოდება. ზოგადად, დელტა ფუნქცია წარმოადგენს მათემატიკურ აბსტრაქციას. ფიზიკურად იგი არ არსებობს, მაგრამ პრაქტიკულ კვლევებში ის ცვლის მაღალი ინტესიობის მოკლე იმპულსებს.

$\delta(t)$ ფუნქცია მნიშვნელოვან როლს ასრულებს სიგნალების დამუშავების თეორიაში. მის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან თვისებას წარმოადგენს მისი ე.წ. გაფილტვრის თვისება. ეს იმაში მდგომარეობს, რომ თუ დელტა - ფუნქცია არის ინტეგრალის ქვეშ როგორც ერთ-ერთი მამრავლი, მაშინ ინტეგრირების შედეგი ტოლია ინტეგრალის ქვეშ არსებული სხვა გამოსახულების მნიშვნელობისა იმ წერტილში, სადაც დელტა - ფუნქცია იმყოფება, ე.ი.

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\ ,$$

სადაც $x(t)$ უწყვეტი ფუნქციაა, $\delta(t-t_0)$ ისეთი დელტა - ფუნქციაა, რომელიც მიღებულია დროით ღერძზე დელტა - ფუნქციის t_0 სიდიდით წანაცვლებით. $t=t_0$ წერტილში დელტა - ფუნქცია ნულის ტოლია. ამრიგად სწორია შემდეგი თანაფარდობა:

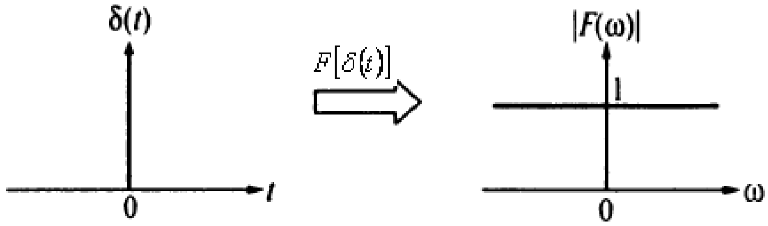
$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ინტეგრალის სიდიდე t_0 წერტილში $x(t_0)$ სიდიდის ტოლია. ინტეგრირების ზღვრები არ არის აუცილებელი იყოს უსასრულო.

განვიხილოთ დელტა - ფუნქცის ფურიეს გარდაქმნა

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}d\omega=e^{-j\omega 0}=1.$$

დელტა ფუნქციის სპექტრი მუდმივი სიდიდეა ანუ თანაბარი სიდიდისაა სიხშირის უსასრულო არეში, ე.ი. დელტა – ფუნქციას გააჩნია უსასრულო მცირე ხანგრძლივობა, ხოლო მისი სპექტრი უსასრულოდ დიდია (ნახ. 2.28).



ნახ. 2.28

მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ დელტა - ფუნქცია შეიძლება ჩავწეროთ ფურიეს უკუგარდაქმნის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}d\omega\,.$$

მიღებული თანაფარდობა მეტად მნიშვნელოვანია სიგნალების დამუშავების თეორიაში. თუ განვიხილავთ $\delta(t)$ ფუნქციის ფურიეს უკუგარდაქმნას, მივიღებთ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{j2\pi ft}dt = e^{0} = 1.$$

აქედან ჩანს, რომ მუდმივი სიდიდის ფურიეს გარდაქმნა არის ნულოვანი სიხშირის დელტა–ფუნქცია. რადგან დელტა–ფუნქციის სპექტრი მუდმივი სიდიდეა, ამიტომ მუდმივი სიდიდის სპექტრი დელტა–ფუნქციის სიხშირის ტოლია, მართლაც

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-j\omega t}dt = 2\pi A\delta(\omega).$$

მიღებული შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ უსასრულოდ წარმოდგენილ სიგნალს გააჩნია უსასრულოდ ვიწრო სპექტრი.

თეთრი ხმაური. თეთრი ხმაური ეწოდება სტაციონარულ შემთხვევით პროცეს, რომლის სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია ყველა სიხშირისათვის მუდმივია. ე.ი. $S(\omega) = S_0 = const$. ვინერ–ხინჩინის თეორემის თანახმად, თეთრი ხმაურის კორელაციური ფუნქცია წარმოადგენს დელტა–ფუნქციას

$$R(\tau) = \frac{S_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau}d\omega = S_0\delta(\tau).$$

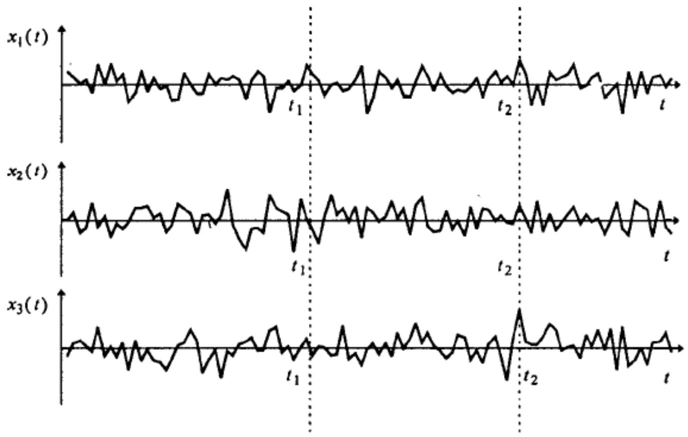
ე.ი. $R(\tau) = 0$ გარდა $\tau = 0$ წერტილისა. თეთრი ხმაურის დისპერსია უსასრულოდ დიდი სიდიდეა.

თეთრი ხმაური წარმოადგენს აბსტრაქტულ მათემატიკურ ცნებას და ფიზიკურად იგი არ არსებობს. ეს შეიძლება ავხსნათ დისპერსიის უსასრულობით. მაგრამ, ანალოგური სიგნალისაგან განსხვავებით, დისკრეტული სიგნალის თეთრი ხმაურის დისპერსია არ წარმოადგენს უსასრულო სიდიდეს (დელტა–ფუნქციის სასრულობის გამო), ამიტომ ასეთი თეთრი ხმაურის რეალიზება ფიზიკურად შესაძლებელია.

3. შემთხვევითი სიგნალები

როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ბუნებაში მიმდინარე რეალური ფიზიკური მოვლენები დროზე დამოკიდებული პროცესებია, რომლებიც აღიწერებიან შემთხვევითი ფუნქციების სახით. დროზე დამოკიდებული ერთი ცვლადის შემთხვევით ფუნქციას ეწოდება **შემთხვევითი პროცესი**, რომელიც აღინიშნება $\{X(t)\}$ სიმბოლოთი. შემთხვევითი პროცესის სრული წარმოდგენისათვის საჭიროა მოცემული იყოს მისი რეალიზაციები ანუ ანსამბლი $x_i(t)$, $i = 1,2,3,....$ შემთხვითი სიგნალების სახით. ტექნიკურ ლიტერატურაში ტერმინები „შემთხვევითი სიგნალი“ და „შემთხვევითი პროცესი“ ხშირად გამოიყენებიან როგორც სინონიმები.

შევთანხმდეთ, რომ რეგისტრირებამდე (გაზომვამდე) შემთხვევითი სიგნალი უნდა განვიხილოთ, როგორც შემთხვევითი პროცესი თავისი რეალიზაციებით. ნახ. 3.1 წარმოდგენილია $\{X(t)\}$ შემთხვევითი პროცესის რამოდენიმე $x_i(t)$ რეალიზაცია



ნახ. 3.1

3.1 შემთხვევითი პროცესების ალბათური ფუნქციები და საშუალო მახასიათებლები

ალბათობის თეორიიდან ცნობილია, რომ შემთხვევითი სიდიდე სრულად აღიწერება თუ მოცემულია მისი განაწილების კანონი. ანალოგიურადაა საქმე შემთხვევითი პროცესების დროსაც. ვთქვათ, მოცემულია $\{X(t)\}$ შემთხვევითი პროცესი და მისი რეალიზაციების ანსაბლი $x_1(t), x_2(t),...., x_n(t)$. ნებისმიერი, მაგალითად t_1 დოში კვეთისას (ნახ. 3.1) მიღებული შემთხვევით სიდიდეს ყველა რეალიზაციის მნიშვნელობების $x_1(t_1), x_2(t_2),...., x_n(t_n)$ განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$F(t_1, x) = P\{X_1(t_1) \le x\} \tag{3.1}$$

ეს განაწილების ფუნქცია დამოკიდებულია ორ არგუმენტზე: t_1-ზე, როცა ხდება კვეთა და x სიდიდეზე, რომელზედაც ნაკლები უნდა იყოს შემთხვევითი სიდიდე. (3.1) ფუნქციას უწოდებენ ერთგანზომილებიან განაწილების კანონს, რომელიც ახასიათებს მხოლოდ ერთი კვეთისას აღებულ შემთხვევით სიდიდეებს, ამიტომ იგი არ გამოდგება ორი ან მეტი კვეთის ურთიერთ განაწილების კანონის დასადგენად.

შემთხვევითი პროცესის ალბათურ სტრუქტურას ხშირად აღწერენ განაწილების სიმკვრივის $f(x,t_1)$ ფუნქციის მეშვეობით, რომელიც ასე განისაზღვრება: $f(x,t_1) = F'(x,t_1)$. თუ ცნობილია განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია, მაშინ განაწილების ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$F(x,t_1) = \int_{-\infty}^{x} f(x,t_1)dx$$

აშკარაა რომ ერთგანზომილებიანი განაწილების კანონი ვერ უზრუნველყოფს შემთხვევითი პროცესის დახასიათებას. აშკარაა ისიც, რომ ორგანზომილებიანი განაწილების ფუნქცია უფრო სრულად წარმოადგენს შემთხვევით პროცეს ვიდრე ერთგანზომილებიანი, თუმცა ისიც არ არის საკმარისი შემთხვევითი პროცესის სრული აღწერისათვის.

აქედან გამომდინარე, შემთხვევითი პროცესი უფრო სრულყოფილად იქნება წარმომადგენილი თუ გვექნება სამგანზომილებიანი, ოთხგანზომილებიანი და ზოგადად n განზომილებიანი განაწილების ფუნქციები.

ამრიგად, თეორიულად შესაძლებელია შეუზღუდავად განვსაზღროთ შემთხვევითი პროცესის კვეთების რაოდენობა და მივიღოთ პროცესის სულ უფრო და უფრო სრული მახასიათებლები. მაგრამ, არგუმენტების უსასრულო ზრდა გამოთვლების თვალსაზრისით იწვევს მთელ რიგ გართულებებს და ამიტომ პრაქტიკულად მრავალგანზომილებიანი განაწილების ფუნქციების გამოყენება მიუღებელია. აქედან გამომდინარე, პრაქტიკულ კვლევებში მიღებულია ორგანზომილებიანი განაწილების კანონი და უფრო მეტიც, ძალზე ხშირად საერთოდ უარს ამბობენ განაწილების კანონის დადგენაზე და იყენებენ შემთხვევითი პროცესის ძირითად მახასიათებლებს, რომლებიც პროცეს აღწერენ თუმცა არა სრულად, მაგრამ საკმაოდ კარგი მიახლოებით.

თუ ცნობილია $f(x,t_1)$ განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია, მაშინ შესაძლებელია $X(t_1)$ სიდიდის სტატისტიკური გასაშუალება. სტატისტიკური გასაშუალება ითვალისწინებს დროით ფიქსირებულ მომენტში შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციების რომელიმე კვეთით მიღებული მნიშვნელობების გასაშუალებას.

პრაქტიკულ კვლევებში შემთხვევითი პროცესის ყველაზე მნიშვნელოვან მახასიათებლებს წარმოადგენენ:

1. **მათემატიკური ლოდინი**, რომელიც წარმოადგენს დროის რომელიმე t მომენტში შემთხვევითი პროცესის საშუალო მნიშვნელობის შეფასებას

$$m_x(t) = M\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx .$$

2. დისპერსია, რომელიც ახასიათებს შემთხვევითი პროცესის საშუალო სიმძლავრის გადახრის ცვალებადობას მისი მათემატიკური ლოდინის მიმართ.

$$D_x(t) = \sigma_x^2(t) = M\left\{[X(t) - m_x(t)]^2\right\} = M\left\{X^2(t) - m_x^2(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t)dx - m_x^2(t).$$

3. საშუალო კვადრატული გადახრა (სტანდარტული გადახრა), რომელიც წარმოადგენს კვადრატულ ფესვს დისპერსიიდან და ახასიათებს t დროის მომენტში მათემატიკურ ლოდინთან შედარებით გაფანტვის ამპლიტუდურ ზომას:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} = \sqrt{M\left\{[X(t) - m_x(t)]^2\right\}} = \sqrt{M\left[X^2(t)\right] - m_x(t)} .$$

რაც შეეხება განაწილების კანონებს, პრაქტიკაში ყველაზე ხშირად გვხდება თანაბარი და ნორმალური განაწილება.

3.2 შემთხვევითი პროცესების კორელაციური ფუნქციები

ერთგანზოილებიანი სიმკვრივის ფუნქცია საკმარისი არ არის დროში შემთხვევითი პროცესის ცვლილების აღწერისათვის. გაცილებით მეტ ინფორმაციას მივიღებთ თუ განვიხილავთ დროის ნებისმიერ t_1 და t_2 მომენტში შემთხვევითი პროცესის ორმაგ კვეთას (ნახ. 3.1). ეს ორი კვეთა ქმნის ორგანზომილებიან შემთხვევით სიდიდეს $\{X(t_1), X(t_2)\}$, რომელიც აღიწერება ორგანზომილებიანი განაწილების ფუნქციით

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = P(X(t_1) \le t_1, X(t_2) \le t_2)$$

და ორგანზომილებიანი განაწილების სიმკვრივის ფუნქციით

$$f(x_1, x_2, t_1, t_2) = F''(x_1, x_2, t_1, t_2).$$

ორგანზომილებიანი განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია საშუალებას იძლევა განისაზღვროს შემთხვევითი პროცესის მეტად მნიშვნელოვანი მახასიათებელი – კოვარიაციული ფუნქცია:

$$C_x(t_1, t_2) = M[x(t_1)x(t_2)]$$

ამ განამარტებით შემთხვევითი სიდიდის კოვარიაციული ფუნქცია წარმოადგენს t_1 და t_2 დროის მომენტებში შემთხვევითი პროცესის მნიშვნელობების ნამრავლის საშუალო სიდიდეს.

შემთხვევითი პროცესის ყოველი რეალიზაციისათის $x(t_1)x(t_2)$ ნამრავლი წაროადგენს სკალარულ სიდიდეს. რეალიზაციათა ერთობლიობა ქმნის შემთხვევითი რიცხვების ერთობლიობას, რომელთა განაწილების კანონი ხასიათდება ორგანზომილებიანი $f(x_1, x_2, t_1, t_2)$ განაწილების სიმკვრივის ფუნქციით. თუ განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია ცნობილია, მაშინ გასაშუალების ოპერაცია ხორციელდება შემდეგი ფორმულით:

$$C_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2, t_1, t_2) dt_1 dt_2 .$$

ხშირად შემთხვევითი პროცესების ანალიზის დროს განსაკუთრებელ ინტერესს წარმოადგენს მათი ფლუქტუაციის (ცვალებადობის) მდგენელი. ასეთ შემთხვევაში გამოიყენება კორელაციური ფუნქცია, რომელიც განისაზღვრება ცენტრირებული $X(t) - m_x(t)$ შემთხვევითი პროცესის t_1 და t_2 დროის მომენტებში მათი სიდიდეების ნამრავლის სტატისტიკური გასაშუალებით. ე.ი.

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M\{[x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)]\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m_x(t_1)][x(t_2) - m_x(t_2)] f(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = C_x(t_1 t_2) - m_x(t_1) m_x(t_2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

კორელაციური ფუნქცია $R(t_1, t_2)$ ახასიათებს სტატისტიკური კავშირის ხარისხს შემთხვევითი პროცესის იმ მაჩვენებლებს შორის, რომლებიც მიიღებიან t_1 და t_2 დროის მომენტებში. როცა $t_1 = t_2 = t$, მაშინ კორელაციური ფუნქცია (3.2) ფორმულის გათვალისწინებით შემთხვევითი პროცესის დისპერსიის ტოლია. ე.ი.

$$R_x(t, t) = C_x(t, t) - m_x^2(t) = D_x(t).$$

უნდა გვახსოვდეს, რომ ცენტრირებული შემთხვევითი პროცესის დროს, როცა მათემატიკური ლოდინი (საშუალო სიდიდე) ნულის ტოლია, კოვარიაციული და კორელაციური ფუნქციები ერთმანეთის ტოლია.

მაგალითვისათვის განვიხილოთ ჰარმონიული სიგნალი შემთხვევითი საწყისი ფაზით, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \ , \tag{3.3}$$

სადაც A –ამპლიტუდაა (დეტერმინირებული), ω_0 – სიხშირე (დეტერმინირებული), φ - შემთხვევითი საწყისი ფაზა, რომელიც ბევრ შემთხვევითი სიგნალისათვის შეიძლება ჩავთვალოთ $[0, 2\pi]$ ინტერვალში თანაბრად განაწილებული. მაშინ ასეთი სიგნალის განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია ტოლია:

$$f_\varphi(\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\ , & 0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\ , & \varphi<0\,,\ \varphi>2\pi\end{cases}$$

ადვილად მტკიცდება, რომ ასეთი შემთხვევითი პროცესი ცენტრირებულია. მართლაც:

$$m_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)f_\varphi(\varphi)d\varphi=\int_0^{\infty}A\cos(\omega_0 t+\varphi)\frac{1}{2\pi}\,d\varphi=0\ ,$$

ამიტომ კოვარიაციული და კორელაციური ფუნქციები ერთმანეთის ტოლია:

$$R_x(t_1,t_2)=C_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)x(t_2)f_\varphi(\varphi)d\varphi=\int_0^{2\pi}A\cos(\omega_0 t_1+\varphi)A\cos(\omega_0 t_2+\varphi)\frac{1}{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{A^2}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\varphi)d\varphi+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2))d\varphi\right]$$

ამ გამოსახულების პირველ ინტეგრალში ინტეგრირება ხდება ორი პერიოდული კოსინუსი ფუნქციით, ამიტომ ინტეგრალის მნიშვნელობა ნულის ტოლია. მეორე წევრის ინტეგრალის ქვეშ მყოფი ფუნქცია არ არის დამოკიდებული ინტეგრირების φ ცვლადზე, ამიტომ მივიღებთ:

$$R_x(t_1,t_2)=C_x(t_1,t_2)=\frac{A_2}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2)).$$

როცა $t_1=t_2$, მაშინ $R_x(t_1,t_2)=C_x(t_1,t_2)=D_x(t)=\dfrac{A_2}{2}$.

3.3 შემთხვევითი პროცესების კლასიფიკაცია

შემთხვევითი პროცესები იყოფა სტაციონარულ და არასტაციონარულ პროცესებად. თავის მხრივ სტაციონარული პრიცესები იყოფიან ერგოდიკულ და არაერგოდიკულ პროცესებად.

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესები. ასე ეწოდებათ შემთხვევით პროცესებს, რომელთა სტატისტიკური მახასიათებლები ერთნაირია ყველა დროითი კვეთებისას. შემთხვევითი პროცესები მკაცრად სტაციონარულია (ან საციონარულია ვიწრო გაებით), როცა მრავალგანზომილებიანი სიმკვრივის ფუნქცია $f(x_{1,}x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)$ არ იცვლება კვეთების $t_1,t_2,....,t_n$ დროით ღერძზე ერთიდიგივე τ სიდიდით ერთდროული დაძვრისას. ე.ი. ნებისმიერი τ -სთვის

$$f(x_{1,}x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)=f(x_1,x_2,....,x_n,t_1+\tau,t_2+\tau,....,t_n+\tau).$$

თუ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ერთი და ორგანზომილებიანი განაწილების სიმკვრივის ფუნქციით, მაშინ ასეთი შემთხვევითი პროცესი იქნება სტაციონარული ფართო გაგებით.

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესისათვის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია არ არის დამოკიდებული დროზე, ხოლო კორელაციური ფუნქცია დამოკიდებულია არა დროის $t_1,t_2,....,t_n$ მომენტებზე, არამედ მათ შორის ინტერვალზე $\tau=t_2-t_1$. ე.ი. $R_x(t\ ,t_2)=R_x(t_2-t_1)=R_x(\tau)$. ამ მიზეზის გამო

სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის სტატისტიკურ მახასიათებლებში შეიძლება გამოვრიცხოთ დროის ფიქსირებული მომენტები და დავტოვოთ მხოლოდ მათ შორის სხვაობა τ . ე.ი. გვექნება $m_x,\ D_x,\ R_x(\tau),\ C_x(\tau)$.

კერძო შემთხვევაში, როცა $m_x(t_1)$ და $R_x(t_1,t_2)$ სიდიდეები დამოკიდებულნი არიან t_1 დროის მომენტზე, შემთხვევითი პროცესეს ეწოდება სუსტად სტაციონარული. ამ შემთხვევაში საშუალო სიდიდე მუდმივია, ხოლო კორელაციური ფუნქცია დამოკიდებულია τ ძვრის სიდიდეზე.

ერგოდიკული შემთხვევითი პროცესები. სტაციონარულ შემთხვევით პროცეს ეწოდება ერგოდიკული როცა მისი ნებისმიერი სტატისტიკური მახასიათებელი, რომელიც მიღებულია შემთხვევითი პროცესის რეალიზაციების გასაშუალებით, ექვივალენტურია ერთი რეალიზაციის დროით გასაშუალებით მიღებულ შესაბამის მახასიათებლისა. უნდა გვახსოვდეს, რომ ერგოდიკული თვისება მხოლოდ სტაციონარულ პროცესებს გააჩნიათ.

როგორც ვხედავთ, ერგოდიკული პროცესი წარმოადგენს სტაციონარული შემთხვევითი პროცესების მნიშვნელოვან კლასს, რადგან ყველა სტატისტიკური მახასიათებელი შეიძლება განისაზღვროს შემთხვევითი პროცესის ერთი რეალიზაციიდან დროში გასაშუალებით. საბედნიეროდ პრაქტიკულ კვლევებში სტაციონარულ შემთხვევით პროცესებს, თითქმის როგორც წესი, გააჩნიათ ერგოდიკული თვისება, რის გამოც შემთხვევითი პროცესის დამუშავება შესაძლებელია ერთი რეალიზაციის საშუალებით. ამრიგად, ერგოდიკული პროცესის სტატისტიკური მახასიათებლები განისაზღვრებიან შემდეგი გამოსახულებებით:

$$m_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

$$D_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/} x^2(t)dt - m_x$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt - m_x^2$$

ერგოდიკული პროცესის საკმარის პირობას, გარდა მისი სტაციონარობისა ფართო გაგებით, წარმოადგენს კორელაციური ფუნქციის მისწრაფება ნულისაკენ, როცა τ იზრდება. ე.ი. $\lim\limits_{\tau\to\infty} R_x(\tau)\to 0$.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ჰარმონიული სიგნალი შემთხვევითი ფაზით (3.3) და შევამოწმოთ იგი ერგოდიულობაზე. ამისათვის განვსაზღვროთ გასაშუალებული ჰარმონიული სიგნალის სტატისტიკური მახასიათებლები:

$$m_x = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A\cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = 0$$

$$D_x = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{A^2}{2}$$

$$R_x(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)\cos(\omega_0 (t+\tau) + \varphi) dt = \frac{A^2}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

როგორც ვხედავთ, დროით გასაშუალებით გამოთვლილი პარამეტრები ემთხვევა იმ პარამეტრებს, რომლებიც მიღებულია რეალიზაციების სტატისტიკური გასაშუალებით. ე.ი. ჰარმონიული სიგნალი შემთხვევითი საწყისი ფაზით წარმოადგენს ერგოდიკულ პროცესს.

არასტაციონარულ პროცესებს მიეკუთვნებიან ისეთი პროცესები, რომლებიც სტაციონარულობის კრიტერიუმებს არ აკმაყოფილებენ და მათგან განსხვავებით სტატისტიკური მახასიათებლები დროზე არიან დამოკიდებულები.

3.4 შემთხვევითი პროცესის სპექტრული მახასიათებლები

ყოველი ცალკე აღებული შემთხვევითი პროცესის $x(t)$ რეალზაციას გააჩნია თავისი სპექტრი. რადგან ჩვენ გვაინტერესებს შემთხვევითი პროცესების სტატისტიკურად გასაშუალებული მახასითებლები, ამიტომ სპექტრული სიმკვრივის საშუალო მნიშვნელობა ტოლია

$$\overline{X(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)e^{-j\omega t}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} m_x(t) e^{-j\omega t} dt$$

როგორც ვხედავთ, შემთხვევითი პროცესის გასაშუალებული სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია წარმოადგენს პროცესის დეტერმინირებული მაჩვენებლის ანუ საშუალო სიდიდის სპექტრს. ცენტრირებული პროცესისთვის $m_x(t) = 0$ და $\overline{X(\omega)} = 0$.

ამრიგად, გასაშუალებული სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია არ შეიცავს არავითარ ინფორმაციას შემთხვევითი პროცესის ფულქტუაციაზე ანუ ცვალებადობაზე. ეს მიგვანიშნებს იმაზე, რომ სხვადასხვა რეალიზაციების სპექტრული მაჩვენებლების (მდგენელების) ფაზები წარმოადგენენ შემთხვევით და დამოუკიდებელ სიდიდეებს.

შეიძლება განვიხილოთ შემთხვევითი პროცესის $x(t)$ რეალზაციის სიმძლავრის სპექტრული სიმკვრივე, რადგან სიმძლავრე არ არის დამოკიედბული სპექტრული შემადგენლობის ფაზების თანაფარდობაზე. ამისთვის თუ ავიღებთ ცენტრირებული შემთხვევითი პროცესის $x(t)$ რეალიზაციას $\left[T/2, T/2\right]$ ინტერვალში და გამოვიყენებთ ფურიეს პირდაპირ გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ $X_T(\omega)$ სპექტრულ სიმკვრივეს. პარსაველის ტოლობის თანახად, სიგნალის სიმძლავრე დროით არეში ტოლია სიგნალის სიმძლავრისა სპექტრულ არეში, ე.ი.

$$E_T = \int_{-T/2}^{T/2} \left| x^2(t) \right| dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| X_T(\omega) \right|^2 d\omega$$

თუ ამ ენერგიას გავყოფთ T –ზე, მაშინ მივიღებთ რეალიზაციის საშუალო P_T სიმძლავრეს მოცემულ დროით ინტერვალში

$$P_T = \frac{E_T}{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| X_T(\omega) \right|^2}{T} d\omega$$

თუ T ინტერვალს გავზრდით უსასრულოდ ანუ როცა $T \to \infty$, მაშინ მივიღებთ:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\to\infty} \frac{\left| X_T(\omega) \right|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

სადაც

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left| X_T(\omega) \right|^2}{T} \qquad (3.4)$$

სიდიდე წარმოადგენს განსახილველი რეალიზაციის საშუალო სიმძლავრის სპექტრულ სიმკვრივეს.

ზოგადად, სიმძლავრის სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega)$ უნდა გავასაშუალოთ რეალიზაციების სიმრავლით. მაგრამ, თუ საქმე გვაქვს ერგოდიკულ შემთხვევით პროცესთან, მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ ერთი რეალიზაციით მიღებული $S(\omega)$ ფუნქცია ახასითებს მთელ შემთხვევით პროცესს.

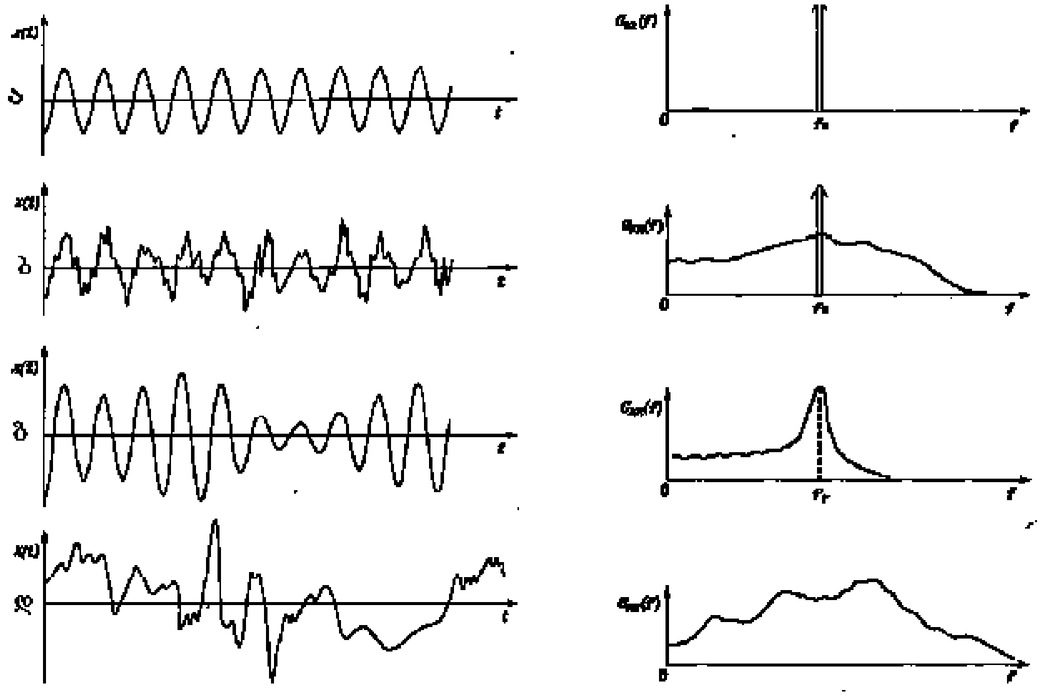
რადგან ჩვენ განვიხილავთ ცენტრირებული ერგოდიკული პროცესის რეალიზაციას, ამიტომ რეალიზაციის საშუალო სიმძლავრე შემთხვევითი პროცესის დისპერსიის ტოლია

$$D_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad . \qquad (3.5)$$

$S(\omega)$ ნამდვილი ფუნქციაა, რომელიც არ შეიცავს ინფორმაციას სპექტრული მდგენელების ფაზებზე და ამიტომ შეუძლებელი ხდება შემთხვევითი პროცესის ცალკეული რეალიზაციის აღდგენა. გარდა ამისა, სპექტრული სიმკვრივის განსაზღვრიდან (3.4) ჩანს, რომ $S(\omega)$ წარმოადგენს არაუარყოფით ლუწ ფუნქციას.

სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის ინტერპრეტაცია. განვიხილოთ ნახ. 3.2 წარმოდგენილი ოთხი შემთხვევითი პროცესის სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციები, რომლებიც წარმოდგენილნი არიან შემდეგ ნახაზზე:

.



ნახ. 3.2

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ჰარმონიული პროცესის (ა) სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია წარმოადგენს დელტა–ფუნქციას.

ფართოზოლიანი შემთხვევითი ხმაურის ფონზე ჰარმონიული პროცესის (ბ) ჯამური სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია ტოლია შესაკრებთა სპექტრების ჯამისა.

ვიწროზოლიანი პროცესის დროს (გ) სპექტრული სიმძლავრის ფუნქცია ძირითადად თავმოყრილია სპექტრის ვიწრო ზოლში.

ფართოზოლიანი პროცესის შემთხვევაში (დ) სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია თავმოყრილია სიხშირის ფართო ზოლში

3.5 ვინერ-ხინჩინის თეორემა

როგორც ცნობილია, დეტერმინირებული სიგნალის კორელაციური ფუნქცია ფურიეს პირდაპირი გარდაქმნით დაკავშირებულია მის ენერგეტიკულ სპექტრთან. თუ ამ თვისებას გამოვიყენებთ T სიგრძის შემთხვევით პროცესისათვის, გვექნება:

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega .$$

გავყოთ ტოლობის ორივე მხარე T-ზე და გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $T \to \infty$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega .$$

თუ პროცესი ერგოდიკულია, მაშინ ტოლობის მარცხენა მხარეს გვაქვს დროით გასაშუალებული კორელაციური ფუნქცია, ხოლო მარჯვენა მხარეს,

ინტეგრალის ქვეშ გვაქვს შემთხვევითი პროცესის სპექტრილი სიმკვრივე (3.4) ე.ი მივიღებთ:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \quad .$$

რადგან $R_{xx}(\tau)$ და $S(\omega)$ წარმოადგენენ ნამდვილ ლუწ ფუნქციებს, ამიტომ შეგვიძლია უარი ვთქვათ ფურის გარდაქმნის კომპლექსურ ფორმაზე, მაშინ მივიღებთ:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{o}^{\infty}S_{xx}(\omega)\cos(\omega\tau)d\omega$$

$$S_{xx}(\omega)=2\int_{0}^{\infty}R_{xx}(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau$$

ამრიგად, შემთხვევითი პროცესის კორელაციური ფუნქცია და სიმძლავრის სპექტრული სიმკვრივე დაკავშირებული არიან ერთმანეთთან ფურის გარდაქმნით. ამ თანაფარდობას ვინერ-ხინჩინის თეორემას უწოდებენ.

ხშირად შემთხვევითი პროცესი ისეთია, რომ უშუალოდ (3.4) ფორმულის გამოყენება სიმძლავრის სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრისათვის შეუძლებელია. ამ შემხვევაში, თუ შესაძლებელია კორელაციური ფუნქციის განსაზღვრა, მაშინ სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციას მივიღებთ კორელაციური ფუნქციიდან ვინერ-ხიჩინის თეორემის საშუალებით.

4. დისკრეტული სიგნალები და სისტემები

სიგნალების ციფრული დამუშავების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ ფიზიკური სიგნალი (ძაბვა, დენი და ა.შ) გარდაიქმნება დისკრეტული რიცხვების თანმიმდევრობაში და შემდეგ ხდება მათი მათემატიკური გარდაქმნები. ტრანსფორმირებული დისკრეტული სიგნალის (რიცხვების თანმიმდევრობა) უკუგარდაქმნით შესაძლებელია საწყისი სიგნალის აღდგენა.

4.1 ანალოგური, დისკრეტული და ციფრული სიგნალები

საწყისი ფიზიკური სიგნალი წარმოადგენს უწყვეტ ფუნქციას, რომლებიც განსაზღვრული არიან დროის მთელ დიაპაზონში და მათ **ანალოგური სიგნალები** ეწოდებათ. ანალოგური სიგნალის თამიმდევრულ ანათვლებში გარდაქმნის პროცეს დისკრეტიზაცია ეწოდება, ხოლო ასეთი გარდაქმნის შედეგს - დისკრეტული სიგნალი.

ანალოგურ სიგნალში ანათვლები (გაზომვები) აიღება რაღაც Δt დროს თანაბარ ინტერვალებში, რომელსაც დისკრეტიზაციის პერიოდი ანუ დისკრეტიზაციის ინტერვალი ეწოდება. თუ დისკრეტული სიგნალის ანათვლებს შორის დრო Δt (წმ)-ის ტოლია, მაშინ დისკრეტიზაციის სიჩქარე ტოლია $1/\Delta t$ (ანათვალი წამში) და მას სიგნალის დაქვანტვის ანუ დისკრეტიზაციის სიხშირეს უწოდებენ, ე.ი დისკრეტიზაციის სიხშირე ტოლია:

$$f_d=\frac{1}{\Delta t}\quad (\text{ჰც}).$$

შესაბამისი კუთხური სიხშირე ტოლია $\omega_d = 2\pi/\Delta t$.

საწყისი ინფორმაციის შენახვის და აღდგენისათვის დისკრეტიზაციის სიხშირე მინიმუმ ორჯერ მეტი უნდა იყოს სიგნალის მაქსიმალურ სიხშირეზე. ე. ი. $f_d \geq 2f_{\max}$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ $f_{\max}$ სიხშირის ერთ პერიოდზე უნდა იყოს აღებული (გაზომილი) მინიმუმ ორი ანათვალი. აქედან გამომდინარე, დისკრეტიზაციის ინტერვალი უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

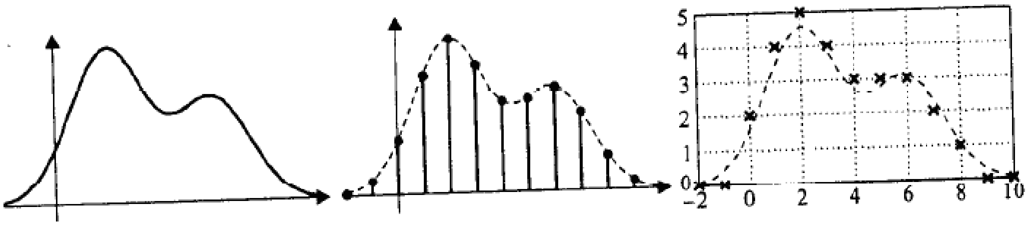
$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_{\max}} \tag{4.1}$$

პრაქტიკულ კვლევებში ჩვენ საქმე გვაქვს რეალურ პროცესებთან, რომლებსაც შეიძლება გააჩნდეს განუსაზღვრელი სპექტრული სიმკვრივე, ამიტომ ზემოდ მოყვანილ ფორმულაში გამოყენება სიგნალის $f_{\max}$ მაქსიმალური სიხშირის მიახლოებითი მნიშვნელობა. აქედან გამომდინარე, დისკრეტიზაციის სიხშირეს ჩვეულებრივ იღებენ 3–5 ჯერ მეტ მნიშვნელობას. ე.ი. $f_d \geq (3-5)f_{\max}$ ანუ

$$\Delta t \leq \frac{1}{(3-5)f_{\max}} \quad .$$

კომპუტერში სიგნალის ანათვლები წარმოდგენილია ორობით სისტემაში (ე.ი ნულისა და ერთის კობინაციებით). აქედან გამომდინარე, ანათვლები ღებულობენ მხოლოდ სასრული სიმრავლის მნიშვნელობებს და შესაბამისად სიგნალის წარმოდგენისას აუცილებელი ხდება მნიშვნელობების დამრგვალება. სიგნალის ანათვლების რიცხვებში გარდაქმნის პროცესს დონით დაქვანტვა ეწოდება, ხოლო ამ დროს წარმოქმნილ დამრგვალების ცდომილებას – დაქვანტვის ცდომილება.

დროით დისკრეტულ სიგნალს, რომელიც არ არის დონით დაქვანტული, ეწოდება **დისკრეტული სიგნალი**. სიგნალს, რომელიც დროით დისკრეტულია და დონით დაქვანტვული, ეწოდება **ციფრული სიგნალი**. განსხვავება ანალოგურ, დისკრეტულ და ციფრულ სიგნალებს შორის წარმოადგენილია შემდეგ ნახაზზე.

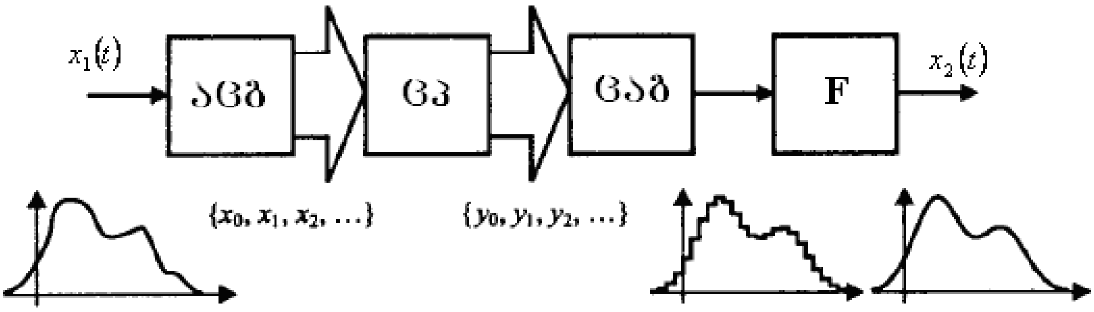


ანალოგური დისკრეტული ციფრული

გამოთვლითი სისტემები, რომლებიც განკუთვნილნი არიან სიგნალის დამუშავებაზე, ორიენტირებული არიან მხოლოდ ციფრულ სიგნალებზე.

4.2 ანალოგურ-ციფრული და ციფრულ - ანალოგური გარდაქმნები

სიგნალების ციფრული დამუშავების განზოგადებული სტრუქტურული სქემა წარმოდგენილია შედეგ ნახაზზე:



ნახ. 4.1

მოწყობიილობის შესავალს მიეწოდება $x_1(t)$ ანალოგური სიგნალი. ანალოგურ – ციფრული გარდამქმნელის (აცგ) საშუალებით ხდება სიგნალის დისკრეტიზაცია და დაქვანტვა. ზოგადად ეს ორი პროცესი – დისკრეტიზაცია და დაქვანტვა – წარმოადგენენ დამოუკიდებელ პროცესებს, მაგრამ, როგორც წესი, ისინი სრულდებიან ერთ მიკროსქემაში.

აცგ გამოსავალ სიგნალს წარმოადგენს $x_0, x_1, x_2, \ldots.$ რიცვების თანმიმდევრობა, რომელიც მიეწოდება ციფრულ პროცესორს, სადაც ხდება მათი შესაბამისი დამუშავება. კერძოდ, პროცესორი ასრულებს სხვადასხვა მათემატიკურ ოპერაციებს. პროცესორის მუშაობის შედეგს წარმოადგენს რიცხვების ახალი თანმიმდებრობა $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots$, რომლებიც წარმოადგენენ გამოსავალი სიგნალის ანათვლებს. ამ თანმიმდევრობის საშუალებით შესაძლებელია ციფრულ–ანალოგური გარდაქმნელის (ცაგ) საშუალებით მოვახდინოთ საწყისი (შემომავალი) სიგნალის აღდგენა. ცაგ-ის გამოსავალზე ვღებულობთ საფეხუროვანი ფორმის სიგნალს, რომელიც F ფილტრის საშუალებით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ მდორედ ცვალებად სიგნალად.

4.3 ნაიკვისტის სიხშირე

სიგნალის დისკრეტიზაციას ყოველთვის მივყევართ საწყისი ინფორმაციის ნაწილის დანაკარგამდე, რაც გამოიხატება დისკრეტიზირებული სიგნალის აღდგენისას საწყისი სიგნალის ფორმის დამახინჯებაში.

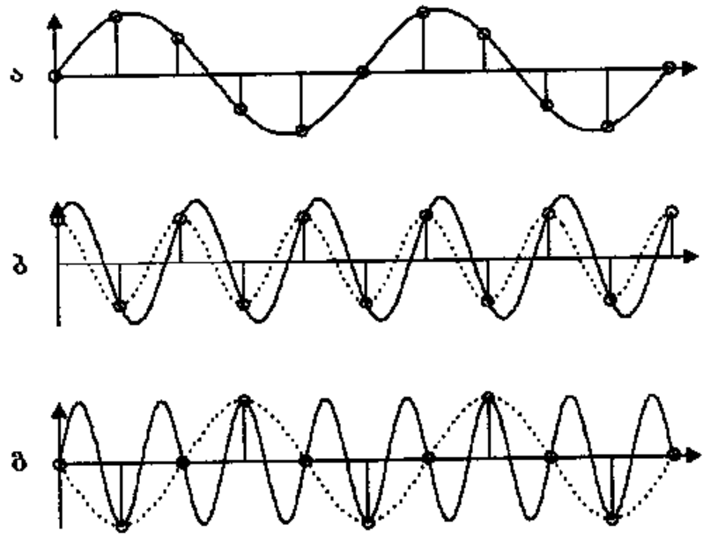
იმისათვის, რომ ანალოგური სიგნალი ზუსტად იყოს დისკრეტიზირებული მას არ უნდა გააჩნდეს სიხშირე, რომელიც დისკრეტიზაციის სიხშირის ნახევარზე მეტი იქნება. ეს არის ნაიკვისტის სიხშირე f_N. ე.ი.

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{f_d}{2} \quad .$$

შენონ-კოტელნიკოვის თეორემის თანახმად, თუ ანალოგური სიგნალის $x(t)$რეალიზაციას გააჩნია ფინიტური (შეზღუდული) სპექტრი, მაშინ დისკრეტული სიგნალი შეგვიძლია ცალსახად აღვადგინოთ დანაკარგვების გარეშე თუკი გამოვიყენებთ დისკრეტიზაციის სიხშირეს, რომელიც გაორმაგებული ნაიკვისტის სიხშირეზე მეტია, ე.ი. $f_d \geq 2 f_N$.

აქედან გამომდინარე, ყველაზე დიდი სიხშირე, რომელიც შესაძლებელია დისკრეტიზაციის $1/\Delta t$ სიჩქარით გამოყოფა არის ნაიკვისტის სიხშირე $1/2\Delta t$ (ჰც). სიგნალის უფრო მაღალი სიხშირეები $[0,\ 1/2\Delta t]$ჰც დიაპაზონში არ განსხვავდებიან ამავე დიაპაზონის დაბალი სიხშირეებისაგან. ე.ი. ხდება მაღალი

სიხშირეების ზედდება დაბალ სიხშირეებზე. ამრიგად, ნაიკვისტის სიხშირე წარმოადგენს ზღვრულ ანუ ზედდების სიხშირეს. ამ შეზღუდვის ახსნა შესაძლებელია ქვემოდ მოყვანილი ნახაზის საშუალებით.



ნახ. 4.2

განვიხილოთ სამი შემთხვევა.

1. თუ ჰარმონიული სიგნალის სიხშირე ნიაკვისტის სიხშირეზე ნაკლებია, მაშინ დისკრეტული ანათვლები ანალოგური სიგნალის აღდგენის საშუალებას იძლევა (ნახ. 4.2ა).

2. თუ ჰარმონიული სიგნალის სიხშირე ნაიკვისტის სიხშირის ტოლია, მაშინ დისკრეტული ანათვლები საშუალებას იძლევა აღვადგინოთ ანალოგური სიგნალი იგივე სიხშირით, მაგრამ აღდგენილი სიგნალის ამპლიტუდა და ფაზა (ნახაზზე ნაჩვენებია წყვეტილი ხაზებით) შეიძლება დამახინჯებული იყოს (ნახ. 4.2ბ). უარეს შენთხვევაში სინუსოიდის ყველა დისკრეტული ანათვლები შეიძლება ნულის ტოლი იყოს.

3. თუ ჰარმონიული სიგნალის სიხშირე ნაიკვისტის სიხშირეზე მეტია, მაშინ დისკრეტული ანათვლებით აღდგენილი სიგნალი (წყვეტილი ხაზები) იქნება სხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევა (ნახ. 4.2გ). ამ ეფექტს ეწოდება ცრუ სიხშირეების წარმოქმნის ეფექტი.

ცრუ სიხშირეების წარმოქმნის თავიდან აცილებისთვის ერთადერთ პრაქტიკულ მეთოდს წარმოადგენს ანალოგურ–ციფრული გარდაქმნამდე საწყის სიგნალში ფილტრის საშუალებით ყველა იმ სიხშირეების ჩახშობა, რომელიც ნაიკვისტის სიხშირეზე მეტია. აქედან გამომდინარე Δt, ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ ნაიკვისტის სიხშირე იყოს საკმაოდ მაღალი.

შენონის თეორემის თანახმად, სიგნალის დაქვანტვის სიხშირე უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ უტოლობას:

$$f_d \le \frac{1}{2\Delta t}$$

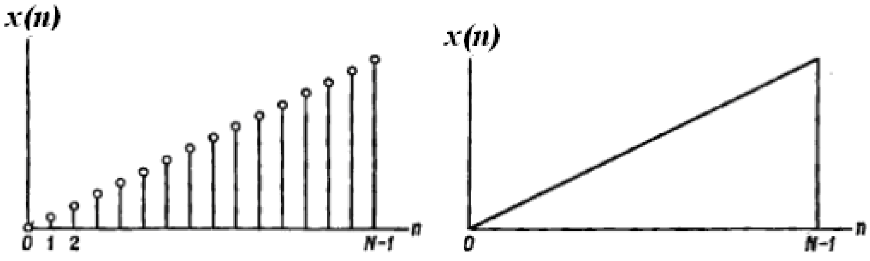
პრაქტიკაში დაქვანტვის სიხშირე შეირჩევა შემდეგი ფორმულით:

$$f_d \le \frac{1}{(3-5)\Delta t}$$

ამრიგად, რადგან ნებისმიერ ანალოგურ სიგნალს გააჩნია შეზღუდული სპექტრი, ამიტომ თუ სწორად შევარჩევთ დისკრეტიზაციის ინტერვალს, მაშინ საწყისი ანალოგური სიგნალი შეიძლება შევცვალოთ შესაბამისი დისკრეტული სიგნალით.

4.4 დისკრეტული თანმიმდევრობების წარმოდგენის საშუალებები

როგორც ვიცით, ანალოგურ–ციფრული გარდაქმნელის საშუალებით ანალოგური სიგნალი გარდაიქმნება დისკრეტულ სიგნალად. მათემატიკურად დისკრეტული სიგნალი წარმოდგინდება უწყვეტი თანმიმდევრული $x(n)$ ან $x(n\Delta t)$ ან $\{X\}=(x_0, x_1, x_2,...., x_n)$ რიცხვების ერთობლიობით, სადაც n – ანათვლების რაოდენობაა, Δt– დისკრეტიზაციის ინტერვალი. ხშირად მეტად სასარგებლოა და ინფორმატიულია თანმიმდევრობის გრაფიკული სახით წარმოდგენა. ამისათვის შესაძლებელია გამოვიყენოთ ორი მეთოდი: პირველი, როცა თითოეული ანათვალი წარმოდგენილია გრაფიკულად და მეორე, როცა მათი მომვლები, ისე როგორც ეს შემდეგ ნახაზზეა ნაჩვენები:

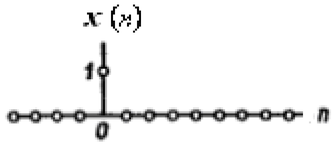


ნახ. 4.3

განვიხილოთ პრაქტიკაში ხშირად გამოყენებადი ზოგიერთი თანმიმდევრობები:

1. ერთეულოვანი იმპულსი (ერთეულოვანი ანათვალი)

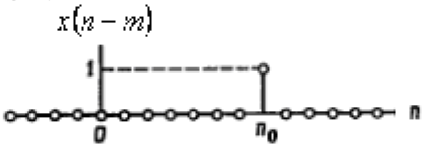
$$x(n)=\begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$



დისკრეტულ სისტემებში ერთეულოვანი იმპულსი თამაშობს იგივე როლს, რასაც დელტა–ფუნქცია ანალოგურ სიგნალებში. მათ შორის განსხვავება ის არის, რომ პირველი წარმოადგენს ფიზიკურად რეალიზებადს, ხოლო მეორე განიხილება, როგორც განზოგადოებული ფუნქცია.

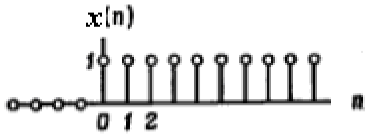
2. დაყოვნებული ერთეულოვანი იმპულსი.

$$x(n-m)=\begin{cases} 1\,, & n=m \\ 0\,, & n\neq m \end{cases}$$



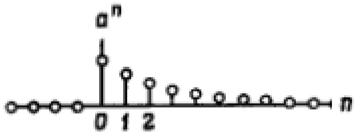
3 ერთეულოვანი ნახტომი.

$$x(n)=\begin{cases}1, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



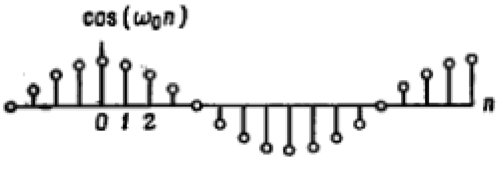
4. კლებადი ექსპონენტა.

$$x(n)=\begin{cases}a^{n}, & n\ge 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$



5. კოსინუსოიდა.

$$x(n)=\cos(\omega_0 n)$$



6. კომპლექსური ექსპონენტა

$$e^{-j\omega n}=\cos(\omega n)-j\sin(\omega n)$$

რადგან ეს თანმიმდევრობა კომპლექსურია, ამიტომ მისი გრაფიკული წარმოდგენისათვის საჭიროა ნამდვილი და წარმოსახვითი მდგენელების ცალ-ცალკე წარმოდგენა.

7. ნებისმიერი სახის თანმიმდევრობა.

ნებისმიერი სახის თანმიმდევრობა ადვილი წარმოსადგენია ზემოთ განხილული ძირითადი თანმიმდევრობების, კერძოდ დაყოვნებული ერთეულოვანი იმპულსის საშუალებით. თუ დაყოვნებულ ერთეულოვან იმპულს აღვნიშნავთ $\delta(n-m)$ სიმბოლოთი, მაშინ მოცემული $x(0), x(1), x(2),....., x(n)$ თანმიმდევრობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{n\infty} x(n)\delta(n-m) \qquad (4.1)$$

მართლაც, როცა $n=1$, მაშინ $x(1)=x(1)$, რადგან

$$\delta(1-m)=\begin{cases}1, & m=1\\ 0, & m\ne 1\end{cases}$$

$n=2,\quad \delta(2-m)=\begin{cases}1, & m=2\\ 0, & m\ne 2\end{cases}\quad x(2)=x(2)$ და ა.შ.

ნებმისმიერი სახის თამიმდებრობის ასეთი სახით წარმოდგენა ფართოდ გამოიყენება წრფივი მუდმივპარამეტრიანი დისკრეტული სისტემების აღსაწერად, ციფრული ფიკტრების სინთეზის დროს და ბევრ სხვა შემთხვევებში.

4.5 წრფივი დისკრეტული სისტემები

დისკრეტული სიგნალების დამუშავების თეორია ეფუძნება წრფივი დისკრეტული სისტემების თეორიას. აქედან გამომდინარე, განვიხილოთ წრფივი მუდმივპარამეტრიანი დისკრეტული სისტემა.

ზოგადად, დისკრეტული სისტემა ფაქტიურად წამოადგენს ერთი თანმიმდევრობის (რომელსაც შემავალს უწოდებენ) მეორე თანმიმდევრობაში (რომელსაც გამოსავალი ეწოდება) გარდაქმნის ალგორითმს. ე.ი. გვაქვს შემდეგი ბლოკ–სქემა:

სადაც $x(n)$ შემავალი, ხოლო $y(n)$ გამომავალი თანმიმდევრობებია, რომლებიც ფუნქციონალურად ასე არიან დამოკიდებულნი: $y(n) = F[x(n)]$, სადაც F გრდაქმნის ოპერატორია.

ფიზიკურ დისკრეტულ სისტემას ეწოდება **იდეალური** თუ იგი ფიზიკურად რეალიზებადია; გააჩნია მუდმივი პარამეტრები; წრფივია და მდგრადი.

დისკრეტულ სისტემას ეწოდება **ფიზიკურად რეალიზებადი**, როცა საწყისი ნულოვანი პირობების დროს სისტემის რეაქცია არ შეიძლება წარმოიშვას მანამ სანამ არ მოხდება სისტემაზე ზემოქმედება ანუ სისტემის რეაქცია დამოკიდებულია მხოლოდ მიმდინარე და წინა ზემოქმედებებზე და არ არის დამოკიდებული შემდგომი ზემოქმედების მნიშვნელობაზე.

დისკრეტულ სისტემას გააჩნია **მუდმივი პარამეტრები** თუ მათი ძირითადი თვისებები დროში არ იცვლებიან. ასეთი სისტემა დროით ინვარიანტულია, რომლისთვისაც დროში დაყოვნებული (ან დაძრული) შემომავალი თანმიმდევრობა უნდა იწვევდეს დროში დაყოვნებულ ექვივალენტურ გამომავალ თანმიმდევრობას. მაგალითად, თუ სისტემის შესასვლელს მივაწვდით $x(n)x(n+k)$ სიგნალს და სისტემის გამოსავალზე მივიღებთ $y(n)y(n+k)$ სიგნალს, მაშინ სისტემა დროით ინვარიანტულია. ეს პირობა უნდა სრულდებოდეს ნებისმიერი k სიდიდისათვის და ნებისმიერი სიგნალისათვის. ასეთ დისკრეტულ სისტემას **სტაციონარული** ეწოდება.

სისტემა **წრფივია**, თუ მისი რეაქცია ადიტიურია და ერთგვაროვანი. ტერმინი “ადიტიურობა” ნიშნავს იმას, რომ შემავალი სიგნალების ჯამის რეაქცია ტოლი უნდა იყოს თოთოეული სიგნალის რეაქციების ჯამისა. ე.ი თუ $f(x)$ აღვნიშნავთ შემავალი სიგნალის რეაქციას, მაშინ

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

ტერმინი “ერთგვაროვანი” ნიშნავს იმას, რომ სიტემის შემავალი სიგნალის მუდმივ c სიდიდეზე ნამრავლის რეაქცია ტოლია ამ მუდმივი სიდიდისა და სიგნალის რეაქციის ნამრავლისა ე.ი $f(cx) = cf(x)$.

პრაქტიკაში პარამეტრების მუდმივობა რეალურ ფიზიკურ სისტემებში ხორციელდება. რაც შეეხება წრფივობას, აქ საქმე უფრო რთულადაა. ცნობილია, რომ ყველა ფიზიკური სისტემა არაწრფივია როცა შემავალი სიგნალი ღებულობს ექსტრემალურ მნიშვნელობებს. სიტუაცია რთულდება, როცა არაწრფიობის ეფექტი დროის გარკვეული მომენტიდან იწყებს თანდათანობით გამომჟღავნებას. მიუხედავად ამისა, ბევრი რეალური სისტემა შეიძლება ჩავთვალოთ წრფივად, ყოველ შემთხვევაში შემავალი სიგნალის ცვლებადობის გარკვეულ ინტერვალში.

მაგალითი 1. განვიხილოთ მარტივი სისტემა, რომელსაც გააჩნია კვადრატული რეაქცია და მისი გამოსავალ სიგნალს აქვს შემდეგი სახე:

$$y(n)=a[x(n)]^2$$

მივაწოდოთ სისტემის შესასვლელს ნებისმიერი ორი $x_1(n)$ და $x_2(n)$ თანმიმდევრობა და განვსაღზვროთ მათი შესაბამისი გამოძახილები. ადიტურობის თვისებიდან გამომდინარე ნებისმიერი ორი შემავალი სიგნალისათვის სისტემა უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობას:

$$y(n)=ax_1^2(n)+ax_2^2(n)$$

ჩვენ შემთხვევაში გვექნება:

$$y(n)=a[x_1(n)+x_2(n)]^2=ax_1^2(n)+2ax_1(n)x_2(n)+x_2^2(n)$$

აქედან გამომდინარე, ადიტიურობის პირობა დარღვეულია.

დაუშვათ c ნებისმიერი სიდიდის მუდმივი სიდიდეა, მაშინ ერთგვაროვნების თვისებიდან გამომდინარე უნდა გვქონდეს: $y(n)=acx^2(n)$, მაგრამ სინამდვილეში გვექნება:

$$y(n)=a[cx(n)]^2=ac^2x^2(n)$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ სისტემა არაწრფივია, რადგან იგი ვერ აკმაყოფილებს ადიტიურობის და ერთგვაროვნების თვისებებს.

მაგალითი 2. განვიხილოთ სისტემა, რომელიც აღიწერება შემდეგი განტოლებით:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{n}x(k)\ ,$$

რომელსაც სუმატორი ეწოდება. მივაწოდოთ სუმატორის შესასვლელს ნებისმიერი ორი $x_1(n)$ და $x_2(n)$ თანმიმდევრობა და განვსაზღვროთ მათი შესაბამისი გამოძახილები

$$y_1(n)=\sum_{k=0}^{n}x_1(k),\qquad y_2(n)=\sum_{k=0}^{n}x_2(k).$$

თუ სუმატორის შესასვლელს მივაწვდით $x_3(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$ სიგნალს, მაშინ ადიტიურობის (სუპერპოზიციის) პრინციპის თანახმად ნებისმიერი a და b კოეფიციენტებისათვის სუმატორის გამოსავალზე უნდა მივიღოთ $y_3(n)=ay_1(n)+by_2(n)$ სიგნალი. მართლაც

$$y_3(n)=\sum_{k=0}^{n}x_3(k)=\sum_{k=0}^{n}(ax_1(n)+bx_2(n))=a\sum_{k=0}^{n}x_1(k)+b\sum_{k=0}^{n}x_2(k)=ay_1(n)+by_2(n).$$

ამრიგად, მიღებული შედეგი აკმაყოფილებს სუმატორის ადიტიურობის პირობას.

შევამოწმოთ ერთგვაროვნების ანუ სტაციონარობის პირობა. დაუშვათ სუმატორს მიეწოდება $x_1(n)=x(n-n_0)$ სიგნალი. განვსაზღვროთ სუმატორის გამოსავალი $y(n-n_0)$ და $y_1(n)$ სიგნალი და შემდეგ მოვახდინოთ მათი შედარება. სუმატორის განსაზღვრიდან გამომდინარე გვექნება:

$$y(n-n_0)=\sum_{k=0}^{n-n_0}x(k);\qquad y_1(n)=\sum_{k=0}^{n}x_1(k)=\sum_{k=0}^{n}x(k-n_0)\ .$$

თუ აჯამვის პარამეტრს შევცვლით $k_1=k-n_0$, მაშინ მივიღებთ:

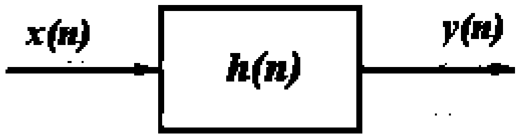
$$y_1(n)=\sum_{k_1=0}^{n-n_0}x(k_1)=y(n-n_0)$$

ე.ი. სრულდება ერთგვაროვნების (სტაციონარულობის) პირობა. ამრიგად, სუმატორი აკმაყოფილებს როგორც ადიტიურობის (სუპერპოზიციის), ასევე

სტაციონარულობის პირობებს. აქედან გამომდინარე, სუმატორი წრფივი დისკრეტული სისტემაა.

დისკრეტული სისტემა შეიძლება აღწერილი იყოს დროით სივრცეში იმპულსური მახასიათებლით (ნაკეცი ან სხვაობითი განტოლება), ხოლო სიხშირულ სივრცეში – სიხშირული მახასიათებლით (გადაცემის ფუნქცია).

იმპულსური მახასიათებელი. მუდმივპარამეტრიანი წრფივი დისკრეტული სისტემების დინამიური მახასიათებლები შეიძლება აღიწეროს $h(n)$ იმპულსური მახასიათებლით ანუ როგორც მას ხშირად უწოდებენ **იმპულსური გადაყვანის ფუნქციით,** რომელიც წარმოადგენს სისტემის რეაქციას ერთეულოვანი იმპულსის (დელტა–ფუნქციის) ტიპის შეშფოთებაზე.



ცნობილია, რომ ერთეულოვანი იმპულსის საშუალებით ნებისმიერი სახის თანმიმდევრობა შეიძლება წარმოვადგინოთ (4.1) ფორმულის საშუალებით. რადგან $h(n)$ წარმოადგენს $\delta(n)$ თანმიმდევრობის გამოძახილს და თუ სისტემას გააჩნია მუდმივი პარამეტრები, მაშინ $h(n-m)$ იქნება $\delta(n-m)$ თანმიმდევრობის გამოძახილი. სისტემის წრფივობიდან გამომდინარე $x(m)\delta(n-m)$ თანმიმდევრობის გამოძახილი უნდა იყოს $x(m)h(n-m)$. ამიტომ $x(n)$ თანმიმდებრობის გამოძახილი იქნება:

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

თუ ამ გამოსახულებაში ცვლადებს შევცვლით, მაშინ მივიღებთ:

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m) \qquad (4.2)$$

ამრიგად, $h(n)$ თანმიმდევრობა მთლიანად აღწერს მუდმივპარამეტრიან წრფივ დისკრეტულ სისტემას. როგორც ვხედავთ, (4.2) გამოსახულება ნაკეცს წარმოადგენს. ნაკეცი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემოკლებული სახით:

$$y(n)=h(n)\otimes x(n-m)$$

იმისათვის, რომ მუდმივპარამეტრიანი წრფივი სისტემა იყოს ფიზიკურად რეალიზებადი, საჭიროა რომ სისტემა რეაგირებდეს მხოლოდ შემავალი სიგნალის წარსულ მნიშვნელობებზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ $h(n)=0$, როცა $n<0$.

მუდმივპარამეტრიანი წრფივი დისკრეტული სისტემა მდგრადია თუ მისი შემავალი თანმიმდევრობის ნებისმიერი შეზღუდვა ვრცელდება სისტემის გამოსავალ თანმიმდევრობაზეც. სისტემის მდგრადობის აუცილებელ და საკმარის პირობას წარმოადგენს შემდეგი უტოლობის შესრულება:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \quad .$$

გარდა ამისა, სისტემა მდგრადია, როცა მისი იმპულსური მახასიათებელი კლებადი ექსპონენტაა, ხოლო სისტემა არამდგრადია, თუკი მისი იმპულსური მახასიათებელი ზრდადი ექსპონენტაა.

სიხშირული მახასითებელი. სიხშირულ სივრცეში მუდმივპარამეტრიანი წრფივი დისკრეტული სისტემა შეიძლება აღიწეროს სიხშირული მახასიათებლით $H(\omega)$, რომელიც წარმოადგენ იმპულსური მახასიათებლის ფურიეს გარდაქმნას

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}\ .$$

მართლაც თუ სისტემის შემავალ თანმიმდევრობას გააჩნია შემდეგი სახე:

$$x(n)=e^{j\omega n}\ ,$$

მაშინ სისტემის გამოსავალზე გვექნება:

$$y(n)=\sum_{n=0}^{\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)e^{j\omega(n-m)}=e^{j\omega n}\sum_{v=0}^{\infty}h(m)e^{-j\omega m}=x(n)H(\omega),$$

სადაც

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

ე.ი. **სიხშირული მახასითებელი წარმოადგენს იმპულსური მახასიათებლის ფურიეს გარდაქმნას.** აქ აჯამვა ხდება ნულიდან, რადგან როცა $m<0$, $h(m)=0$.

ფიზიკური სისტემის დინამიური მახასიათებლების აღწერა სიხშირული მახასითებლით მეტად ხელსაყრელია, რადგან სისტემის მახასითებლები წარმოდგენილნი არიან სიხშირულ არეში, რაც პრაქტიკული კვლევებისათვის მეტად მნიშვნელოვანია. სიხშირული $H(\omega)$ მახასითებელს ხშირად **გადაცემ ფუნქციას** უწოდებენ.

როგორც წესი, სიხშირული მახასითებელი კომპლექსური ფუნქციაა

$$H(\omega)=H_R(\omega)-jH_I(\omega),$$

ამიტომ უფრო მიზანშეწონილია თუ მას წარმოვადგენთ პოლარულ კოორდინატებში:

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{-j\phi(\omega)},$$

სადაც

$$|H(\omega)|=\sqrt{H_R^2(\omega)+H_I^2(\omega)}\qquad \Phi(\omega)=arctg\left[\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}\right].$$

$H(\omega)$ მოდულს ამპლიტუდური მახასიათებელი ეწოდება, ხოლო $\Phi(\omega)$ – ფაზური მახასიათებელი.

განვიხილოთ სიხშირული მახასითებლის ზოგიერთი თვისება. იგი წარმოადგენს პერიუდულ ფუნქციას 2π პერიოდით. ამიტომ ფუნქციის მთლიანი აღწერისათვის საკმარისია სიხშირული მახასითებელი განისაზღვროს მხოლოდ $[0; 2\pi]$ ინტერვალისთვის.

თუ იდეალური სისტემის შესავალს მიეწოდება ω_0 სიხშირის მქონდე ჰარმონიული რხევა, მაშინ სისტემის გამოსავალზეც გვექნება იგივე სიხშირის მქონდე ჰარმონიული რხევა. გამოსავალი სიგნალის ამპლიტუდის ფარდობა შემავალი სიგნალის ამპლიტუდასთან ტოლია $|H(\omega)|$ ამპლიტუდური მახასიათებლისა, ხოლო გამოსავალ და შემავალ სიგნალებს შორის ფაზური ძვრა მოცემულია $\Phi(\omega)$ ფაზუსი მახასიათებლით.

მუდმივპარამეტრიანი წრფივი დისკრეტული სისტემის სიხშირულ, ამპლიტუდურ და ფაზურ მახასიათებლებს გააჩნიათ სიმეტრიულობის თვისებები ე.ი.

$$H(-\omega) = H^*(\omega)$$
$$|H(-\omega)| = |H(\omega)|$$
$$\Phi(-\omega) = -\Phi(\omega)$$

თუ გვაქვს მიმდევრობით ჩართული ორი სისტემა $H_1(\omega)$ და $H_2(\omega)$ სიხშირულ მახასიათებლებით და სისტემებს შორის არ არსებობს უკუკავშირი, მაშინ ახალი სისტემის სიხშირულ მახასიათებელს აქვს შემდეგი სახე:

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$$
$$|H(\omega)| = |H_1(\omega)||H_2(\omega)|$$
$$\Phi(\omega) = \Phi_1(\omega) + \Phi_2(\omega)$$

ე.ი. ორი სისტემის მიმდევრობითი შეერთების დროს ამპლიტუდური მახასიათებლები გადამრავლდებიან, ხოლო ფაზური იკრიბებიან.

უნდა გვახსოვდეს, რომ მუდმივპარამეტრიანი წრფივი სისტემის სიხშირული მახასიათებელი დამოკიდებულია მხოლოდ სიხშირეზე და არ არის დამოკიდებული არც დროზე და არც შემავალი სიგნალის სახეზე. არაწრფივი სისტემის შემთხვევაში $H(\omega)$ ფუნქცია შეიძლება დამოკიდებული იყოს შემავალ სიგნალზე. გარდა ამისა, თუ სისტემის პარამეტრები არ არიან მუდმივი, მაშინ იგი დამოკიდებულია დროზეც.

4.6 ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა

ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა (ფდგ) წარმოადგენს სიგნალების ციფრული დამუშავების ერთ–ერთ ყველაზე უფრო გავრცელებულ და მძლავრ პროცედურას. ფდგ არის მათემატიკური პროცედურა, რომელიც გამოიყენება დისკრეტული სიგნალის ჰარმონიული ან სიხშირული სტრუქტურების დასადგენად. ფდგ გამოიყენება ნებისმიერი დისკრეტული თანმიმდევრობისათვის მიუხედავად იმისა თუ რას წარმოადგენს ეს თანმიმდევრობა.

თუ $x(t)$ რეალიზაცია წარმოადგენილია დისკრეტული ანათვლების სახით $x(n\Delta t),\ n = 1,2,....., N$ დისკრეტიზაციის Δt ინტერვალით, მაშინ რეალიზაციის T სიგრძე (პერიოდი) დისკრეტული სიგნალის N განზომილებასთან არის შემდეგ დამოკიდებულებაში: $T = \Delta t N$. აქედან გამომდინარეობს, რომ ნაიკვესტის სიხშირე ტოლია:

$$f_N = \frac{1}{2\Delta t} \quad ,$$

ხოლო ფუნდამენტალური სიხშირე

$$f_0 = \frac{1}{\Delta t N}$$

და შესაბამისად $\Delta f = f_0$. როგორც ცნობილია, ნებისმიერი დისკრეტული თანმიმდევრობა შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(t-kT).$$

რადგან სიგნალი პერიოდულია, ამიტომ მისი სპექტრიც უნდა იყოს პერიოდული, რომელიც ასევე აღიწერება უსასრულო რაოდენობის N რიცხვებით.

განვიხილოთ პერიოდული დისკრეტული სიგნალის სპექტრის გამოთვლის პროცერურა. რადგან სიგნალი პერიოდულია, ამიტომ გავშალოთ იგი ფურიეს მწკრივად, რომლის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან ჩვენთვის ცნობილი (2.2) გამოსახულებით. ამ ფორმულიდან გამომდინარე გვექნება:

$$X(n)=\frac{1}{NT}\int_0^{NT}x(t)e^{-j\omega_0 t}dt=\frac{1}{NT}\int_0^{NT}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\delta(t-kT)e^{-j\omega_k t}=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\int_o^{NT}\delta(t-kT)e^{-j\omega_k t}dt \quad .$$

როგორც ვიცით, სიხშირეთა მთელ დიაპაზონში დელტა–ფუნქციის სპექტრი მუდმივი სიდიდეა. გარდა ამისა, რადგან დელტა–ფუნქცია დაყოვნებულია kT სიდიდით, ამიტომ მისი სპექტრი ღებულობს დამატებით $e^{-jkT\omega_0 n}$ მამრავლს. აქედან გამომდინარე გვექნება:

$$\begin{aligned}X(n)&=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)\int_o^{NT}\delta(t-kT)e^{-j\omega_k t}dt=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-jkT\omega_0 n}=\\&=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-j\omega_k kT}=\frac{1}{NT}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}.\end{aligned}\qquad(4.3)$$

(4.3) გამოსახულებაში დროის რეალური მასშტაბი ფიგურირებს მხოლოდ $1/T$ მამრავლში. დისკრეტული თანმიმდევრობის განხილვისას ჩვეულებრივ იყენებენ ანათვლების რიგით ნომრებს, ამიტომ $1/T$ სიდიდე (4.3) გამოსახულებიდან შეგვიძლია გამოვრიცხოთ, ანუ ჩავთვალოთ დისკრეტიზაციის ინტერვალი ერთის ტოლი. მიღებულ გამოსახულებას

$$X(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad n=1,2,....,N \qquad (4.4)$$

ეწოდება ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა. არსებობს ფურიეს უკუ დისკრეტული გარდაქმნა

$$x(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(n)e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad k=1,2,....,N\ . \qquad (4.5)$$

$X(n)$ ფუნქციის გამოთვლისას ირჩევენ სიხშირის შემდეგ დისკრეტულ მნიშვლეობებს:

$$n=\frac{k}{T}=\frac{k}{\Delta tN}, \quad k=0,1,2,....,N$$

უნდა აღინიშნოს, რომ გარდაქმნა ერთგვაროვანია მხოლოდ $k=N/2$ მნიშვნელობამდე, ვინაიდან ამ წერტილს შეესაბამება ნაიკვისტის სიხშირე.

ფდგ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ამპლიტუდური და ფაზური სპექტრების სახით. ამპლიტუდური სპექტრი განისაზღვრება ფორმულით:

$$A(n)=|X(n)|=\sqrt{X_R^2(n)+X_I^2(n)},$$

ხოლო ფაზური სპექტრი:

$$\varphi(n)=arctg\left[\frac{X_I(n)}{X_R(n)}\right],$$

სადაც $X_R(n)$ – სპექტრის რეალური, ხოლო $X_I(n)$– წარმოსახვითი მდგენელებია.

4.7 ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნის თვისებები

განვიხილოთ ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნის ძირითადი თვისებები.

1. **სპექტრის პერიოდულობა**. პერიოდულ დისკრეტულ სიგნალს გააჩნია პერიოდული სპექტრი $X(k)=X(k+N)$. k და $(k+N)$ კომპონენტებისათვის ჩავწეროთ ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$$X(k+N)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}e^{-j\frac{2\pi nN}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}e^{-j2\pi n}\ .$$

რადგან n მთელი რიცხვია, ამიტომ $e^{-j2\pi n}=1$. ე.ი. მივიღეთ:

$$X(k+N)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=X(k)\ .$$

ამრიგად, ფდგ შედეგი მეორდება N პერიოდით. ამას ხშირად ფდგ ციკლურ თვისებასაც უწოდებენ.

2. **წრფივობა.** თუ $x_1(n)$ დისკრეტული თანმიმდევრობის ფდგ არის $X_1(n)$, ხოლო მეორე $x_2(n)$ თანმიმდებრობის $X_2(n)$, მაშინ ამ ორი დისკრეტული თანმიმდევრობის ჯამის ფდგ იქნება:

$$F[x_1(n)+x_2(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}[x_1(n)+x_2(n)]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}+$$

$$+\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=X_1(k)+X_2(k)$$

ე.ი. წრფივობის პირობა სრულდება.

3. **თანმიმდევრობების ნაკეცი**. როგორც ვიცით, ორი $x(n)$ და $h(n)$ თანმიმდევრობის ნაკეცი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}x(m)h(n-k)$$

განვსაზღვროთ ნაკეცის ფდგ

$$Y(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}x(m)h(n-m)\right]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\left[\sum_{m=0}^{N-1}h(n-m)e^{-j\frac{2\pi(n-m)k}{N}}\right]e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}=$$

$$=H(k)\sum_{m=0}^{N-1}x(m)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}=H(k)X(k)$$

ამრიგად, დისკრეტული თანმიმდევრობების ნაკეცის ფდგ შეესაბამება თანმიმდევრობების სპექტრების ნამრავლს

4. **სპექტრის სიმეტრიულობა.** როგორც უკვე აღვნიშნეთ, დისკრეტული სიგნალის სპექტრი პერიოდულია. გარდა ამისა, სპექტრი ინარჩუნებს

სიმეტრიულობის თვისებას ე.ი. $X(N-k)=X(-k)$. ჩავწეროთ $X(N-k)$ კომპონენტის ფდგ:

$$X(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi(N-k)n}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi(-k)n}{N}}e^{-j2\pi n}=X(-k),$$

სადაც $e^{-j2\pi n}=1$.

5. სიგნალის ენერგიის მუდმიობა. პარსაველის თეორემის თანახმად, სიგნალის საერთო ენერგია უნდა რჩებოდეს უცვლელი როგორც ფურიეს გარდაქმნამდე ასევე ფურიეს გარდაქმნის შემდეგაც. ე.ი. ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N=1}|X(k)|^2 .$$

რადგან $|X(k)|^2$ ჯამი ყველა k–ს მნიშვნელობისათვის წარმოადგენს სიგნალის ენერგიას (ან საშუალო სიმძლავრეს, მიღებული სიგნალის სიგრძეზე გაყოფით), ამიტომ $|X(k)|^2$ წარმოადგენს სიგნალის სიმძლავრის სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციას.

4.8 ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა

ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნის უშუალოდ გამოყენება მოითხოვს საკმაოდ დიდი რაოდენობის არითმეტიკულ ოპერაციებს, კერძოდ N^2 რაოდენობის კომპლექსური რიცხვების გამრავლებას და იგივე რაოდენობის შეკრების ოპერაციებს. აქ N დროითი მწკრივის განზომილებაა. მეოცე საუკუნის 60 წლებში შეიქმნა ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის (ფსგ) მეთოდები. ფსგ ეწოდება ალგორითმს, რომელის საშუალებით ხდება ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნისათვის საჭირო არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობის მკვეთრი შემცირება. არსებობს ფსგ რამოდენიმე მეთოდი. ჩვენ განვიხილავთ ალგორითმს, რომელიც მოითხოვს საწყისი მონაცემების განზომილება ტოლი იყოს 2^p სიდიდისა, სადაც $p>0$ და იგი მთელი რიცხვია.

ფსგ იდეა მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ, მოცემულია N განზომილებიანი დროითი მწკრივი $x(n),\ n=1,2,.....,N$. შემოვიღოთ ორი $N/2$ განზომილებიანი თანმიმდევრობა, რომლებიც მიიღებიან საწყისი დროითი მკრივიდან ლუწი $g(k)=x(2k)$ და $g(k)=x(2k+1)$ კენტი ნომრიანი წევრებიდან. მათი ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა ტოლია:

$$G(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(k)e^{-j\frac{4\pi nk}{N}};\quad Q(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}q(k)e^{-j\frac{4\pi nk}{N}}$$

ხოლო $X(k)$ შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=0}^{N/2-1}\left[g(n)e^{-j\frac{4\pi nk}{N}}+q(k)e^{-j\frac{2\pi k(2n+1)}{N}}\right]=\\&=\sum_{n=0}^{N/2-1}g(n)e^{-j\frac{4\pi nk}{N}}+e^{-j\frac{2\pi k}{N}}\sum_{n=0}^{N/2-1}q(n)e^{-j\frac{4\pi nk}{N}},\ k=0,1,2,...N-1\end{aligned}\tag{4.6}$$

თუ საწყისი $x(k)$ თანმიმდევრობა პერიოდულია $N/2$ პერიოდით, მაშინ

$$\{g(n)\} = \left\{g\left(n + N/2\right)\right\} \quad \{q(n)\} = \left\{q\left(n + N/2\right)\right\}$$

და შესაბამისად

$$X\left(k + N/2\right) = G(k) + e^{-j\frac{2\pi\left(n+N/2\right)k}{N}} Q(k) .$$

რადგან

$$e^{-j\frac{2\pi\left(n+N/2\right)k}{N}} = e^{-j\frac{2\pi N/2}{N}} e^{-j\frac{2\pi k}{N}} = e^{-j\pi} e^{-j\frac{2\pi k}{N}} = -e^{-j\frac{2\pi k}{N}}$$

ამიტომ

$$X\left(k + N/2\right) = G(k) - e^{-j\frac{2\pi k}{N}} Q(k) \qquad (4.7)$$

(4.6) და (4.7) ფორულები საფუძვლად უდევს ფსგ ალგორითმს. შემდგომში გამოთვლები ხდება ინტერაციული პრინციპის საშუალებით. კენტი და ლუწი ნომრების ანათვლები თანმიმდევრულად კვლავ იყოფიან ორ-ორ ნაწილებად. პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ არ მივიღებთ თანმიმდევრობას, რომელიც შეიცავს ერთ ანათვალს. ადვილი მისახვედრია, რომ ეს ერთადერთი ანათვლის ფსგ ემთხვევა თავისათვის.

ფსგ მოითხოვს $N\log_2 N$ რაოდენობის კომპლექსური რიცხვების გამრავლების ოპერაციებს, რაც იძლევა საკმაოდ კარგ ეფექტს. მაგალითად, თუ N = 1024, მაშინ ფსგ გამოდის 100-ჯერ უფრო სწრაფი, ვიდრე ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნა. მართლაც:

$$N^2 = 1048576,\ \log_2 1024 = 10,\ \ N \cdot \log_2 N = 1024 \cdot 10 = 10240,$$

$$\frac{N^2}{N\log_2 N} = \frac{1048576}{10240} = 102{,}4$$

4.9 ფურიეს დისკრეტული გარდაქნის მაგალითი

განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა. ვთქვათ მოცემულია (1,0,0,1) დისკრეტული თანმიმდევრობა. ჩავთვალოთ, რომ ეს თანმიმდევრობა აღწერს ოთხი ძაბვის მნიშვნელობას, ე.ი. $x(0)=1,\ x(1)=0,\ x(2)=0,\ x(3)=1$. მოვახდინოთ ამ თანმიმდევრობის ფურიეს პირდაპირი დისკრეტული გარდაქმნა. როგორც ცნობილია

$$X(n) = \sum_{k=0}^{3} x(k) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} , \quad n = 0,1,2,3$$

$$n=0 \qquad X(0)=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\frac{2\pi k0}{4}}=x(0)+x(1)+x(2)+x(3)=1+0+0+1=2$$

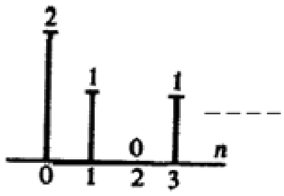
$$n=1 \qquad X(1)=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\frac{2\pi k1}{4}}=1e^{-j\frac{2\pi 1\cdot 0}{4}}+0\cdot e^{-j\frac{2\pi 1\cdot 1}{4}}+0\cdot e^{-j\frac{2\pi 1\cdot 2}{4}}+1\cdot e^{-j\frac{2\pi 1\cdot 3}{4}}=1+e^{-j\frac{3\pi}{2}}=$$

$$=1+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)-j\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=1-j(-1)=1+j$$

$$n=2 \qquad X(2)=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\frac{2\pi 2k}{4}}=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\pi k}=1+0+0+1\cdot e^{-j3\pi}=1-1=0$$

$$n=3 \qquad X(3)=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\frac{2\pi 3k}{4}}=\sum_{k=0}^{3}x(k)e^{-j\frac{3\pi k}{2}}=1+0+0+1\cdot e^{-j\frac{9\pi}{2}}=1-j$$

ამრიგად (1,0,0,1) დისკრეტული თანმიმდევრობის ფდგ შედეგად ვღებულობთ: $(2,1+j,0,1-j)$. თუ ავიღებთ ამპლიტუდურ სპექტრს $|X(n)|$ და გავითვალისწინებთ, რომ ფდგ პერიოდულია, მაშინ გვექნება სპექტრის შემდეგი გრაფიკული გამოსახულება:



მოვახდინოთ მიღებული თანმიმდევრობის $(2,1+j,0,1-j)$ ფურის უკუ დისკრეტული გარდაქმნა.

$$x(n)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j\frac{2\pi nk}{4}}, \quad n=0,1,2,3$$

$$n=0. \quad x(0)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j\frac{2\pi 0k}{4}}=\frac{1}{4}\left[X(0)+X(1)+X(2)+X(3)\right]=\frac{1}{4}\left[2+(1+j)+0+(1-j)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}(2+1+j+0+1-j)=1$$

$$n=1. \quad x(1)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j\frac{2\pi 1k}{4}}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j\frac{\pi k}{2}}=\frac{1}{4}\left[2+(1+j)e^{j\frac{\pi}{2}}+0+(1-j)e^{j\frac{3\pi}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[2+(1+j)j+(1-j)(-j)\right]=\frac{1}{4}(2+j-1-j-1)=0$$

$$n=2. \quad x(2)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j\pi k}=\frac{1}{4}\left[2+(1+j)e^{j\pi}+(1-j)e^{j3\pi}\right]=\frac{1}{4}\left[2-(1+j)-(1-j)\right]=0$$

$$n=3. \quad x(3)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}X(k)e^{j\frac{3\pi k}{2}}=\frac{1}{4}\left[2+(1-j)(-j)+(1-j)j\right]=\frac{1}{4}(2-j+1+j+1)=1$$

ამრიგად, მივიღეთ საწყისი (1,0,0,1) დისკრეტული თანმიმდევრობა.

4.10 Z – გარდაქმნა

ფურიეს გარდაქმნა წარმოადგენს დისკრეტული სიგნალების დამუშავების ერთ-ერთ უძლიერეს მეთოდს. მაგრამ, ფურიეს გარდაქმნა, სამწუხაროდ, ყველა დისკრეტული თანმიმდევრობისათვის არ არის განსაზღვრული. ამიტომ მიზანშეწონილია გვქონდეს ფურიეს გარდაქმნის ანალოგი, რომელიც გამოიყენება უფრო ფართო კლასის სიგნალებისათვის. ასეთ გარდაქმნას მიეკუთვნება Z – გარდაქმნა, რომელიც გარკვეულ პირობებში ამოცანების ანალიტიკური ამოხსნისას უფრო მოსახერხებელია ვიდრე ფურიეს გარდაქმნა.

როგორც ვიცით, თუ $x(n)$ თანმიმდევრობა მოცემულია $[-\infty:\infty]$ ინტერვალში, მაშინ მისი ფურიეს გარდაქმნა იქნება:

$$X(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-j2\pi nk}.$$

თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $z=e^{j2\pi n}$, მაშინ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n} \qquad (4.8)$$

რომელსაც $x(n)$ თანმიმდევრობის Z – გარდაქმნა ეწოდება. ამრიგად, Z – გარდაქმნის არსი მდომარეობს $x(n)$ თანმიმდევრობის კომპლექსური Z ცვლადით წარმოდგენაში.

ცხადია, რომ $X(z)$ ფუნქცია განსაზღვრულია მხოლოდ იმ z მნიშვნელობებისათვის, როდესაც (4.8) მწკრივი კრებადია. (4.8) გამოსახულებას ხშირად უწოდებენ ორმხრივ Z – გარდაქმნას. თუ დისკრეტული თანმიმდევრობა მოცემულია $x(n),\ n=0,1,2,....$ სახით, მაშინ მისი Z – გარდაქმნა იქნება:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)Z^{-n}$$

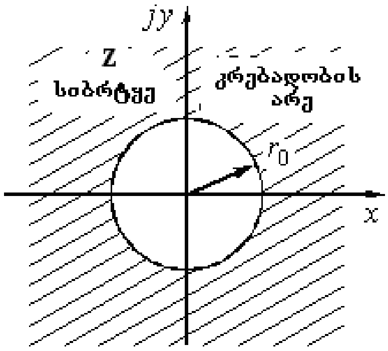
და მას ცალმხრივი Z – გარდაქმნა ეწოდება.

ამრიგად, ნებისმიერი თანმიმდევრობისათვის, მაგალითად $\left(\frac{1}{2},2,\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ შესაძლებელია მისი ჩაწერა Z – გარდაქმნის სახით:

$$X(z)=\frac{1}{2}+2z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}$$

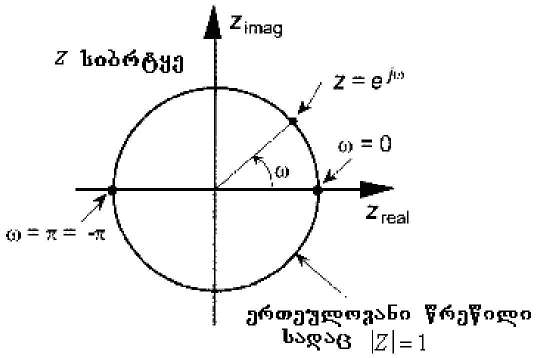
როგორც (4.8) ფორმულიდან ჩანს, Z–გარდაქმნა არის უსასრულო რაოდენობის წევრების მქონე ხარისხოვანი მწკრივი, ამიტომ ის შეიძლება n –ს ყველა მნიშვნელობისათვის არ იყოს კრებადი. არეს, სადაც Z–გარდაქმნა კრებადია, ეწოდება კრებადობის არე, სადაც $X(z)$ მნიშვნელობა უსასრულოა. გასაგებია, რომ კრებადობის არე განისაზღვრება $x(n)$ თანმიმდებრობის ან $X(z)$ გარდაქმნის თვისებებით.

ამრიად, $x(n)$ თანმიმდევრობის Z–გარდაქმნა $X(z)$ განსაზღვრულია მხოლოდ ისეთი კრებადობის არეში, რომელიც მოიცავს z-ის ყველა მნიშვნელობას, რომლებიც იმყოფებიან რაიმე r_0 რადიუსის მქონე წრეწირის გარეთ (ნახ. 4.4). r_0 უწორებენ კრებადობის რადიუს. ე.ი. მწკრივი კრებადია, როცა სრულდება $r_0<|z|<\infty$ პირობა.



ნახ. 4.4

Z–გარდაქმნა, როგორც კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია, ხელსაყრელია აღიწეროს კომპლექსური სიბრტყის საშუალებით. გეომეტრიულად z წერტილებში, რომლებიც აკმაყოფილებენ $|z|=1$ პირობას, წარმოადგენენ ერთეულოვან წრეწირს ნულოვანი ცენტრით (ნახ, 4.5)



ნახ. 4.5

Z–გარდაქმნა, განსაზღვრული მხოლოდ ერთეულოვან წრეწირზე, ემთხვევა ფურიეს გარდაქნას. ω წარმოადგენს ერთეულოვანი წრეწირის რადიუსის კუთხეს, რომელსაც იგი ადგენს ნამდვილ (R_e) ღერძთან და რომელიც აითვლება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ერთეულოვანი წრეწირის დროს $X(z)$ გამოთვლისას, დაწყებული $z = 1$ (ე.ი. $\omega = 0$) და შემდეგ $z = -1$ (ე.ი. $\omega = \pi$) მიმართულებით, ვღებულობთ ფურიეს გარდაქმნის მნიშვნელობებს $0 \le \omega \le \pi$ სიხშირულ დიაპაზონში. თუ გავაგრძელებთ გამოთვლებს ერთეულოვანი წრეწირის გარშემო, მაშინ მივიღებთ ფურიეს გარდაქმნის მთელ პერიოდს.

განვიხილოთ ზოგიერთი თანმიმდევრობის $Z-$ გარდაქმნა.

1. ერთეულოვანი იმპულსი

$$x_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad X_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0(n) Z^{-n} = 1Z^{-0} = 1$$

2. ერთეულოვანი ნახტომი

$$x_0(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Z^{-n}$$

მიღებული ჯამი წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას და ამიტომ იგი კრებადია ნებისმიერი z–ისთვის, როცა $|z|>1$ ანუ $|Z^{-1}<1|$. აჯამვის შემდეგ მივიღებთ:

$$X(z)=\frac{1}{1-Z^{-1}}$$

3. დისკრეტული ექსპონენციალური ფუნქცია

$$x(n)=\begin{cases} a^n, & n\geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases}$$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)Z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n Z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a^{-1}Z\right)^{-n}$$

როგორც ერთეულოვანი ნახტომის დროს, აქაც მიღებული ჯამი წარმოადგენს გეომეტრიულ პროგრესიას, რომელიც კრებადია როცა $|aZ^{-1}<1|$ ანუ $|Z|>|a|$, ე.ი. ვღებულობთ:

$$X(z)=\frac{1}{1-aZ^{-1}}\quad .$$

Z – გარდაქმნის თვისებები

1. წრფივობა. Z- გარდაქმნა წრფივია. ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ X_1(z) და X_2(z) წარმოადგენენ $x_1(n)$ და $x_2(n)$ თანმიმდევრობების Z–გარდაქმნას, მაშინ ნებისმიერი a და b დადებითი სიდიდეებისათვის $ax_1(n)+bx_2(n)$ თანმიმდევრობისთვის Z–გარდაქმნა ტოლია $aX_1(z)+bX_2(z)$.

2. დაყოვნება. Z- გარდაქმნა შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც დაყოვნების ოპერატორი $x(n)Z^{-n}=x(n-m)$. აქედან გამომდინარე, თუ $x(n)$ თანმიმდევრობას გააჩნია Z–გარდაქმნა $X(z)$, მაშინ $y(n)=x(n-k)$ თანმიმდევრობის Z-გარდაქმნა ნებისმიერი k მნიშვნელობისათვის ტოლია:

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-k)Z^{-n} \tag{4.9}$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $n–k=m$, მაშინ (4.9) ფორმულა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$Y(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)Z^{-(m+k)}=Z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)Z^{-m}=Z^{-k}X(z)$$

ამრიგად თანმიმდევრობის დაყოვნება რაიმე k ტაქტით საჭიროა ამ თანმიმდევრობის Z–გარდაქმნა გავამრავლოთ Z^{-k} სიდიდეზე, რომელსაც ეწოდება დისკრეტული თანმიმდევრობის დაყოვნების ოპერატორი.

3. ნაკეცი. როგორც ვიცით, ორი $x_1(n)$ და $x_2(n)$ უსასრულო დისკრეტული თანმიმდევრობის ნაკეცი განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)x_2(n-k)\ . \tag{4.10}$$

განვსაზღვროთ (4.10) თანმიმდევრობის Z-გარდაქმნა.

$$Y(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)x_2(n-k)\right]Z^{-n}\ .$$

თუ აჯამვის თანმიმდევრობას შევცვლით, მაშინ მივიღებთ:

$$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n-k)Z^{-n}\ .$$

მეორე ჯამში თუ შემოვიტანთ ახალ ცვლადს $m=n-k$, მაშინ გვექნება:

$$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_2(m)Z^{-m}\right]Z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1(k)Z^{-k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_2(m)Z^{-m}=X_1(z)X_2(z)$$

ამრიგად, **დისკრეტული თანმიმდევრობების ნაკეცის Z–გარდაქმნა ტოლია თანმიმდევრობების Z–გარდაქმნების ნამრავლისა.**

განვიხილოთ მაგალითი. მოცემული სიგნალებისათვის $x_1(n)=(1,1,1,0,0,0)$ $x_1(n)=(0,0,1,1,0,0)$ განვსაზღვროთ ნაკეცის Z–გარდაქნა.

ჯერ განვსაზღვროთ სიგნალების Z–გარდაქნა:

$$X_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)Z^{-n}=1+Z^{-1}+Z^{-2}\qquad X_2(z)=Z^{-2}+Z^{-3}$$

სიგნალების ნაკეცი ტოლია:

$$Y(z)=X_1(z)*X_2(z)=\left(1+Z^{-1}+Z^{-2}\right)\left(Z^{-2}+Z^{-3}\right)=Z^{-2}+2Z^{-3}+2Z^{-4}+Z^{-5}$$

უკუ Z – გარდაქნა

Z–გარდაქმნიდან საწყის რიცხვით თანმიმდევრობაზე გადასვლას ეწოდება უკუ Z–გარდაქნა, რომელიც ფორმალურად ასე ჩაიწერება:

$$x(n)=\frac{1}{j2\pi}\oint X(z)Z^{n-1}dz\ .$$

აღნიშნული ინტეგრალი აიღება შეკრული კონტურიდან, რომელიც მოთავსებულია $X(z)$ ფუნქციის კრებადობის არეში. პრაქტიკულად Z–გარდაქნა ხშირად განისაზღვრება $X(z)$ ფუნქციის მარტივ წილადებად დაშლის გზით. მაგალითისათვის განვიხილოთ შედეგი გამოსახულება:

$$X(z)=\frac{1}{\frac{1}{2}Z^{-2}-\frac{3}{2}Z^{-1}+1} \tag{4.11}$$

(4.11) წარმოვადგინოთ მარტივ წილადების ჯამის სახით

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-Z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}Z^{-1}\right)}=\frac{2}{1-Z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}} \tag{4.12}$$

თუ გავიხსენებთ ერთეულოვანი იპულსის Z–გარდაქნას

$$X(z)=\frac{1}{1-Z^{-1}}$$

და დისკრეტული ექსპონენციალური ფუნქციის Z–გარდაქნას

$$X(z)=\frac{1}{1-aZ^{-1}}\ ,$$

მაშინ ადვილი შესამჩნევია, რომ (4.12) ფორმულის პირველი მდგენელი შეესაბამება ნახტომს, რომლის ამპლიტუდა 2-ს ტოლია, ხოლო მეორე მდგენელი – 2^{-k}, $k \geq 0$. ამრიგად, საძიებელი თანმიმდევრობას გააჩნია შედეგი სახე:

$$x(k)=\begin{cases}2-2^{k}\ , & k\geq 0\\ 0, & k<0\end{cases}$$

დასკვნის სახით შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ:

1. Z–გარდაქნა წარმოადგენს ფურიეს გარდაქმნის განზოგადოებულ სახეს;

2. თუ დისკრეტული თანმიმდევრობა კრებადია და გააჩნია Z–გარდაქმნა, მაშინ როდესაც ფურიეს გარდაქმნა შეიძლება განუსაზღვრელი იყოს;

3. თუ დისკრეტული თანმიმდევრობა კრებადია და მისი ფურიეს გარდაქმნა განუსაზღვრელია, მაშინ მას გააჩნია Z–გარდაქმნა.

4.11 დისკრეტული ნაკეცი

დისკრეტული ნაკეცი წარმოადგენს პროცეს, როდესაც ხდება ორი დისკრეტული თანმიმდევრობიდან ახალი თანმიმდევრობის მიღება. არსებობს დისკრეტული ნაკეცის ორი სახე: წრფივი და ციკლური. ციკლურ ნაკეცს ხშირად უწოდებენ წრიულს ან პერიოდულს.

წრფივი ნაკეცი. ვთქვათ მოცემულია ორი დისკრეტული თანმიმდევრობა (სიგნალი) $x(n),\ n=0,1,2,....,N_1-1$ და $h(n),\ n=0,1,2,....,N_2-1$. როგორც ცნობილია დისკრეტული ნაკეცი განისაზღვრება ფორმულით:

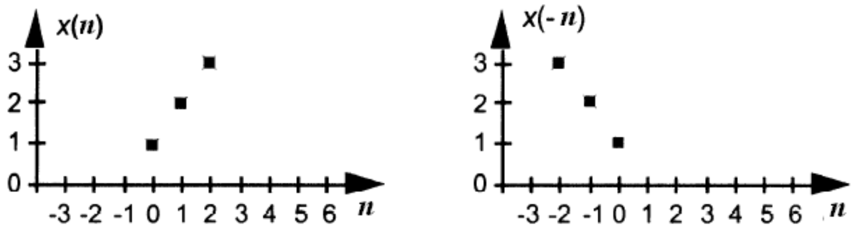
$$y(n)=h(n)\otimes x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)x(n-m),\quad n=0,1,2,....,N-1,\qquad(4.13)$$

სადაც $N=N_1+N_2-1$. იგულისხმება, რომ $x(n)=0$, როცა $n<0$ და $n>N_1$, ასევე $h(n)=0$, როცა $n<0$ და $n>N_2$. წრფივი ნაკეცის გამოთვლისას ხდება $x(n)$ და $h(n)$ თანმიმდევრობების ერთმანეთის მიმართ დაძვრა, მათი გადამრავლება და შემდეგ შეკრება.

მოვახდინოთ (4.13) გამოსახულების გაშლა

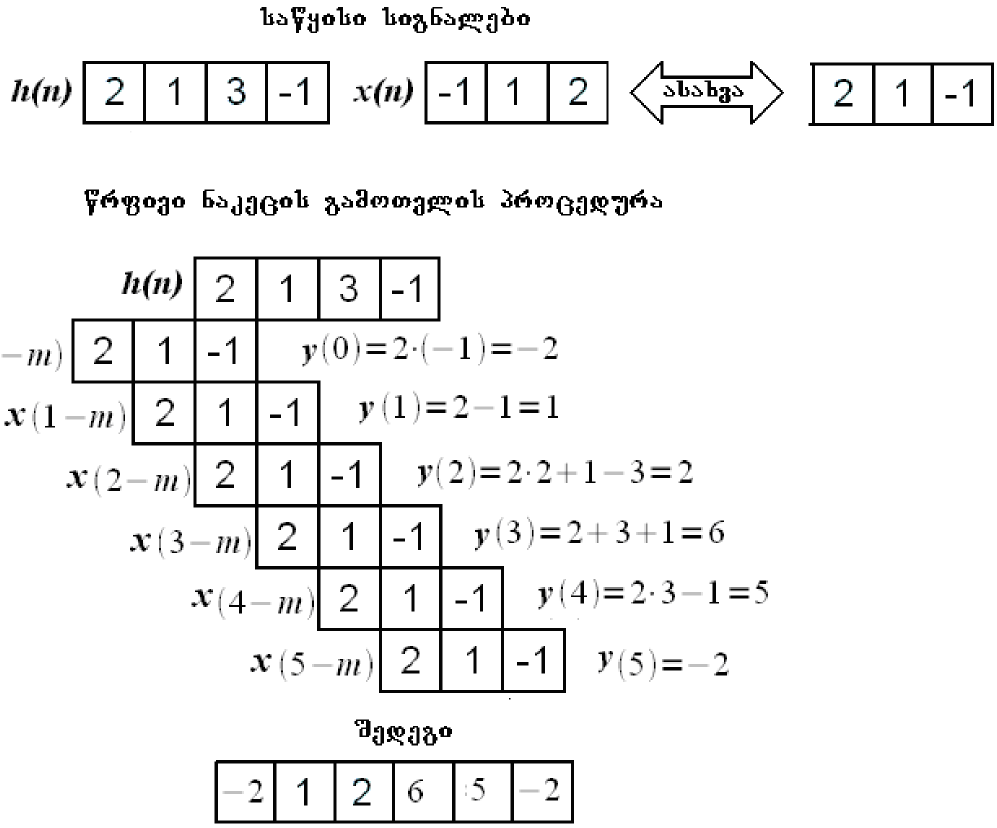
$$\begin{aligned}
&n=0\quad y(0)=h(0)x(0)+h(1)x(-1)+h(2)x(-2)+h(3)x(-3)+h(4)x(-4)+\cdots\cdots\\
&n=1\quad y(1)=h(0)x(1)+h(1)x(0)+h(2)x(-1)+h(3)x(-2)+h(4)x(-3)+\cdots\cdots\\
&n=2\quad y(2)=h(0)x(2)+h(1)x(1)+h(2)x(0)+h(3)x(-1)+h(4)s(-2)+\cdots\cdots\\
&n=3\quad y(3)=h(0)x(3)+h(1)x(2)+h(2)x(1)+h(3)x(0)+h(4)x(-1)+\cdots\cdots
\end{aligned}\qquad(4.14)$$

და ა.შ. როგორც (4.14) გამოსახულებიდან ჩანს მივიღეთ ახალი თანმიმდევრობა $x(0),x(-1),x(-2),x(-3),x(-4),.........$, რომელიც წარმოადგენს ნულოვანი ინდექსის მიმართ საწყისი $x(n)$ თანმიმდევრობის სარკულ ასახვას. მაგალითად, $x(n)=(1,\ 2\ ,3)$ თანმიმდევრობისათვის გვექნება $x(-n)=(3,2,1)$ ე.ი. $x(1,\ 2\ ,3)$ აისახა $x(3,2,1)$ თანმიმდევრობაში (ნახ. 4.6)..



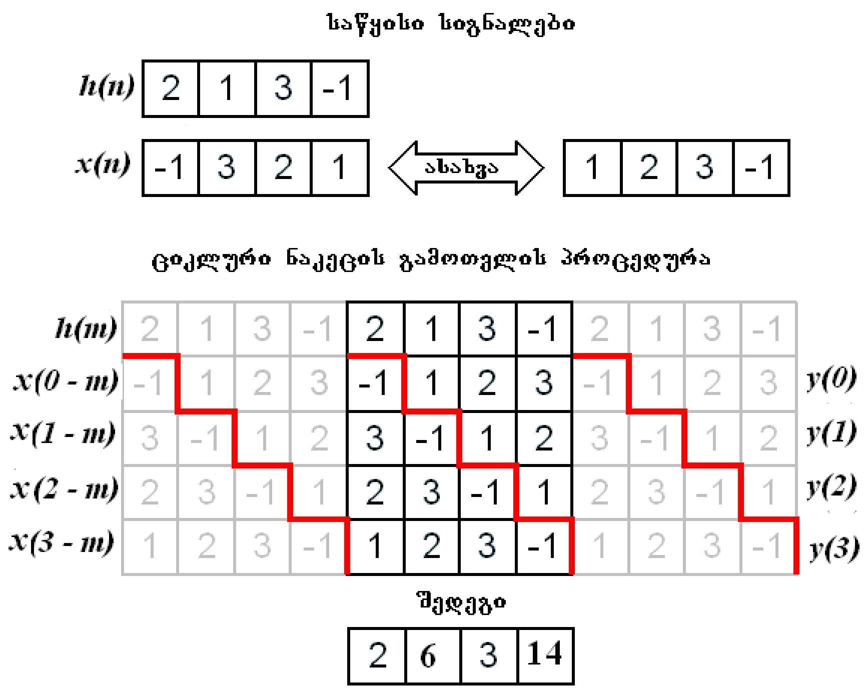
ნახ. 4.6

ნახ. 4.7 წარმოდგენილია წრფივი ნაკეცის განსაზღვრის მაგალითი



ნახ. 4.7

ციკლური ნაკეცი. ციკლური ნაკეცის დროს იგულისხმება, რომ ერთი და იგივე N სიგრძის $x(n)$ და $h(n)$ დისკრეტული სიგნალები პერიოდულები არიან. ციკლური ნაკეცის გამოთვლის მაგალითი მოყვანილია ნახ. 4.8



ნახ. 4.8

წითელი ტეხილით აღნიშნულია $x(n-m)$ სიგნალის პერიოდების გამეორების საზღვრები. უნდა შევნიშნოთ, რომ სიგნალების პერიოდულობიდან გამომდინარეობს, რომ $x(-m)=x(N-m)$. ბიჯობრივად გამოვთვალოთ ციკლური ნაკეცი. ამ შემთხვევაში $N=4$.

$$y(0)=\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(0-m)=h(0)x(0)+h(1)x(-1)+h(2)x(-2)+h(3)x(-3)=\cdots$$

$$\cdots=h(0)x(0)+h(1)x(3)+h(2)x(2)+h(3)x(1)=\cdots$$

$$\cdots=2\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 3+(-1)\cdot 3=2.$$

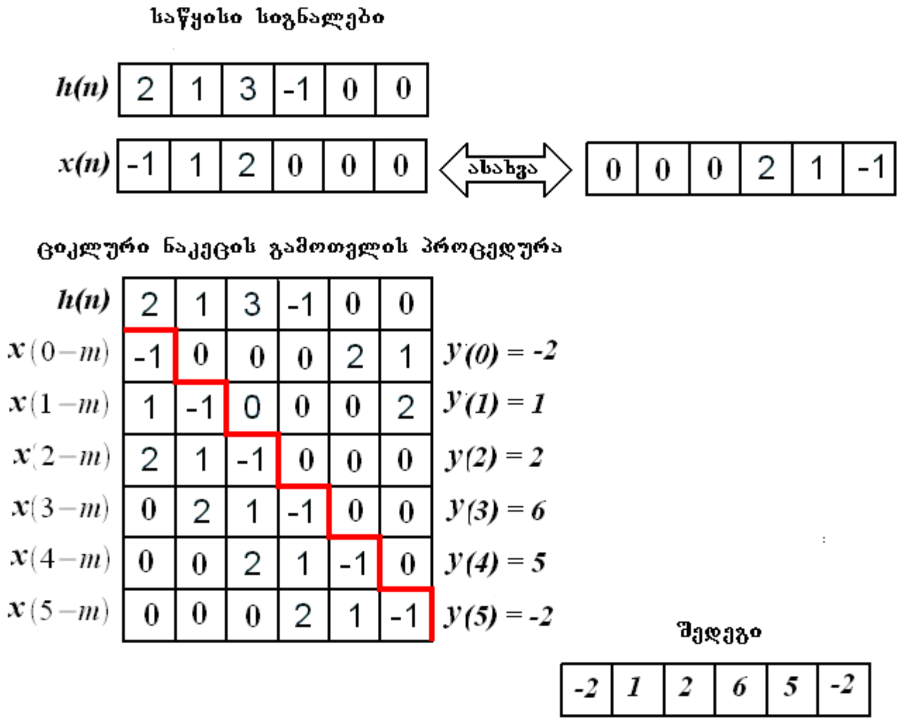
$$y(1)=\sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(1-m)=h(0)x(1)+h(1)x(0)+h(2)x(-1)+h(3)x(-2)=\cdots$$

$$\cdots=h(0)x(1)+h(1)x(0)+h(2)x(3)+h(3)x(2)=\cdots$$

$$\cdots=2\cdot 3+1\cdot(-1)+3\cdot 1+(-1)\cdot 2=6$$

ანალოგიურად მივიღებთ: $y(2)=3,\quad y(3)=14$.

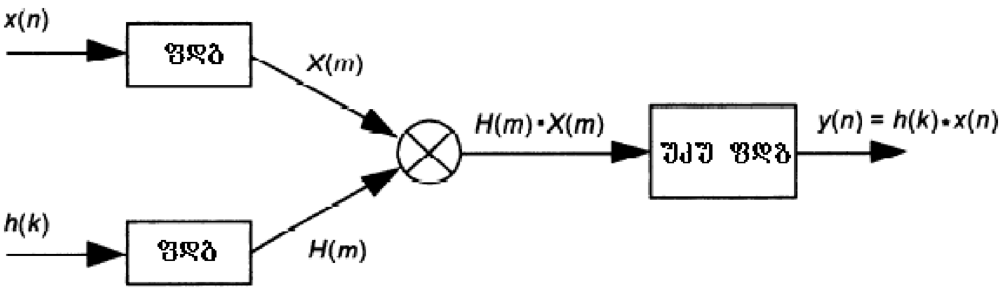
წრფივი ნაკეცით შესაძლებელია განისაზღვროს ციკლური ნაკეცი. ამ შემთხვევაში $x(n)$ და $h(n)$ დისკრეტული სიგნალების ანათვლები უნდა იყოს ერთი და იგივე სიგრძის. მაგალითად, თუ ორი თანმიმდევრობის სიგრძეებია N_1 და N_2 , მაშინ პირველ თანმიმდებრობას უნდა დაუმატოთ N_2 -1 ნულები, ხოლო მეორეს N_1 - 1 ნულები. ამის შემდეგ ორივე თანმიმდევრობა დებულობს N_1+N_2-1 სიგრძეს. მაგალითად, ნახ. 4.7 მოყვანილ მაგალითისათვის, სადაც N_1=3 და N_2=4, $x(n)$ უნდა დაუმატოთ ორი ნულოვანი ანათვალი, ხოლო $h(n)$-ს სამი ნულოვანი ანათვალი, ე.ი. ორივე სიგნალისათვის სრულდება პირობა: $N_1+N_2-1=3+4-1=6$. ასეთი ციკლური ნაკეცის განსაზღვრის მაგალითი წარმოდგენილია ნახ. 4.8.



ნახ. 4.8

როგორც ვხედავთ, წრფივი და ციკლური ნაკეცის მნიშვნელობები ემთხვევიან ერთმანეთს.

ნაკეცის განსაზღვრა ფურიეს დისკრეტული გარდაქმნით. როგორც ფდგ თვისებებიდან ჩანს (იხ. §4.7), ნაკეცის სპექტრი ტოლია მოცემული სიგნალების სპექტრების ნამრავლისა. ე.ი. $Y(m)=H(m)X(m)$. აქედან გამომდინარე, ნაკეცის განსაზღვრა შესაძლებელია ფდგ. ნახ. 4.9-ზე წარმოდგენილია ნაკეცის განსაზღვრის ბლოკ-სქემა.



ნახ. 4.9

მოცემული სქემით ნაკეცის განსაზღვრა საკმაოდ ეფექტურია. განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია $N=4000$ და $M=3000$ სიგრძის თანმიმდევრობები. ნაკეცის უშუალოდ განსაზღვრას სჭირდება $N \cdot M = 12000000$ (12 მილიონი) შეკრების და გამრავლების ოპერაცია. იგივე თანმიმდევრობებისათვის ციკლური ნაკეცის მისაღებად საჭიროა დაახლოებით 107000 კომპლექსური და ნამდვილი გამრავლების ოპერაცია, რაც დაახლოებით 7,5-ჯერ ნაკლებია, ვიდრე ნაკეცის პირდაპირი განსაზღვრისას.

5. კორელაციური ანალიზი

5.1 ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასება

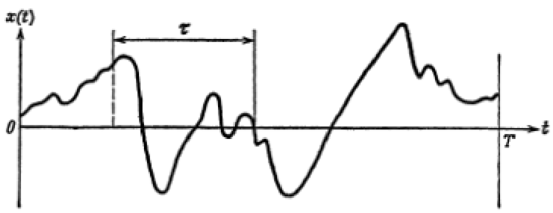
როგორც ვიცით, სტაციონარული შემთხვევითი $\{X(t)\}$ პროცესის $x(t)$ რეალიზაციის ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x(t+\tau)dt \tag{5.1}$$

რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს $x(t)$ რეალიზაციის მნიშვნელობებს t და $t+\tau$ დროის მომენტებში. τ -ს უწოდებენ ძვრას. დისკრეტული სიგნალებისათვის (5.1) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$R_{xx}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+\tau) \tag{5.2}$$

ვთქვათ, მოცემულია T სიგრძის ცენტრირებული შემთხვევითი პროცესის რეალიზაცია



მაშინ ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}x(t)x(t+\tau)dt\,.$$

თუ ამ ფორმულაში ზღვარს გამოვრიცხავთ, მაშინ მივიღებთ ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასებას:

$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau}x(t)x(t+\tau)dt\,.$$

არსებობს ავტოკორელაციური ფუნქციის განსაზღვრის ორი მეთოდი პირდაპირი და არაპირდაპირი. პირდაპირი მეთოდით ავტოკორელაციური ფუნქცია მიიღება უშუალოდ საწყისი რეალიზაციიდან, ხოლო არაპირდაპირი მეთოდით ჯერ განისაზთვრება სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია და შემდეგ ფურიეს უკუ გარდაქმნით ვღებულობთ ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასებას. განვიხილოთ ორივე ეს მეთოდი.

პირდაპირი მეთოდი. თუ ცენტრირებული სტაციონარული პროცესის $x(t)$ რეალიზაცია წარმოდგენლია დისკრეტული თანმიმდევრობის $x(n),\ n=1,2,.....,N$ სახით, რომლის საშუალო მნიშვნელობა $m_x = 0$, მაშინ ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასება განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

.
$$R_{xx}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}x(n)x(n+\tau),\quad \tau=0,1,2,....,m \tag{5.3}$$

იმისათვის რომ, მივიღოთ ავტოკორელაციური ფუნქციის გადაუადგილებადი შეფასება, ამისათვის (5.3) ფორმულის მარჯვენა მხარეში გაყოფა უნდა შესრულდეს არა N - ზე, არამედ $N-\tau$ სიდიდეზე ე.ი გვექნება:

$$\widetilde{R}_{xx}(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{n=1}^{N-\tau}x(n)x(n+\tau), \quad \tau=0,1,2,....,m \quad ,$$

სადაც m მაქსიმალური ძვრაა.

პრაქტიკაში ხშირად გამოიყენება ნორმირებული ავტოკორელაციური ფუნქცია, რომელიც ასე განისაზღვრება:

$$\rho_{xx}(\tau)=\frac{\widetilde{R}(\tau)}{R_{xx}(0)}, \quad \tau=0,1,2,....,m\,.$$

როგორც ვიცით, ამ შემთხვევაში ნებისმიერი τ - სთვის სრულდება $\widetilde{R}(\tau)\leq 1$ უტოლობა.

არაპირდაპირი მეთოდი. ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასების მიღებისათვის საჭიროა Nm რაოდენობის გამრავლების ოპერაცია. თუ დისკრეტული სიგნალის განზომილება დიდია, მაშინ $\widetilde{R}_{xx}(\tau)$ ფუნქციის მიღებას სჭირდება საკმაოდ დიდი რაოდენობის არითმეტიკული ოპერაციების ჩატარება. ამ პრობლემის გადაწყვეტა შესაძლებელია ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მეთოდის გამოყენებით. ამისათვის ჯერ უნდა განისაზღვროს $x(n)$, $n=1,2,...\ N$ დისკრეტული თანმიმდევრობის სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია და ფურიეს უკუ გარდაქმნით მივიღოთ ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასება ე.ი.

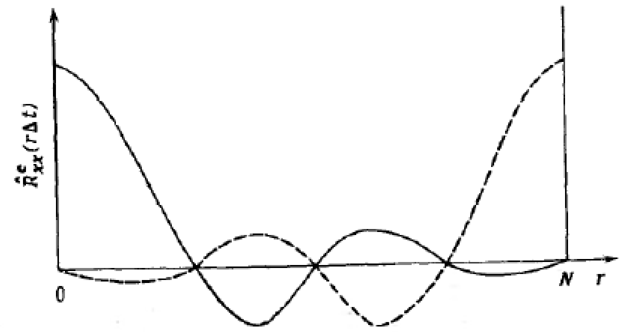
$$\widetilde{R}_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_{xx}(f)e^{j2\pi f_N}df=\int_{0}^{f_N}G_{xx}(f)\cos(2\pi f\tau)df \quad ,$$

სადაც f_N - ნაიკვისტის სიხშირეა.

ამ გზით მიღებული ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასება გადაადგილებადია ე.წ. ციკლური ეფექტის გამო. ავტოკორელაციური ფუნქციის ციკლური შეფასება ტოლია:

$$\widetilde{R}_{xx}^{c}(\tau)=\frac{N-\tau}{N}\widetilde{R}_{xx}(\tau)+\frac{\tau}{N}\widetilde{R}_{xx}(N-\tau).$$

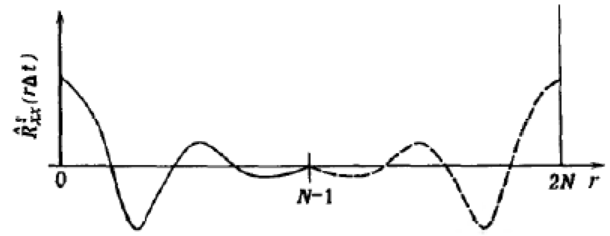
ეს მოვლენა წარმოდგენილია შემდეგ ნაგაზზე:



ეს პრობლემა შეიძლება თავიდან ავიცილოთ თუ საწყის დისკრეტულ თამიმდევრობას დაუმატებთ N რაოდენობის ნულს, მაშინ ხდება ციკლური ეფექტის მთლიანი გამორიცხვა (გამოყოფა),

$$\widetilde{R}_{xx}^{c}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{(N-\tau)}{N}\widetilde{R}_{xx}(\tau)\,, & \tau=0,1,2,....,N-1\\[2ex] \dfrac{(\tau-N)}{N}\widetilde{R}_{xx}[(2N-\tau)], & \tau=N,N+1,...2N-1\end{cases}$$

რაც კარგად ჩანს შემდეგ ნახაზზე:



რადგან τ -ს მიმართ ავტოკორელაციური ფუნქცია ყოველთვის ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ ციკლური კორელაციური ფუნქციის მეორე წევრი შეგვიძლია უგულვებელყოთ და საბოლაოდ მივიღებთ ავტოკორელაციური ფუნქციის გადაუადგილებად შეფასებას

$$\tilde{R}_{xx}(\tau)=\frac{N}{N-\tau}\tilde{R}^{c}_{xx}(\tau), \quad \tau=0,1,2,.....N-1 .$$

ამრიგად, ჩვენ განვიხილეთ ავტოკორელაციური ფუნქციის განსაზღვრის პირდაპირი მეთოდი, როდესაც ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასებას ვღებულობთ უშუალოდ საწყის დისკრეტული სიგნალიდან.

ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის გამოყენება საშუალებას იძლევა გაცილებით სწრაფად იყოს გამოთვლილი ავტოკორელაციური ფუნქცია, განსაკუთრებით მაშინ, როდესაც მაქსიმალური ძვრის სიდიდე m დიდია. მართლაც, პირდაპირი მეთოდით გამოთვლისას საჭიროა mln ოპერაციების რაოდენობა, აქ l - დისკრეტული სიგნალის რეალიზაციის თანაბრად დაყოფილი ინტერვალების რაოდენობაა, რომელიც გვჭირდება სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრისათვის. როგორც ვიცით, ფურიეს სწრაფი გარდაქმნა თხოულობს $4Np$ ოპერაციების რაოდენობას, სადაც p არის N სიგრძის ინტერვალში წარმოდგენილი 2^P რაოდენობის დისკრეტული ანათვლები. თუ $m = n$, მაშინ გამოთვლის დაჩქარების კოეფიციენტი ტოლია $q \approx \frac{N}{4P}$. მაგალითად, თუ N=1024, მაშინ q = 1024/40=26.

მოვიყვანოთ ავტოკორელაციური ფუნქციის განსაზღვრის ალგორითმი, რომელიც შედგება შემდეგი ეტაპებისაგან:

1. lN სიგრძის საწყის რეალიზაციას ვყოფთ l რაოდეონბის ინტერვალებად და თითოეული ინტერვალისათვის ვირჩევთ მაქსიმალური ძვრის m მნიშვნელობას $m \le n$ პირობის გათვალისწინებით.
2. თითოეულ $x(n)$, n=1,2… n ინტერვალს უნდა დავუმატოთ N რაოდენობის ნულები, რომლის შედეგად ვღებულობთ $2N$ განზომილების ახალ რეალიზაციას;

3. ფურიეს სწრაფი გარდაქმნით გამოვთვალოთ $X(f_k),\ k=0,1,2,.....2N-1$ მნიშვნელობები.
4. განვსაზღვროთ სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციების $G_{xx}(f_k),\ k=0,1,2,.....2N-1$ შეფასებები.
5. მიღებული სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შეფასების ფურიეს უკუ გარდაქმნით ვღებულობთ $R^{c}_{xx}(\tau), \quad \tau=0,1,2,......., N-1$
6. მიღებული $R^{c}_{xx}(\tau)$ ციკლური ავტოკორელაციური ფუნქციიდან გამოვრიცხოთ მისი მეორე ნახევარი და დაგვრჩება $\tau=0,1,2,......., N-1$

7. მიღებული სიდიდეები მრავლდება $\frac{N}{N-\tau}$ სამაშტაბო კოეფიციენტზე. ამით სრულდება ავტოკორელაციური ფუნქციის გამოთვლის ალოგითმი.

5.2 ურთიერთკორელაციური ფუნქციის შეფასება

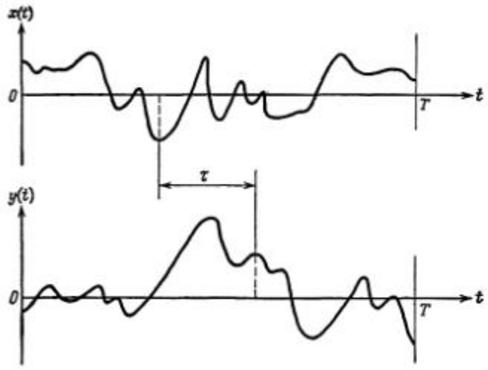
როგორც ცნობილია, თუ მოცემულია ორი $\{X(t)\}$ და $\{Y(t)\}$ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის $x(t)$ და y(t) რეალიზაციები, მაშინ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt \qquad (5.4)$$

რომელიც აკავშირებს $x(t)$ რეალიზაციის t დროის მნიშვნელობას y(t) რეალიზაციის $t+\tau$ დროის მნიშვნელობასთან. დისკრეტული სიგნალებისათვის (5.4) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$R_{xy}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+\tau) \qquad (5.5)$$

განვიხილოთ T სიგრძის ცენტრირებული სტაციონარული $\{X(t)\}$ და $\{Y(t)\}$ შემთხვევითი პროცესების $x(t)$ და y(t) რეალიზავიები,



მაშინ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$R_{xy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T}x(t)y(t+\tau)dt$$

თუ ამ ფორმულაში ზღვარს გამოვრიცხავთ, მაშინ მივიღებთ ურთიერთკორელაციური ფუნქციის შეფასებას:

$$\tilde{R}_{xy}(\tau)=\frac{1}{T-\tau}\int_{0}^{T-\tau}x(t)y(t+\tau)dt\,.$$

ისევე როგორც ავტოკორელაციური ფუნქციის შეფასებისას, ურთიერთკორელაციური ფუნქციის შეფასება შეიძლება მივიღოთ პირდაპირი და არაპირდაპირი მეთოდებით.

პირდაპირი მეთოდი. თუ მოცემულია ორი ცენტრირებული სტაციონარული $\{X(t)\}$ და $\{Y(t)\}$ შემთხვევითი პროცესების $x(t)$ და y(t) რეალიზაციები, რომლებიც წარმოდგენილნი არიან, $x(n)$, $y(n)$, $n=1,2,.....,N$ დისკრეტული თანმიმდევრობების სახით, მაშინ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით:

$$R_{xxy}(\tau)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+\tau), \quad \tau=0,1,2,....,m$$

ხოლო მისი გადაუადგილებადი შეფასება მიიღება შემდეგი ფორმულით:

$$\tilde{R}_{xy}(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{n=1}^{N-\tau}x(n)y(n+\tau), \quad \tau=0,1,2,....,m$$

ანალოგიურად განისაზღვრება:

$$\tilde{R}_{yx}(\tau)=\frac{1}{N-\tau}\sum_{n=1}^{N-\tau}y(n)x(n+\tau), \quad \tau=0,1,2,....,m$$

უნდა შევნიშნოთ, რომ ურთიერთკორელაციური ფუნქციები $\tilde{R}_{xy}(\tau)$ და $\tilde{R}_{yx}(\tau)$ განისაზღვრებიან $x(t)$ და y(t) თანამამრავლების რიგითობით.

ნორმირებული ურთიერთკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\tilde{\rho}_{xy}(\tau)=\frac{\tilde{R}_{xy}(\tau)}{\sqrt{\tilde{R}_{xx}(0)}\sqrt{\tilde{R}_{yy}(0)}}, \quad \tau=0,1,2,....,m$$

სადაც თეორიულად უნდა სრულდებოდეს შემდეგი უტოლობა $-1\le\tilde{\rho}_{xy}(\tau)\le 1$. ანალოგიურად განისაზღვრება $\tilde{\rho}_{yx}(\tau)$.

არაპირდაპირი მეთოდი. ფურიეს სწაფი გარდაქმნის მეთოდის გამოყენებით ურთიერთკორელაციური ფუნქციის შეფასების ალგორითმი შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგნაირად:

1. საწყისი დისკრეტული თანმიმდევრობებს ყოფენ l რაოდენობის N განზომილებიან ინტერვალებად, სადაც $N=2^p$, $p>0$. შეირჩევა ძვრის მაქსიმალური m მნიშვნელობა ($m< N$) პირობის გათვალისწინებით.

2. ციკლური ეფექტის გამოსარიცხავად თითოეულ ინტერვალს უმატებენ N რაოდენობის ნულებს, რომლის შედეგად ვღებულობთ $2N$ განზომილების ახალ ინტერვალებს;
3. მიღებული $2N$ განზომილებიანი ინტერვალებისათვის განისაზღვრება ორმხრივი ურთიერთსპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია $G_{xy}(f)$;
4. მიღებული $G_{xy}(f)$ ფუნქციის უკუ გარდაქმნით ვღებულობთ $R^c_{xy}(\tau), \quad \tau=0,1,2,....,2N-1$ გამოსახულებას;
5. ურთიერთკორელაციური ფუნქციის გადაუადგილებადი შეფასების $\tau=0,1,2,...,N-1$ მნიშვნელობებისათვის $\tilde{R}_{xy}(\tau)$ გამოსახულება უნდა გავამრავლოთ $\frac{N}{N-\tau}$ სამაშტაბო კოეფიციენტზე.

5.3 კორელაციური ფუნქციების განსაზღვრის მაგალითები.

ავტოკორელაციური ფუნქცია. განვიხილოთ უმარტივესი შემთხვევა, როცა მოცემულია სამპოზიციური $x_1(n)=(1,1,1)$ სიგნალი, რომელიც შეიძლება ასე

წარმოვიდგინოთ ....000111000.... განვსაზღვროთ დისკრეტული ავტოკორელაციური ფუნქცია (5.2) ფორმულის გამოყენებით.

$$R_{xx}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x(n+\tau)$$

$$\tau=0 \qquad x(0)=\sum_{-\infty}^{\infty}x^2(n)=1+1+1=3 \qquad R_{x_1x_1}(0)=3$$

$$\tau=1 \qquad x_1(n)=\cdots\cdots 0001110000\cdots\cdot$$

$$x_1(n+1)=\cdots\cdot 0000111000\cdots\cdot \qquad R_{x_1x_1}(1)=1+1=2$$

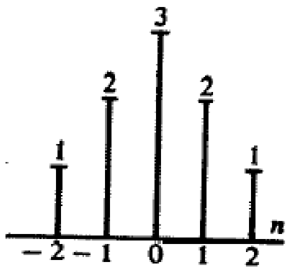
$$\tau=2 \qquad x_1(n)=\cdots\cdots 0001110000\cdots\cdot$$

$$x_1(n+2)=\cdots\cdot 0000011100\cdots\cdot \qquad R_{x_1x_1}(2)=1$$

$$\tau=3 \qquad x_1(n)=\cdots\cdots 0001110000\cdots\cdot$$

$$x_1(n+3)=\cdots\cdot 0000001110\cdots \qquad R_{x_1x_1}(3)=0$$

მიღებული ავტოკორელაციური ფუნქციის გრაფიკული გამოსახულება წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



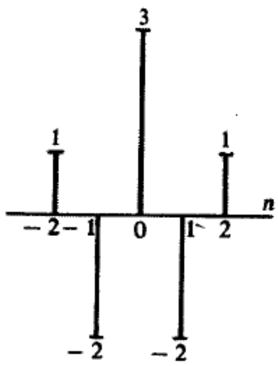
ავიღოთ სხვა სიგნალი $x_2(n)=(1,-1,1)$, რომლის ავტოკორელაციური ფუნქცია იქნება:

$$R_{x_2x_2}(0)=1+1+1=3$$

$$R_{x_2x_2}(1)=-1-1=-2$$

$$R_{x_2x_2}(2)=1$$

$$R_{x_2x_2}(3)=0$$



ურთიერთკორელაციური ფუნქცია. აქაც განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როცა მოცემულია ორი ოთხპოზიციანი სიგნალი $x(n)=(1,1,1,-1)$ და $y(n)=(1,1,-1,1)$. ურთიერთკორელაციური ფუნქციის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ (5.5) ფორმულა.

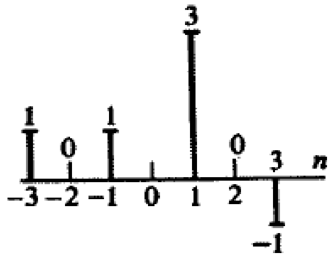
$$R_{xy}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y(n+\tau)$$

$$\tau=0 \quad x(n)=\cdots\cdots 00011 \quad 1-10000\cdots\cdot$$
$$y(n)=\cdots\cdots 00011-1 \quad 10000\cdots\cdot \qquad R_{xy}(0)=1+1-1+-1=0$$
$$\tau=1 \quad x(n)=\cdots\cdots 000111-10000\cdots\cdot$$
$$y(n+1)=\cdots 000011-11000\cdots\cdot \qquad R_{xy}(1)=1+1+1=3$$
$$\tau=2 \quad x(n)=\cdots\cdots 000111-10000\cdots\cdot$$
$$y(n+2)=\cdots 000001 \quad 1-11\cdots\cdot \qquad R_{xy}(2)=1-1=0$$
$$\tau=3 \quad x(n)=\cdots\cdots 000111-1000\cdots\cdot$$
$$y(n+3)=\cdots 0000001 \quad 1-11\cdots\cdot \qquad R_{xy}(3)=-1$$
$$\tau=4 \quad x(n)=\cdots\cdots\cdot 000111-10000\cdots\cdot$$
$$y(n+4)=\cdots\cdot 000000 \quad 011-1100\cdots \qquad R_{xy}(4)=0$$

გამოვთვალოთ ურთიერთკორელაციის ფუნქცია τ -ს უარყოფითი მნიშვნელობებისათვის. მაშინ მივიღებთ:

$$\tau=0 \quad x(n)=\cdots\cdot 0000011 \quad 1-100\cdots$$
$$y(n)=\cdots\cdot 0000011-1 \quad 100\cdots\cdot \qquad R_{xy}(0)=0$$
$$\tau=-1 \quad x(n)=\cdots\cdots 000001 \quad 11-100\cdots\cdot$$
$$y(n-1)=\cdots 000011-11 \quad 000\cdots\cdot \qquad R_{xy}(-1)=1$$
$$\tau=-2 \quad x(n)=\cdots\cdots 00000 \quad 111-1000\cdots$$
$$y(n-2)=\cdots\cdot 00011-110000\cdots\cdot \qquad R_{xy}(-2)=0$$
$$\tau=-3 \quad x(n)=\cdots\cdots 000 \quad 0111-1000\cdots\cdot$$
$$y(n-3)=\cdots\cdot 0011-110000\cdots\cdot \qquad R_{xy}(-3)=1$$
$$\tau=-4 \quad x(n)=\cdots\cdots 00 \quad 000111-1000\cdots\cdot$$
$$y(n-4)=\cdots\cdot 011-1100000\cdots\cdot \qquad R_{xy}(-4)=0$$

მიღებული ურთიერთკორელაციური ფუნქციის გრაფიკული გამოსახულება წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე;

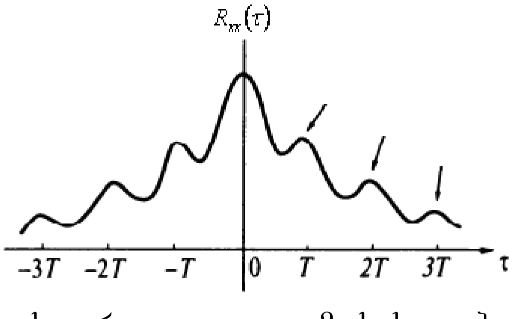


5.4 კორელაციური ანალიზის გამოყენების ზოგიერთი მაგალითი

1. პერიოდული სიგნალის აღმოჩენა.

ბუნებაში მიმდინარე ფიზიკური მოვლენების დიდი რაოდენობა პერიოდულ სიგნალებს წარმოადგენენ. როგორც ვიცით, თუ $x(t)$ რეალიზაცია ცხადად პერიოდული სიგნალია T პერიოდით, მაშინ $x(t)=x(t+nT)$, $n=\pm1,\pm2,....$ ე.ი $x(t)$ ფუნქციის მნიშვნელობები და დროში დაძრული $\pm T,\pm2T,\pm3T,.....$ ფუნქციის მნიშვნელობები საკმაო სიძლიერით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებულნი. მაგრამ, ზოგიერთ $x(t)$ სიგნალის რეალიზაციაში პერიოდულობა ცხადად არ ჩანს.

იმისათვის რომ გავიგოთ მართლაც პერიოდულია თუ არა $x(t)$ რეალიზაცია, საჭიროა განისაზღვროს ავტოკორელაციური ფუნქცია. თუ გამოთვლით კორელაციურ ფუნქციაში, რომელიც განსაზღვრულია $x(t)$ და დროში დაძვრულ $x(t+nT)$ მნიშვნელობებით, აღმოჩნდება პიკური მნიშვნელობები, რომლებიც მეორდებიან გარკვეული ინტერვალით, მაშინ შეგვიძლია ვიმსჯელოთ $x(t)$ ფუნქციის პერიოდულობის არსებობაზე. განვიხილოთ მაგალითი, ვთქვათ მოცემულია $x(t)$ რეალიზაცია და მისი ავტოკორელაციური ფუნქცია.

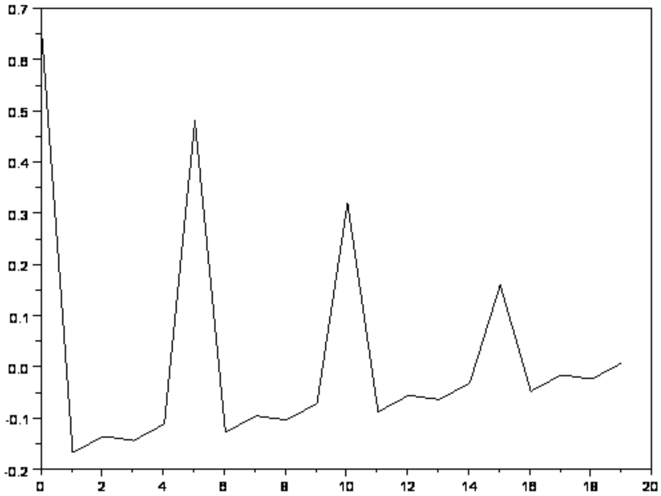


როგორც ავტოკორელაციური ფუნქციის გრაფიკული გამოსახულებიდან ჩანს ავტოკორელაციური ფუნქცია ღებულობს პიკურ მნიშვნელობებს nT წერტილებში $T,T2,T3....$, რაც მიგვანიშნებს $x(t)$ სიგნალში არსებული პერიოდულობას T პერიოდით.

განვიხილოთ მეორე მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია 5 თანრიგიანი პერიოდულად გამეორებადი დისკრეტული თანმიმდევრობა (1 1 1 -1 1) . ავიღოთ ოთხპერიოდიანი დისკრეტული სიგნალი:

$x(n)$ = (1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1 1 1 1 -1 1)

და გამოვთვალოთ ავტოკორელაციური ფუნქცია, რომელიც გრაფიკულად წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



ნახაზზე თვალნათლივ ჩანს 4 ლოკალური მაქსიმუმი ხუთი ანათვლის პერიოდით. ეს მიგვანიშნებს იმაზე, რომ მოცემული დისკრეტული თანმიმდევრობა პერიოდულია (პერიოდი ტოლია 5 ანათვლის) და შეიცავს ოთხ პერიოდს. ლოკალური მაქსიმუმების მნიშვნელობა სხვადასხვაა იმის გამო, რომ ჩვენ გვაქვს მონაცემების შეზღუდული რაოდენობა.

2. ხმაურის ფონზე პერიოდული სიგნალის აღმოჩენა.

დავუშვათ გვაქვს ცენტრირებული $x(t)$ რეალიზაცია, რომელიც შედგება ორი მდგენელისაგან $x(t)=p(t)+b(t)$, სადაც $p(t)-$ პერიოდული სიგნალია უცნობი T პერიოდით, $b(t)-$ხმაური. ამ შემთხვევაში ავტოკორელაციური ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$R_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T[p(t)+b(t)][p(t+\tau)+b(t+\tau)]dt$$

ავტოკორელაციური ფუნქციის თვისებების გათვალისწინებით მიღებული გამოსახულება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$R_{xx}(\tau)=R_{pp}(\tau)+R_{bb}(\tau)+R_{pb}(\tau)+R_{bp}(\tau).$$

თუ ჩავთვლით, რომ $b(t)$ ხმაური და $p(t)$ სიგნალი დამოუკიდებელი სდიდეებია, მაშინ საკმაო სიზუსტით შეგვიძლია ჩავთვალოთ, რომ ისინი უახლოვდებიან ნულს.

ამრიგად ხმაურის მქონე პერიოდული სიგნალის ავტოკორელაციური ფუნქციის გამოსახულებიდან დარჩება მხოლოდ ერთი მდგენელი

$$R_{xx}(\tau)=R_{pp}(\tau)+\varepsilon(\tau)\ ,$$

სადაც $\varepsilon(\tau)$ ცდომილებაა, რომელიც $x(t)$ რეალიზაციის T სიგრძის ზრდასთან ერთად მცირდება.

3. ხმაურის ფონზე ცნობილი პერიოდიანი სიგნალის აღმოჩენა.

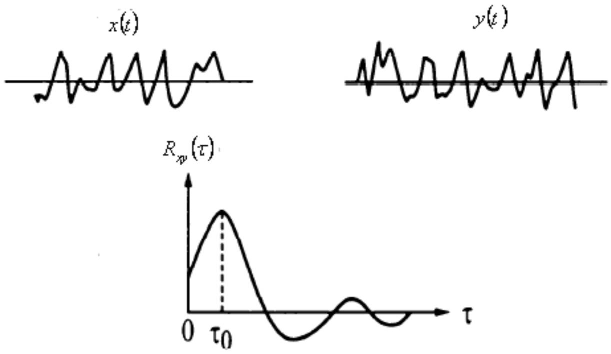
განვიხილოთ შემთხვევა როცა მოცემულია T პერიოდის ხმაურიანი სიგნალი $x(t)=p(t)+b(t)$ და იგივე პერიოდის დამხმარე სიგნალი y(t). განვსაზღვროთ ურთიერთკორელაციური ფუნქცია.

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left[p(t)+b(t)\right]y(t+\tau)dt$$

რადგან y(t) და $b(t)$ დამოუკიდებელნი არიან, ამიტომ $R_{xy}(\tau)$ გარკვეული ცდომილებით ნულის ტოლია, ე.ი. გვექნება $R_{xy}(\tau)=R_{py}(\tau)$. ამრიგად, ორი ერთსიხშირიანი პერიოდული სიგნალის ურთიერთკორელაციური ფუნქცია იქნება იმავე პერიოდის ფუნქცია.

4. ორ სიგნალს შორის დაყოვნების სიდიდის განსაზღვრა

ურთიერთკორელაციური ფუნქციით შესაძლებელია გაიზომოს ორ სიგნალს შორის დროში დაყოვნების სიდიდე. მაგალითისთვის განვიხილოთ $x(t)$ და y(t) სიგნალები და მათი ურთიერთკორელაციური ფუნქცია, რომლებიც წარმოდგენილნი არიან შემდეგ ნახაზზე:



როგორც ამ ნახაზიდან ჩანს, ურთიერთკორელაციური ფუნქცია მაქსიმუმს აღწევს τ_0 სიდიდის დროს, ე.ი შეგვიძლია გამოვიტანოთ შემდეგი დასკვნა: $x(t)$ და y(t) სიგნალებს შორის კორელაცია აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას მაშინ, როცა ამ სიგნალებს შორის დაყოვნება τ_0 სიდიდის ტოლია.

6. სპექტრული ანალიზი

სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია (სპექტრული სიმკვრივე, სპექტრი) აღწერს შემთხვევითი პროცესის სიხშირულ სტრუქტურას და გვიჩვენებს შესასწავლი პროცესის რეალიზაციაში რომელი სიხშირეები დომინირებენ და რომელი უფრო ნაკლებად. სპექტრული სიმკვრივის განსაზღვრა ძირითადად შესაძლებელია ორი გზით: კორელაციური ფუნქციით და უშუალოდ რეალიზაციის ფურიეს ფინიტური გარდაქმნის საშუალებით. განვიხილოთ ეს ორი მეთოდი.

6.1 სპექტრების განსაზღვრა კორელაციური ფუნქციებით

ვთქვათ მოცემულია სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის $\{X(t)\}$ კორელაციური ფუნქცია $R_{xx}(\tau)$, მაშინ სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია განისაზღვრება კორელაციური ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნით:

$$S_{xx}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \qquad (6.1)$$

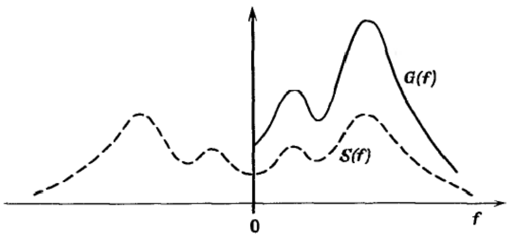
სადაც $S_{xx}(f)$ წარმოადგენს სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციას. ზოგჯერ მას ავტოსპექტრსაც უწოდებენ. $S_{xx}(f)$ ფუნქციის ფურიეს უკუგარდაქმნა გვაძლევს კორელაციურ ფუნქციას:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f)e^{j2\pi f\tau}df \qquad (6.2)$$

(6.1) და (6.2) დამოკიდებულებებს ხშირად ვინერ–ხინჩინის ფორმულებს უწოდებენ.

როგორც (6.1) ფორმულიდან ჩანს სპექტრული სიმკვრივე განისაზღვრება ყველა სიხშირისათვის, როგორც დადებითი ასევე უარყოფითისათვის, ამიტომ მას ორმხრივ სპექტრს უწოდებენ. პრაქტიკულად მოსახერხებელია იმ სპექტრებთან მუშაობა, რომლებიც არაუარყოფითი სიხშირეებისთვისაა განსაზღვრული. ასეთ სპექტრს ეწოდება ცალმხრივი და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$G_{xx}(f)=\begin{cases} 2S_{xx}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, & f\ge 0, \\ 0, \quad f<0 \end{cases}$$



ნახ. 6.1

რადგან კორელაციური ფუნქცია ყოველთვის ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ სპექტრი განისაზღვრება ფურიეს გარდაქმნის მხოლოდ რეალური ნაწილის საშუალებით:

$$G_{xx}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau=4\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

ფურიეს უკუგარდაქმნა გვაძლევს:

$$R_{xx}(\tau)=\int_{0}^{\infty} G_{xx}(f)\cos(2\pi f\tau)df$$

ორი $\{X(t)\}$ და $\{Y(t)\}$ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესის სპექტრული სიმკვრივე განისაზღვრება ურთიერკორელაციური ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნით

$$S_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad ,$$

სადაც $S_{xy}(f)$უწოდებენ ურთიერთსპექტრულ სიმკვრივეს ან ურთიერთსპექტრს. ცალმხრივი სპექტრის დროს გვექნება:

$$G_{xx}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau=4\int_{0}^{\infty} R_{xx}(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$$

სადაც $C_{xy}(f)=2\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\cos(2\pi f\tau)d\tau$ წარმოადგენს ნამდვილ ნაწილს და მას კოსპექტრალური სიმკვრივე ეწოდება ან მოკლედ **კოსპექტრი**, ხოლო წარმოსახვით ნაწილს

$$Q_{xy}(f)=2\int_{-\infty}^{\Re} R_{xy}(\tau)\sin(2\pi f\tau)d\tau$$

ეწოდება კვადრატული სპექტრული სიმკვრივე ან მოკლედ **კვადრატული სპექტრი.**

ურთიერთსპექტრი მოსახერხებელია გამოვსახოთ მოდულისა და ფაზური კუთხის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$G_{xy}(f)=\left|G_{xy}(f)\right|e^{-j\theta_{xy}(f)},$$

სადაც

$$\left|G_{xy}(f)\right|=\sqrt{C_{xx}(f)+Q_{xy}(f)} \quad , \qquad \theta_{xy}(f)=arctg\left[\frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)}\right]$$

ურთიერთსპექტრებისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\left|G_{xy}(f)\right|^2\le G_{xx}(f)G_{yy}(f).$$

კორელაციური ფუნქციების სიმეტრიულობიდან გამომდინარე სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$S_{xx}(-f)=S_{xx}(f),\quad S_{yy}(-f)=S_{yy}(f),\quad S_{xy}(-f)=S_{yx}(f)$$

ე.ი. სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციები ნამდვილი ლუწი ფუნქციებია, ხოლო ურთიერთსპექტრული სიმკვრივე –კომპლექსური ფუნქციაა.

6.2 სპექტრების განსაზღვრა ფურიეს ფინიტური გარდაქმნით

როგორც აღვნიშნეთ, სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრა შესაძლებელია ფურიეს ფინიტური გარდაქმნით. დავუშვათ $\{X(t)\}$ და $\{Y(t)\}$ წარმოადგენენ სტაციონალურ და ერგოდიკულ შემთხვევით პროცესებს. ამ პროცესების T სიგრძის k–ური რეალიზაციისათვის ფურიეს ფინიტურ გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$X_k(f)=X_k(f,T)=\int_0^T x_k(t)e^{-j2\pi ft}dt \;. \qquad Y_k(f,T)=\int_0^T y_k(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

ურთიერთსპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$S_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}M\left[X_k^*(f,T)Y_k(f,T)\right]$$

სადაც $X_k^*(f,T)$ არის $X_k(f,T)$ კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდე. ცალმხრივი სპექტრული და ურთიერთსპექტრული სიმკვრივეები განისაზღვრებიან შემდეგი გამოსახულებებით:

$$G_{xx}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}M\left[\left|X_k(f,T)\right|^2\right],\quad G_{yy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}M\left[\left|Y_k(f,T)\right|^2\right]$$
$$G_{xy}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{2}{T}M\left[X_k^*(f,T)Y_k(f,T)\right] \qquad (6.3)$$

(6.3) ფორმულებით გამოთვლისას გამოიყენება ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის ალგორითმი. რადგან T სიდიდე ყოველთვის სასრულოა და მათემატიკური ლოდინი $M[\bullet]$ აგრეთვე აიღება რეალიზაციის სასრულო რაოდენობიდან, ამიტომ ყველივე ეს იწვევს სპექტრის განსაზღვრის ცდომილებას. აქედან გამომდინარე, საჭიროა შევაფასოდ სპექტრული სიმკვრივრივის ფუნქციები.

6.3 გარდამავალი პროცესების სპექტრული ანალიზი

სტაციონარული პროცესების სპეციალურ კლასს მიეკუთვნება გარდამავალი (იმპულსური) პროცესები, რომლებისთვისაც დამახასიათებელია მოკლე ხანგრძლივობა და ნულისაგან განსხვავდებიან მხოლოდ $[0,T]$ ინტერვალში. განვიხილოთ $\{X(t)\}$ გარდამავალი პროცესის $x(t)$ რეალიზაცია, რომლისთვისაც სრულდება $0\le t\le T$ პირობა. ასეთი $x(t)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნას ექნება შემდეგი სახე:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{0}^{T}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

რადგან ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$\int_{-\infty}^{0}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{T}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=0\,.$$

ამრიგად, იმპულსური პროცესების სპექტრული ანალიზისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ სტაციონარული პროცესების მეთოდები. განვიხილოთ ფუნქცია:

$$W_{xx}(f)=\begin{cases}2M\left[\left|X(f)\right|^2\right], & f\ge 0\\ 0, & f<0\end{cases}$$

რომელსაც ენერგეტიკული სპექტრული სიმკვრივის (ენერგეტიკული სპექტრის) ფუნქციას უწოდებენ. თუ მას შევადარებთ სტაციონარული შემთხვევითი პროცესების სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრის (6.3) ფორმულას, შევამჩნევთ მათ მსგავსობას. ერთადერთი განსხვავება ისაა, რომ $W_{xx}(f)$ განსაზღვრისათვის არაა საჭირო T სიედიდეზე გაყოფა და შემდეგ ზღვარზე გადასვლა, როცა $T\to\infty$.

ეს მოსაზრება სამართლიანია, რადგან გარდამავალი პროცესისათვის, როცა $T\to\infty$, $\left|X(f)\right|^2$ მუდმივი, უცვლელი სიდიდეა. მიუხედავად ამისა, ამ ორი $G_{xx}(f)$ და $W_{xx}(f)$ სიდიდის შეფასება ხდება ერთნაირად. ე.ი. გვექნება:

$$W_{xx}(f)=2\left|X(f)\right|^2=TG_{xx}(f)$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თუ გვაქვს ორი გარდამავალი პროცესის $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაცია, მაშინ:

$$W_{xy}(f)=2X^*(f)Y(f) \ =TG_{xy}(f)$$

სადაც T ყველგან რეალიზაციის სიგრძეა.

როგორც ვხედავთ, ენერგეტიკული სპექტრი სტაციონარული შემთხვევითი პროცესების სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციისაგან განსხვავდება მხოლოდ სამაშტაბო T კოეფიციენტით.

6.4 სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციების შეფასება

ფურიეს ფინიტური გარდაქმნით მიღებული სპექტრული სიმკვრივეების (6.3) გამოსახულებებში თუ უგულვებელყოფთ ზღვრისა და მათემატიკური ლოდინის ნიშნებს მივიღებთ შემდეგ სპექტრულ შეფასებებს:

$$\tilde{G}_{xx}(f)=\frac{2}{T}\left|X(f,T)\right|^2, \quad \tilde{G}_{yy}(f)=\frac{2}{T}\left|Y(f,T)\right|^2, \quad \tilde{G}_{xy}(f)=\frac{2}{T}X^*(f,T)Y(f,T) \qquad (6.4)$$

რომლებიც უზრუნველყოფენ სიხშირის მაქსიმალურ $\Delta f=1/T$ გარჩევის უნარს. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შეფასების დისპერსია, გავიხსენოთ, რომ ფურიეს ფინიტური გარდაქმნა $X(f,T)$ არის კომპლექსური სიდიდე ნამდვილი $X_R(f,T)$ და წარმოსახვითი $X_I(f,T)$ ნაწილებით, რომლებიც წარმოადგენენ არაკორელირებულ შემთხვევით სიდიდეებს ნულოვანი საშუალო მნიშვნელობით და ერთიდაიგივე დისპერსიით. რადგან ფურიეს გარდაქმნა წრფივი ოპერაციაა, ამიტომ, როცა $x(t)$ რეალიზაცია ნორმალურადაა განაწილებული, მაშინ $X_R(f,T)$ და $X_I(f,T)$ სიდიდეებიც იქნებიან აგრეთვე ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები. აქედან გამომდინარე, გამოსახულება

$$\left|X(f,T)\right|^2=X_R^2(f,T)+X_I^2(f,T)$$

წარმოადგენს ორი დამოუკიდებელი სიდიდეების კვადრატების ჯამს და გააჩნია χ^2 განაწილება $\nu=2$ თავისუფლების ხარისხით. განვიხილოთ გამოსახულება:

$$\frac{\tilde{G}_{xx}(f)}{G_{xx}(f)}=\frac{\chi^2}{2} \quad .$$

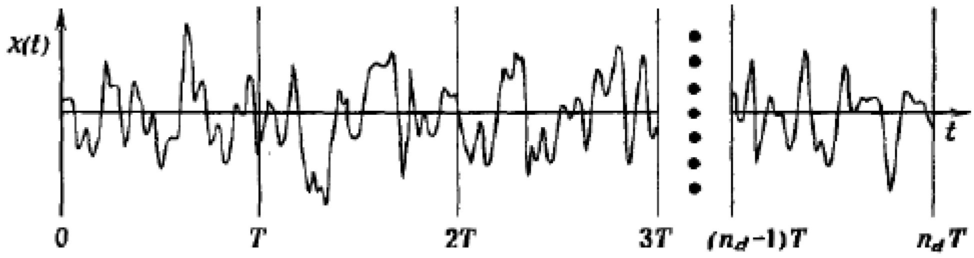
ცნობილია რომ χ^2 განაწილების საშუალო მნიშვნელობა და დისპერსია შესაბამისად ტოლია n და $2n$ მნიშვნელობებისა. მიტომ $\tilde{G}_{xx}(f)$ შეფასების ნორმირებული საშუალო კვადრატული ცდომილება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\varepsilon\left[\tilde{G}_{xx}(f)\right]=\frac{\sigma\left[\tilde{G}_{xx}(f)\right]}{G_{xx}(f)}=\frac{\sqrt{2n}}{n}=\sqrt{\frac{2}{n}}$$

ჩვენ შემთხვევაში n = 2 და ამიტომ $\varepsilon\left[\left|\tilde{G}_{xy}(f)\right|\right]=1$, ე.ი. შეფასების საშუალო კვადრატული ცდომილება შესაფასებელი სიდიდის ტოლია, რაც პრაქტიკული კვლევების უმეტეს შემთხვაში მიუღებულია.

არსებობს სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შემთხვევითი ცდომილების შემცირების რამოდენიმე მეთოდი. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

ინტერვალების გასაშუალება. მოცემული $x(t)$ რეალიზაცია დავყოთ l რაოდენობის T სიგრძის ცალკეულ გადაუკვეთავ ინტერვალებად (ნახ. 6.2)



ნახ. 6.2

თითოეული ინტერვალისათვის განისაზღვრება სპექტრული სიმკვრივის შეფასება და შემდეგ ხდება მათი გასაშუალება. ე.ი. ვღებულობთ შემდეგ გაგლუვებულ მნიშვნელობას:

$$\tilde{G}_{xx}(f)=\frac{2}{lT}\sum_{k=1}^{l}\left|X_k(f,T)\right|^2 , \qquad (6.5)$$

სადაც $T=\Delta t\cdot N$. თავის მხრივ, N სიდიდეზეა დამოკიდებული სიხშირის გარჩევის უნარის ანუ სიხშირული დიაპაზონის სიდიდე $\Delta f=1/T=1/\Delta tN$. რადგან (6.5) გამოსახულების მარჯვენა მხარეს მყოფი ყოველი შეფასება გვაძლევს $\nu=2$ თავისუფლების ხარისხს, ამიტომ მიღებული გასაშუალებულ შეფასებას აქვს შემდეგი ცდომილება:

$$\varepsilon\left[\tilde{G}_{xx}(f)\right]=\sqrt{\frac{2}{2l}}=\sqrt{\frac{1}{l}} \ .$$

როგორც ავტოსპექტრის $\tilde{G}_{xx}(f)$, ასევე ურთიერთსპექტრის $\tilde{G}_{xy}(f)$ შეფასება შეიცავს მიუღებულ შემთხვევით ცდომილებას. პრაქტიკაში ამ შემთხვევით ცდომილებას ამცირებენ ზემოდ განხილული მეთოდით. კერძოდ, T სიგრძის l რაოდენობის ინტერვალებისათვის გამოითვლება ურთიერთსპექტრების შეფასებები და შემდეგ ხდება მათი გასაშუალება რომელიც იძლევა შემდეგ შეფასებას:

$$\tilde{G}_{xy}(f)=\frac{2}{lT}\sum_{k=1}^{l}X_k^*(f,T)Y_k(f,T) \ ,$$

რომლის ნორმირებული საშუალო კვადრატული შეცდომა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\varepsilon\left[\left|\tilde{G}_{xy}(f)\right|\right]=\frac{1}{\left|\tilde{\gamma}_{xt}(f)\right|\sqrt{l}}$$

სადაც $\left|\gamma_{xy}(f)\right|$ არის კვადრატული ფესვი კოჰერენტული ფუნქციიდან.

სიხშირული გასაშუალება. თუ სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია მიღებულია შემთხვევითი პროცესის მოკლე რალიზაციიდან, მაშინ შემთხვევითი ცდომილების შემცირება შესაძლებელია q რაოდენობის მეზობელი სიხშირეების გასაშუალები|თ.:

$$\tilde{G}_{xx}(f_k)=\frac{1}{q}\left[\tilde{G}_{xx}(f_k)+\tilde{G}_{xx}(f_{k+1})+\cdots+\tilde{G}_{xx}\left(f_{k+q-1}\right)\right] \ ,$$

რომელსაც გააჩნია χ^2 განაწილება $\nu=2q$ თავისუფლების ხარისხით. ამ შემთხვევაში ნორმირებული საშუალო კვადრატული შეცდომა ტოლია:

$$\varepsilon\left[\tilde{G}_{xx}(f)\right]=\sqrt{\frac{1}{q}}\,.$$

შესაძლებელია კომბინირებული ან ორივე მეთოდის , ინტერვალების და სიხშირული გასაშუალების, ერთდროული გამოყენება. მაშინ ნორმირებული საშუალო კვადრატული შეცდომა ტოლია:

$$\varepsilon\left[\tilde{G}_{xx}(f)\right]=\sqrt{\frac{1}{ql}}$$

სპექტრების შეფასება ფურიეს გარდაქმნის მეთოდით. ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის ალგორითმის შემოღების შემდეგ ძალზედ გაადვილდა სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციების განსაზღვრა ფურიეს ფინიტური გარდაქმნის საშუალებით, როცა $x(t)$ რეალიზაცია წარმოდგენილია დისკრეტული თანმიმდევრობის სახით $x(n\Delta t),\ n=1,2,\ldots..,N$. ფურიეს ფინიტური გარდაქმნა გვაძლევს სპექტრული სიმკვრივის მნიშვნელობებს შემდეგი დისკრეტული სიხშირეების დროს:

$$f_k=\frac{k}{T}=\frac{k}{\Delta tN}\,,\quad k=0,1,2,\ldots..,N-1$$

ამასთან, თითოეული ინტერვალისათვის ფურიეს კოეფიციენტები განისაძღვრებიან შემდეგნაირად:

$$X_i(f_k)=\Delta tX_{ik}=\Delta t\sum_{n=0}^{N-1}x_i(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{6.6}$$

რაც შეეხება ურთიერთსპექტრის განსაზღვრას იგი შეიძლება მივიღოთ ორი გზით: 1) ცალცალკე განვსაზღვროთ ორივე $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციებისათვის ფურიეს კოეფიციენტები (6.6) ფორმულით და შემდეგ გამოვიყენოთ (6.4) ფორმულა. 2) ორი რეალიზაციის ფურიეს გარდაქმნა შეიძლება მივიღოთ ერთდროულად, თუ ერთ რეალიზაციას წარმოვადგენთ როგორც ნამდვილს, ხოლო მეორეს – წარმოსახვით ნაწილებად რაიმე, ვთქვათ $z(n)$ კომპლექსური რეალიზაციისათვის. ე.ი. გვექნება:

$$z(k)=x(n)+jy(n),\quad n=0,1,2,\ldots.,N-1\,,$$

მაშინ ფურიეს გარდაქმნა გვაძლევს:

$$Z(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[x(n)+jy(n)\right]e^{-j\frac{2\pi kn}{N}},\quad k=0,1,2,\ldots.,N-1 \tag{6.7}$$

რომელიც შეიძლება განისაზღვროს ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის მეთოდით. $X(k)$ და $Y(k)$ ფუნქციების მისაღებად შევნიშნოთ, რომ $e^{j\frac{2\pi n(N-k)N}{}}=e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$, რადგან $e^{j2\pi n}=1$ ნებისმიერი n –სათვის. აქედან გამომდინარე, კომპლექსურად შეუღლებული ფუნქცია ტოლია:

$$Z^*(N-k)=\sum_{n=0}^{N-1}\left[v(n)-jy(n)\right]e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}\,,$$

რომელსაც საბოლაოდ მივყევართ შემდეგ გამოსახულებებდნენ:

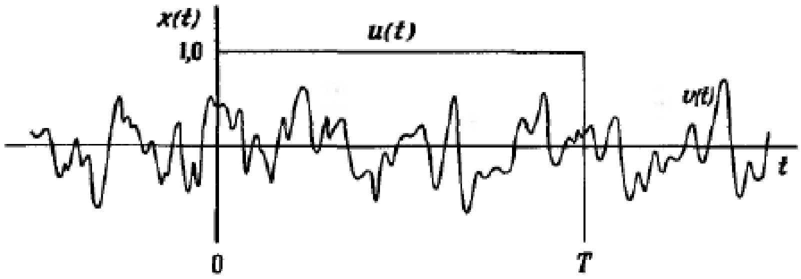
$$X(k)=\frac{1}{2}\big(Z(k)+Z(N-k)\big),\qquad Y(k)=\frac{1}{j2}\big(Z(k)-Z(N-k)\big),\quad k=0,1,2,\ldots.,N-1 \tag{6.8}$$

6.5 სპექტრის ენერგიის გაჟონვის ჩახშობის მეთოდები

$x(t)$ რეალიზაციის ფურიეს ფინიტური გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ როგორც $V(t)$ ფუნქციის გარდაქმნა უსასრულო ინტერვალზე, გამრავლებული ე.წ. მართკუთხა „დროით ფანჯარაზე" რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$U(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le Y\\ 0, & t,<0,\ t>T\end{cases}$$

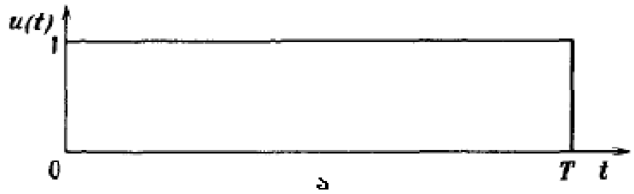
სხვა სიტყვებით, რეალიზაცია $x(t)$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ნამრავლი $x(t)=U(t)V(t)$



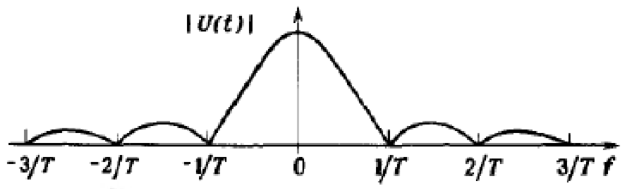
მართკუთხა $U(t)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$U(f)=T\left(\frac{\sin(2\pi\ fT)\pi\ fT}{\pi\ fT}\right)e^{-j\pi\ fT} \qquad (6.9)$$

და მისი გრაფიკული გამოსახულება წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



ა



ბ

როგორც ნახაზიდან ჩანს, $|U(f)|$ გამოსახულებას გააჩნია გვერდითი რხევები, რომლებიც იწვევენ სპექტრული სიმკვრივის ენერგიის გაჟონვას, რაც იწვევს სპექტრის მნიშვნელოვან დამახინჯებას. განვიხილოთ გაჟონილი ენერგიის ჩახშობის მეთოდები.

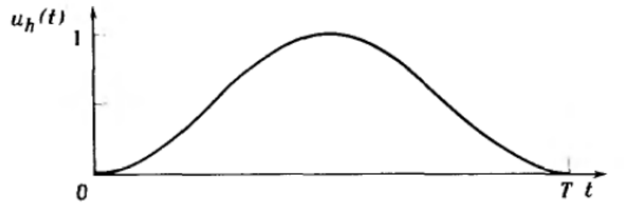
დროით გაგლუვება. სპექტრის ენერგიის გაჟონვის ჩასახშობად პრაქტიკაში იყენებენ დროით ფანჯრებს, რომლებიც საწყის რეალიზაციას ისე აგლუვებენ, რომ ჩაიხშოს $[0,T]$ ინტერვალის საწყის და ბოლოში არსებული მკვეთრი ცვალებადობები. არსებობს მრავალი „ფანჯარა" , მათ შორის ყველაზე უფრო გამოიყენება ე.წ. კოსინუსოიდალური ანუ, როგორც მას უწოდებენ ჰანის ფანჯარა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

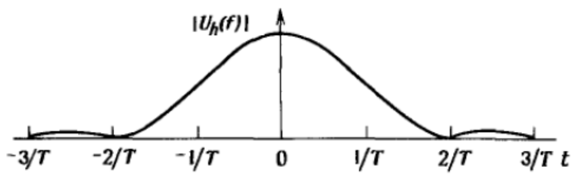
$$U_h(t) = 0{,}5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right) = 1-\cos^2\left(\frac{\pi t}{T}\right), \quad 0 \le t \le T$$

ჰანის ფანჯრის ფურიეს გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$U_h(f) = \frac{1}{2}U(f) - \frac{1}{4}U(f - f_1) - \frac{1}{4}U(f + f_1),$$

სადაც $1/T$, $U_h(f)$ განისაზღვრება (6.8) ფორმულით. ჰანის ფანჯრის დროითი და სპექტრული ფუნქციები წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:





აღმოჩნდა, რომ ჰანის ფანჯრის გამოყენებით სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის გამოთვლისას დანაკარგები ნებისმიერი

$$f_k = k/T, \quad k = 0,1,2,....,N/2$$

სიხშირისათვის გამოდის 3/8 სიდიდის ტოლია. ამიტომ , სპექტრული შეფასება, რომელიც განისაზღვრება (6.6) ფორმულით უნდა გავამრავლოთ სამაშტაბო კოეფიციენტზე $\sqrt{8/3}$, მაშინ მივიღებთ:

$$X_i(f_k) = \Delta t\sqrt{\frac{8}{3}}\sum_{n=0}^{N-1} x_i(n)\left(1-\cos^2\left(\frac{\pi n}{N}\right)\right)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{6.10}$$

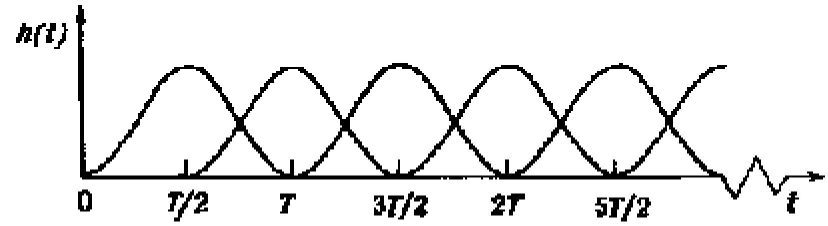
სადაც $f_k = \dfrac{k}{\Delta t}, \quad k = 0,1,2,....,\dfrac{N}{2}$.

მფარავი ინტერვალების მეთოდი. აღსანიშნავია, რომ სპექტრული ფანჯრის გვერდითი რხევებიდან ენერგიის გაჟონვის ჩახშობა იწვევს ფანჯრის მთავარი მაქსიმუმის სიგანის ზრდას, რასაც მივყევართ სიხშირის გარჩევის უნარის შემცირებასთან. ჰანის ფანჯრის გამოყენებისას გატარების ზოლის სიგანე, განსხვავებული ენერგიის დონის მიხედვით, იზრდება 60%–ით. ჩვეულებრივ, გარჩევის უნარის ასეთი გაუარესება კომპენსირდება გაჟონვის ენერგიის ჩახშობით ყველა იმ სიხშირეებისათვის , რომლებიც განლაგებულნი არიან მთავარი მაქსიმუმის გარეთ. ამასთან ერთად, დროით გაგლუვებას მივყავართ სპექტრულ შეფასებათა ცვალებადობის ზრდასთან. თუ საწყის რეალიზაციას გააჩნია სიხშირით მუდმივი სპექტრი, მაშინ ჰანის ფანჯრით რეალიზაციის გაგლუვება ზრდის სპექტრის შეფასების დისპერსიას დაახლოებით ორჯერ ანუ სპექტრული სიმკვრივის შეფასების ცდომილება, რომელიც ჰანის ფანჯრის გამოყენებითაა განპირობებული, არის $\varepsilon = \sqrt{2/l}$ და არა $\varepsilon = \sqrt{1/l}$.

იმისათვის, რომ დროით გაგლუვების ხარჯზე შევამციროთ შეფასების ცვალებადობის ზრდა, ზოგჯერ უმჯობესია გამოვიყენოთ ურთიერთმფარავი მონაკვეთთა ანალიზის მეთოდი. ამ დროს საწყისი რეალიზაცია $x(t)$ იყოფა არა l რაოდენობის დამოუკიდებელ მონაკვეთებად $x_i(t)$, $(i-1)\le t \le iT$, $i=1,2,....,N$, არამედ მფარავ ინტერვალებად:

$$[q(i-1)]T \le t \le [q(i-1)+1]T\ ,\ \ i=1,2,....., l/q\ ,\ \ q<1\ .$$

როგორც წესი, q –ს მნიშვნელობას იღებენ 0,5 სიდიდის ტოლად, რასაც მივყავართ მონაკვეთთა 50%-იან გადაფარვისაკენ, როგორც ეს შემდეგ ნახაზზეა წარმოდგენილი:



ეს მეთოდი გვაძლევს საშუალებას 90%-მდე აღვადგინოთ შეფასების მდგრადობა, რომელიც დროით გაგლუვების დროს იკარგება. მეთოდის ნაკლი იმაში მდგომარეობს, რომ ფურიეს გარდაქმნათა რიცხვი ორჯერ იზრდება.

6.6 სპექტრების ექვივალენტობის ჰიპოთეზის შემოწმება

განვიხილოთ სპექტრული სიმკვრივეების ორი შეფასება $\tilde{G}_1(f)$ და $\tilde{G}_2(f)$, რომლებიც მიღებულია სხვადასხვა პირობებში, მაგალითად ორი განსხვავებული რეალიზაციით ან ერთი და იგივე რეალიზაციის ორ განსხვავებულ ინტერვალზე. საჭიროა განისაზღვროს ექვივალენტურია თუ არა სტატისტიკური აზრით ეს ორი სპექტრი ერთი და იგივე (f_a, f_b)სიხშირეთა ზოლში , რომლის სიგანეა $B = f_b - f_a$.

დაუშვათ , რომ სპექტრები გამოთვლილია Δf სიხშირული გარჩევის უნარის დროს, ისე რომ B სპექტრის სიგანე დაიყო N_f ზოლებად, ანუ $N_f = B/\Delta f$. ჩავთვალოთ, რომ გასაშუალებათა რიცხვი ორივე სპექტრისათვის შესამისად l_1 და l_2 ტოლია და ამასთან გასაშუალების დრო ყოველი შეფასებისათვის შეიძლება იყოს განსხვავებული, თუმცა სიხშირის გარჩევის უნარი იქნება ერთნაირი.

$H_0 : \tilde{G}_1(f) = \tilde{G}_2(f)$ ნულოვანი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად განვიხილოთ შემდეგი სტატისტიკა:

$$D^2 = \left[\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right]^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left[\log \frac{\tilde{G}_1(f)}{\tilde{G}_2(f)}\right]^2 ,$$

რომელსაც გაჩნია χ^2 განაწილება $\nu = N_f$ თავისუფლების ხარისხით. ν და α მნიშვნელობების დონის მიხედვით χ^2 განაწილების ცხრილიდან მოიძებნება $\chi_{\alpha;\nu}$ კრიტიკული მნიშვნელობა. თუ აღმოჩნდება , რომ $D^2 < \chi_{\alpha;\nu}$, მაშინ არ

არის საფუძველი ნულოვანი ჰიპოთეზის უარსაყოფად ე.ი სპექტრები ექვივალენტურნი არიან. თუ $D^2 \geq \chi_{\alpha;\nu}$, მაშინ ნულოვანი ჰიპოთეზა უარყოფილია და სპექტრები არაექვივალენტურნი არიან.

თუ აღმოჩნდება, რომ სპექტრული სიმკვრივეების შეფასებები $\widetilde{G}_1(f)$ და $\widetilde{G}_2(f)$, ექვივალენტურნი არიან, მაშინ შესაძლებელია მათი გაერთიანება

$$\widetilde{G}_p(f) = \frac{l_1\widetilde{G}_1(f) + l_2\widetilde{G}_2(f)}{l_1 + l_2} \tag{6.10}$$

რომლის შემთხვევითი ცდომილება ტოლია: $\varepsilon = \left[\widetilde{G}_p(f)\right] = 1/\sqrt{l_d}$, სადაც $l_d = l_1 + l_2$

(6.10) ფორმულა ადვილად შეიძლება განვაზოგადოთ q რაოდენობის სპექტრებისათვის.

6.7 სპექტრული ანალიზის ჩატარების რეკომენდაციები

ჩამოვაყალიბოთ ზოგადი სახის რეკომენდაციები:

1) სპექტრული ანალიზის ჩატარებისას აუცილებელია მოცემული სტაციონარული დისკრეტული მწკრივის $x(n),\ n = 1,2,.....,N$ ცენტრირება $\widetilde{x}_i = x_i - \bar{x}$, სადაც $\bar{x}$ საშუალო არითმეტიკულია. ეს გამოწვეულია იმით, რომ დისკრეტული სიგნალის რეალიზაციიდან გამოირიცხოს დაბალი სიხშირის მდგენელი, რომელიც შეიძლება გამოწვეული იყოს როგორც ტრენდის არსებობით, ასევე გამზომი ხელსაწყოს იზოხაზის დრეიფით ან სულაც გარეშე, გაუთვალისწინებელი ფაქტორის ზეგავლენით.

2) ცენტრირების პროცესი მიუღებელია გარდამავალი (იმპულსური) პროცესებისათვის, რადგან $[0, T]$ ინტერვალის გარეთ გვექნება არა ნულოვანი მნიშვნელობები, არამედ საშუალო არითმეტიკულის ტოლი მუდმივი სიდიდე, რაც გამოიწვევს სპექტრის დამახინჯებას.

3) სტაციონარული დროითი მწკრივების კორელაციურ-სპექტრული ანალიზის ჩასატარებლად მიზანშეწონილია რეალიზაციიდან გამოირიცხოს ტრენდი, რომელიც იწვევს ანალიზის შედეგების დამახინჯებას. მაგრამ, თუ საჭიროა პროგნოზირების ამოცანის გადაწყვეტა, მაშინ პირიქით, რეალიზაციიდან უნდა გამოვყოთ ტრენდი და მისი საშუალებით მოვახდინოთ პროგნოზირება.

4) ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის გამოყენებისას დროითი მწკრივის რეალიზაციის სიგრძე N ისე უნდა შევარჩიოთ, რომ იგი ტოლი იყოს 2^p სიდიდისა, სადაც p მთელი დადებითი რიცხვია. თუ ეს პირობა არ სრულდება, მაშინ რეალიზაციის სიგრძე უნდა შევამციროთ ან დაუმატოთ ნულები.

ზემოთ მოყვანილი მოსაზრებების მხედველობაში მიღების შემდეგ ჩამოვაყალიბოთ სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრის შემდეგი ალგორითმი:

1. მოცემული დისკრეტული სიგნალის რეალიზაცია $x(n),\ n=1,2,....,N$ იყოფა n_d რაოდენობის ტოლი სიგრძის ინტერვალებად, რომლებიც შეიცავენ N რაოდენობის ანათვლებს $(N=2^p)$;

2. თითოეული ინტერვალისათვის ჰანის ფანჯრის საშუალებით მოვახდინოთ მონაცემების გაგლუვება. შეიძლება გამოვიყენოთ სხვა დროითი ფანჯრები;

3. თითოეული ინტერვალისათვის ფურიეს სწრაფი გარდაქმნით (6.8) ფონმული საშუალებით გამოითვლება $X(f_k),\ k=0,1,2,...,N/2$ კოეფიციენტები;

4. $X(f_k)$ მნიშვნელობები უნდა გავამრავლოთ სამაშტაბო კოეფიციენტზე, რათა გამოვრიცხოთ დროითი ფანჯრის მიერ გამოწვეული ცვლილებები (თუ ვიყენებთ ჰანის ფანჯარას, მაშინ ეს კოეფიციენტი ტოლია $\sqrt{8/3}$ სიდიდისა);

5. (6.5) ფორმულით ვღებულობთ ცალმხრივი სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შეფასებას;

ანალოგიურად შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ ურთიერთსპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის განსაზღვრის ალგორითმი;

1. მოცემული დისკრეტული სიგნალების $x(n),\ y(n),\ \ n=1,2,....,N$ რეალიზაციები დავყოთ n_d რაოდენობის ინტერვალებად, რომლებიც შეიცავენ N რაოდენობის ანათვლებს $(N=2^p)$;

2. ჰანის ფანჯრის საშუალებით თითოეული ინტერვალისათვის მოვახდინოთ დროითი გაგლუვება;

3. გაგლუვებული x_i მნიშვნელობები ჩავწეროთ როგორც ნამდვილი რიცხვები, ხოლო გაგლუვებული y_i მნიშვნელობები – როგორც წარმოსახვითი $z_i=x_i+jy_i$, $i=0,1,2,...,N-1$.

4. თითოეული ინტერვალისათვის ფურიეს სწრაფი გარდაქმნით (6.7) ფორმულით განისაზღვრება $Z(f_k),\ k=0,1,2,...,N-1$ მნიშვნელობები;

5. თითოეული ინტერვალისათვის (6.8) ფორმულებით განისაზღვრება $X(f_k),Y(f_k),\ \ k=0,1,2,...,N/2$ სიდიდეები;

6. $X(k)$ და $Y(k)$ მნიშვნელობები მრავლდება სამაშტაბო კოეპიციენტზე (ჰანის ფანჯრის შემთხვევაში იგი ტოლია $\sqrt{8/3}$ სიდიდისა);

7. ყოველი წყვილი ინტერვალისათვის განისაზღვრება გაუგლუვებელი ცალმხრივი ურთიერთსპექტრული სიმკვრივეები

$$S_{xy}(f_k)=\frac{2}{\Delta tN}\left[X^*(f_k)Y(f_k)\right],\quad k=0,1,2,....,N-1.$$

8. გაუგლუვებელი $S_{xy}(f_k),\ k=0,1,2,....,N-1$ მნიშვნელობების საშუალებით მივიღებთ გაგლუვებულ მნიშვნელობებს

$$\tilde{G}_{xy}(f_k),\quad k=0,1,2,....,N/2$$

შენიშვნა. ურთიერთსპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს სხვანაირადაც. კერძოდ, თითოეული დისკრეტული სიგნალისათვის განისაზღვროს სპექტრული სიმკვრივის ფუნქცია და შემდეგ ურთიერთსპექტრული სიმკვრივე შეგვიძლია განვსაზღვროდ (6.4) ფორმულით.

6.8 გადაცემის და კოჰერენტული ფუნქციების შეფასებები

გადაცემის ფუნქციის შეფასება. განვიხილოთ მუდმივპარამეტრიანი $h(n)$ იმპულსური მახასიათებლის მქონე წრფივი დისკრეტული სისტემა ერთი შესასვლელით და ერთი გამოსასვლელით. დაუშვათ, შესასვლელზე მიეწოდება ცენტრირებული ერგოდიკული სტაციონალური შემთხვევითი პროცესის $x(t)$ რეალიზაცია, რომელიც წრფივი სისტემის გამოსავალზე იძლევა $y(t)$ რეალიზაციას. როგორც ცნობილია იმპულსური მახასიათებლის ფურიეს გარდაქმნა გვაძლევს სისტემის გადაცემ $H(f)$ ფუნქციას. ე. ი.

$$H(f)=\sum_{m=0}^{\infty}h(m)e^{-j2\pi fm} .$$

მეორეს მხრივ, გადაცემის ფუნქცია შეიძლება მივიღოთ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციების სპექტრული სიმკვრივეების $G_{xx}(f), G_{yy}(f)$ და ურთიერთსპექტრული სიმკვრივის ფუნქციების $G_{xy}(f)$ საშუალებით, რომელთა შორის არსებობს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$G_{yy}(f)=\left|H(f)\right|^2 G_{xx}(f), \qquad G_{xy}(f)=H(f)G_{xx}(f) \tag{6.11}$$

საიდანაც

$$H(f)=\frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} \tag{6.12}$$

გადაცემის $H(f)$ ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვადგინოთ პოლარულ კორდინაციებში შემდეგნაირად:

$$\widetilde{H}(f)=\left|\widetilde{H}(f)\right|e^{-j\widetilde{\phi}(f)}$$

სადაც $\left|H(f)\right|$ – ამპლიტუდური, ხოლო $\phi(f)$ – ფაზური მახასიათებლების შეფასებებია, რომლებიც განსაზღვრულნი არიან

$$f_k=\frac{k}{\Delta t}\,, \quad k=0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}$$

სიხშირეებზე და განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$\left|\widetilde{H}(f_k)\right|=\frac{\left[\widetilde{C}_{xy}^2(f_k)+\widetilde{Q}_{xy}^2(f_k)\right]^{1/2}}{\widetilde{G}_{xx}(f_k)} \quad , \qquad \widetilde{\phi}(f_k)=arctg\left[\frac{\widetilde{Q}_{xy}(f_k)}{\widetilde{C}_{xy}(f_k)}\right],$$

სადაც $\widetilde{G}_{xx}(f_k)$–სპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შეფასებაა, $\widetilde{C}_{xy}(f_k)$ და $\widetilde{Q}_{xy}(f_k)$–ურთიერთსპექტრული სიმკვრივის ფუნქციის შეფასების ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილებია.

გადაცემის ფუნქციის ამპლიტური მახასიათებლის ნორმირებული შემთხვევითი შეცდომა დაახლოებით ტოლია ფაზური მახასიათებლის საშუალო კვადრატული გადახრისა და განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით:

$$\varepsilon\left[\left|\widetilde{H}(f)\right|\right]=\sigma\left[\widetilde{\phi}_{xy}(f)\right]=\frac{\left[1-\gamma_{xy}^2(f)\right]^{1/2}}{\left|\gamma_{xy}(f)\right|\sqrt{2l}}\,,$$

სადაც – $\widetilde{\gamma}_{xy}^{2}(f)$ კოჰერენტული ფუნქციის შეფასებაა, l - სპექტრული მახასიათებლების გასაშუალების რაოდენობაა.

კოჰერენტული ფუნქციის შეფასება. თუ (6.12) გამოსახულებას ჩავსვამთ (6.11) ფორმულაში, მაშინ მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$\left|G_{xy}(f)\right|^{2}=G_{xx}(f)G_{yy}(f),$$

რომელიც საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ ნამდვილის სიდიდე:

$$\gamma_{xy}^{2}(f)=\frac{\left|G_{xy}(f)\right|}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)}$$

რომელსაც კოჰერენტული ფუნქცია ეწოდება. ყოველი f–ისათვის კოჰერენტული ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობას:

$$0\leq\gamma_{xy}^{2}(f)\leq 1.$$

უნდა აღინიშნოს, რომ **კოჰერენტული ფუნქცია კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატის ანალოგიურია.** ე.ი. როდესაც სიხშირის რაღაც მნიშვნელობისათვის $\gamma_{xy}^{2}(f)=0$, მაშინ ამბობენ, რომ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციები მოცემულ f სიხშირეზე არაკოჰერენტული ანუ არაკორელირებულნი არიან. თუ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციები სტატისტიკურად დამოუკიდებელნი არიან ყველა f სიხშირის მნიშვნელობისათვის, მაშინ $\gamma_{xy}^{2}(f)=0$. როდესაც სიხშირის ყველა მნიშვნელობისათვის $\gamma_{xy}^{2}(f)=1$, მაშინ ამბობენ, რომ $x(t)$ და $y(t)$ ფუნქციები სრულად კოჰერენტული არიან.

ზოგადად, ორი ნებისმიერი $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციებისათვის ყოველთვის შეიძლება განისაზღვროს კოჰერენტული ფუნქციის შეფასება თუ ცნობილია $\widetilde{G}_{xx}(f), \widetilde{G}_{yy}(f)$ და $\widetilde{G}_{xy}(f)$ სპექტრული სიმკვრივეების შეფასებები. ამასთან, კოჰერენტული ფუნქციის მნიშვნელობა გვიჩვენებს ერთი რეალიზაციის მეორე რეალიზაციასთან წრფივი სიხშირული დამოკიდებულების ხარისხს.

კოჰერენტული ფუნქციის შეფასების ნორმირებული შემთხვევითი შეცდომა განისაზღვრება ფორმულით:

$$\varepsilon\left[\widetilde{\gamma}_{xy}^{2}(f)\right]=\frac{\sqrt{2}\left[1-\gamma_{xy}^{2}(f)\right]}{\left|\gamma_{xy}^{2}(f)\right|\sqrt{l}}.$$

როგორც ფორმულიდან ჩანს, $\varepsilon\left[\gamma_{xy}^{2}(f)\right]\to 0$ როცა $l\to\infty$ ან $\gamma_{xy}^{2}(t)\to 1$. თუ $\gamma_{xy}^{2}(f)$–ის მნიშვნელობები ახლოსაა ერთთან, მაშინ ნებისმიერი $n_d>1$–ისათვის კოჰერენტული ფუნქციის შეფასება შეიძლება აღმოჩნდეს უფრო ზუსტი, ვიდრე მისი განსაზღვრისათვის გამოყენებული სპექტრული სიმკვრივეების შეფასებები.

$l>1$ შეზღუდვა ნათელია, რადგან, როცა $l=1$, მაშინ ყველა სიხშირისათვის $\gamma_{xy}^{2}(f)=1$, ანუ ამ შემთხვევის შესაბამისი კოჰერენტული ფუნქციის შეფასება უაზრობაა. მართლაც, თუ

$$G_{xx}(f)=\frac{2}{T}\left|X(f,T)\right|^2=\frac{2}{T}X^*(f,T)X(f,T)$$
$$G_{yy}(f)=\frac{2}{T}Y^*(f,T)Y(f,T),\ G_{xy}(f)=\frac{2}{T}X^*(f,T)Y(f,T)$$

მაშინ გვექნება:

$$\gamma_{xy}^2(f)=\frac{\left[\frac{2}{T}X^*(f.T)Y(f.T)\right]\left[\frac{2}{T}X^*(f,T)Y(f,T)\right]}{\left[\frac{2}{T}X^*(f,T)X(f,T)\right]\left[\frac{2}{T}Y^*(f,T)Y(f,T)\right]}=$$
$$=\frac{X(f,T)Y^*(f,T)X^*(f,T)Y(f,T)}{X^*(f,T)X(f,T)Y^*(f,T)Y(f,T)}=1$$

მუდმივპარამეტრიანი წრფივი იდეალური სისტემისათვის $\gamma_{xy}^2(f)=1$, ხოლო თუ $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციები დამოუკიდებელნი არიან, მაშინ ყველა f სიხშირისათვის $\gamma_{xy}^2(f)=0$. თუ კოჰერენტული ფუნქცია ნულზე მეტია და ერთზე ნაკლები, მაშინ შეიძლება გვქონდეს შემდეგი ოთხი შემთხვევა:

– გაზომვებში მონაწილეობს გარეშე ხმაური;
– სპექტრების შეფასებები გადაადგილებადი არიან;
– სისტემა, რომელიც აკავშირებს $x(t)$ და $y(t)$ რეალიზაციებს არაწრფივია;
– სისტემის გამოსავალი $y(t)$ დამოკიდებულია არა მარტო შემავალ $x(t)$ რეალიზაციაზე, არამედ სხვა პროცესზე ან პროცესებზე.

7. ციფრული ფილტრები

7.1 ძირითადი ცნებები და განმარტებები

ბუნებაში არსებულ სიგნალებთან შედარებით ბიოსიგნალების უმეტესობა წარმოადგენს მცირე სიდიდის სიგნალებს. ბიოსიგნალისათვის ნებისმიერი სხვა სიგნალი წარმოადგენს დაბრკოლებას, არტეფაქტს ან უბრალოდ ხმაურს. ხმაური შეიძლება აღმოჩნდეს ბიოსიგნალზე უფრო მაღალი როგორც ამპლიტუდით, ასევე სიხშირით, რაც ზოგჯერ შეუძლებელს ხდის ხმაურიდან სასარგებლო სიგნალის გამოყოფას. აქედან გამომდინარე, სიგნალის ფილტრაციისათვის მეტად მნიშვნელოვანია წინასწარ ვიცოდეთ ბიოსიგნალისათვის დამახასიათებელი ხმაურის შესახებ.

ზოგადად ხმაური შეიძლება დავყოთ შემთხვევით, სტრუქტრურებულ და ფიზიოლოგიურ ხმაურებად. **შემთხვევითი ხმაური** გამოწვეულია ბიოსიგნალზე გაუთვალისწინებელი ზემოქმედებით, მაგალითად როგორიცაა ელექტრული მოწყობილობის თბური ხმაური, რომელსაც იწვევს მოწყობილობის ელემენტების გადახურება; ელექტრომაგნიტური ველით გამოწვეული ხმაური და სხვა. როგორც ცნობილია, ბიოსიგნალის საშუალო მნიშვნელობა წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს, საშუალო კვადრატული – საშუალო სიმძლავრეს, ხოლო

კვადრატული ფესვი საშუალო კვადრატული მნიშვნელობიდან გვაძლევს ხმაურის საშუალო ამპლიტუდას ანუ მის დონეს. ეს მაჩვენებლები სასარგებლოა სიგნალი–ხმაურის ფარდობის განსაღზვრისათვის.

სტრუქტურული ხმაური. ქსელის სიხშირე წარმოადგენს სტრუქტურირებულ ხმაურს. მაგალითად, ელექტროკარდიოგრაფიულ სიგნალზე ზოგჯერ ხდება ქსელური სიხშირის (50 ჰც) ზედდება. ამ ხმაურის ტიპიური ფორმა წინასწარ ცნობილია, მაგრამ უნდა აღინიშნოს, რომ ტალღების ფაზები ჩვეულებრივ უცნობია. უფრო მეტიც, ტალღა შეიძლება არ იყოს სინუსოიდის ფორმის.

ფიზიოლოგიური ხმაური. როგორც ცნობილია, ადამიანის ორგანიზმი წარმოადგენს ფიზიოლოგიური პროცესების რთულ კოლგომერანტს. ყველა ეს პროცესი წარმოქმნის სხვადასხვა სახის სიგნალებს, რომლებიც გარკვეულ ზემოქმედებას ახდენენ ბიოსიგნალზე და იწვევენ მის დამახინჯებას. ამრიგად, ყველა წარმოქმნილი სიგნალი, გარდა გამოსაკვლევი სიგნალისა, წარმოადგენენ ამ სიგნალის მიმართ არტეფაქტებს. ასე მაგალითად:

– ელექტრომიოგრაფიული სიგნალი წარმოადგენს ელექტრიკარდიოგრაფიული (ეკგ) სიგნალისათვის ხმაურს, რომელიც გამოწვეულია პაციენტის ხველებით, სუნთქვით, დაძაბულობით და სხვა ფაქტორებით;

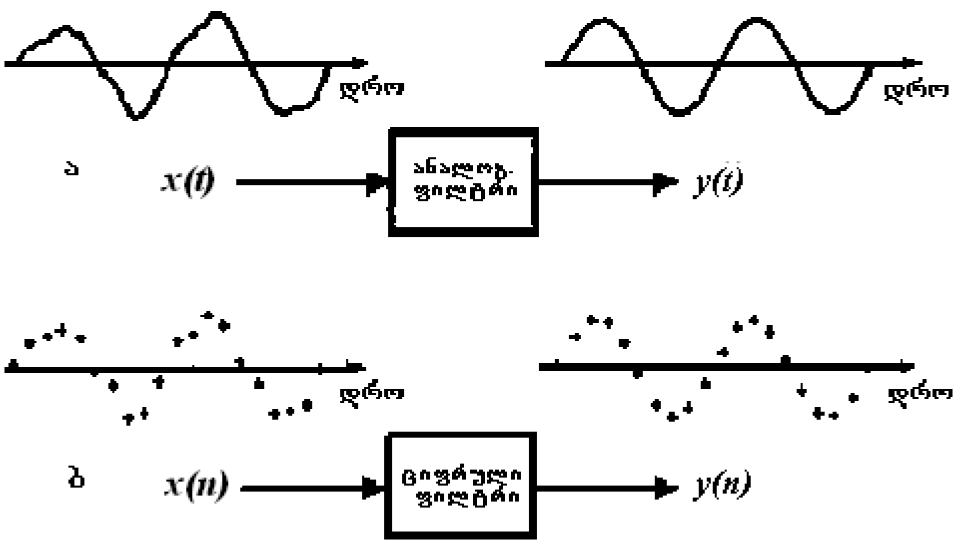
– დედის ეკგ სიგნალი, რომლის ზედდება ხდება ნაყოფის ეკგ სიგნალზე;

– ელექტროენცეფალოგრაფიულ სიგნალზე ეკგ სიგნალის ზედდება;

– ელექტროენცეფალოგრაფიულ სიგნალზე გამოწვეული პოტენციალების ზედდება და სხვა.

ფიზიოლოგიური ხმაური არ შეიძლება დავახასიათოდ რაიმე სპეციფიური ფორმის ტალღებით ან სპექტრული შემადგენლობით და როგორც წესი, ისინი წარმოადგენენ დინამიურ და არასტაციონარულ პროცესებს. აქედან გამომდინარე, მარტივი წრფივი ფილტრების გამოყენება არ იძლევა ფიზიოლოგიური ხმაურის ეფექტური მოხსნის შესაძებლობას.

ბიოსიგნალიდან ზემოდ განხილული არტეფაქტების გამოსარიცხავად გამოიყენება ფილტრები. სიტყვა **„ფილტრი“** წარმოიშვა ელექტროტექნიკაში, სადაც ფილტრებს იყენებდნენ ელექტრული სიგნალების ერთი ფორმიდან მეორეში გარდაქმნისათვის, ძირითადად სხვადასხვა სიხშირეების გამოსარიცხავად. სიტყა **„ფილტრაცია“** წაროადგენს დროით სფეროში სიგნალების დამუშავების ოპერაციას, რომლის შედეგად იცვლება საწყისი სიგნალის სპექტრული შემადენლობა. შეცვლაში იგულისხმება სიგნალში არსებული არასასურველი სიხშირული კომპონენტების შესუსტება ან ჩახშობა. ფილტრები ატარებენ სიგნალის განსაზღვრულ კომპონენტებს და ამავე დროს ასუსტებენ სხვა კომპონენტებს. ნახ. 7.1 ნაჩვენებია როგორც ანალოგური, ასევე ციფრული ფილტრაციის პროცესის ვერსიები.



ნახ. 7.1

ფილტრები შეიძლება იყოს ანალოგური და ციფრული. ანალოგური ფილტრი არსებობს ორი სახის: პასიური და აქტიური. პასიური ფილტრები შედგება მხოლოდ წინაღობის, ინდუქტიობის და ტევადობის ელემენტებისაგან. აქტიური ფილტრები, გარდა ზემოდ ჩამოთვლილი ელემენტებისა, შეიცავენ აქტიურ ელემენტს – ოპერაციულ მაძლიერებელს. უპირატესობას ანიჭებენ აქტიურ ფილტრებს. თუ ანალოგური ფილტრი ამუშავებს უწყვეტ სიგნალებს (ნახ.7.1ა), მაშინ ციფრული ფილტრები ამუშავებენ დისკრეტული თანმიმდევრობის ანათვლებს (ნახ. 7.1ბ).

ციფრული ფილტრები წარმოადგენენ კომპიუტერულ პროგრამას და ანალოგური ფილტრებისაგან განსხვავებით გააჩნიათ მთელი რიგი უპირატესობები. პირველ რიგში, მათ გააჩნიათ მაღალი მდგრადობა სხვადასხვა შეშფოთებების მიმართ. გარდა ამისა, ისინი უფრო ზუსტნი არიან, რადგან მათი სიზუსტე დამოკიდებულია არითმეტიკული ოპერაციების შედეგების დამრგვალების სიზუსტეზე.

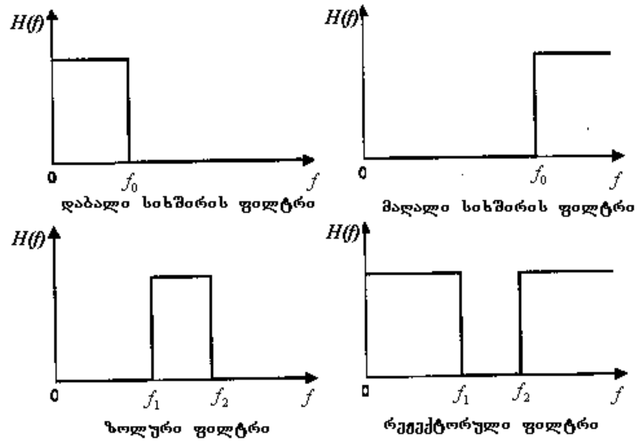
რაც შეეხება ანალოგურ ფილტრებს, მათი სიზუსტე დამოკიდებულია ელემენტების დასაშვებ შეშფოთებებზე, კერძოდ ძაბვის სტაბილურობაზე, ტემპერატურის ცვლილებაზე, ელემენტების ცვეთაზე (დაძველებაზე), რომლებიც ცვლიან ანალოგური ფილტრის მახასიათებლებს. ყოველი ეს ფაქტორი არ მოქმედებს ციფრულ ფილტრებზე, რადგან ისინი წარმოადგენენ კომპიუტერულ პროგრამას, ამიტომ მათი პარამეტრები მუდმივი სიდიდეებია. ეს ძალზე მნიშვნელოვანია განსაკუთრებით ბიოსიგნალებისათვის მათზე მოქმედი ზემოდ განხილული არტეფაქტების გამო. აქედან გამომდინარე, ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ციფრულ ფილტრებს.

საზოგადოდ, ციფრული ფილტრი არის ნებისმიერი სისტემა, რომელსაც გააჩნია წრფიობის და სტაციონარობის თვისებები. იმისათვის, რომ ფილტრი იყოს არატრივიალური ანუ ფილტრის გადაცემის კოეფიციენტები სხვადასხვა სიხშირეზე იყოს სხვადასხვა, ამისათვის ფილტრის გამოსავალი სიგნალი რამოდენიმე ანათვლით უნდა იყოს დამოკიდებული შემავალ სიგნალზე. აქედან გამომდინარე, ციფრულ ფილტრს უნდა გააჩნდეს მეხსიერება.

არსებობენ ფილტრები ცვლადი პარამეტრებით, რომლებსაც არ გააჩნიათ სტაციონარობის თვისებები. ასეთ ფილტრებს **ადიტიური ფილტრები** ეწოდებათ,

რომლებიც თავის პარამეტრებს ცვლიან შემავალი სიგნალის სტატისტიკური თვისებებიდან გამომდინარე. ადიტიურ ფილტრებს ჩვენ არ განვიხილავთ.

ციფრული ფილტრები შეიძლება დავყოთ დაბალსიხშირიან, მაღალსიხშირიან, ზოლურ და გადამღობ (რეჟექტორულ) ფილტრებად. დაბალი სიხშირის იდეალურმა ფილტრმამ უნდა გაატაროს $(0; f_0)$ჰც და ჩაახშოს *f0* სიხშირეზე მაღალი სიხშირეები (ნახ. 7.2). *f0* სიხშირეს მოკვეთის სიხშირე ეწოდება.



ნახ. 7.2

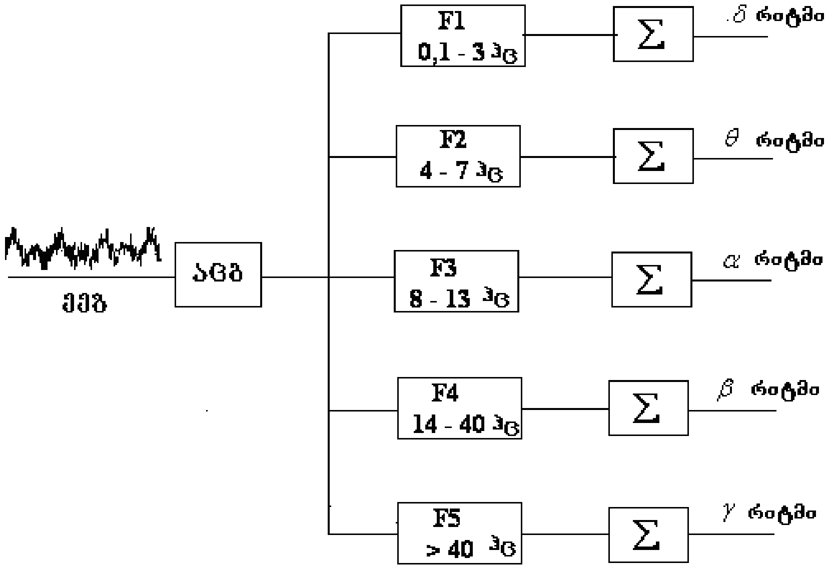
მაღალი სიხშირის იდეალურმა ფილტრმამ, რომელსაც გააჩნია დაბალი სიხშირის ფილტრის საწინააღმდეგო მახასიათებლები, უნდა გაატაროს *f0* სიხშირეზე მაღალი სიხშირეები და უნდა ჩაახშოს $(0; f_0)$ჰც სიხშირეები. ზოლურ ფილტრმამ უნდა გაატაროს $(f_1; f_2)$ შუალედში მყოფი სიხშირეები, ხოლო დანარჩენები უნდა ჩაახშოს. რაც შეეხება რეჟექტორულ ფილტრს მან უდა გაატაროს ყველა სიხშირეები გარდა $(f_1; f_2)$ შუალედში მყოფი სიხშირეები.

პრაქტიკაში ასეთი იდეალური მახასიათლების ფილტრების მიღება თითქმის შეუძლებელია ორი მიზეზის გამო:

1. ფილტრის იდეალური მახასიათლების მიღება შეუძლებელია, რადგან იგი შედგება სასრულო რაოდენობის წევრებისაგან, ამიტომ ფაქტიურად იყენებენ იდეალური ფილტრის მახასიათებლის აპროქსიმაციას.

2. საწყისი მონაცემების სასრულო რაოდენობიდან გამომდინარე, ყველა სახის ფილტრს გააჩნია გარდამავალი ზონა გასაშვებ სიხშირეებსა და მოკვეთის *f0* სიხშირეს შორის.

მოვიყვანოთ ციფრული ფილტრების გამოყენების მაგალითი ელექტროენცეფალოგრამის (ეეგ) დამუშავების დროს. როგორც ცნობილია ეეგ წარმოადგენს თავის ტვინის ფუნქციონალური მდგომარეობის გამოკვლევის მეთოდს, რომელიც ეფუძნება თავის ტვინში მიმდინარე ბიოელექტრულ პროცესებს. ეეგ-ს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მახასიათებელს წარმოადგენს რითმები, რომლებიც გამოიყოფიან ბიოსიგნალიდან და ფართოდ გამოიყენებიან ნევროლოგიაში დიფერენციალური დიაგნოსტიკისათვის. ქვემოდ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია ეეგ-დან რითმების გამოყოფის ბლოკ-სქემა,



სადაც ***F***−ით აღნიშნულია ციფრული ფილტრი.

ლოგარითმული მასშტაბი. სიგნალების ციფრული დაუშავების თეორიაში სიგნალების სპექტრის, ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის და ფანჯრის ამპლიტიდური სპექტრის სიხშირეების გრაფიკული გამოსახულებების გარჩევადობის ხარისხის გაუმჯობესების მიზნით ხშირად იყენებენ ლოგარითმულ მასშტაბს, სადაც ორდინანტთა ღერძი დაგრადუირებულია დეციბელებში.

სიგნალების დონეების შედარება სასურველია მოხდეს სიგნალების სიმძლავრეების საშუალებით. თუ შედარებისათის გამოვიყენებთ სიმძლარეების ფარდობის ლოგარითმს, მაშინ ლოგარითმის დადებითი მნიშნელობა შეესაბამება სისტემის გაძლიერების კომპონენტებს, ხოლო უარყოფითი ლოგარითმი გვიჩვენებს კომპონენტების შესუსტებას. ყოველივე ამის გათვალისწინებით ორი სიგნალის P_1 და P_2 სიმძლარის განსხვავების დონე იზომება უგანზომილებო საზომ ერთეულში, რომელსაც **ბელი** ეწოდება. ბელი განისაზღვრება როგორც სიმძლარეების შეფარდების ათობითი ლოარითმი

$$N_b = \lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ ბელი.}$$

ბელი აღმოჩნდა საკმაოდ დიდი საზომი ერთეული, რაც იწვევდა გარკვეულ უხერხულობას მისი გამოყენების დროს. მაგალითად, როცა $P_1/P_2 = 100$, მაშინ $\lg 100 = 2$, თუ $P_1/P_2 = 1000$, მაშინ $\lg 1000 = 3$. ე.ი. ნებისმიერი სიმძლავრეების ფარდობა [100;1000] ინტერვალში გვაძლევს სხვაობას 1 ბელის ფარგლებში, კერძოდ 2 ბელიდან 3 ბელამდე. უფრო მეტი თვალსაჩინოებისათვის ბელი მრავლდება 10-ზე და მიღებულ სიდიდეს **დეციბელი (დბ)** ეწოდება. ე.ი. 2ბ=20დბ, 4,5ბ=45დბ და ა.შ. ამრიგად, დეციბელი არის ბელის მეათედი და განისაზღვრება ფორმულით:

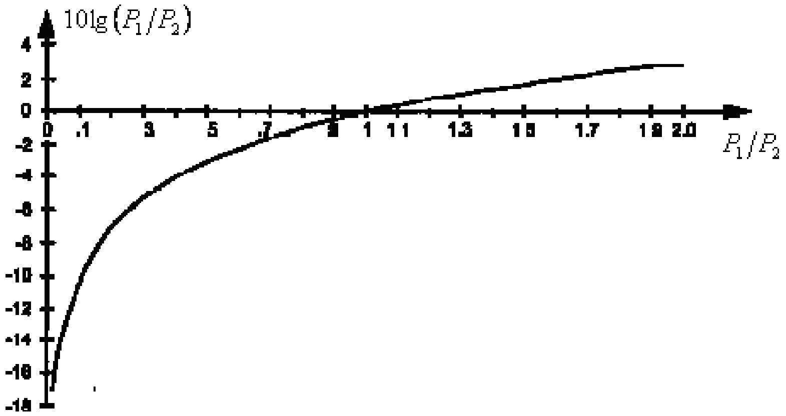
$$N_{db} = 10\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ დბ.}$$

დავუშვათ P_1 სიმძლავრე გახდა საწყისი P_0 სიმძლავრესთან შედარებით ორჯერ მეტი, მაშინ $10\lg(P_1/P_0)=10\lg(2)\approx 3{,}01\approx 3$ დბ. ე.ი. სიმძლავრის ზრდა 3 დბ-ით ნიშნავს მის გაზრდას ორჯერ. თუ P_1 სიმძლავრე გახდა საწყისი P_0 სიმძლავრესთან შედარებით ორჯერ ნაკლები, მაშინ $10\lg(P_1/P_0)=10\lg(0{,}5)\approx -3$ დბ. ე.ი. სიმძლავრის დაკლებას 3 დბ-ით ნიშნავს მის დაკლებას ორჯერ.

ცნობილია, რომ ლოგარითმის გამოყენება ამარტივებს მათემატიკურ გამოვლებს, კერძოდ გამრავლების და გაყოფის ნაცვლად გამოიყენება შეკრების და გამოკლების ოპერაციები. დეციბელზე არითმეტიკული მოქმედებები არ განსხვავდებიან ლოგაითმულისაგან. გავიხსენოთ ლოგარითმის თვისებები:

1. $\lg(A\cdot B)=\lg A+\lg B$
2. $\lg(A/B)=\lg A-\lg B$
3. $\lg(A^m)=m\lg A$

ლოგარითმული ფუნქცია $10\lg\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)$, რომლის გრაფიკი წარმოდგენილია ნახ. 7.3 –ზე, პირველი შეხედვით არ ჩანს სასარგებლო.



ნახ 7.3

მივაქციოთ ყურადღება სიმძლავრეების P_1/P_2 მცირე ფარდობის ლოგარითმული ფუნქციის დიდი სიჩქარით ცვლილებას და უმნიშვნელო ცვლილება სიმძლავრეების ფარდობის დიდი ცვლილებისას. ამ არაწრფიობის შედეგად სიმძლავრეების P_1/P_2 ფარდობის მცირე ცვლილებისას გარჩევადობის უნარი აღმოჩნდა დიდი, რაც იძლევა სიგნალების სპექტრებში სიმძლავრეების დონის უმნიშვნელო სხვაობის გარჩევის საშუალებას.

განვიხილოთ ლოგარითმული მასშტაბის გამოყენება. გავიხსენოთ, რომ სიხშირულ არეში ნებისმიერი $x(n)$ თანმიმდევრობის სიმძლავრე წარმოადგენს ამპლიტუდურ სპექტრს $|X(m)|$, რომელიც პროპორციულია $|X(m)|^2$ სიდიდისა. ე.ი. $|X(m)|=|X(m)|^2$. რადგან $|X(m)|^2$ გამოსახულების ლოგარითმი ტოლია $2\lg(|X(m)|)$, ამიტომ მივიღებთ სიმძლავრის სპექტრს დეციბელებში:

$$X(m)=20\lg(|X(m)|)\ \text{დბ.} \qquad (7.1)$$

მიღებული (7.1) გამოსახულების გამოყენება პრაქტიკულად უფრო მისაღებია, რადგან არ გვჭირდება სიმძლავრის კვადრატში აყვანა.

ხშირად სასურველია სიმძლავრის ნორმირებულ ლოგარითმულ მასშტაბში წარმოდგენა, სადაც თითოეული $\left|X(m)\right|^2$ ანათვალი იყოფა სიმძლავრის პირველ ანათვლაზე $\left|X(0)\right|^2$, ე.ი. გვექნება:

$$\text{ნორმირებული } X(m) = 10\lg\left(\frac{\left|X(m)\right|^2}{\left|X(0)\right|^2}\right) = 20\lg\left(\frac{\left|X(m)\right|}{\left|X(0)\right|}\right) \text{ დბ}$$

ასეთი ნორმირება საშუალებას გვაძლევს ადვილად შევადაროთ ერთმანეთს სხვადასხვა სპექტრების ლოგარითმული გრაფიკები. ამრიგად, ლოგარითმული მასშტაბი ფართოდ გამოიყენება როგორც სიგნალების სპექტრული სიმძლავრეების, ასევე ფილტრების სიხშირული მახასიათებლების გრაფიკული წარმოდგენისათვის.

შენიშვნა. ადამიანს შეუძლია ბგერების აღქმა 10-15 დბ ფარგლებში. 0 დბ დროს – არაფერი ისმის, 5 დბ–თითქმის არ ისმის, 25 დბ–ადამიანს ჩურჩული ესმის 1 მეტრის ფარგლებში, 40 დბ–ჩვეულებრივი მეტყველება კარგად ისმის, თუ ბგერის სიმძლავრე აღწევს 160 დბ-ზე მეტს, მაშინ შესაძლებელია ყურის აბსკის გახვრეტა, 200 დბ-ზე ზემოდ იწვევს სიკვდილს.

7.2 ციფრული ფილტრის განტოლება

ციფრული ფილტრი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც წრფივი მუდმივპარამეტრიანი დისკრეტული სისტემა ერთი შემავალი $x(n)$ და ერთი გამომავალი $y(n)$ თანმიმდევრობებით. თუ გამოვიყენებთ ნებისმიერი სახის დისკრეტული თანმიმდევრობის წარმოდგენის მეთოდს (4.1), მაშინ შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\sum_{k=0}^{N=1} a(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b(k)y(n-k), \quad n \geq 0 \quad , \tag{7.2}$$

სადაც $a(k)$ და $b(k)$ კოეფიციენტებია, რომლებიც განსაზღვრავენ სისტემას. იმისათვის, რომ ცხადად წარმოვადგინოთ სისტემის გამოსავალი თანმიმდევრობა შემავალი თანმიმდებრობით, (7.2) ფორმულა წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a(k)}{b(0)} x(n-k) - \sum_{k=0}^{M-1} \frac{b(k)}{b(0)} y(n-k), \quad b(0) \neq 0$$

რომელსაც ეწოდება სხვაობითი განტოლება. თუ $b(0)=1$, მაშინ მივიღებთ ციფრული ფილტრის განტოლებას:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\backslash n-1} a(k)x(n-k) - \sum_{k=0}^{M-1} b(k)y(n-k) \quad . \tag{7.3}$$

(7.3) ფორმულით შესაძლებელია გამოსავალი თანმიმდევრობის განსაზღვრა, როცა $n \geq 0$. სხვაობითი განტოლება უშუალოდ განსაზღვრავს დისკრეტული სისტემის კონფიგურაციას.

ციფრული ფილტრის გადაცემის ფუნქციის განტოლების მისაღებად მოვახდინოთ (7.2) განტოლების Z- გარდაქმნა, მაშინ მივიღებთ:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{N-1}a(k)x(n-k)\right]Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{M-1}b(k)y(n-k)\right]Z^{=n} .$$

თუ აჯამვის თანმიმდევრობას შევცვლით, მაშინ

$$\sum_{k=0}^{N=1}a(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)Z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1}b(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n-k)Z^{=n} .$$

აღვნიშოთ $n-k=m$, მაშინ

$$\sum_{k=--\infty}^{\infty}x(n-k)Z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(m)Z^{-(m+k)} = Z^{-k}\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(m)Z^{-m} = Z^{-k}X(Z)$$

ანალოგიურად:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(n-k)Z^{-n} = Z^{-k}Y(Z)$$

ე.ი. მივიღეთ:

$$X(Z)\sum_{k=0}^{N-1}a(k)Z^{-n} = Y(Z)\sum_{k=0}^{M-1}b(k)Z^{-k} .$$

აქედან ვღებულობთ: $Y(Z)=H(Z)X(Z)$, სადაც

$$H(Z)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}a(k)Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1}b(k)Z^{-k}}=\frac{A(Z)}{B(Z)} \qquad (7.4)$$

და მას ფილტრის **გადაცემის (სისტემური) ფუნქცია** ეწოდება.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, რომლებიც აღწერენ ფილტრების ორ ფუმდამენტალურ კლასს. თუ ფილტრის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს: $b(0)=1$; $b(k)=0$, როცა $k\neq 0$, მაშინ (7.2) სხვაობითი განტოლება დაიყვანება შემდეგ სახეზე:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a(k)x(n-k),$$

რომლის გადამცემ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(Z)=\sum_{k=0}^{N-1}a(k)Z^{-k} . \qquad (7.5)$$

ასეთი კლასის ფილტრებს **არარეკურსიული ან ტრანსვერსალური** ფილტრები ეწოდებათ. არარეკურსიულ ფილტრს ხშირად უწოდებენ ფილტრს უკუკავშირის გარეშე.

თუ (7.2) განტოლებაში $b(k)$ კოეფიციენტებიდან თუნდაც ერთი (გარდა $b(0)$-ისა) განსხვავდება ნულისაგან, მაშინ ასეთ ფილტრებს **რეკურსიული** ეწოდებათ (7.3) განტოლებით და (7.4) გადაცემის ფუნქციით.

თუ (7.4) გამოსახულებაში $A(z)$ და $B(z)$ პოლინომებს არ გააჩნიათ საერთო ფესვები, მაშინ ფილტრის გადაცემის ფუნქციის $H(z)$ **ნულები** იქნება $A(z)=0$ განტოლების ფესვები, ხოლო **პოლუსები** იქნება $B(z)=0$ განტოლების ფესვები. ზოგადად, ფილტრის გადაცემის ფუნქციის პოლუსთა რიცხვი განსაზღვრავს ციფრული ფილტრის რიგს.

ამრიგად, თუ α_i, $i = 1,2,....,N$ წარმოადგენენ $H(z)$ გადაცემის ფუნქციის ნულებს, ხოლო β_i, $i = 1,2,....,M$ პოლუსებს, მაშინ ციფრული ფილტრის გადაცემის ფუნქცია შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

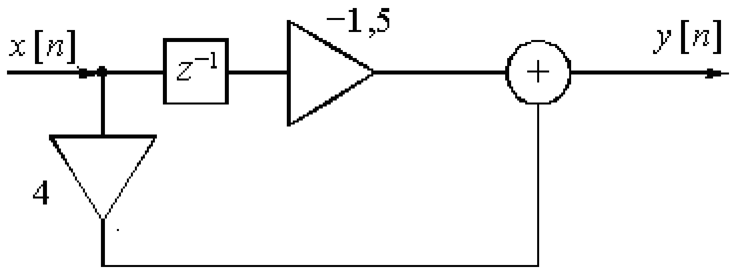
$$H(Z) = C\frac{\prod_{i=1}^{N}(Z-\alpha_i)}{\prod_{k=1}^{M}(Z-\beta_k)} = C\frac{\prod_{i=1}^{N}\left(1-\alpha_i Z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{M}\left(1-\beta_k Z^{-1}\right)},$$

სადაც C ნამდვილი მუდმივი სიდიდეა. თუ α_i და β_k კოეფიციენტები კომპლექსნური არიან, მაშინ ისინი Z სიბრტყეში ქმნიან შეუღლებულ წყვილებს.

გავიხსენოთ, რომ ფილტრის იმპულსური მახასიათებელი არის დროის არეში ფილტრის გამოსავალი თანმიმდევრობა, როცა ფილტრის შესასვლელს მიეწოდება ერთეულოვანი იმპულსი. ფილრტის კოეფიციენტები და იმპულსური მახასიათებლები წარმოადგენენ სინონიმებს, ე.ი. **ფილტრის კოეფიციენტები წარმოადგენენ ფილტრის იმპულსურ მახასიათებლებს**.

იმპულსური მახასიათებლის მიხედვით ციფრული ფილტრები იყოფიან ორ კლასად: ფილტრები **სასრულო იმპულსური მახასიათებლებით**, რომლებსაც მიეკუთვნებიან არარეკურსიული ფილტრები და ფილტრები **უსასრულო იმპულსური მახასიათებლებით**, რომლებსაც მიეკუთვნებიან რეკურსიული ფილტრები. განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ნახ. 7.4 წარმოდგენილი ციფრული ფილტრის გამოსავალი სიგნალის გამოსახულება, იმპულსური მახასიათებელი და გადაცემის ფუნქცია.



ნახ. 7.4

ფილტრის გამოსავალი სიგნალის გამოსახულება ტოლია: $y(n) = 4x(n) - 1{,}5x(n-1)$,

დისკრეტული იმპულსური მახასიათებლის განსაზღვრისათვის ფილტრის შესასვლელს მივაწოდოთ ერთეულოვანი იმპულსი $\delta(n) = \{1;\ 0;\ 0;.....\}$, მაშინ მივიღებთ:

$$h(0) = 4\delta(0) - 1{,}5\delta(-1) = 4 - 1{,}5\cdot 0 = 4$$
$$h(1) = 4\delta(1) - 1{,}5\delta(0) = -1{,}5$$
$$h(2) = 0$$

ე.ი. მივიღეთ: $h(n) = \{4; -1{,}5\}$, რომელიც ემთხვევა ფილტრის კოეფიციენტებს. გადაცემის $H(z)$ ფუნქციის განსაზღვრისათვის მოვახდინოთ იმპულსური მახასიათებლის Z გარდაქმნა (7.5):

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(0)Z^{-n} = h(0)Z^{0} + h(1)Z^{-1} = 4 - 1{,}5Z^{-1}.$$

გადაცემის ფურქციის განსაზღვრის მეორე მეთოდი მდგომარეობს ფილტრის გამოსავალი თანმიმდევრობის Z – გარდაქმნაში:

$Y(z)=4X(z)-1{,}5X(z)Z^{-1}=X(z)\left(4-1{,}5Z^{-1}\right)=X(z)H(z)$, სადაც $H(z)=4-1{,}5Z^{-1}$.

მაგალითი 2. ვიპოვოთ ფილტრის შემავალი $x(n)=\{1;\ 0;\ 1;\ 2\}$ და გამომავალი $y(n)=\{0;\ 1;\ 2;\ 1\}$ სიგნალებით გადაცემის ფუნქცია.

მოვახდინოთ ორივე სიგნალის Z გარდაქმნა

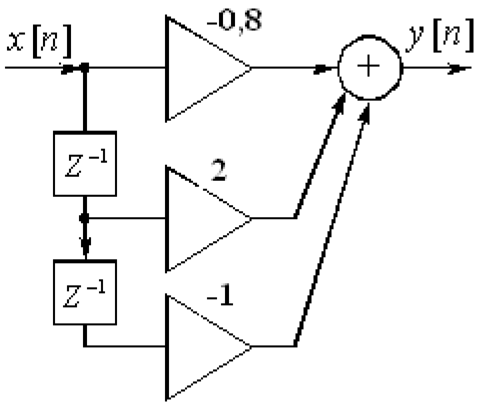
$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)Z^{-n}=1+Z^{-2}+2Z^{-3}$$

$$Y(z)=\sum_{n0=0}^{\infty}y(n)Z^{-n}=Z^{-1}+2Z^{-2}+Z^{-3}$$

გადაცემის ფუნქცია ტოლია:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{Z^{-1}+2Z^{-2}+Z^{-3}}{1+Z^{-2}+2Z^{-3}}$$

მაგალითი 3. ვიპოვოთ ნახ. 7.5 წარმოდგენილი არარეკურსიული ფილტრის გამოსავალი სიგნალი და ფილტრის გადაცემის ფუნქცია.



ნახ. 7.5

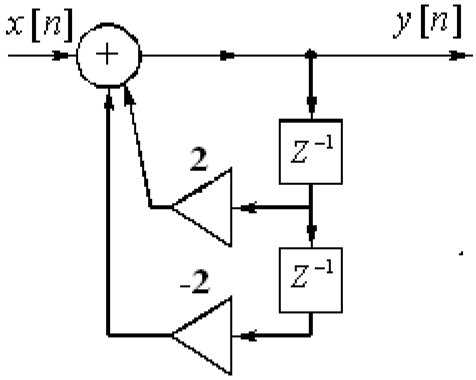
ფილტრის გამოსავალი თანმიმდევრობა ტოლია:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{N-1}a(k)x(n-k)=a_0x(n)+a_1x(n-1)+a_2x(n-2)=-0{,}8x(n)+2x(n-1)-x(n-2)$$

გადაცემის ფუნქცია ტოლია:

$$H(Z)=\sum_{k=0}^{N-1}a(k)Z^{-k}=a_0+a_1Z^{-1}+a_2Z^{-2}=-0{,}8+2Z^{-1}-Z^{-2}$$

მაგალითი 4. რეკურსიული ფილტრის სტრუქტურული სქემა მოცემულია ნახ. 7.6. ვიპოვოთ ფილტრის გამოსავალი სიგნალი, გადაცემის ფუნქცია და ფილტრის რეაქცია $x(n)=\{1,-1,1\}$ შემავალი დისკრეტული თანმიმდევრობისათვის.



ფილტრის გამოსავალი სიგნალის განტოლება ტოლია:

$$y(n) = x(n) + b_1 y(n-1) + b_2 y(n-2) = x(n) + 2y(n-1) - 2y(n-2)$$

გადაცემის ფუნქცია ტოლია:

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} a(k) Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} b(k) Z^{-k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M-1} b(k) Z^{-k}} = \frac{1}{1 - b_1 Z^{-1} - b_2 Z^{-2}} = \frac{1}{1 - 2Z^{-1} + 2Z^{-2}}$$

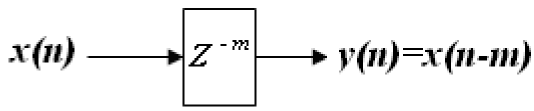
განსაზღვროთ $y(n)$ მნიშვნელობები

$$y(0) = x(0) = 1$$
$$y(1) = x(1) + 2y(0) = -1 + 2 \cdot 1 = 1$$
$$y(2) = x(2) + 2y(1) - 2y(0) = 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$$
$$y(3) = x(3) + 2y(2) - 2y(1) = 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$$
$$y(4) = -2; \quad y(5) = -4; \quad y(6) = -4; \; \ldots.$$

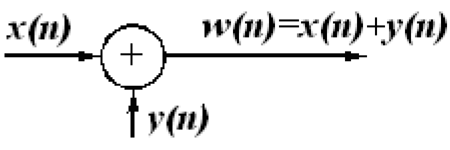
7.3 ციფრული ფილტრების შეერთების სქემები

როგორც ციფრული ფილტრის განტოლებიდან ჩანს ნებისმიერი ფილტრის რეალიზაციისათვის საჭიროა სამი ტიპის ოპერაცია: დაყოვნება (დამახსოვრება), აჯამვა და გამრავლება. ფილტრის სტრუქტურული სქემის შედგენისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

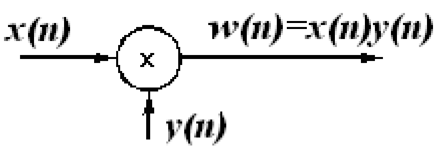
დაყოვნება

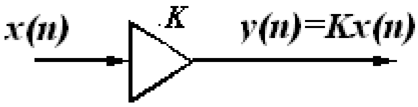


აჯამვა

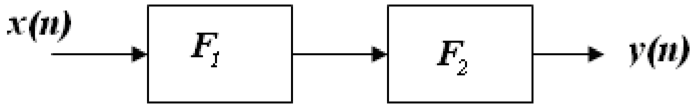


გამრავლება



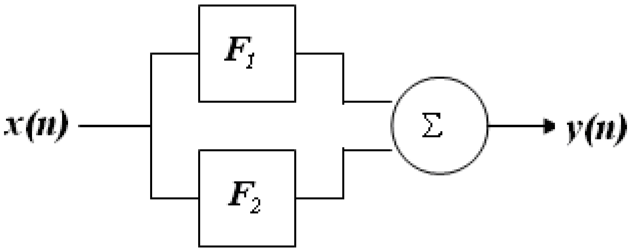


განვიხილოთ ციფრლი ფილტრების შეერთების სქეები. ვთქვათ $H_1(z)$ და $H_2(z)$ F_1 და F_2 ფილტრების გადაცემის ფნქციებია. შეერთებას, როდესაც ერთი ფილტრის გამოსავალი მიერთებულია მეორე ფილტრის შესასვლელზე კასკადური (მიმდევრობითი) შეერთება ეწოდება. მაშინ გვექნება:



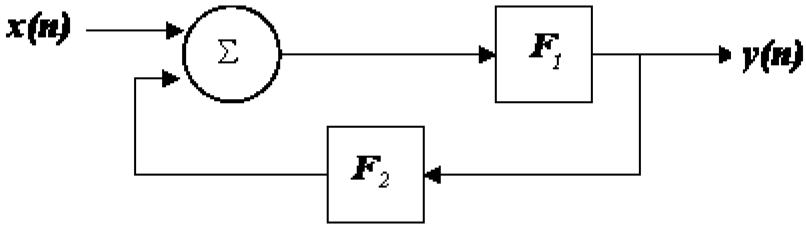
$$H(Z)=H_1(Z)H_2(Z)$$

შეერთებას, როდესაც ფილტრებს გააჩიათ საერთო შესასვლელი, ხოლო გამოსასვლელები მიერთებლნი არიან ერთ სუმატორთან ეწოდებათ პარალელრი შეერთება. ე.ი.



$$H(Z)=H_1(Z)+H_2(Z)$$

თუ ერთ-ერთ ფილტრს ჩავსვამთ მეორე ფილტრის მიმართ უკუკავშირით, მაშინ გვექნება:



$$H(Z)=\frac{H_1(Z)}{1-H_1(Z)H_2(Z)}$$

მაგალითი. ვთქვათ მოცემლია $H_1(Z)=\dfrac{1}{1-0{,}3Z^{-1}}$ და $H_2(Z)=0{,}2+Z^{-1}+Z^{-2}$ გადაცემის ფნქციები.

ფილტრების მიმდევრობითი შეერთების დროს გვექნება:

$$H(Z)=\frac{0{,}2+Z^{-1}+Z^{-2}}{1-0{,}3Z^{-1}}\ ,$$

პარალელური შეერთებისას:

$$H(Z)=\frac{0{,}2+0{,}72Z^{-1}+0{,}7Z^{-2}-0{,}3Z^{-3}}{1-0{,}3Z^{-1}}\ ,$$

ხოლო უკუკავშირიანი ფილტრისათვის გვექნება:

$$H(Z)=\frac{1-0{,}3Z^{-1}}{\left(1-0{,}3Z^{-1}\right)\left(0{,}8-1{,}3Z^{-1}-Z^{-2}\right)}.$$

7.4 ციფრული ფილტრის მდგრადობა

ციფრული ფილტრების პრაქტიკული გამოყენებისათვის საჭიროა, რომ ისინი იყვნენ მდგრადნი. ფილტრს ეწოდება მდგრადი თუ ნებისმიერი საწყისი პირობის და ნებისმიერი შეზღუდვის დროს შემავალი $x(n)$ ხიგნალს შეესაბამება ასევე შეზღუდვილი გამოსავალი $y(n)$ სიგნალი.

არსებობს ფილტრის მდგრადობის შემოწმების ორი ხერხი: იმპულსური მახასიათებლით და გადაცემის ფუნქციით. იმპულსური მახასიათებლით ფილტრის მდგრადობის შეფასება შეიძლება ასე ჩამოვაყალიბოთ: იმისათვის, რომ ციფრული ფილტრი იყოს მდგრადი საკმარისია შესრულდეს იმპულსური მახასიათებლების (ფილტრის კოეფიციენტების) მწკრივის აბსოლუტური კრებადობა, ე.ი.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \qquad (7.6)$$

სადაც $h(n)$ – ფილტრის იმპულსური მახასიათებელია. ამ კრიტერიუმის თანახმად, არარეკურსიული ფილტრი ყოველთვის მდგრადია, რადგან ის შეიცავს იმპულსური მახასიათებლის სასრულო რაოდენობას, რასაც ვერ ვიტყვით რეკურსიული ფილრისათვის, რადგან მას გააჩნია უსასრულო რაოდენობის იმპულსური მახასიათებელი.

აქვე უნდა შევნიშნოთ, რომ თუ $h(n)$ –ს გააჩნია სასრულო რაოდენობის წევრები, მაშინ (7.6) პირობა ყოველთვის სრულდება. ამიტომ არის, რომ მდგრადობის ეს კრიტერიუმი პრაქტიკაში ნაკლებად გამოიყენება.

განვიხილოთ სხვა კრიტერიუმი. როგორც ვიცით, ციფრული ფილტრის გადაცემის ფუნქციის Z–გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \ ,$$

სადაც $A(z)$ და $B(z)$ z ცვლადის პოლინომებია. ისიც ცნობილია, რომ $H(z)$ შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ორი მიმდევრობით შეერთებული ფილტრი, ე.ი. $H(z) = H_1(z)H_2(z)$, სადაც $H_1(z) = A(z)$, $H_2(z) = 1/B(z)$ და შესაბამისად წარმოადგენენ არარეკურსიული და რეკურსიული ფილტრების გადაცემ ფუნქციებს. არარეკურსიული ფილტრი $H_1(z)$ ყოველთვის მდგრადია, ამიტომ ციფრული ფილტრის მდგრადობა დამოკიდებულია მხოლოდ $H_2(z)$ რეკურსიული ფილტრის მდგრადობაზე.

გადაცემის ფუნქციით რეკურსიული ფილტრის მდგრადობა ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად: ციფრული ფილტრი მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა გადაცემის ფუნქციის ყველა პოლუსი მოთავსებულია Z სიბრტყის ერთეულოვანი წრეწირის შიგნით. პრაქტიკაში სწორედ ეს კრიტერიუმი გამოიყენება უფრო ხშირად.

განვიხილოთ მაგალითები.

1. $H_1(Z) = \dfrac{1 - Z^{-1}}{1 - 0{,}3Z^{-1}}$, ვიპოვოთ ფილტრის პოლუსი

$1 - 0{,}3Z_1^{-1} = 0$, $0{,}3Z_1^{-1} = 1$, $\dfrac{0{,}3}{Z_1^{(1)}} = 1$. ე.ი. $Z_1^{(1)} = 0{,}3$ და რადგან $\left|Z_1^{(1)}\right| < 1$, ამიტომ ფილტრი მდგრადია.

2. $H_2(Z)=\dfrac{1-Z^{-1}}{1-2Z^{-1}}$, პოლუსი $Z_1^{(2)}=2$ და რადგან $\left|Z_1^{(2)}\right|>1$, ამიტომ ფილტრი არამდგრადია.

3. $H_3(Z)=\dfrac{1-Z^{-2}}{1-1{,}8Z^{-1}+0{,}97Z^{-2}}$, პოლუსები $Z_1^{(3)}=0{,}9+j0{,}4$ $Z_2^{(3)}=0{,}9-j0{,}4$, რადგან $\left|Z_1^{(3)}\right|=\left|Z_2^{(3)}\right|<1$, ამიტომ ფილტრი მდგრადია

თუ ფილტრი არამდგრადია და მისი შემავალი სიგნალი შეუზღუდავად იცვლება ხანგრძლივი დროის განმავლობაში, მაშინ ადრე თუ გვიან გამოსავალი სიგნალი დაკარგავს თავის დამოკიდებულებას შემავალ სიგნალთან და ფილტრი გადადის არამუშა მდგომარეობაში.

არამდგრადი ფილტრი მუშა მდგომარეობაშია მხოლოდ იმ შემთხევაში, როცა შემავალი სიგნალი დროში შეზღუდულია. მაგალითად, ციფრული ინტეგრატორი, რომლის გადაცემის ფუნქციაა

$$H(Z)=\frac{1}{1-Z^{-1}}$$

არამდგრადია, რადგან მას გააჩნია z = 1 პოლუსი. მაგრამ იგი ნორმალურად მუშაობს როცა შემავალი სიდიდე $x(n)$ მოქმედებს $0\le n\le N-1$ ინტერვალში, რომლის შემდეგ საჭიროა მისი განულება ანუ საწყისი ნულოვანი მნიშვნელობის აღდგენა.

7.5 ფილრტის სიხშირული მახასიათებელი

თუ გადაცემის ფუნქციაში (7.4) ჩავსვამთ $z=e^{j\omega\Delta t}$, მაშინ მივიღებთ რეკურსიული ფილტრის კომპლექსურ - სიხშირულ მახასიათებელს:

$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{N-1}a_k e^{-jk\omega\Delta t}}{\sum\limits_{k=0}^{M-1}b_k e^{-jk\omega\Delta t}},$$

ხოლო არარეკურსიული ფილტრისათვის გვექნება:

$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{-jk\omega\Delta t}.$$

კომპლექსურ-სიხშირულ მახასიათებელის მოდულს $A(\omega)=\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|$ ეწოდება ფილრტის ამპლიტუდურ - სიხშირული მახასიათებელი ან მოკლედ **სიხშირული მახასიათებელი** და განსაზღვრავს დამყარებული რეჟიმის დროს მდგრადი ფილტრის გამოსავალი სიგნალის ამპლიტუდას, როცა შემავალი სიგნალია $x(n\Delta t)=e^{jn\omega\Delta t}$.

კომპლექსურ-სიხშირული მახასიათებელის არგუმენტს $\varphi(\omega)=\arg\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|$ ეწოდება ფაზურ–სიხშირული ან მოკლედ **ფაზური მახასიათებელი** და განსაზღვრავს მდგრადი ფილტრის გამოსავალი სიგნალის ფაზას, როცა შემავალი სიგნალია $x(n\Delta t)=e^{jn\omega\Delta t}$.

ცხადია, რომ ნამდვილკოეფიციენტებიანი რეკურსიული ციფრული ფილტრისათვის გვექნება:

$$A(\omega)^2 = \left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|^2 = \frac{\left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i \cos i\omega\Delta t\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{N-1} a_i \sin i\omega\Delta t\right)^2}{\left(\sum_{j=0}^{M-1} b_j \cos j\omega\Delta t\right)^2 + \left(\sum_{j=0}^{M-1} b_j \sin j\omega\Delta t\right)^2} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_m a_k \cos(m-k)\omega\Delta t}{\sum_{p=0}^{M-1}\sum_{s=0}^{M-1} b_p b_s \cos(p-s)\omega\Delta t}$$

სადაც $b_0 = 1$.

$$\varphi(\omega) = \arg\left[H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right] = -arctg\,\frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i \sin(i\omega\Delta t)}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i \cos(i\omega\Delta t)} + arctg\,\frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m \sin(j\omega\Delta t)}{\sum_{m=0}^{M-1} b_m \cos(j\omega\Delta t)} ,$$

ხოლო არარეკურსიული ციფრული ფილტრისათვის გვექნება:

$$A(\omega)^2 = \left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|^2 = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} a_m a_k \cos(m-k)\omega\Delta t$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left[H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right] = -arctg\,\frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i \sin(i\omega\Delta t)}{\sum_{i=0}^{N-1} a_i \cos(i\omega\Delta t)} .$$

მაგალითი 1. მოცემული $H(Z) = 2 + 0{,}5Z^{-1} - Z^{-2}$ გადაცემის ფუნქციისათვის, განვსაზღვროთ სიხშირული მახასიათებლები. მაშინ გვექნება:

$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right) = 2 + 0{,}5e^{-j\omega\Delta t} - e^{-j2\omega\Delta t}$$

$$A(\omega)^2 = \left(2 + 0{,}5\cos(\omega\Delta t) - \cos(2\omega\Delta t)\right)^2 + \left(0{,}5\sin(\omega\Delta t) - \sin(2\omega\Delta t)\right)^2$$

$$\varphi(\omega) = -arctg\left(\frac{0{,}5\sin(\omega\Delta t) - \sin(2\omega\Delta t)}{2 + 0{,}5\cos(\omega\Delta t) - \cos(2\omega\Delta t)}\right).$$

მაგალითი 2. მოცემული $H(z) = \dfrac{1}{1 - 0{,}5Z^{-1}}$ გადაცემის ფუნქციისათვის გვექნება: $H\left(e^{j\omega\Delta t}\right) = \dfrac{1}{1 - 0{,}5e^{-j\omega\Delta t}}$, $A(\omega)^2 = \dfrac{1}{\left(1 - 0{,}5\cos(\omega\Delta t)\right)^2 + \left(0{,}5\sin(\omega\Delta t)\right)^2}$,

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{0{,}5\sin(\omega\Delta t)}{1 - 0{,}5\cos(\omega\Delta t)} .$$

ნამდვილკოეფიციენტებიანი ციფრული ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის ძირითადი თვისებებია:

1. ყველა სიხშირული მახასიათებელი წარმოადგენს პერიოდულ ფუნქციას ω კუთხური სიხშირით და $\omega = 2\pi/\Delta t$ პერიოდით;

2. ω სიხშირის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი ლუწი ფუნქციაა, ხოლო ω სიხშირის ფაზურ-სიხშირული მახასიათებელი $\varphi(\omega)$ კენტი ფუნქციაა.

ამ თვისებებიდან გამომდინარე, მუდმივი Δt დროს სიხშირული მახასიათებლები საჭიროა მოცემული იყოს $\left[0, \pi/\Delta t\right]$ ინტერვალზე. სხვადასხვა სიხშირული მახასიათებლების შედარებისათვის მიზანშეწონილია სიხშირის ნორმირება. არსებობს ნორმირების ორი მეთოდი. პირველი მეთოდის დროს ნორმირებული სიხშირე ტოლია: $\tilde{\omega} = \omega \Delta t$, მაშინ $\omega_g = \omega_g \Delta t = (2\pi/\Delta t)\Delta t = 2\pi$ და სიხშირული მახასიათებელი მოცემულია $\left[0,\ \pi\right]$ ინტერვალზე.

მეორე მეთოდის დროს უშვებენ ნორმირებულ სიხშირეს $\tilde{\omega} = \omega \Delta t/2\pi$ სიდიდის ტოლად, მაშინ

$$\omega_g = \omega_g \frac{\Delta t}{2\pi} = \frac{2\pi}{\Delta t}\frac{\Delta t}{2\pi} = 1$$

და სიხშირული მახასიათებელი მოცემულია $\left[0, 0{,}5\right]$ ინტერვალში. პრაქტიკაში უფრო ხშირად იყენებნ სიხშირეების ნორმირების ამ მეორე მეთოდს.

8 არარეკურსიული ციფრული ფილტრები

8.1 არარეკურსიული ფილტრის მახასიათებლები

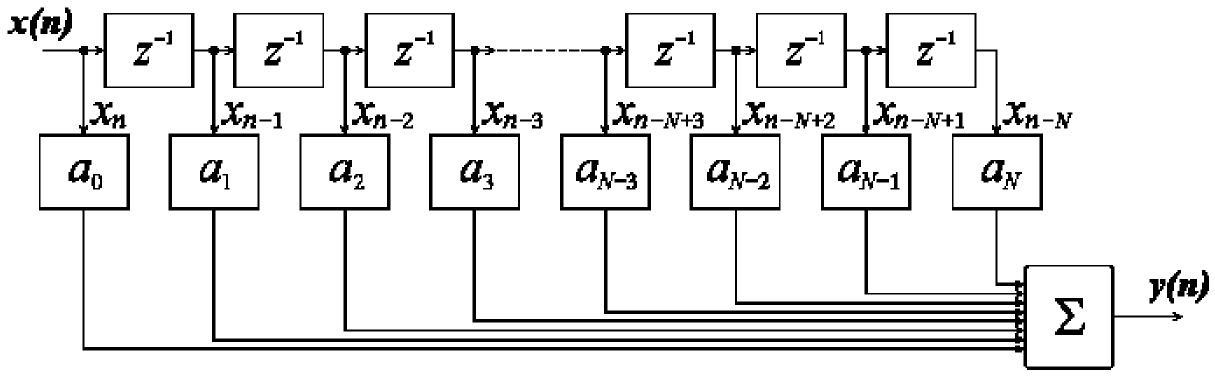
ციფრული ფილტრის გამოსავალი სიგნალის მიმდინარე მნიშვნელობის განსაზღვრისათვის არარეკურსიული ფილტრები იყენებენ შემავალი სიგნალის მხოლოდ მიმდინარე და წინა მნიშვნელობებს და არ იყენებენ ფილტრის გამოსავალ ანათვლებს (სწორედ ამიტომ ქვიათ ასეთ ფილტრებს არარეკურსიული). ამას მივყევართ იქამდე, რომ თუ ფილტრის შემავალი თანმიმდებრობა შეიცავს ნულისაგან განსხვავებულ სასრულო რაოდენობის ანათვლებს, მაშინ ასეთი ფილტრის გამოსავალზე გვექნება აგრეთვე ნულისაგან განსხვავებული სასრულო რაოდენობის ანათვალი. სწორედ ამიტომ ასეთ ფილტრებს უწოდებენ სასრულო რაოდენობის იმპულსური მახასიათებლის ფილტრებს

ვთქვათ მოცემულია სასრულო რაოდენობის სიმეტრიული წევრთა არარეკურსული ფილტრი, რომლის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y(n) = \sum_{k=-N}^{N} a(k)x(n-k)\ . \tag{8.1}$$

სადაც N – წინა ანათვლების ანუ ფილტრის კოეფიციენტების რაოდენობა, რომელსაც ფილტრის რიგი ეწოდება. (8.1) ფორმულა წარმოადგენს არარეკურსიული ფილტრის სხვაობით განტოლებას, რომელიც წარმოდგენილია დროით არეში.

არარეკურსიული ფილტრის (8.1) პირდაპირი ფორმის სტრუქტურულ სქემას აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 8.1

არარეკურსიული ფილტრის იმპულსური მახასიათებლის მისაღებად ფილტრის შესასვლელს მივაწოდოთ ერთეულოვანი იმპულსი $x_0(n)$, მაშინ

$$h(n) = \sum_{k=-N}^{N} a(k) x_0(n-k) \ ,$$

მაგრამ ანათვალი $x_0(n-k)$ ყველა n –სთვის ნულის ტოლია, გარდა $n=k$, როცა ის ერთის ტოლია. ამრიგად ვღებულობთ მარტივ შედეგს $h(n)=a_n$ ანუ a_n კოეფიციენტები წარმოადგენენ ფილტრის იმპულსური მახასიათებლის ანათვლებს. ეს შეიძლება თვალნათლივ ავსახოთ ნახ. 8.1 საშუალებით. როცა შესასვლელს მიეწოდება ერთეულოვანი იმპულსი იგი დაყოვნების ზოლზე გადაადგილდება და მრავლდება $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots..$ კოეფიციენტებზე და ისე მიეწოდება ფილტრის გამოსავალს.

ცხადია, რომ რეალური ფილტრი შეიცავს დაყოვნების ზოლის სასრულო რაოდენობის ელემენტებს, ამიტომ არარეკურსიული ფილტრის იმპულსური მახასიათებელი სასრულო სიგრძისაა. აქედან გამომდინარე, ასეთ ფილტრებს უწოდებენ სასრულო იმპულსური მახასიათებლის ფილტრებს.

უკუკავშირის არარსებობის გამო ნებისმიერი არარეკურსიული ფილტრი მდგრადია. მართლაც, როგორიც არ უნდა იყოს საწყისი პირობები, ანუ ანათვლები, რომლებიც ინახება დაყოვნების ზოლში, ფილტრის შესასვლეში სიგნალის არარსებობის შემთხვევაში $(x_0(n)=0)$, გამოსავალი სიგნალი იქნება ნულისაგან განსხვავებული მხოლოდ არაუმეტეს N ტაქტისა, რომელიც საჭიროა დაყოვნების ზოლის გასასუფთავლებად.

მეტად მნიშვნელოვანია ის, რომ სასრულო რაოდენობის სიმეტრიული წევრთა არარეკურსულ ფილტრებს გააჩნიათ წრფივი ფაზურ–სიხშირული მახასიათებელი, რაც უზრულვებელყოფს ჯგუფური და ფაზური დაყოვნებების მუდმივობას (სიხშირეზე დამოუკიდებელი). არსებობს სიმეტრიის ორი ტიპი:

– ლუწი სიმეტრია: $a(n)=a(N-n)$ ყველა $n=0,1,2,\ldots.,N$-ისათვის;

– კენტი სიმეტრია: $a(n)=-a(N-n)$ ყველა $n=0,1,2,\ldots.,N$-ისათვის.

სიმეტრიული ფილტრისათვის ჯგუფური დაყოვნება არ არის დამოკიდებული სიხშირეზე და ტოლია $N/2$ ანათვლებისა.

ლუწი N-ის და კენტი იმპულსური მახასიათებლის სიმეტრიის დროს, მისი საშუალო მნიშვნელობის ანათვალი ნულის ტოლი უნდა იყოს: $a(N/2)=0$.

თუ (8.1) განტოლებაში ჩავსვამთ $x = e^{j\omega n}$, მაშინ მივიღებთ:

$$y(n) = \sum_{k=-N}^{N} a(k) e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-N}^{N} a(k) e^{-j\omega k} = H(\omega) e^{j\omega n},$$

სადაც

$$H(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} a(k) e^{-j\omega k}$$

და იგი წარმოადგენს ფილტრის გადაცემის ფუნქციას. კოეფიციენტების სიმეტრიოულობის გამო $a(k) = a(-k)$ ჩვენ გვაქვს მხოლოდ კოსინუსების ფურიეს მწკრივი $-\pi \le \omega \le \pi$ ნაიკვისტის ინტერვალით. ეილერის ცნობილი ფორმულის თანახმად, გადაცემის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$H(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} a(k) \cos(\omega k) = 2\sum_{k=0}^{N} a(k) \cos(\omega k).$$

გადაცემის ფუნქცია პერიოდულია და $\omega = 0$, $\omega = \pi$ $\left(f = 1/2\right)$ მიმართ სიმეტრიულია. თუ გამოვიყენებთ ციკლურ სიხშირეს, მაშინ გვექნება:

$$H(f) = 2\sum_{k=-N}^{N} a(k) \cos(2\pi fk).$$

სიხშირულ ტერმინებში ნაიკვისტის სიხშირე შეესაბამება $-1/2 \le f \le 1/2$ ინტერვალს. მოცემული გადაცემის ფუნქცია სიმეტრიულია $f = 0$ მიმართ. ფურიეს მწკრივის შედეგად მიღებული გრაფიკი წარმოადგენს გადაცემის ფუნქციის გრაფიკს. არსებობს ფილტრის კოეფიციენტების განსაზღვრის რამოდენიმე მეთოდი. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

8.2 გაგლუვების მეთოდი

ციფრული ფილტრების პროექტირებისას გაგლუვების მეთოდი ეფუძნება სწორი ხაზის ან პოლინომიალურ აპროქსიმაციას ანუ ხდება მონაცემთა გაგლუვება, სადაც ფილტრის კოეფიციენტები მოიძებნებიან უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. ეს მიდგომა წარმოადგენს კლასიკურს, ადვილად გასაგებია და ფსიქოლოგიურადაც მისაღებია. გარდა ამისა, როგორც პრაქტიკა გვიჩვენებს, გაგლუვების მეთოდი მეტად პოპულარულია და იძლევა კარგ შედეგს. ფილტრების თეორიაში ამ მეთოდს სიხშირულ მეთოდსაც უწოდებენ. განვიხილოთ სრიალა საშუალოს და პოლინომიალური გაგლუვების მეთოდები.

სრიალა საშუალოს მეთოდი. გაგლუვების ერთ-ერთ ყველაზე მარტივ მეთოდს წარმოადგენს სრიალა(მცოცავი) საშუალოს მეთოდი, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობს: მოცემული დისკრეტული $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \ldots\ldots, x(k\Delta t)$ თანმიმდევრობიდან, სადაც Δt დისკრეტიზაციის ინტერვალია, აიღება პირველი m წევრი $x(0), x(\Delta t), x(2\Delta t), \ldots\ldots, x(m\Delta t)$. დაუშვათ, რომ m კენტი რიცხვია. გამოითვლება მათი საშუალო არითმეტიკული და ეს მნიშვნელობა მიეკუთვნება თანმიმდევრობის შუა წევრს, რომლის რიგითი ნომერია $(m+1)/2$. შემდეგ აიღება $x(\Delta t), x(2\Delta t), \ldots\ldots, x((m+1)\Delta t)$ წევრები, გამოითვლება მათი საშუალო მნიშვნელობა, რომლის სიდიდე მიეკუთვნება ამ თანმიმდევრობის შუა $(m+3)/2$ წევრს და ა.შ. ეს პროცედურა გაგრძელდება თანმიმდევრობის სრულ ამოწურვამდე.

ამრიგად, სრიალა საშუალოებით გაგლუვება წარმოადგენს ალგორითმს, რომლითაც ფილტრის გამოსავალი თანმიმდევრობა შეიძლება წარმოვადგინოთ (8.1) ფორმულის საშუალებით.

თუ გამოვიყენებთ Z - გარდაქნას, მაშინ ვღებულობთ ფილტრის გადაცემ ფუნქციას

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k} = a_0 + a_1 Z^{-1} + a_2 Z^{-2} + \cdots\cdots + a_N Z^{-N} .$$

სრიალა საშუალოს მარტივ ფილტრს მიეკუთნება **ჰემინგის ფილტრი**, რომელიც მოცემულია შემდეგი გამოსახულებით:

$$y(n\Delta t)=\frac{1}{4}\left[x(n\Delta t)+2x(n\Delta t-\Delta t)+x(n\Delta t-2\Delta t)\right]. \qquad (8.2)$$

როგორც ვხედავთ, მოცემული განტოლება წარმოადგენს სხვაობით განტოლებას, სადაც ჩანს, რომ გამოსავალი $y(n\Delta t)$ სიდიდე დროის ნებისმიერ მომენტში ტოლია ამ მომენტში შემავალ $x(n\Delta t)$ მნიშვნელობისა, დამატებული გაორკეცებული ჯამი შესავალი მნიშვნელობისა დროის წინა მომენტში $x(n\Delta t-\Delta t)$ და დამატებული $x(n\Delta t-2\Delta t)$ შესავალი მნიშვნელობა $2\Delta t$ დროის წინ.

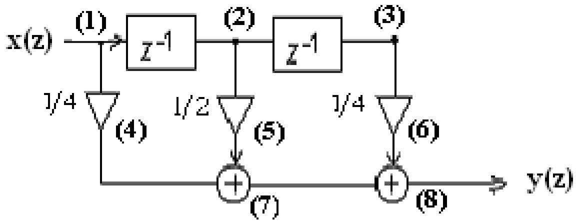
ნებისმიერი შემავალი წერტილისათვის, მაგალითად $n=5$, გამოსავალი იქნება:

$$y(5\Delta t)=\frac{1}{4}\left[x(5\Delta t)+2x(4\Delta t)+x(3\Delta t)\right].$$

(8.2) გამოსახულების Z – გარდაქმნა ტოლია:

$$y(z)=\frac{1}{4}\left[X(z)+2X(z)Z^{-1}+X(z)Z^{-2}\right] . \qquad (8.3)$$

ასეთი ფილტრის გადაცემის ფუნქციის განსაზღვრისათვის განვიხილოთ შესასვლელზე ერთეულოვანი იმპულსის Z–გარდაქმნა და განვსაზღვროთ გადაცემის ფუნქცია. ამისათვის განვიხილოთ (8.3) ფილტრის სტრუქტურული სქემა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:



ნახ. 8.1

თუ ფილტრის შესავალზე მივაწვდით ერთეულოვან იმპულს, მაშინ მის გამოსავალზე მივიღებთ შემდეგ თანმიმდებრობებს:

$(1)\ (1,0,0,0,0,\ldots\ldots)$ $\qquad (5)\ (0,1/2,0,0,0,\ldots\ldots)$

$(2)\ (0,1,0,0,0,\ldots\ldots)$ $\qquad (6)\ (0,0,1/4,0,0,\ldots\ldots.)$

$(3)\ (0,0,1,0,0,\ldots\ldots)$ $\qquad (7)\ (1/4,1/2,0,0,\ldots\ldots.)$

$(4)\ (1/4,0,0,0,\ldots\ldots)$ $\qquad (8)\ (1/4,1/2,1/4,0,\ldots\ldots)$

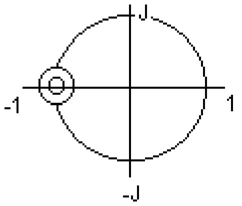
გადაცემის ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{2} a_k Z^{-k} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}Z^{-1}+\frac{1}{4}Z^{-2} = \frac{1}{4}\left(1+2Z^{-1}+Z^{-2}\right) .$$

ფილტრის ნულების საპოვნელად გადაცემის ფუნქცია გაუტოლოთ ნულს და შემდეგ ამოვხსნათ z-ის მიმართ.

$$\frac{1}{4}\left(1+2Z^{-1}+Z^{-2}\right) \quad Z^{2}+2Z+1=0,\ Z=-1;-1.$$

მივიღეთ ორი ნული და ორივე z - სიბრტყის -1 წერტილში



ფილტრის ამპლიტუდური და ფაზური მახასიათებლების განსაზღვრისათვის ფილტრის გადაცემის ფუნქციის გამისახულებაში z - ს მაგივრად ჩავსვათ $e^{j\omega\Delta t}$, მაშინ გვექნება:

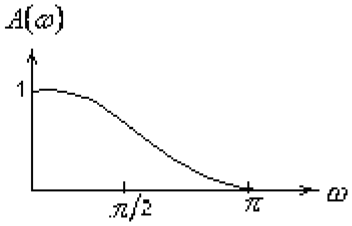
$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)=\frac{1}{4}\left(1+2e^{-j\omega\Delta t}+e^{-j2\omega\Delta t}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{j\omega\Delta t}+2+e^{-j\omega\Delta t}\right)e^{-j\omega\Delta t}=$$

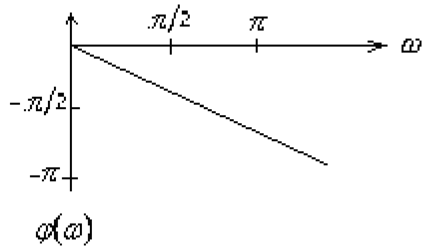
$$=\frac{1}{4}\left(2+2\cos(\omega\Delta t)\right)e^{-j\omega\Delta t}=\frac{1}{2}\left(1+\cos(\omega\Delta t)\right)e^{-j\omega\Delta t}$$

როგორც ცნობილია, ამპლიტუდური მახასიათებელია

$A(\omega)=\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|=\frac{1}{2}\left(1+\cos(\omega\Delta t)\right)$, ხოლო ფაზური: $\varphi(\omega)=J_m\left[H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right]=-\omega\Delta t$.

$A(\omega)$ და $\varphi(\omega)$ ფუნქციების გრაფიკები ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:





როგორც ნახაზიდან ჩანს, დაბალი სიხშირის ფილტრის ამპლიტუდური მახასიათებელი დამახინჯებული ფორმისაა, იგი ერთის ტოლია მუდმივი დონის სიგნალისათვის და ნულის ტოლია ზედდების სიხშირეზე, ე.ი. როცა $\omega\Delta t=\pi$, რადგან $2\pi f\Delta t=\pi$ ან $f=1/2\Delta t$, ამიტომ ფაზური მახასიათებელი წრფივია, რაც მეტად სასურველია, განსაკუთრებით ბიოსიგნალების დამუშავებისას.

თუ ავიღებთ ხუთწევრიან სრიალა საშუალოს ფილტრს, მაშინ ფილტრის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$y(n\Delta t)=\frac{1}{5}\left[x(n\Delta t-2\Delta t)+x(n\Delta t-\Delta t)+x(n\Delta t)+x(n\Delta t+\Delta t)+x(n\Delta t+2\Delta t)\right],$$

ხოლო მისი Z–გარდაქმნა იქნება:

$$Y(z)=\frac{1}{5}\left[X(z)+X(z)Z^{-1}+X(z)Z^{-2}+X(z)Z^{-3}+X(z)Z^{-4}\right].$$

ერთეულოვანი იმპულსის დროს, როცა $X(z)=1$, გვექნება შემდეგი გადაცემის ფუნქცია:

$$H(z)=\frac{1}{5}\left[1+Z^{-1}+Z^{-2}+Z^{-3}+Z^{-4}\right].$$

ამპლიტუდური და ფაზური მახასიათებლების მოსაძებნად გადაცემის ფუნქციის განტოლებაში ჩავსვათ $z=e^{j\omega\Delta t}$, მაშინ მივიღებთ:

$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)=\frac{1}{5}\left[1+e^{-j\omega\Delta t}+e^{-2j\omega\Delta t}+e^{-3j\omega\Delta t}+e^{-4j\omega\Delta t}\right]=\frac{1}{5}\left[e^{2j\omega\Delta t}+e^{j\omega\Delta t}+1+e^{-j\omega\Delta t}+e^{-2j\omega\Delta t}\right]e^{-2j\omega\Delta t}=$$

$$=\frac{1}{5}\left[1+2\cos(\omega\Delta t)+2\cos(2\omega\Delta t)\right]e^{-j2\omega\Delta t}$$

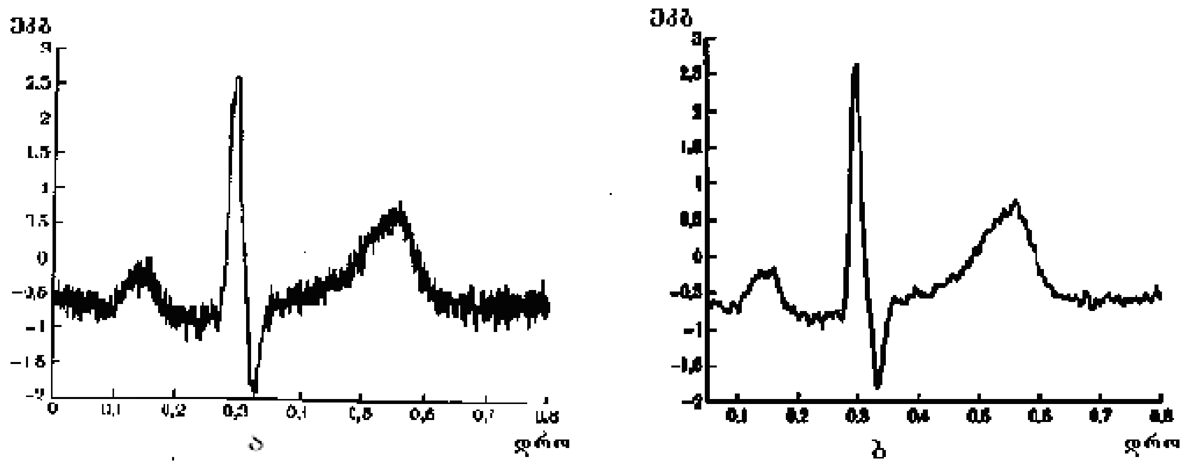
საიდანაც ვღებულობთ:

$$A(\omega)=\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|=\frac{1}{2}\left(1+\cos(\omega\Delta t)+2\cos(2\omega\Delta t)\right);\qquad \varphi(\omega)=J_m\left[H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right]=-2\omega\Delta t .$$

სრიალა საშუალოს ფილტრს გააჩნია შემდეგი დადებითი თვისებები:

- იმპულსურ მახასიათებელს გააჩნია სასრულო რაოდენობის წევრები a_k, $k=0,1,2,\ldots,N$;
- ფილტრი შეიძლება რეალიზირებული იყოს უკუკავშირის გარეშე;
- ფილტრის გამოსავალი დამოკიდებულია მხოლოდ შემავალი თანმიმდევრობის მიმდინარე მნიშვნელობებზე და რამოდენიმე ბოლო გამოსავალ ანათვალზე;
- ფილტრი შედგება მხოლოდ წონითი კოეფიციენტების და დაყოვნების ელემენტებისაგან, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 8.1-ზე;
- გადაცემის ფუნქციას არ გააჩნია პოლუსები, ამიტომ ფილტრი მდგრადია;
- ფილტრის ფაზური მახასიათებელი წრფივია იმ პირობით, რომ ფილტრის წონითი კოეფიციენტები სიმეტრიულია.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ნახ. 8.2ა-ზე წარმოდგენილი ელექტროკარდიოგრამის (ეკგ) ფრაგმენტი მაღალი სიხშირის ხმაურით.

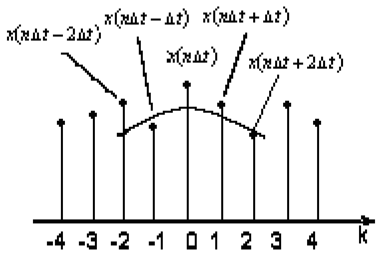


ნახ. 8.2

ნახ. 8.2ბ-ზე ნაჩვენებია იგივე ეკგ ფრაგმენტი ცხრაწერტილიანი სრიალა საშუალოს გაგლუვების ფილტრის გამოყენების შემდეგ.

პარაბოლური გაგლუვების მეთოდი. დაუშვათ გვინდა პარაბოლური გაგლუვების მეთოდით დავაპროექტოთ დაბალი სიხშირის სიმეტრიული

ფილტრი. ავიღოთ თანმიმდევრობის 5 წერტილზე გამავალი პარაბოლა, როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



პარაბოლას ცენტრალური წერტილია $x(n\Delta t)$. ფილტრის სხვაობით განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$y(n\Delta t) = ax(n\Delta t - 2\Delta t) + bx(n\Delta t - \Delta t) + cx(n\Delta t) + bx(n\Delta t + \Delta t) + ax(n\Delta t + 2\Delta t),$$

ხოლო გადაცემის ფუნქცია იქნება:

$$H(z) = a + bZ^{-1} + cZ^{-2} + bZ^{-3} + aZ^{-4}.$$

თუ მოვახდენთ $Z = e^{j\omega\Delta t}$ ჩასმას, მაშინ მივიღებთ:

$$H(e^{j\omega\Delta t}) = \left[a + be^{-j\omega\Delta t} + ce^{-2j\omega\Delta t} + be^{-3j\omega\Delta t} + ae^{-4j\omega\Delta t}\right] = \left[ae^{2j\omega\Delta t} + be^{j\omega\Delta t} + c + be^{-j\omega\Delta t} + ae^{-2j\omega\Delta t}\right]e^{-2j\omega\Delta t} =$$

$$= \left[c + a2\cos(\omega\Delta t) + b2\cos(2\omega\Delta t)\right]e^{-j2\omega\Delta t}$$

ამპლიტუდური მახასიათებელი იქნება:

$$A(\omega) = \left|H(e^{j\omega\Delta t})\right| = (c + a\cos(\omega\Delta t) + b\cos(2\omega\Delta t)) \ ,$$

ხოლო ფაზური: $\varphi(\omega) = J_m\left[H(e^{j\omega\Delta t})\right] = -2\omega\Delta t$.

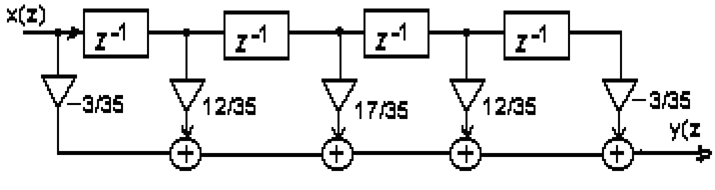
როგორც ვხედავთ, ამოცანა დაიყვანება a, b და c კოეფიციენტების განსაზღვრაზე. მათემატიკური სტსტისტიკის კურსიდან ჩვენთვის ცნობილია, რომ პარაბოლას კოეფიციენტების განსაზღვრა შესაძლებელია უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. მაშინ 5 წერტილიანი პარაბოლისათვის გვექნება შემდეგი კოეფიციერტები:

$$\frac{1}{35}(-3;\, 12;\, 17;\, 12;\, -3),$$

7 წერტილისათვის: $\frac{1}{21}(-2;\, 3;\, 6;\, 7;\, 6;\, 3;\, -2)$;

9 წერტილისათვის: $\frac{1}{231}(-21;\, 14;\, 39;\, 54;\, 59;\, 54;\, 39;\, 14;\, -21)$ და ა.შ.

5 წერტილიანი ფილტრის სტრუქტურული სქემა შიმდეგია:



ასეთი ფილტრის გადაცემის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(z) = \frac{1}{35}\left(-3 + 12Z^{-1} + 17Z^{-2} + 12Z^{-3} - 3Z^{-4}\right) .$$

თუ მოვახდენთ $Z = e^{j\omega\Delta t}$ ჩასმას, მაშინ მივიღებთ:

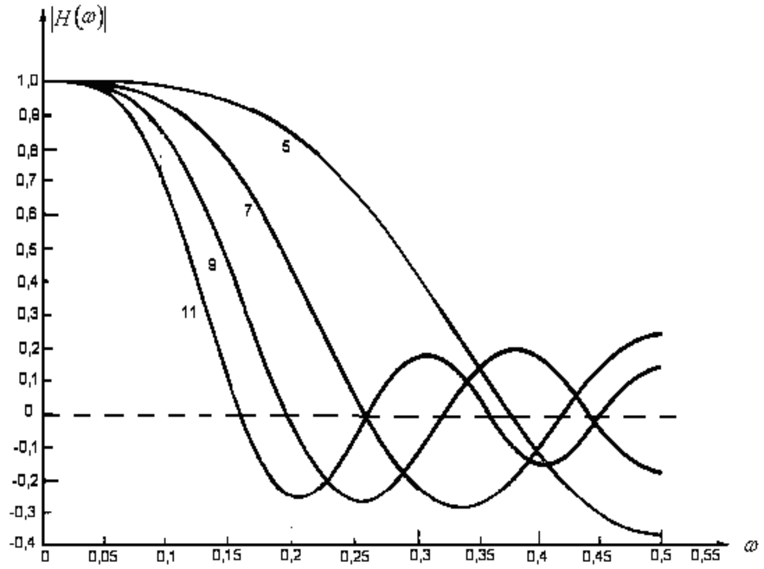
$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)=\frac{1}{35}\left(-3+12e^{-j\omega\Delta t}+17e^{-j2\omega\Delta t}+12e^{-j3\omega\Delta t}-3e^{-j4\omega\Delta t}\right)=$$

$$=\frac{1}{35}\left(-3e^{j2\omega\Delta t}+12e^{j\omega\Delta t}+17+12e^{-j\omega\Delta t}-3e^{-j2\omega\Delta t}\right)e^{-j2\omega\Delta t}=\frac{1}{35}\left(17+24\cos(\omega\Delta t)-6\cos(2\omega\Delta t)\right)e^{-j2\varsigma\Delta t}$$

აქედან გვექნება:

$$A(\omega\Delta t)=\frac{1}{35}\left(17+24\cos(\omega\Delta t)-6\cos(2\omega\Delta t)\right) \quad \text{და} \quad \varphi(\omega\Delta t)=-2\omega\Delta t\ .$$

პარაბოლური გაგლუვების ფილტრის გადაცემის ფუნქცია სხვადასხვა რაოდენობის წერტილებისათვის მოცემულია შემდეგ ნახაზზე:



როგორც ნახაზიდან ჩანს, რაც უფრო დიდია წერტილების რაოდენობა, მით უფრო სწრაფად ხდება ამპლიტუდური მახასიათებლის სიხშირულ ღერძთან გადაკვეთა.

ზემოდ ჩვენ განვიხილეთ მეორე რიგის პარაბოლური გაგლუვება (მესამე რიგის პარაბოლა იგივე შედეგს იძლევა). თუ გავაგრძელებთ და ავიღებთ მეოთხე რიგის პარაბოლას (მეხუთე რიგის პარაბოლა იგივე შედეგს იძლევა), შემდეგ მეექვსეს და ა.შ., მაშინ ფილტრის ამპლიტუდური მახასიათებლის სიხშირულ ღერძთან გადაკვეთა მით უფრო სწრაფად ხდება, რაც უფრო მაღალი რიგისაა პარაბოლა. პრაქტიკაში უფრო ხშირად იყენებენ მეორე და მეოთხე რიგის პარაბოლებს, რადგან უფრო მაღალი რიგის პარაბოლის გამოყენება დაკავშირებულია რთულ გამოთვლებთან.

8.3 არარეკურსიული გადამღობი ფილტრი

შეიძლება დავაპროექტოთ ფილტრი, რომელიც მოკვეთს მხოლოდ ერთ სიხშირეს, თუ გამოვიყენებთ შემდეგ სხვაობით განტოლებას:

$$y(n\Delta t)=\frac{1}{3}\left[x(n\Delta t)+x(n\Delta t-\Delta t)+x(n\Delta t-2\Delta t)\right]\ ,$$

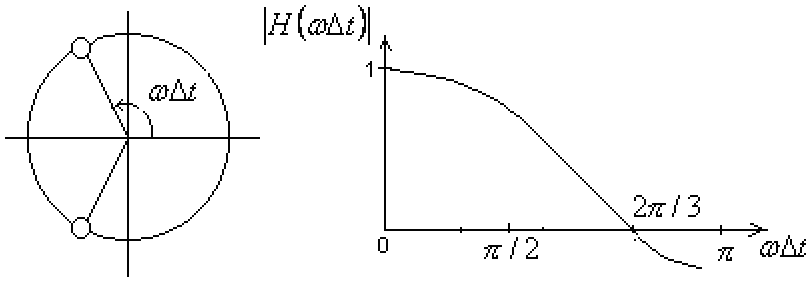
რომლის გადაცემის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(z)=\frac{1}{3}\left(1+Z^{-1}+Z^{-2}\right)\ .$$

ნულების განსაზღვრისათვის უნდა ამოვხსნათ შემდეგი განტოლება:

$$z^2 + z + 1 = 0, \qquad z = -0{,}5 \pm j0{,}866 .$$

რადგან ორივე ნული მდებარეობს ერთეულოვან წერტილზე (ნახ. 8.3) როცა $\omega\Delta t = \pm 2\pi/3$, ამიტომ ამ წერტილების შესაბამისი სიხშირე მთლიანად ჩაიხშობა.



ნახ. 8.3

დაუშვათ, ჩვენ გვინდა 60 ჰც სიხშირის ჩახშობა და ამასთან სიგნალის დაქვანტის ანუ დისკრეტიზაციის სიხშირე იყოს 180 ჰც, მაშინ 180 ჰც სიხშირეს ერთეულოვან წრეწირზე შეესაბამება

$$\omega\Delta t = \frac{2\pi f}{f_d} = \frac{2\pi 60}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

კუთხე ანუ ზუსტად ნულოვანი მდებარეობა. ფილტრის ამპლიტუდურ და ფაზურ მახასიათებლებს ვპოულობთ ჩვეულებრივ გადაცემის ფუნქციაში $z = e^{j\omega\Delta t}$ ჩასმით, ე.ი.

$$H\left(e^{j\omega\Delta t}\right) = \frac{1}{3}\left[1 - e^{-j\omega\Delta t} + e^{-2j\omega\Delta t}\right] = \frac{1}{3}\left[e^{j\omega\Delta t} + 1 + e^{-j\omega\Delta t}\right]e^{-j\omega\Delta t} = \frac{1}{3}\left[1 + 2\cos(\omega\Delta t)\right]e^{-j\omega\Delta t},$$

აქედან გვექნება: $A(\omega\Delta t) = \left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right| = \frac{1}{3}\left(1 + 2\cos(\omega\Delta t)\right), \quad \varphi(\omega\Delta t) = -\omega\Delta t .$

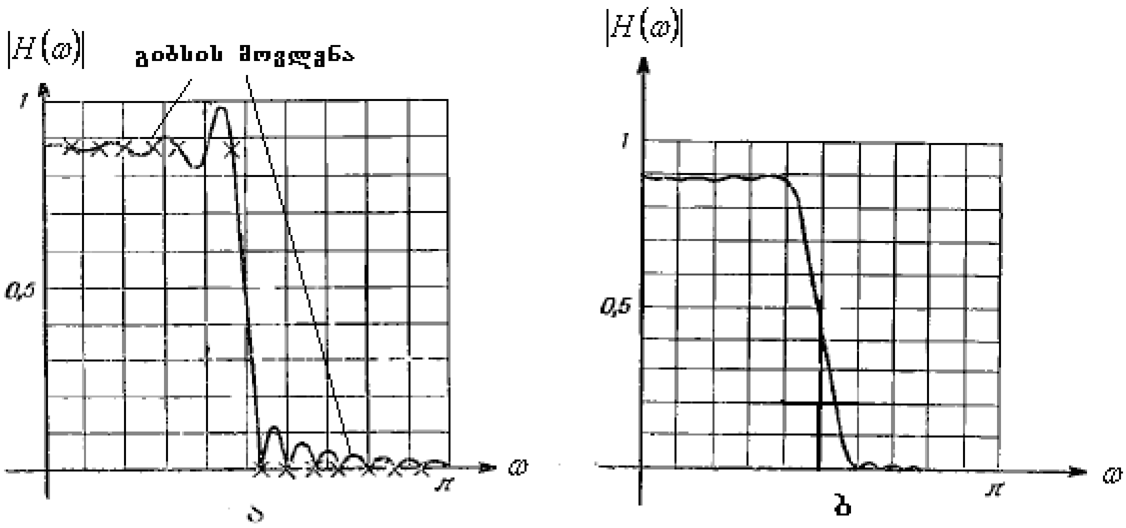
8.4 ციფრული ფილტრის სინთეზი ფურიეს გარდაქმნის მეთოდით

არარეკურსიული ფილტრის პროექტირებისათვის შესაძლებელია გამოყენებული იყოს ფურიეს მწკრივები. თუ მოცემულია ფილტრის სიხშირული მახასიათებელი $H\left(e^{j\omega}\right)$ ω პერიოდით, მაშინ ფილტრის გადაცემის ფუნქციის კოეფიციენტები შეგვიძლია მივიღოთ სიხშირული მახასიათებლის ფურიეს მწკრივად გაშლის შედეგად. ამ დროს მთავარი სიძნელე იმაში მდგომარეობს, რომ ფურიეს მწკრივს გააჩნია უსასრულო წევრთა რაოდენობა, რაც პრაქტიკულად ფილტრს ხდის არარეალიზებადს. აქედან გამომდინარე, საჭიროა ფურიეს მწკრივში დავტოვოთ სასრულო რაოდენობის წევრები, რაც თავის მხრივ ეს იწვევს გადაცემის ფუნქციის არასასურველ რხევებს, რომელიც პირველად შეამჩნია გიბსმამ და ამიტომ ამ მოვლენას **გიბსის მოვლენა** უწოდეს.

განვიხილოთ მართკუთხა იმპულსი (ნახ. 2.17) და მისი ფურიეს მწკრივი

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

თუ ავიღებთ სასრულო რაოდენობის წევრებს, მაშინ გვექნება ასეთი სურათი (ნახ. 8.4ა):



ნახ. 8.4

ლანცოშმა შეამჩნია, რომ პულსაციის პერიოდი ემთხვევა ფურიეს მწკრივში ან პირველ გადაგდებული წევრის ან ბოლო დატოვებული წევრის პერიოდს. მან აჩვენა, რომ ნებისმიერ შემთხვევაში ამ პერიოდით გასაშუალება იძლევა გიბსის მოვლენის ჩახშობას. ამრიგად, თუ სასრული რაოდენობის ფურიეს მწკრივს

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right]$$

გავასაშუალებთ t-ს მიმართ $2\pi/N$ სიგრძის სიმეტრიულ ინტერვალებზე, მივიღებთ:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\sigma(N,k)\left[a_k \cos kt + b_k \sin kt\right] ,$$

სადაც

$$\sigma(N,k) = \frac{\sin\frac{\pi k}{N}}{\frac{\pi k}{N}}$$

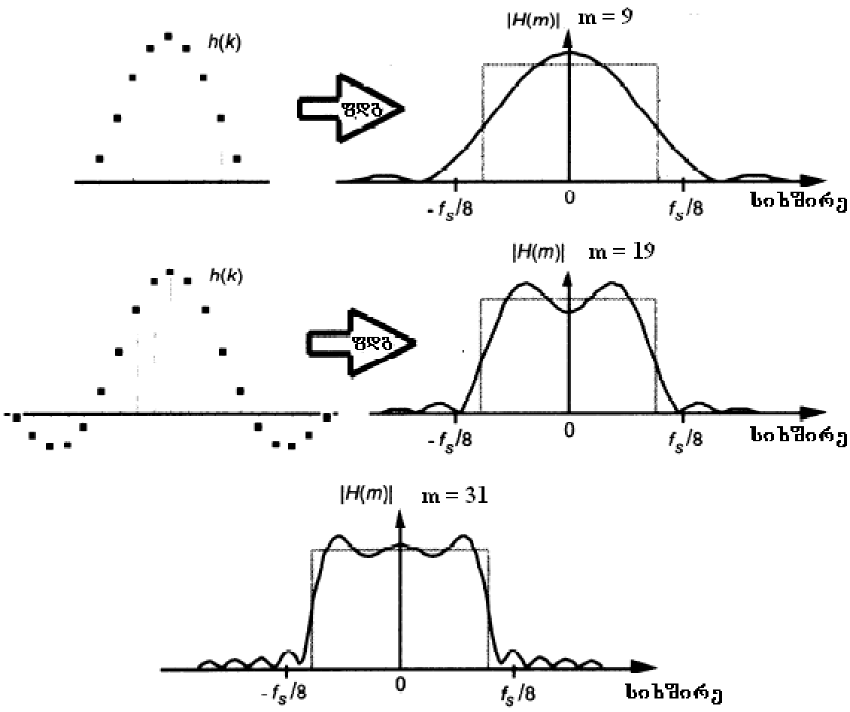
და მას **სიგმა-ფაქტორს** უწოდებენ. ამრიგად, თუ ფურიეს კოეფიციენტებს გავამრავლებთ სიგმა-ფაქტორზე, მაშინ ხდება გიბსის მოვლენის ჩახშობა (ნახ. 8.4ბ). სიგმა-ფაქტორს ხშირად ლანცოშის ფანჯარასაც უწოდებენ. გიბსის მოვლენის გამოსარიცხავად, გარდა ლანცოშის ფანჯრისა, იყენებენ სხვა ფანჯრებსაც, მაგალითად ჰენინგის, ჰემინგის და სხვა.

არარეკურსიული ფილტრის კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის ხშირად იყენებენ მართკუთხა სიგნალის ფურიეს გარდაქმნასაც:

$$X(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} .$$

ფილტრის კოეფიცინტები მიიღება შემდეგნაირად: ჯერ გამოითვლება მართკუთხა იმპულსის კოეფიცინტები. შემდეგ მიღებული კოეფიციენტები მრავლდება ფანჯრის ფუნქციაზე ისევე როგორც ფურიეს გაშლის მეთოდის დროს.

უნდა აღინიშნოს, რომ რაც უფრო მეტია ფილტრის კოეფიციენტების რაოდენობა მით უფრო ახლოსაა ფილტრის სიხშირული მახასიათებელი იდეალურთან, როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 8.5-ზე



ნახ. 8.5

განვიხილოთ $(0-f_s)$ გამშვები ზოლიანი დაბალ სიხშირის ფილტრი, რომლის კოეფიციენტები გამოითვლებიან შემდეგნაირად:

$$a_0 = 2f_s\Delta t; \quad a_k = \frac{\sin(2\pi\, f_s \Delta tk)}{\pi k}, \quad k = 1,2,....,m \ ,$$

სადაც მაქსიმალური სიხშირე ტოლია: $f_{\max} = 1/(2\Delta t)$.

თუ მიღებულია დაბალი სიხშირის ფილტრის კოეფიციენტები, მაშინ ადვილია მაღალი, ზოლური და გადამღობი ფილტრების სინთეზი. განვიხილოთ ეს შემთხვევები.

მაღალი სიხშირის $(f_s - f_m)$ გამშვები ზოლის ფილტრის სინთეზისათვის ჯერ საჭიროა მივიღოთ დაბალი სიხშირის $(0-f_s)$ გამშვები ზოლის ფილტრი და შემდეგ მოვახდინოთ ცენტრალური წონითი კოეფიციენტის a_0–ის გამოკლება ერთიდან, ხოლო დანარჩენ კოეფიციენტებს შევუცვალოთ ნიშანი, ე.ი.

$$a_0^{/} = 1 - a_0 \ ; \quad a_k^{/} = -a_k \ ; \quad k = 1,2,....,m$$

ზოლური ფილტრის მისაღებად, რომლის გამშვები ზოლია $(f_1 - f_2)$, საჭიროა მოვიქცეთ შემდეგნაირად. უნდა მივიღოთ ორი დაბალი სიხშირის ფილტრები $(0-f_1)$ და $(0-f_2)$ გამშვები ზოლებით. ზოლური ფილტრის კოეფიციენტების მისაღებად $(0-f_2)$ სიხშირიან ფილტრის კოეფიციენტებს უნდა გამოვაკლოთ $(0-f_1)$ სიხშირიანი ფილტრის კოეფიციენტები, მაშინ გვექნება:

$$a_0 = 2\Delta t(f_2 - f_1); \quad a_k = \frac{\sin(2\pi\, f_2 k\Delta t) - \sin(2\pi\, f_1 k\Delta t)}{\pi k}, \quad k = 1,2,.....,m.$$

გადამღობი ფილტრის მისაღებად, რომელმაც არ უნდა გაუშვას სიგნალი $\left(f_1 - f_2\right)$ ინტერვალში, საჭიროა იგივე ორი დაბალი სიხშირის ფილტრის მიღება და მისი საშუალებით გამოითლება ზოლური ფილტრის კოეფიციენტები შემდეგი ფორმულებით:

$$a_0 = 1 - 2\Delta t\left(f_2 - f_1\right), \quad a_k = \frac{\sin\left(2\pi\, f_1 k\Delta t\right) + \sin(\pi k) - \sin\left(2\pi\, f_2 k\Delta t\right)}{\pi k}, \quad k = 1,2,.....,m.$$

ოთხივე ფილტრის ამპლიტუდურ – სიხშირული მახასიათებელი განისაზღვრება ჩეულებრივ, ჩვეროთვის უკვე ცნობილი ფორმულით:

$$H\left(f\right) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{m} a_k \cos\left(2\pi\, fk\Delta t\right), \quad f = 0,1,2,....., \tfrac{1}{2\Delta t}.$$

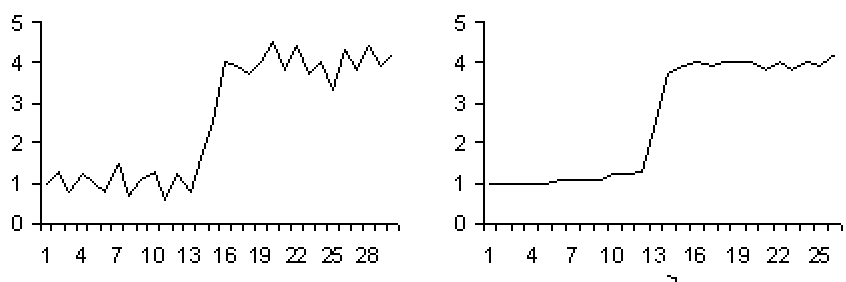
8.5 მედიანური ფილტრი

ზოგადად ხმაური შეიძლება დავყოთ ორ ტიპად სტაციონარულ და იმპულსურად, რომელთა წინააღმდეგ ბრძოლა განსხვავებულია. ასე მაგალითად, სტაციონარული ხმაური შეგვიძლია მნიშვნელოვნად შევამციროთ წრფივი ციფრული ფილტრებით, ხოლო იმპულსური ხმაურის მოსახსნელად უმჯობესია გამოვიყენოთ არაწრფივი ფილტრები, კერძოდ მედიანური ფილტრი.

მედიანური ფილტრი პირველად ტიუკიმ შემოგვთავაზა 1971წ სიგნალების ციფრული დამუშავებისათვის. განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი მედიანური ფილტრი, რომელიც წარმოადგენს ე.წ. „მცოცავ ფანჯარას“ ანუ **აპერტურას**, სადაც ცენტრალური (შუაში მდგომი) მონაცემის სიდიდე იცვლება აპერტურის მედიანის მნიშვნელობით. მათემატიკური სტატისტიკიდან ცნობილია, რომ მედიანა არის სტრუქტურული საშუალო მნიშვნელობა, რომელიც ტოლია n განზომილებიანი რანჟირებული თანმიმდევრობის შუაში მდგომი მნიშვნელობისა, ე.ი. როცა n ლუწია $med\{x(n)\} = 0{,}5\left[x(n/2) + x(n/2+1)\right]$, ხოლო როცა n კენტია, მაშინ $med\{x(n)\} = x\left[(n+1)/2\right]$, სადაც n სიდიდეს განსაზღვრავს ფილტრის აპერტურა. მაგალითად, თუ ფილტრის აპერტურა $n =$ 5, მაშინ $med\{0, 2, 7, 0, 3\} = 2$.

ფილრტის გაგლუვების მეთოდებთან შედარებით მედიანურ ფილტრს, გარკვეულ კონკრეტულ შემთხვევებში, გააჩნია უპირატესობა. განვიხილოთ ასეთი ორი შემთხვევა.

1. მედიანური ფილტრაცია ინარჩუნებს საწყისი სიგნალის მკვეთრ გადასვლებს (ვარდნებს), მაშინ როცა გაგლუვების მეთოდით სიგნალი მახინჯდება. ნახ. 8.6 ნაჩვენებია საწყისი (ა) და მედიანური ფილტრით (ბ) მიღებული შედეგები.



ა ბ

ნახ. 8.6

როგორც ნახ. 3.6ბ-ზე ჩანს მედიანური ფილტრი ინარჩუნებს სიგნალის მკვეთრ გადასვლას.

2. მედიანური ფილტრი საკმაოდ ეფექტურია იმპულსური ხმაურის ჩასახშობად, რაც სხვა ციფრული ფილტრებისათვის თითქმის მიუღწეველია. იმპულსურ ხმაურად ითვლება მაღალი ამპლიტუდის (როგორც დადებითი ასევე უარყოფითი) და ხანმოკლე ხანგრძლიობის იმპულსები, რომლებიც ამახინჯებენ სიგნალს.

მედიანური ფილტრი ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

– $med\{ax(k)\} = amed\{x(k)\}$;

– $med\{a_0 + x(k)\} = a_0 + med\{x(k)\}$,

სადაც a და a_0 მუდმივი სიდიდეებია. აღსანიშნავია, რომ მედიანურ ფილტრს არ გააჩნია სუპერპოზიციის პრინციპი

$$med\{x_1(k) + x_2(k)\} \neq med\{x_1(k)\} + med\{x_2(k)\}$$

და მისი არაწრფიობის გამო შეუძლებელია მკაცრად განვასხვაოთ მედიანური ფილტრის ზეგავლენა სიგნალზე და ხმაურზე (წრფივი ფილტრის შემთხვევაში ასეთი ამოცანა ადვილად იხსნება).

თუ საწყისი მონაცემები თანაბრადაა განაწილებული, მაშინ მედიანას დისპერსია ტოლია:

$$\sigma^2_{med} = \frac{3\sigma^2_x}{n+2}$$

სადაც σ^2_x– საწყისი მონაცემების დისპერსიაა, n – ფარჯრის აპერტურა. თუ მონაცემები ნორმალურად არის განაწილებული, მაშინ გვექნება:

$$\sigma^2_{med} = \frac{\left(\sigma^2_x \pi/2\right)}{\left(n + \pi/2 - 1\right)}, \quad n = 1,3,5,\ldots..$$

რადგან n განზომილებიანი ამონარჩევის საშუალო მნიშვნელობის დისპერსია ტოლია σ^2_x/n სიდიდისა, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მედიანური ფილტრაციის ეფექტი სრიალა საშუალოს მეთოდთან შედარებით დიდი n-ის დროს დაახლოებით $(\pi/2 - 1) \approx 60\%$ დაბალია. მაგრამ თუ განვიხილავთ ორგანზომილებიან მნიშვნელობებს (მაგალითად, გამოსახულების დამუშავებისას), რომელებიც ნორმალურად არიან განაწილებულნი, მაშინ მედიანის ასიმპტოტური დისპერსია ტოლია:

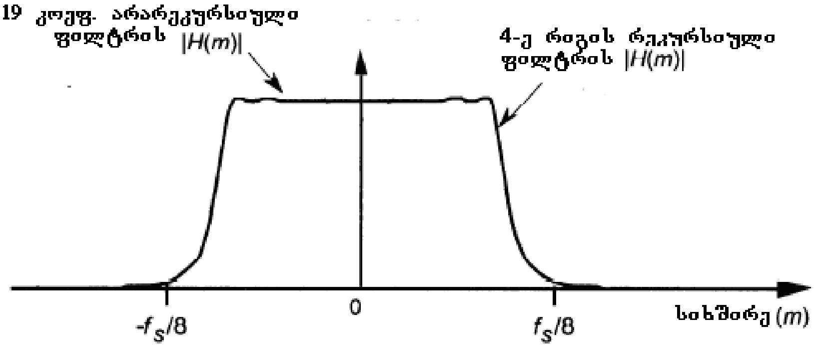
$$\sigma^2_{med} = \frac{0{,}5\sigma^2_x}{(n - 0{,}5)}$$

რაც დაახლოებით 50%-ით ნაკლებია, ვიდრე საშუალო არითმეტიკულის დისპერსია. ამრიგად, მედიანა წარმოადგენს საუკეთესო შეფასებას, ვიდრე საშუალო არითმეტიკული და ამასთანავე იგი ოპტიმალურია მინიმალური საშუალო კვადრატული ცდომილების კრიტერიუმით. სწორედ ამტომ არის, რომ მედიანურმა ფილტრმა განსაკუთრებული ადგილი დაიჭირა ორ და სამგანზომილებიანი გამოსახულების ფილტრაციის დროს.

9. რეკურსიული ციფრული ფილტრები

რეკურსიული ფილტრების დახმარებით შეგვიძლია უფრო ციცაბო სიხშირული მახასიათებლების რეალიზაცია ვიდრე არაკურსიული ფილტრებით. ე.ი რეკურსიული ფილტრით მიიღწევა ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის შედარებით უფრო კარგი აპროქსიმაცია, ვიდრე არარეკურსიული ფილტრით.

იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ რეკურსიული ფილტრის გამოყენების ეფექტი ნახ. 9.1-ზე ნაჩვენებია 19 კოეფიციენტიანი არარეკურსიული და მეოთხე რიგის რეკურსიული ფილტრების ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლები.



ნახ. 9.1

თუ 19 კოეფიციენტიან არარეკურსიულ ფილტრს ერთი ტაქტის დროს სჭირდება 19 გამრავლების ოპერაცია, მაშინ იგივე ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებლის მისაღებად საკმარისია მეოთხე რიგის რეკურსიული ფილტრი, რომელსაც სჭირდება მხოლოდ 9 გამრავლების ოპერაცია.

ამრიგად, რეკურსიულ ფილტრებს შეუძლიათ იგივე რაოდენობის გამრავლების ოპერაციით ფილტრაციის პროცესის უკეთ ჩატარება, ვიდრე არარეკურსიულ ფილტრებს.

რეკურსიული ფილტრის გადაცემის ფუნქცია

$$H(Z)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}a(k)Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1}b(k)Z^{-k}}$$

შეიძლება იყოს წარმოდგენილი პოლინომების უსასრულო ჯამით ან მათი შეფარებით. რადგან რეკურსიულ ფილტრებში გვაქვს უკუკავშირი, ამიტომ არასწორი შესრულებისას იგი შეიძლება იყოს არამდგრადი. გარდა ამისა, რეკურსიულ ფილტრებს არ გააჩნიათ წრფივი ფაზური მახასითებელი.

რეკურსიული ფილტრების სინთეზის დროს, როდესაც ვიყენებთ ამპლიტუდური მახასითებლის აპროქსიმაციას, ძირითადად გამოიყენება მხოლოდ ფილტრის ამპლიტუდური მახასითებლის კვადრატი

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=\left|H(z)H\left(z^{-1}\right)\right|.$$

ამ ფუქციის პოლუსებს და ნულებს Z სიბრტყეში ერთეულოვანი წრეწილის მიმართ გააჩნიათ სიმეტრიის თვისება. მდგრადი ფილტრებისათვის $H(z)$ ფუნქციის პოლუსები განლაგებულნი არიან ერთეულოვანი წრეწილის შიგნით, ამიტომ ისინი მთლიანად განისაზღვრებან ამპლიტუდური მახასითებლის კვადრატით. უმეტეს შემთხვევაში $H(z)$ ნულებიც განლაგებულნი არიან Z

სიბრტყის ერთეულოვან წრეწირზე ან მის შიგნით. ასეთ ფილტრებს მინიმალურ – ფაზური ფილტრები ეწოდებათ.

რადგან რეკურსიული ფილტრის გადაცემის ფუნქცია ზოგად შემთხვევაში წარმოადგენს ω–ს მიმართ კომპლექსურ ფუნქციას, ამიტომ ამპლიტუდური მახასიათებლის გარდა მიზანშეწონილია მისი ფაზური მახასიათებლის განსაზღვრაც.

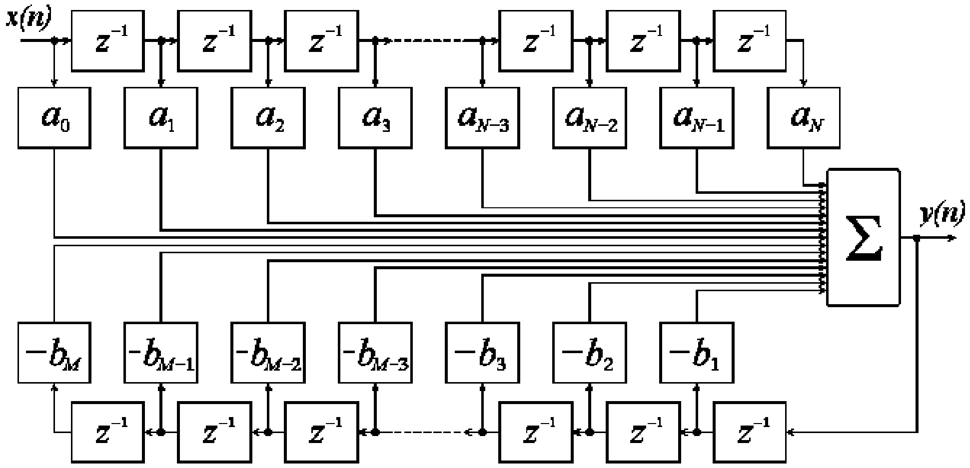
ზოგადად ფილტრის ანგარიში დაიყვანება მისი a_i და b_i კოეფიციენტების განსაზღვრაში, რომლებიც უზრუნველყოფენ ფილტრის მახასიათებლების აპროქსიმაციას.

9.1 რეკურსიული ფილტრის სტრუქტურული სქემები

რეკურსიული ფილტრი, რომელიც აღიწერება

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} b(k)y(n-k)$$

განტოლებით, შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სტრუქტურული სქემით:



ნახ. 9.2

რომელსაც პირდაპირი სტრუქტურული ფორმა ეწოდება.

როგორც ნახაზიდან ჩანს, არარეკურსიული ფილტრებისაგან განსხვავებით, რეკურსიული ფილრტის რეალიზაციისათვის საჭიროა დამატებული იყოს მეორე დაყოვნების ხაზი გამოსავალი $y(n-k)$ ანათვლების დასამახსოვრებლად. რადგან გამოთვლების დროს გამოიყენება სიგნალის წინა გამოსავალი მნიშვნელობები, ამიტომ ფილტრის სტრუქტურულ სქემაში გათვალისწინებულია უკუკავშირი. სწორედ ამიტომაა, რომ ასეთ ფილტრებს რეკურსიული ფილტრები ეწოდებათ.

რეკურსიული ფილრტის იმპულსური მახასიათებლის განსაზღვრა არც ისეთი ადვილია. განვიხილოთ მხოლოდ რამოდენიმე პირველი ანათვლებისათვის. ფილტრის შესასვლელზე ერთეულოვანი იმპულსისი მიწოდებისას ის მრავლდება a_0 კოეფიციენტზე და გადის ფილტრის გამოსავალზე, ე.ი. $h(0) = a_0$. შემდეგ

შემავალი ერთეულოვანი იმპულსი მოხვდება ფილტრის შემავალი დაყოვნების ხაზზე, ხოლო გამომავალი ანათვალი, რომელიც a_0 –ის ტოლია – გამოსავალ დაყოვნების ხაზზე. ამის შემდეგ იმპულსური მახასიათებლის მეორე ანათვალი ფორმირდება შემდეგნაირად: $h(1)=a_1+b_1h(0)=a_1+a_0b_1$. თუ ამ პროცედურას გავაგრძელებთ, მაშინ მივიღებთ:

$$h(2)=a_2+b_2h(0)+b_1h(1)=a_2+a_0b_2+b_1(a_1+a_0b_1)=a_2+a_1b_1+a_0b_2+a_0b_1^2$$

ცხადია, რომ გამოსავალი დაყოვნების ხაზის ანათვლებით შევსებისას იმპულსური მახასიათლების ანალიტიკური ფორმულის გამოსახულება მკვეთრად რთულდება.

სქემაში არსებული უკუკავშირი საშუალებას იძლევა მივიღოთ უსასრულო იმპულსური მახასიათებელის ფილტრი. უსასრულო იმპულსური მახასიათებელის გამო რეკურსიული ფილტრი შეიძლება არამდგრადი იყოს.

ნახ. 9.2 სქემის უპირატესობა ისაა, რომ მისი სტრუქტურა მარტივია და უშუალოდ არის დაკავშირებული **Z**–გარდაქმნასთან. მაგრამ, როგორც სქემიდან ჩანს, როცა $M=N$ საჭიროა $2N$ განზომილების ტოლი მეხსიერება და იგივე რაოდენობის აჯამვის და გამრავლების ოპერაციები. გარდა ამისა, ასეთი სტრუქტურული სქემის ფილტრის მახასიათებლები მეტად მგრძნობიარენი არიან კოეფიციენტების ცდომილებების მიმართ. ამიტომ პრაქტიკაში ცდილობენ, რომ ასეთი სქემა არ გამოიყენონ.

თუ ფილტრის გადაცემ ფუნქციას წარმოვადგენთ შემდეგნაირად

$$H(Z)=\frac{Y(Z)}{X(Z)}=\left(\frac{1}{\sum_{i=0}^{M}b_iZ^{-i}}\right)\left(\sum_{i=0}^{N}a_iZ^{-i}\right)=H_1(Z)H_2(Z),$$

მაშინ მივიღებთ სხვა სტრუქტურის ციფრულ ფილტრს, რომელიც შედგება თანმიმდევრულად შეერთებული ორი ფილტრისაგან, რომელთა გადაცემის ფუნქციებია $H_1(z)$ და $H_2(z)$. პირველ ფილტრს გააჩნია მხოლოდ პოლუსები, ხოლო მეორეს – მხოლოდ ნულები. თუ $H_1(z)$ და $H_2(z)$ გადაცემ ფუნქციებს წარმოვადგენთ შემდეგნაირად

$$x(z) \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow y(z)$$

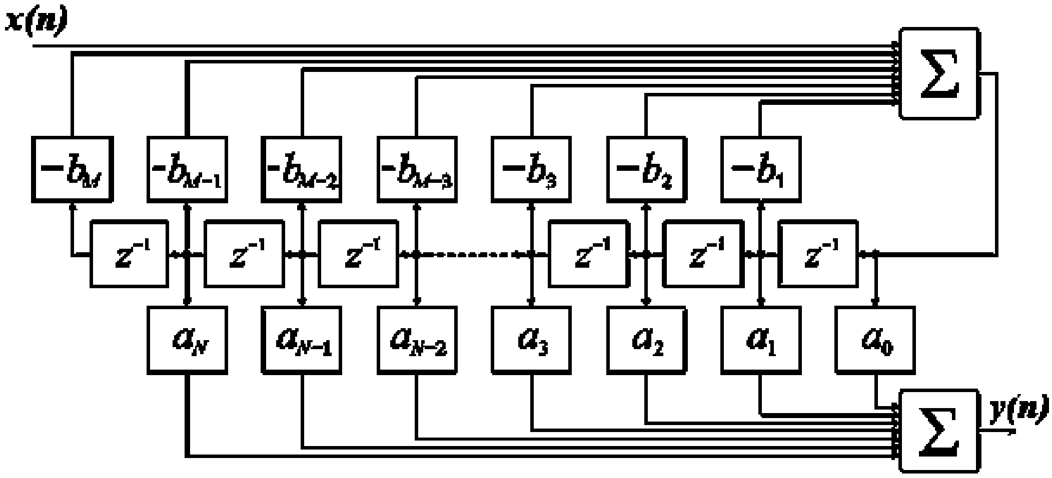
$$H_1(Z)=\frac{W(Z)}{X(Z)}=\frac{1}{\sum_{i=0}^{M}b_iZ^{=i}}\quad , \qquad H_2(Z)=\frac{Y(Z)}{W(Z)}=\sum_{i=0}^{N}a_iZ^{-i},$$

სადაც $W(Z)$-ით აღნიშნულია პირველი ფილტრის გამოსავალი სიგნალი, მაშინ მიიღება ორი სხვაობითი განტოლება (იგულისხმება, რომ $b_0=1$).

$$W(n)=x(n)-\sum_{i=1}^{M}b_iW(n-i)\ , \qquad y(n)=\sum_{i=0}^{N}a_iW(n-i)\ ,$$

რომლებიც შეიძლება რეალიზირებული იყოს შემდეგი სტრუქტურული სქემის (ნახ 9.3) საშუალებით, რომელსაც კანონიკურ სტრუქტურულ სქემას უწოდებენ

და მისი უპირატესობა ისაა, რომ აქ გამოიყენება აჯამვის, გამრავლების და დაყოვნების ოპერაციების მინიმალური რაოდენობა.



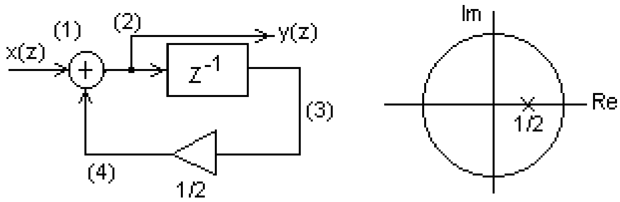
ნახ. 9.3

თეორიულად რეკურსიული ფილტრის ეს ორი სტრუქტურული სქემა ერთგვაროვანია, მაგრამ პრაქტიკული რეალიზაცის დროს მხედველობაში უნდა მივიღოთ ამ სქემების მთელი რიგი თავისებურებები. ასე მაგალითად, კანონიკური ფორმის დროს, სადაც გამოიყენება ერთი დაყოვნების ხაზი, საჭიროა მეხსიერების მცირე რაოდენობა და გამოიყენება აჯამვის, გამრავლების და დაყოვნების ოპერაციების მინიმალური რაოდენობა.

არსებობს აგრეთვე რეკურსიული ფილტრების შეერთების კასკადური (მიმდევრობითი), პარალელური და შერეული ფორმის სტრუქტურული სქემები.

9.2 პირველი და მეორე რიგის რეკურსიული ფილტრები

განვიხილოთ დაბალი სიხშირის მარტივი რეკურსიული ფილტრი, რომლის სტრუქტურული სქემა წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



გადაცემის ფუნქციის განსაზღვრისათვის ფილტრის შესასვლელს მივაწოდოთ ერთეულოვანი იმპულსი და განვიხილოთ სიგნალის თამიმდევრობა ფილტრის სხვადასხვა კვანძებში:

(1) (1, 0, 0, 0, ...)

(2) (1, 1/2, 1/4,1/8,1/16 ......)

(3) (0, 1, 1/2, 1/4, 1/8 ......)

(4) (0, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ....)

(2) კვანძში ანუ ფილტრის გამოსავალზე გვექნება გადაცემის ფუნქციის შემდეგი თამმიმდევრობა:

$$H(z)=1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{8}z^{-3}+...$$

თუ გამოვიყენებთ პროგრესიის წევრთა ჯამის თეორემას, მაშინ უსასრულო ჯამი შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(Z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

ასეთი გადაცემის ფუნქციის მქონდე ფილტრის სხვაობითი განტოლების განსაზღვრისათვის $H(z)$ გამოსახულება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$X(z)=Y(z)-\frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

ან

$$x(n\Delta t)=y(n\Delta t)-\frac{1}{2}y(n\Delta t-\Delta t).$$

აქედან მივიღებთ პირველი რიგის რეკურსიული ფილტრის სხვაობით განტოლებას:

$$y(n\Delta t)=x(n\Delta t)+\frac{1}{2}y(n\Delta t-\Delta t)\ .$$

არარეკურსიული ფილტრისაგან განსხვავებით, სადაც მიმდინარე მნიშვნელობა $y(n\Delta t)$ დამოკიდებულია მხოლოდ $x(n\Delta t)$ მიმდინარე და წინა მნიშვნელობებზე, მოცემული რეკურსიული ფილტრისათვის საჭიროა ვიცოდეთ წინამორბედი გამოსავალი მნიშვნელობაც $y(n\Delta t-\Delta t)$, რადგან წინამორბედი გამოსავალი მნიშვნელობები გავლენას ახდენენ მომდევნო გამოსავალ მნიშვნელობებზე, რომლებიც თავის მხირვ მოქმედებენ შემდეგ გამოსავალ მნიშვნელობებზე და ა.შ. ამიტომ გარდამავალი პროცესის შემთხვევაში, სანამ ფილტრის გამოსავალზე პროცესი არ დამყარდება, დაგვჭირდება ანათვლების მრავალი მნიშვნელობა. ყოველივე ამისაგან თავისუფალია არარეკურტიული ფილტრი, რაც მიგვანიშნებს მის ერთ-ერთ დადებით მხარეზე.

განხილულ ფილტრს არ გააჩნია ნულები, რადგან გადაცემის ფუნქციის გამოსახულებაში მრიცხველი არა გვაქვს Z-ის შემცველი წევრებით. პოლუსების მოსაძებნად გაუტოლოთ გადაცემის ფუნქციის მნიშვნელი ნულს

$$1-1/2Z^{-1}=0\ ;\quad Z-1/2=0;\quad z=1/2$$

რადგან $|Z|<1$, ამიტომ ფილტრი მდგრადია. თუ Z-ს შევცვლით $e^{j\omega}$ მნიშვნელობით შეგვიძლია განვსაზღვროთ ამ ფილტრის აპმლიტუდურ–სიხშირული მახასიათებელი.

თუ გადაცემ ფუნქციაში 1/2 მუდმივას შევცვლით 2-ით, მაშინ ფლტრი გამოვა არამდგრადი, რადგაან $z = 2$ და იგი აღმოჩნდება ერთეულოვანი წრეწირის გარეთ.

მეორე რიგის რეკურსიული ციფრული ფილტრის გადაცემის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე.:

$$H(z)=\frac{1+a_1z+a_2z^2}{1+b_1z+b_2z^2}$$

ნულები გვექნება $1/2\left(-a_1\pm\left(a_1^2-4a_2\right)^{1/2}\right)$ წერტილებში, ხოლო პოლუსები $1/2\left(b_1\pm\left(b_1^2-4b_2\right)^{1/2}\right)$ წერტილებში. ერთეულოვან წრეწირზე პოლუსების

განლაგების θ კუთხე განისაზღვრება ფორმულით:, $\theta = \frac{2\pi f_s}{f_d}$, სადაც f_d სიგნალის დაქვანტის სიხშირეა, f_s ფილტრის ჩამოჭრის სიხშირეა, რომელიც წარმოადგენს დაბალსიხშირული და მაღალსიხშირული ფილტრების ზღვრულ სიხშირეს.

შემდეგ განისაზღვრება პოლუსების წრეწირის ცენტრიდან დაშორების r რადიუსი, რომელიც ამავე დროს წარმოადგენს დემფირების ფაქტორს და განისაზღვრება ფორმულით : $r = e^{-a\Delta t}$. აქედან ჩანს, რომ თუ პოლუსები უახლოვდებიან ერთეულოვან წრეწირს, ფილტრის ამპლიტუდური მახასიათებლის რხევების ამპლიტუდა მატულობს $(r \to 1, a \to 0)$. თუ $a \to \infty$ ე.ი $r \to 0$, მაშინ ადგილი აქვს გადადემფირებას (დემფირების გაჯერებას). ასეთი ფილტრებისათვის კრიტიკულ დემფირებას ადგილი აქვს მხოლოდ მაში, როცა $r = 1/2$ და $\theta = \pi/8$.

ისევე როგორც სხვა დროს, ამპლიტუდურ-სიხშირული და ფაზურ-სიხშირული მახასიათებლების მისაღებად საკმარისია z შევცვალოთ $e^{j\omega\Delta t}$ გამოსახულებით.

9.3. ბიწრფივი გარდაქმნის მეთოდი

ციფრული ფილტრების დაპროექტებას ძალიან შეუწყო ხელი ანალოგური ფილტრების არსებობამ. კერძოდ, ანალოგური ფილტრის გადაცემის ფუნქციის სპეციალური გარდაქმნის საშუალებით ვღებულობთ ციფრული ფილტრის გადაცემ ფუნქციას. ასეთ გარდაქმნას ბიწრფივი (უბან-უბან წრფივი) გარდაქმნა ეწოდება.

ბიწრფივი გარდაქმნა მდგომარეობს ანალოგური ფილტრის $H(s)$ გადაცემ ფუნქციაში s კომპლექსური ცვლადის მაგივრად

$$s = k\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \tag{9.1}$$

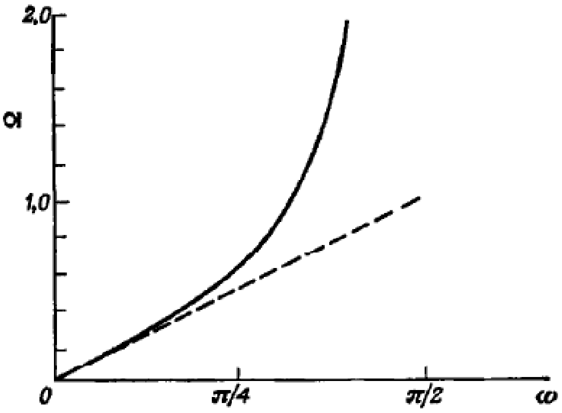
გამოსახულების პირდაპირ ჩასმაში, რომელიც იწვევს S სიბრტყის არაწრფივ გარდაქმნას Z სიბრტყეში. აქ k ნამდვილი მუდმივი სიდიდეა, რომელიც არ ცვლის გარდაქმნის ფორმას. ანალოგური ფილტრის Ω სიხშირის ღერძი (9.1) გარდაიქმნის შედეგად გარდაიქმნება ერთეულოვან წრეწირად $Z^{-1} = e^{j\omega\Delta t}$ ისე რომ

$$\Omega = ktg\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)$$

და ამიტომ ანალოგური ფილტრის ამპლიტუდურ – სიხშირული მახასიათებლის მოკვეთის Ω_s სიხშირე შეესაბამება ციფრული ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასითებლის მოკვეთის ω_s სიხშირეს. ე.ი

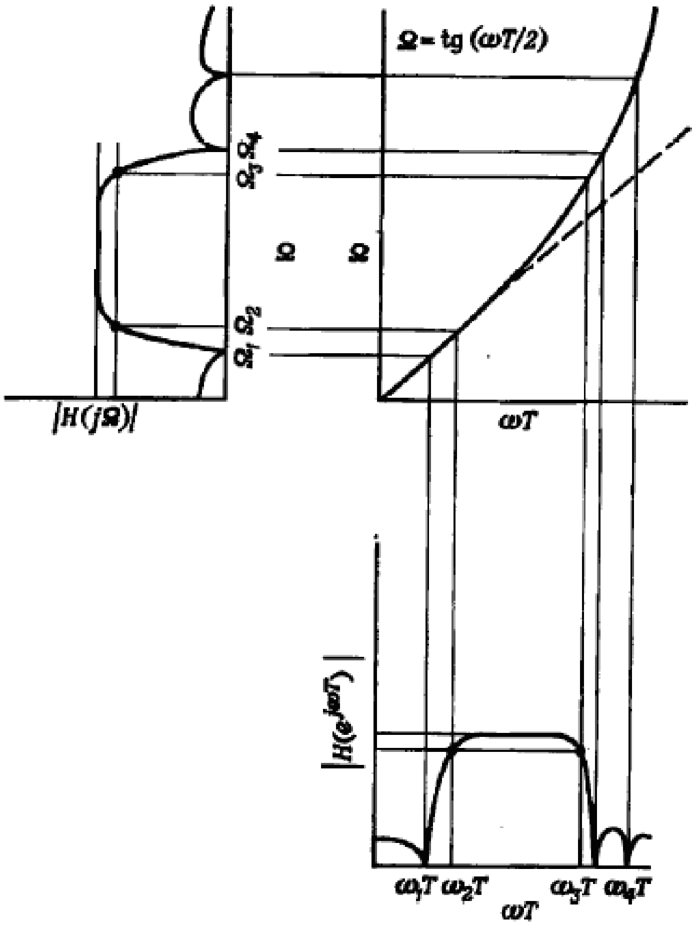
$$\Omega_s = ktg\left(\frac{\omega_s\Delta t}{2}\right). \tag{9.2}$$

ამრიგად, თუ ცნობილია ორივე მოკვეთის სიხშირე, მაშინ (9.2) გამოსახულებიდან განისაზღვრება k სიდიდე. (9.2) გამოსახულების დამოკიდებულება ω-ზე, როცა $k=1$, ნაჩვენებია ნახ. 9.4-ზე



ნახ. 9.4

როგორც ნახაზიან ჩანს ω მცირე სიდიდემდე გარდაიქმნა თითქმის წრფივია, მაგრამ ω ზრდისას იგი სწრაფად გადადის არაწრფივობაში. ამიტომ ბიწრფივი გარდაქმნის გამოყენება ყოველთვის მიზანშეუწონელია. მაგრამ არსებობენ ფილტრების საკმაოდ დიდი რაოდენობა სადაც შესაძლებელია ბიწრფივი გარდაქმის გამოყენება. ასეთია დაბალი სიხშირის, მაღალი სიხშირის ზოლური და გამღობი (რეჟექტორული) ფილტრები, სადაც შესაძლებელია არაწრფიობის კომპენსირება. ამისათვის განვიხილოთ ბიწრფივი გარდაქმნის გრაფიკული მეთოდი, რომელიც აადვილებს გარდაქმნის მექანიზმის შესწავლას.



ნახ. 9.5

თუ მოცემულია ციფრული ფილტრების მოკვეთის სიხშირეები $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ და ω_4, რომლებიც ნაჩვენებია ნახ. 9.5-ის ქვემოთ და გამოვიყენებთ (9.2) არაწრფივ გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ ანალოგური ფილტრის შესაბამის $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ და Ω_4 სიხშირეებს, რომლებიც ნაჩვენებია ნახაზის ზედა ნაწილში. ამის შემდეგ უნდა მოვახდინოთ ანალოგური ფილტრის ანგარიში ისე, რომ ყველა სიხშირეები დაემთხვეს ციფრული ფილტრის სიხშირეებს. ასეთი ანალოგური ფილტრის ამპლიტუდური მახასიათებელი ნაჩვენებია ნახ. 9.5 ზემოდ მარცხნივ. ეხლა თუ მოვახდენთ ასეთი ფილტრის ბიწრფივ გარდაქმნას, მაშინ მივიღებთ ციფრულ ფილტრს, რომლის ყველა მოკვეთის სიხშირეები დაემთხვევიან მოცემულ სიხშირეებს.

ამრიგად, ბიწრფივი გარდაქმნა უზრუნველყოფს ანალოგურ და ციფრულ ფილტრებს შორის მარტივ ასახავს და წარმოადგენს ალგებრულ გარდაქმნას, რომლის დროსაც $j\Omega$ ღერძი მთლიანად აისახება Z სიბრტყის ერთეულოვან წრეწირზე. გარდა ამისა, მას გააჩნია თვისება, რომლის თანახმად ფიზიკურად რეალიზებადი მდგრადი ანალოგური ფილტრი გარდაიქმნება ასევე მდგრად ციფრულ ფილტრად.

ნორმალიზებული დაბალი სიხშირის ანალოგურ ფილტრისათვის, როცა $\Omega_s = 1$, გვექნება:

$$k = ctg\left(\frac{\omega_s \Delta t}{2}\right)$$

და (9.2) გარდაქმნა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$s = \Omega_s ctg\left(\frac{\omega_s \Delta t}{2}\right)\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}} \quad , \tag{9.3}$$

ხოლო, როცა $\Omega_s = 1$ გვექნება:

$$s = ctg\left(\frac{\omega_s \Delta t}{2}\right)\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z^{-1}}$$

ამრიგად (9.3) გარდაქმნა გვაძლევს საშუალებას გამოვთვალოთ დაბალი სიხშირის ციფრულ ფილტრი მოცემული ω_s მოკვეთის სიხშირით, შესაბამისი ანალოგური ფილტრის მონაცემებით.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ბატერვორტის დაბალი სიხშირის ანალოგური ფილტრი რომლის გადაცემის ფუნქციაა:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\Omega_s}\right)^{2n}} , \quad n = 1,2,3,..... \quad ,$$

სადაც Ω_s მოკვეთის სიხშირეა, რომელიც $1/\sqrt{2}$ სიდიდის ტოლია (ლოგარითმულ მასშტაბში – 3 დბ), n – ფილტრის რიგია. ასეთი ფილტრის სიხშირული მახასიათებელი მონოტონური ფუნქციაა. როცა n კენტია მას პოლუსები გააჩნია 0 და π კუთხეების დროს, როცა n ლუწია, მაშინ პოლუსებს გააჩნიათ $\frac{\pi}{2}n$ კუთხე. თუ განვიხილავთ ნორმირებულ ფილტრს როცა $\Omega_s = 1$, მაშინ $|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(-\Omega^2\right)^n}$, ხოლო ლაპლასის გარდაქმნის გამოყენებისას გვექნება:

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(-s^2\right)^n} . \tag{9.4}$$

ბატერვორტის დაბალი სიხშირის ფილტრს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. ბატერვორტის ფილტრებს გააჩნიათ მხოლოდ პოლუსები (გადაცემის ფუნქციის ნულები მოთავსებულია უსასრულობაში) ;
2. $\Omega = 1$ სიხშირის დროს ფილტრის გადაცემის ფუნქციის მნიშვნელობა $1/\sqrt{2}$ სიდიდის ტოლია (ე.ი. მოკვეთის სიხშირეზე ფილტრის ამპლიტუდური მახასიათებელი ეცემა 3 დბ სიდიდით);
3. ფილტრის n რიგი მთლიანად განსაზღვრავს ფილტრს. (9.4) გამოსახულების ბიწრფივი გარდაქმნის გამოყენებით მივიღებთ:

$$|H(z)|^2 = \frac{1}{1 + \left[-\left(k\frac{1 - Z^{-1}}{1 + Z_{-1}}\right)^2\right]^n} \quad .$$

თუ ჩავსვამთ $Z^{-1} = e^{-j\omega}$ მივიღებთ.:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{1}{1 + \left[k^2 tg^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^n} \tag{9.5}$$

სადაც k მუდმივა მოიძებნება შემდეგი პირობების გათვალისწინებით: როცა $\omega = \omega_s$ ამპლიტუდურ–სიხშირული მახასითებლის ამპლიტუდა უნდა იყოს $1/\sqrt{2}$ სიდიდის ტოლი. ე.ი.

$$k^2 tg^2\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 1. \quad \text{აქედან} \quad k^2 = \frac{1}{tg^2\left(\frac{\omega_s}{2}\right)}.$$

თუ ამ გამოსახულებას ჩავსვამთ (9.5) გამოსახულებაში მივიღებთ:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{tg(\omega/2)}{tg(\omega_s/2)}\right)\right]^{2n}} .$$

ე.ი მივიღებთ ბატერვორტის დაბალი სიხშირის ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასითებლის კვადრატის ზოგადი სახე.

ანალოგიურად შეგვიძლია მივიღოთ ჩებიშევის დაბალი სიხშირის ფილტრის ამპლიტუდურ–სიხშირული მახასითებლიის კვადრატის მნიშვნელობა.

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2\left[\left(\frac{tg(\omega/2)}{tg(\omega_s/2)}\right)\right]} .$$

თუ გვინდა მაღალი სიხშირის ზოლური და გადამღობი ციფრული ფილტრების სინთეზი, საჭიროა მოვახდინოთ ნორმალიზებული დაბალი სიხშირის ანალოგური ფილტრის გარდაქმნა. მაგალითად, თუ გვინდა მაღალი სიხშირის ციფრული ფილტრის სინთეზი საჭიროა დაბალი სიხშირის ანალოგური ფილტრის გადაცემ ფუნქციაში s შევცვალოთ $\left(1+Z^{-1}\right)/\left(1-Z^{-1}\right)$ სიდიდი და მივიღებთ მაღალი სიხშირის ციფრულ ფილტრს.

ამრიგად, ბიწრფივი Z გარდაქმნიას გააჩნია ორი უპირატესობა

1. ანალოგური ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი გადადის ციფრული ფილტრის მახასიათებელში სიხშირული სკალის დეფორმაციის გათვალისწინებით.

2. რადგან ბიწრფივი გარდაქმნა წარმოადგენს ალგებრულს, ამიტომ მისი გამოყენება შესაძლებელია როგორც რაციონალური, ასევე პოლინომიალური და ნამრავლის ფორმის გადაცემის ფუნქციებისათვის.

ბიწრფივი გარდაქმნის გარდა რეკურსიული ფილტრების პროექტირება შესაძლებელია გარდაქმნების ცხრილის დახმარებით, სადაც შესაბამისი დროითი ფუნქციებისათვის მოცემულია ლაპლასის და $Z-$ გარდაქმნები.

9.3 ციფრული ფილტრების პირდაპირი სინთეზი

ციფრული ფილტრების პირდაპირი სინთეზის ამოცანა შეიძლება დავყოთ ორ ეტაპად:

1. დაბალი სიხშირის ციფრული ფილტრის პირდაპირი სინთეზი;
2. დაბალი სიხშირის ციფრული ფილტრის გადაცემის ფუნქციით მაღალი სიხშირის, ზოლური და გადამღობი ფილტრების სინთეზი.

ასეთი სახით დაყოფა მნიშვნელოვნად აადვილებს რეკურსიული ფილტრების სინთეზს, რადგან თუ დაბალი სიხშირის ფილტის გადაცემის ფუნქციით მიიღება მაღალი სიხშირის, ზოლური და გადამღობი ფილტრები, მაშინ საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ დაბალი სიხშირის ფილტრის სინთეზის ამოცანა.

როგორც ვიცით, დაბალი სიხშირის იდალური ფილტრის ამპლიტუდურ მახასიათებელს გააჩნია მართკუთხედის ფორმა. აქედან გამომდინარე, სინთეზის ამოცანაა მოიძებნოს ისეთი ფუნქცია, რომელიც მოახდენს ამპლიტუდური მახასიათებლის იდეალურ აპროქსიმაციას.

ციფრული ფილტრის სინთეზის პირველი ნაბიჯი მდგომარეობს იმაში, რომ ვაჩვენოთ მოცემული ფილტრის ამპლიტუდური მახასიათებლით როგორ ავაგოთ ფილტრის გადაცემის ფუნქცია. როგორც ვიცით, რეკურსიული ფილტრის გადაცემ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$H(Z)=\frac{\sum_{k=0}^{N-1} a(k)Z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M-1} b(k)Z^{-k}}$$

ამპლიტუდური მახასიათებლის კვადრატი ადვილად მოიძებნება შემდეგი გამოსახულებიდან:

$$\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|^2 = H(z)H\left(z^{-1}\right)=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{-j\omega\Delta t}\sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{j\omega\Delta tk}}{\sum_{i=0}^{M-1} b_i e^{-j\omega\Delta ti}\sum_{k=0}^{M-1} b_k e^{j\omega\Delta tk}}$$

ან

$$\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|^2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} c_i \cos(\omega\Delta ti)}{\sum_{i=0}^{M-1} d_i \cos(\omega\Delta ti)} \qquad (9.6)$$

c_i და d_i კოეფიციენტები დაკავშირებულნი არიან a_i და b_i კოეფიციენტებთან.
(9.6) გამოსახულება შეიძლება ასე ჩავწეროთ:

$$\left|H\left(e^{j\omega\Delta t}\right)\right|^2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} e_i \cos^2(\omega\Delta ti/2)}{\sum_{i=0}^{M-1} f_i \cos^2(\omega\Delta ti/2)} \qquad (9.7)$$

ამრიგად, ამპლიტუდური მახასიათებლის კვადრატი ყოველთვის შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი ტრიგონომეტრიული ფუნქციის ფარდობა. ხშირად (9.7) გამოსახულებას ასე წარმოადგენენ:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2 = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \, tg^{2i}(\omega\Delta t/2)}{\sum_{i=0}^{M-1} \beta_i \, tg^{2i}(\omega\Delta t/2)} \quad , \qquad (9.8)$$

სადაც α_i და β_i ნამდვილი მუდმივი კოეფიციენტებია. (9.8) გამოსახულება ზოგადი სახით შეიძლება ასე ჩაიწეროს:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 P^2(\omega)} \quad , \tag{9.9}$$

სადაც ε- ნამდვილი მუდმივი სიდიდეა, რომელიც ასახავს ფილტრის პულსაციას გამშვებ ზოლში. $P^2(\omega)$ წარმოადგენს $tg^2(\omega\Delta t/2)$ გამოსახულების ნამდვილ რაციონალურ ფუნქციას. ამრიგად (9.9) გამოსახულებაში $P^2(\omega)$ ზოგადი სახით შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$P^2(\omega) = \sum_{k=0}^{N} a_k tg^{2k}\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)$$

და მაშინ (9.4) გამოსახულება შეიძლება ჩაიწეროს გამარტივებული სახით:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2 = \frac{1}{1+P_n^2(\omega)}$$

სადაც $P_n^2(\omega)$ წარმოადგენს n რიგის რაციონალური ტრიგონომეტრიული ფუნქციის პოლინორმს. $P_n^2(\omega)$ ფუნქციის შერჩევით ვღებულობთ ციფრული ფილტრის სხვადასხვა ტიპს, მაგალითად, ბატერვორტის ფილტრისათვის გვექნება:

$$P_n^2(\omega) = \frac{tg^{2n}(\omega\Delta t/2)}{tg^{2n}(\omega_s\Delta t/2)} \quad ,$$

ხოლო ჩებიშევის ფილტრისათვის გვექნება: $P_n^2(\omega) = \varepsilon^2 T_n^2\left[\dfrac{tg(\omega\Delta t/2)}{tg(\omega_s\Delta t/2)}\right]$,

სადაც $T_n(x)$ n რიგის ჩებიშევის პოლინომია. ფილტრის იდეალური მახასიათებლის აპროქსიმაციის სიზუსტე დამოკიდებულია პოლინომის რიგზე და რაც უფრო მეტია მისი სიდიდე მით უკეთ ხდება ფილტრის მასახიათებლის აპროქსიმაცია.

9.4 ბატერვორტის ციფრული ფილტრები

ღოგორც ცნობილია, იდეალური დაბალი სიხშირის ფილტრის გადაცემის ფუნქციის აპროქსიმაციისათვის საჭიროა მაღალი რიგის პოლინომი. ერთ-ერთ ასეთ სასარგებლო აპროქსიმაციას იძლევა დაბალი სიხშირის ბატერვორტის სინუსოიდალური ფილტრი, რომლის გადაცემის ფუნქციის მოდულის კვადრატი ტოლია:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^{2^2} = \frac{1}{1+\left[\dfrac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\sin(\omega_s\Delta t/2)}\right]^{2n}} \tag{9.10}$$

და იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\left|H(0)\right|^2 = 1; \quad \left|H(\omega_s)\right|^2 = 1/2; \quad \left|H(\pi/\Delta t)\right|^2 = 0. \tag{9.11}$$

რაც უფრო დიდია n მნიშვნელობა, მით უფრო ზუსტია აპროქსიმაცია ე.ი უფრო უახლოვდება იდეალური ფილტრის მახასიათებელს. ფილტრს არ გააჩნია ნულები, ხოლო პოლუსების რაოდენობა n-ის ტოლია და მათი განსაზღვრისათვის საჭიროა ამოიხსნას შემდეგი განტოლება:

$$1+\left[\sin(\omega\Delta t/2)/\sin(\omega_s\Delta t/2)\right]^{2n}=0 \ .$$

გარდა (9.10) გამოსახულებისა პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება ბატერვორტის დაბალი სიხშირის ტანგენსური ფილტრი, რომლის გადაცემის ფუნქციის ამპლიტუდური მახასიათებელის კვადრატს აქვს შემდეგი სახე:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2=\frac{1}{1+\left[\dfrac{tg(\omega\Delta t/2)}{tg(\omega_s\Delta t/2)}\right]^{2n}} \ .$$

ამ გამოსახულებისთვისაც ჭეშმარიტია (9.11) პირობები. $\sin(\omega\Delta t/2)$ და $tg(\omega\Delta t/2)$ ფუნქციების გამოყენება იმითაა გამართლებული, რომ ორივე ეს ფუნქცია თითქმის ისევე იცვლება როგორც $\omega\Delta t/2$ სიდიდე $[0;\omega]$ ინტერვალში.

გარდა ამისა ტანგესური ფილტრის მახასიათებლები ფილტრის დაყოვნების ზოლში უფრო უკეთესია, ვიდრე სინუსური ფილტრისა, კერძოდ, გადაცემის ფუნქცია გაცილებით დაბალია ვიდრე სინუსური ფილტრის გადაცემის ფუნქცია.

ციფრული ფილტრის სინთეზისათვის მოცემული ამპლიტუდური მახასიათებლით საჭიროა განისაზღვროს პოლუსების განლაგება Z^{-1} სიბრტყეზე. ბატერვორტის დაბალი სიხშირის ტანგესური ფილტრის პოლუსების კოორდინატები განისაზღვრებიან შემდეგი ფორმულით:

$$x_k=\frac{1-tg^2(\omega_s\Delta t/2)}{1-2tg(\omega_s\Delta t/2)\cos(2k+1/2n)\pi+tg^2(\omega_s\Delta t/2)} \ ,$$

$$y_k=\frac{2tg(\omega_s\Delta t/2)\sin((2k+1)/2n)\pi}{1-2tg(\omega_s\Delta t/2)\cos((2k+1)/2n)\pi+tg^2(\omega_s\Delta t/2)} \quad k=0,1,2,.....,(2n-1) \ .$$

ეს გამოსახულება სამართლიანია როცა n ლუწია. თუ n კენტია, მაშინ $(2k+1)/2n$ სიდიდე უნდა შეიცვალოს k/n სიდიდით და მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ k ღებულობს 0,1,2,.....,(n-1) მნიშვლეობებს.

ბატერვორტის მაღალი სიხშირის ფილტრის გადაცემ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2=\frac{1}{1+\left[\dfrac{\sin(\omega\Delta t/2+\pi/2)}{\sin(\omega_s\Delta t/2)}\right]^{2n}}$$

ან

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2=\frac{1}{1+\left[\dfrac{ctg(\omega\Delta t/2)}{tg(\omega_s\Delta t/2)}\right]^{2n}} \ .$$

ზოლური ფილტრისათვის გვექნება:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2=\frac{1}{1+\left[\dfrac{\cos(\omega\Delta t)-c}{s}\right]^{n}} \ ,$$

სადაც $c=\cos(\omega_s\Delta t)\cos(\omega_s\Delta t/2);\quad s=\sin(\omega_s\Delta t)\sin(\omega_s\Delta t/2)$,

ან

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2 = 1 - \frac{1}{1+\left[\dfrac{\cos(\omega\Delta t)-D}{E\sin(\omega\Delta t)}\right]^n} = \frac{\left[\dfrac{\cos(\omega\Delta t-c)}{s}\right]^n}{\left[1+\left(\dfrac{\cos(\omega\Delta t)-c}{s}\right)^n\right]} \quad ,$$

სადაც

$$D = \frac{\cos(\omega_s\Delta t)}{\cos(\omega_s\Delta t/2)}; \qquad E = tg(\omega_s\Delta t/2) \quad ,$$

ხოლო გადამღობი ფილტრისათვის გვექნება:

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2 = 1 - \frac{1}{1+\left[\dfrac{\cos(\omega\Delta t)-c}{s}\right]^n} = \frac{\left[\dfrac{\cos(\omega\Delta t)-c}{s}\right]^n}{\left[1+\left(\dfrac{\cos(\omega\Delta t)-c}{s}\right)^n\right]}$$

ან

$$\left|H(\omega\Delta t)\right|^2 = \frac{\left[\cos(\omega\Delta t)-D\right]^n}{\left[E\sin(\omega\Delta t)\right]^n + \left[\cos(\omega\Delta t)-D\right]^n}$$

სადაც c, s, D, E იგივე სიდიდეებია რაც ზოლური ფილტრის დროს.

ამრიგად ფილტრის სინთეზი მდგომარეობს შემდეგი ეტაპების შესრულებაში:

1. მოცემული მახასიათებლით განისაზღვროს ფილტრის რიგი;
2. მოიძებნოს ნულების მდებარეობა Z^{-1} სიბრტყეზე და ამოირჩიოს ის წყვილები, რომლებიც მოხვდებიან ერთეულოვანი წრეწირის შიგნით;
3. მოცემული პოლუსების საშუალებით ფორმირდება ციფრული ფილტრის გადაცემის ფუნქცია.

10. დაქვანტის ეფექტი ციფრულ სისტემებში

აქამდე განხილულ მასალაში იგულისხმებოდა, რომ დისკრეტული სიგნალების ანათვლები და ციფრული ფილტრების კოეფიციენტები წარმოდგენილნი იყვნენ ზუსტად, ცდომილების გარეშე. აქედან გამომდინარე, ფაქტიურად ჩვენ ვიხილავდით მხოლოდ დისკრეტულ ანათვლებს და არა ციფრულს.

საზოგადოდ, სიგნალის ანათვლების და გამოთვლის შედეგად მიღებული შედეგების წარმოსადგენად გამოიყენება მეხსიერების ელემენტები (რეგისტრები, მეხსიერების უჯრედები), რომელთაც გააჩნიათ თანრიგების სასრულო რაოდენობა. ეფექტები, რომლებიც გამოწვეული არიან რიცხვების სასრულო რაოდენობის თანრიგებში წარმოდგენით, შეიძლება დავყოთ შემდეგ კატეგორიებად:

– აცგ გამოწვეული დაქვანტის ცდომილება (ანუ ხმაური);
– ციფრული ფილტრის კოეფიციენტების დაქვანტვით გამოწვეული ფილტრის მახასიათებლების დამახინჯება;
– გამოთვლით პროცესებში თანრიგების გადავსება;

– შუალედური გამოთვლილი მნიშვნელობების დამრგვალება.
ყოველივე აქედან გამომდინარე, გამოთვლით მიღებული შედეგები წარმოდგენილნი იქნებიან შეზღუდული სიზუსტით.

10.1 რიცხვების წარმოდგენის ფორმები

სიგნალების ციფრული დამუშავებისას ანათვლების კომპიუტერში წარმოსადგენად ძირითადად გამოიყენება ორი: ფიქსირებული და მცოცავი მძიმის ფორმატები.

ფიქსირებული მძიმის ფორმატი. ამ შემთხვევაში ორობითი რიცხვის მთელ და წილად ნაწილებისათვის გამოყოფილია თანრიგების ფიქსირებული რაოდენობა. სხვა სიტყვებით, რიცხვის ორობით სისტემაში წარმოდგენისას მძიმე, რომელიც გამოყოფს რიცხვის მთელ და წილად ნაწილს, რეგისტრში ფიქსირდება მისი ადგილმდებარეობა. ხშირად ფიქსირებული მძიმის ფორმატს აღნიშნავენ ორი მთელი რიცხვით: *M.N,* სადაც *M*-ით აღნიშნულია რიცხვის მთელი ნაწილის (ნიშნის ჩათვლით) თანრიგების რაოდენობა, ხოლო *N* – წილადი ნაწილის თანრიგების რაოდენობა. მთელი ნაწილის უფროსი თანრიგი გამოიყენება ნიშნისათვის.

ფიქსირებული მძიმის ფორმატის დადებით თვისებას წარმოადგენს რიცხვების თანაბარი დაქვანტვა და არითმეტიკული ოპერაციების რეალიზების სიმარტივე. მთავარ ნაკლას წარმოადგენს დინამიური დიაპაზონის შეზღუდვა. დინამიური დიაპაზონი ეწოდება რიცხვის უველაზე დიდი მნიშვნელობის ყველაზე მცირე მნიშვნელობასთან (ნული არ ითვლება) ფარდობის მოდულს. ფიქსირებული მძიმის ფორმატისათვის დინამიური დიაპაზონი $2^{n-1}-1$-ს ტოლია.

მცოცავი მძიმის ფორმატი. მცოცავი მძიმის ფორმატში (ზოგჯერ მას ექსპონენციალურ ფორმატსაც უწოდებენ) ***A*** რიცხვი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად: $A = m \cdot q^n$, სადაც *m* – მანტისაა, *q* – თვლის სისტემის ფუძე, *n* – რიგი. ჩვეულებრივ მანტისა წარმოდგენილია ფიქსირებული მძიმის ფორმატით, ხოლო რიგი წარმოადგენს მთელ რიცხვს თავისი ნიშნით. რადგან ექსპონენციალურ ფორმატში წარმოდგენის დროს რიცხვის ჩანაწერში არსებობს ორი პარამეტრი, ამიტომ ასეთი წარმოდგენა იწვევს არაერთგვაროვნებას. მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითი. რიცხვი 2 შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$2 = 2 \cdot 2^0 = 1 \cdot 2^1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^3 = \cdots.$$

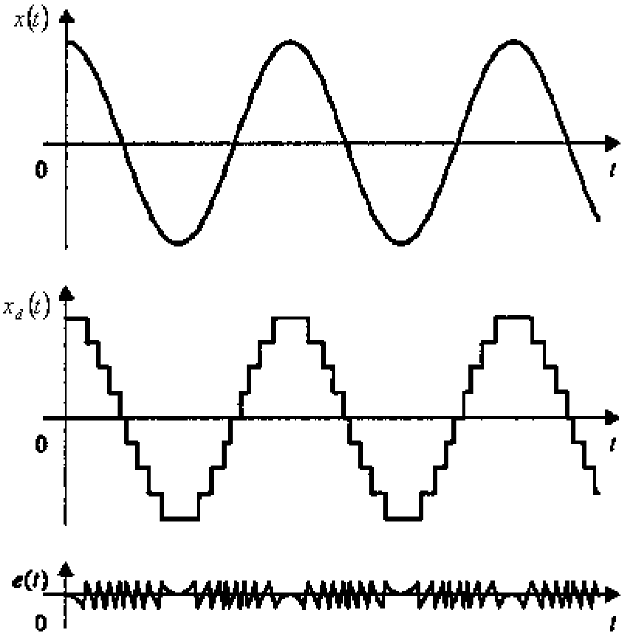
არაერთგვაროვნების აღმოსაფხვრელად მიღებულია მანტისის დიაპაზონის შეზღუდვა, მაგალითად ასე : $0{,}5 \le m \le 1$ ან $1 \le m < 2$. (ეს უკანასკნელი უფრო გამოიყენება).

პრაქტიკაში გამოიყენება რიცხვების წარმოდგენის ნორმალიზირებული ფორმა, სადაც მანტისის მთელი ნაწილი ნულის ტოლია, ხოლო წილადი ნაწილის პირველი სარწმუნო ციფრი განსხვავდება ნულისაგან. მაგალითად, მოცემული $A_{(10)} = 5{,}125$ რიცხვი შეიძლება ასე ჩაიწეროს $A_{(10)} = 0{,}5125 \cdot 10^1$. ორობით თვლის სისტემაში გვექნება : $A_{(2)} = 101{,}001$, ხოლო ნორმალიზებულ ფორმატში : $A_{(2)} = 0{,}101001 \cdot 2^{11}$.

10.2 ანალოგურ-ციფრული გარდაქმნელით გამოწვეული დაქვანტვის ცდომილება

ციფრულ სისტემებში ACB საშუალებით ხდება შემავალი ანალოგური სიგნალის დისკრეტიზაცია და დაქვანტვა. ამ დროს წარმოქმნილი შემავალი სიგნალის დაქვანტვის ცდომილებას $e(n)$ ეწოდება ACB ხმაური. ზოგადად დაქვანტვის პროცესი არაწრფივია, მაგრამ შემავალი სიგნალის არაწრფივი დაქვანტვის პროცესის მიახლოებითი ანალიზისათვის გამოიყენება წრფივი დაქვანტვის პროცესი.

დაქვანტვის პროცესი. გავიხსენოთ, რომ დაქვანტვა ეწოდება სიგნალის ანათვლების ორობითი თვლის რიცხვებში გარდაქმნის პროცესს. ორობითი თვლის სისტემაში წარმოდგენილ რიცხვებს გააჩნიათ შეზღუდული თანრიგების რაოდენობა, რაც თავის მხრივ იწვევს ე.წ. დაქვანტვის ცდომილების წარმოქმნას, რომელიც გამოწვეულია შედეგების დამრგვალებით. ნახ. 10.1 წარმოდგენილია ჰარმონიული $x(t)$ სიგნალის დაქვანტის პროცესი, დაქვანტვის შედეგი $x_d(t)$ და დაქვანტვის შედეგად წარმოქმნილი $e(t)=x(t)-x_d(t)$ ცდომილება.



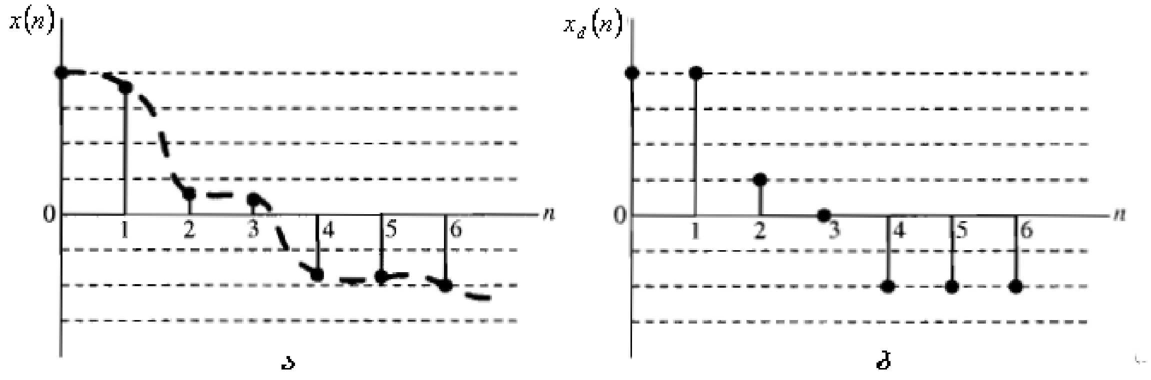
ნახ. 10.1

ცხადია, რომ დაქვანტვის ცდომილების სიდიდე იცვლება შემდეგ დიაპაზონში:

$$-\frac{\Delta}{2} \le e(t) \le \frac{\Delta}{2} \ ,$$

სადაც Δ – მეზობელ დაქვანტვის დონეებს შორის მანძილი (ანუ ბიჯი). ჩავთვალოთ, რომ დაქვანტვის ბიჯი მუდმივი სიდიდეა, ე.ი. Δ=*Const.* დაქვანტვის ბიჯი განისაზღვრება უმცირესი ნიშნადი თანრიგის წონით: $\Delta = 2^{-b}$.

დაქვანტვის თვალსაჩინო მაგალითი ნაჩვენებია ნახ. 10.2.



ნახ. 10.2

ნახ. 10.2ა წყვეტილი ხაზით ნაჩვენებია ანალოგური სიგნალი, საიდანაც მიიღება დისკრეტული თანმიმდევრული ანათვლები. ანალოგურ სიგნალზე დისკრეტული ანათვლები აღნიშნულია წერტილების სახით. ნახ. 12.2ბ გამოსახულია დაქვანტული სიგნალი, რომლის მნიშვნელობები დაქვანტვის დონეზეა განლაგებულნი.

მაგალითისათვის განვიხილოთ ჰარმონიული დაქვანტვული სიგნალის ფარდობა ხმაურთან *SNR*(*signal-to-noise ratio*). თუ ჰარმონიული სიგნალის *A* ამპლიტუდას შევაფარდებთ დაქვანტვის ცდომილების საშუალო კვადრატულ გადახრასთან , მაშინ გვექნება:

$$SRN = \frac{A}{\sqrt{\Delta^2/12}} = \frac{2A\sqrt{3}}{\Delta} = N\sqrt{3}$$, სადაც $N = \frac{2A}{\Delta}$ – დაქვანტვის დონის რაოდენობაა.

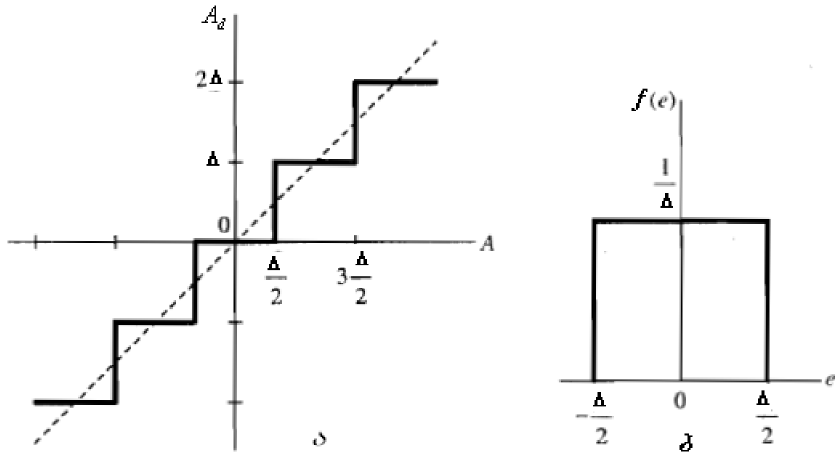
აცგ, რომელსაც გააჩნია q რაოდენობის ორობითი თანრიგი, უზრუნველყოფს $N = 2^q$ დაქვანტვის დონეს. თუ სიგნალის ცვალებადობა შეესაბამება აცგ მუშა დიაპაზონს, მაშინ $SNR = 2^q\sqrt{3}$. თუ ამ სიდიდეს გამოვსახავთ დბ-ში, მაშინ მივიღებთ მარტივ ფორმულას, რომელიც გვიჩვენებს კავშირს ორობით თანრიგებსა და ამ შემთხვევაში *SRN* მაქსიმალურ მნიშვნელობას შორის:

$$SNR = 20\lg\left(2^q\sqrt{3}\right) = 20q\lg 2 + 10\lg 3 \approx 6q + 4{,}77 \quad \text{დბ.}$$

დაქვანტვის ცდომილება. დაქვანტვა შეიძლება ორი მეთოდით: დამრგვალებით და ჩამოჭრით. დამრგვალების დროს საწყისი *k* თანრიგიანი რიცხვი (*k* > *b*) შეიცვლება უახლოესი *b* თანრიგიანი რიცხვით. დაქვანტვის ცდომილება დამრგვალების დროს ტოლია:

$$\max_n |\Delta(n)| = \frac{\Delta}{2} = 2^{-b-1} \qquad (10.1)$$

ნახ. 10.3ა წარმოდგენილია დაქვანტვის პროცედურა.



ნახ/ 10.3

როგორც ნახ. 10.3ა ჩანს, თუ A რიცხვის მოდული ნაკლებია $\Delta/2$ - ზე, მაშინ ის შეესაბამება $A_d = 0$. რიცხვები, რომლებიც მოთავსებულნი არიან $\left[\Delta/2 ; 3\Delta/2\right]$ ინტერვალში, მაშინ $A_d = \Delta$ და ა.შ.

ზოგადად ხდება შემდეგი დაშვება. კერძოდ, ყველა შესაძლო ცდომილება (0.1) დიაპაზონში თანაბარი ალბათობისაა, ე.ი. დაქვანტვის ცდომილებები წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეს, რომელთაც გააჩნიათ თანაბარი განაწილება. დაქვანტვის ცდომილების განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია წარმოდგენილია ნახ. 10.3ბ.

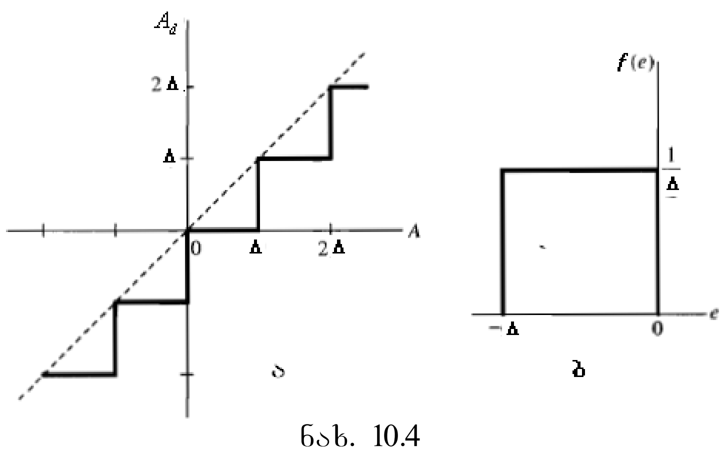
უნდა აღინიშნოს, რომ უახლოეს მნიშვნელობამდე დამრგვალების დროს ის რიცხვები, რომლებიც უახლოეს ორ მეზობელ მნიშვნელობებს შორის მოხვდბიან საზღვარზე, მათი დამრგვალება ყოველთვის ხდება გაზრდილ მნიშვნელობამდე. დიდი მოცულობის მონაცემების დამუშავებისას ამას მივყევართ ერთი მიმართულებით გადაადგილების ეფექტთან.

k თანრიგიანი რიცხვის ჩამოჭრა b ნიშნადი თანრიგებამდე $(k > b)$, იწვევს საწყისი რიცხვის უმცირესი $(k-b)$ თანრიგების ჩამოჭრას. ჩამოჭრისას დაქვანტვის ცდომილება e აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს:

– დადებითი რიცხვების დროს $-2^{-b} \le e \le 0$;

– უარყოფითი რიცხვების დროს $0 \le e < 2^{-b}$.

ქვემოდ მოყვანილ ნახ. 10.4ა წარმოდგენილია ჩამოჭრის პროცედურა



ნახ. 10.4

ხოლო ნახ. 10.4ბ ნაჩვენებია ჩამოჭრის დაქვანტვის ცდომილების განაწილების სიმკვრივის გრაფიკული გამოსახულება.

უმეტეს შემთხვევაში შეიძლება ჩაითვალოს, რომ $e(t)$ წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს, რომელსაც მოცემულ საზღვრებში გააჩნია თანაბარი განაწილების კანონი. ასეთი შემთხვევითი პროცესის საშუალო მნიშვნელობა $m_A = 0$, ხოლო დისპერსია $\sigma_A = \frac{\Delta^2}{12}$. დისკრეტიზაციის შემდეგ დაქვანტვის ცდომილება წარმოადგენს $e(nT)$ შემთხვევით დისკრეტულ თანმიმდევრობას. უმეტეს შემთხვევაში ამ თანმიმდევრიბის ანათვლები შეიძლება ჩაითვალოს არაკორელირებულნი.

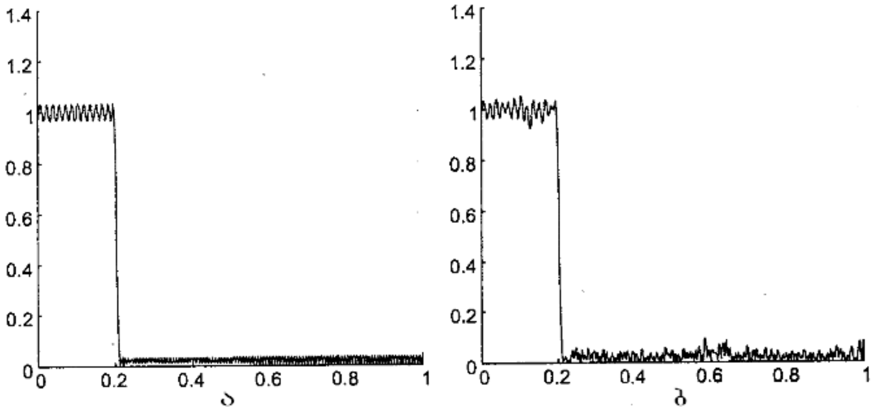
ნახ. 10.1 იგულისხმება, რომ დაქვანტვა ხდება სიგნალის დონის დამრგვალებით. რეალურ ACB შეიძლება გამოყენებული იყოს ჩამოჯრა ანუ დამრგვალება დაბალი მნიშვნელობისაკენ. ამ შემთხვევაში დაქვანტვის ცდომილება $[0; -\Delta]$ ინტერვალშია მოქცეული, რომლის საშუალო მნიშვნელობა ტოლია: $m_A = -\frac{\Delta}{2}$, ხოლო დისპერსია $\sigma_A^2 = \frac{\Delta^2}{12}$.

10.3 დაქვანტვის ეფექტი ციფრულ ფილტრებში

სიგნალების ციფრული დამუშავებისას დაქვანტვის ცდომილება არ წარმოადგენს ერთადერთ პრობლემას. ზოგადად, ციფრულ სისტემებში არითმეტიკული ოპერაციების შედეგად მიღებული როგორც შუალედური, ასევე ფილტრის კოეფიციენტების მნიშვნელობების დამრგვალებები წარმოქმნიან დამატებით ცდომილებებს, რომლებიც დაქვანტვის ცდომილებასთან ერთად იწვევენ ფილტრის სასურველი მახასიათებლების დამახინჯებას. განვიხილოთ ეს ცდომილებები.

ციფრული ფილტრის კოეფიციენტების დამრგვალება. აქამდე ციფრული ფილტრის კოეფიციენტები განიხილებოდნენ როგორც ზუსტი მნიშვნელობები, ცდომილების გარეშე. პრაქტიკულად, ფილტრის რეალიზაციისას თითქმის ყოველთვის საჭიროა კოეფიციენტების მნიშვნელობების დამრგვალება. თავის მხრივ, კოეფიციენტების დამრგვალება იწვევს ციფრული ფილტრის პარამეტრების და მახასიათებლების სასურველ მნიშვნელობებიდან გადახრას. გარდა ამისა, შუალედური შედეგების დამრგვალებას მივყევართ გამოთვლითი ცდომილების დაგროვებასთან.

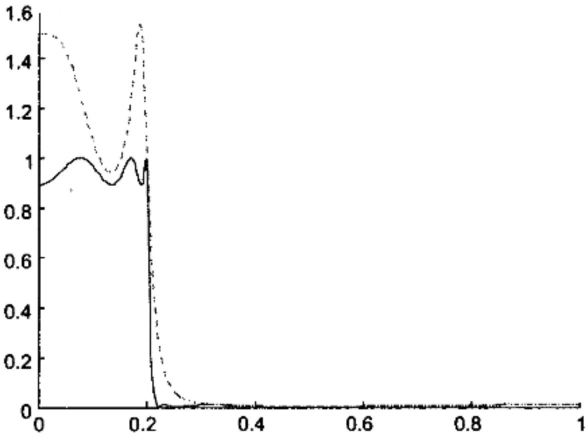
არარეკურსიული ციფრული ფილტრის კოეფიციენტები, როგორც ცნობილია, იმპულსური მახასიათებლების ანათვლების ტოლია და წრფივად არიან დაკავშირებულნი გადაცემის ფუნქციის კომპლექსურ კოეფიციენტებთან. ამიტომ კოეფიციენტების მცირე დამახინჯება იწვევს ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის მცირე დამახინჯებას, რის გამოც კოეფიციენტების დამრგვალების ეფექტი გამოვლინდება იშვიათად. ნახ. 10.5 ნაჩვენებია არარეკურსიული დაბალი სიხშირის ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი კოეფიციენტების დამრგვალებამდე (ნახ. 10.5ა) და დამრგვალების შემდეგ (ნახ. 10.5.ბ)



ნახ. 10.5

როგორც ნახაზიდან ჩანს, კოეფიციენტების დამრგვალება იწვევს სიხშირული მახასიათებლის მცირე ამპლიტუდურ პულსაციას, რაც ამ შემთხვევაში არავითარ საშიშროებას არ წარმოადგენს. მაგრამ, თუ ფილტრს უნდა გააჩნდეს ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი მკვეთრად გამოხატული დამრეცით, მაშინ კოეფიციენტების დამრგვალებამ შეიძლება გამოიწვევს სიხშირული მახასიათებლის დამახინჯება.

რაც შეეხება რეკურსიულ ციფრულ ფილტრებს აქ საქმე უფრო რთულადაა. ფილტრის კოეფიციენტების დამრგვალების ეფექტი მნიშვნელოვნად მოქმედებს ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირულ მახასიათებელზე, რადგან გადაცემის ფუნქციის გამოსახულების მნიშვნელში არსებული კოეფიციენტები ფილტრის იმპულსურ და სიხშირულ მახასიათებლებთან არაწრფივ კავშირშია. მაგალითისათვის ნახ. 10.6 წარმოდგენილია დაბალი სიხშირის რეკურსიული ფილტრის ამპლიტუდურ-სიხშირული მახასიათებელი კოეფიციენტების დამრგვალებამდე და დამრგვალების შემდეგ (წყვეტილი მრუდი).



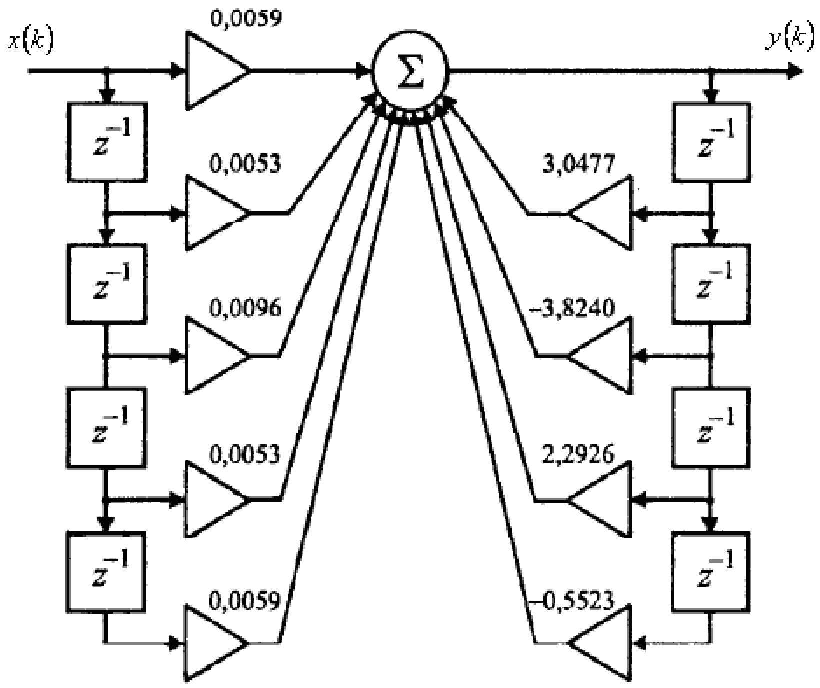
ნახ. 10.6

როგორც ნახაზიდან ჩანს, ფილტრის კოეფიციენტების დამრგვალება იწვევს სიხშირული მახასიათებლის მნიშვნელოვან დამახინჯებას.

დაქვანტვული კოეფიციენტებიანი ფილტრის სინთეზისათვის არსებობს ორი მიდგომა. შეიძლება განვიხილოთ კოეფიციერტების ცდომილებები როგორც შემთხვევითი სიდიდეები. მაშინ შესაძლებელია ამ ცდომილებების სტატისტიკური დამუშავება, კერძოდ შევაფასოდ ფილტრის დაქვანტვული სიხშირული მახასიათებლის მოცემულ სიხშირულ მახასიათებლიდან გადახრის საშუალო კვადრატული ცდომილება. მეორე მიდგომა მდგომარეობს

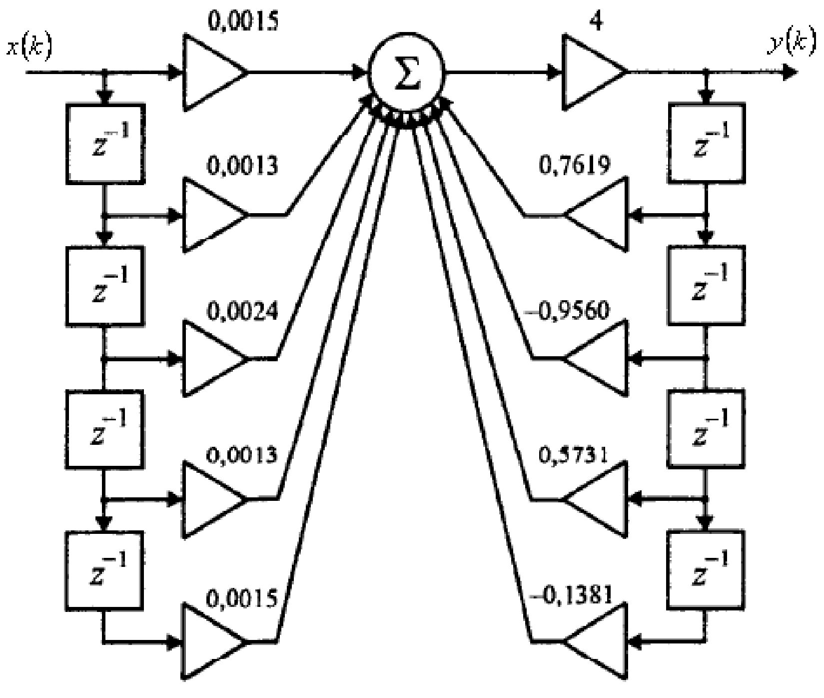
დაქვანტვული კოეფიციერტების პირდაპირ ოპტიმიზაციაში, რათა მიღწეული იყოს მოცემული სიხშირული მახასიათებლიდან მინიმალური გადახრა.

ციფრული ფილტრის კოეფიციენტების მასშტაბირება. გამოთვლების დაჩქარების მიზნით ხშირად იყენებენ მონაცემების წარმოდგენას ფიქსირებული მძიმის ფორმატში. ამ შემთხვევაში შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ ფილტრის ზოგიერთი კოეფიციენტის მნიშვნელობამ შეიძლება გადააჭარბოს შერჩეული ფორმატის დიაპაზონს. ამ პრობლემის გადაწყვეტა შესაძლებელია ფილტრის კოეფიციენტების მაშტაბირებით, რის შედეგადაც კოეფიციენტების მნიშვნელობები აღმოჩნდებიან $[-1,1]$ დიაპაზონში. მასშტაბირების კოეფიციენტად შეიძლება ავიღოთ ფილტრის უდიდესი მნიშვნელობის კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე, რომელზედაც გაიყოფა ციფრული ფილტრის ყველა კოეფიციენტი, ხოლო ფილტრის გამოსავალი მნიშვნელობა უნდა გამრავლდეს ამ სამასშტაბო კოეფიციენტზე. მასშტაბირების კოეფიციენტი მოსახერხებელია, თუ მას შევარჩევთ 2^n-ის ტოლად. მაგალითად ქვემოთ მოყვანილ ნახაზზე წარმოდგენილია რეკურსიული ფილტრის კოეფიციენტების მნიშვნელობები მასშტაბირებამდე (ნახ. 10.7) და მასშტაბირების შემდეგ (ნახ. 10.8).



ნახ. 10.7

როგორც ნახაზიდან ჩანს, სამასშტაბო კოეფიციენტად შეიძლება ავიღოთ 4. მასშტაბირების შემდეგ გვექნება:



ნახ. 10.8

10.4 მონაცემების გადავსება.

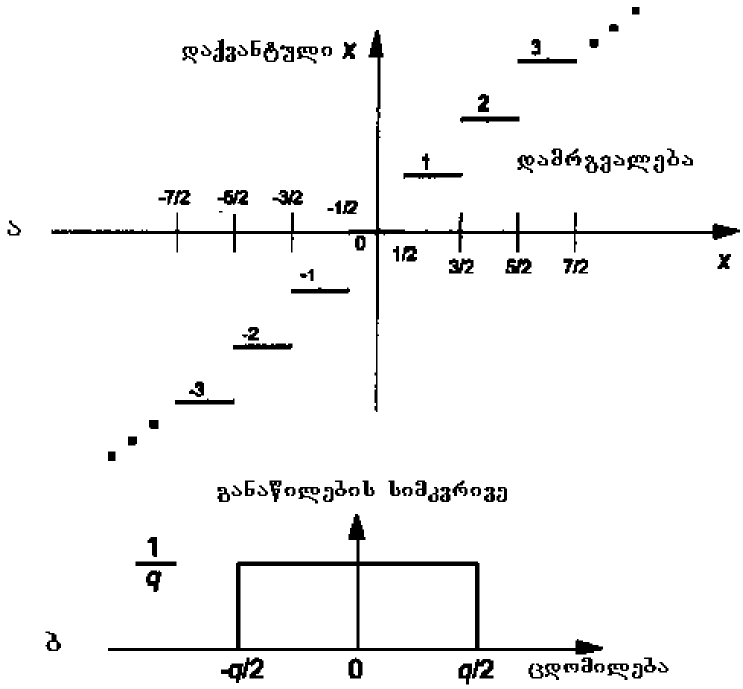
სიგნალების ციფრული დამუშავების პროცესში გამოიყენება მრავალი შეკრების და გამრავლების ოპერაცია. ამ დროს გამოთვლის შედეგად მიღებულმა შუალედურმა მნიშვნელობებმა შეიძლება მნიშვნელოვნად გადააჭარბოს დასამახსოვრებელი რეგისტრის თანრიგების რაოდენობას. ყოველივე ამან შეიძლება გამოიწვიოს მნიშვნელოვანი პრობლემა, რომელსაც მონაცემების გადავსება ეწოდება. გადავსების შედეგი წარმოქმნის ცდომილებას, რომელიც გამოწვეულია შედეგების უმცირესი თანრიგების დაკარგვით. გადავსების ეფექტით გამოწვეული ცდომილება მით უფო დიდია, რაც უფრო მეტია არითმეტიკული ოპერაციების რაოდენობა.

მონაცემების გადავსების ეფექტის შემცირება შესაძლებელია ორი მეთოდით: დამრგვალებით ან ჩამოჭრით, სადაც ყოველი მათგანი წარმოქმნის თავის დაქვანტვის ცდომილებას.

მონაცემების დამრგვალება. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ციფრული სიგნალების დამუშავების ალგორითმების რეალიზაციისას გამოთვლით პროცესში ფორმირდება მრავალი შუალედური შედეგი. ამ შედეგების შენახვის ფორმატიდან გამომდინარე საჭირო ხდება მონაცემების დამრგვალება, რაც თავის მხრივ იწვევს დამატებით ცდომილების წარმოქმნას.

დამრგვალების დროს მონაცემები ღებულობენ უახლოესი დაქვანტვის დონეს ან ხდება მათი დამრგვალება ამ დონემდე. ასე მაგალითად, თუ დაქვანტვის დონე წარმოდგენილია მთელი რიცხვებით, მაშინ, მაგალითად, 1,2 სიდიდე დაქვანტვის შედეგად ღებულობს 1-ის ტოლ სიდიდეს, ხოლო 1,6 კი 2-ს. ყოველივე ეს წარმოდგენილია ნახ. 10.9ა, სადაც x რიცხვის ყველა მნიშვნელობა $-0{,}5 \le x < 0{,}5$ დიაპაზონში დამრგვალების შედეგად ღებულობენ ნულოვან

მნიშვნელობებს, ხოლო $0,5 \le x < 1,5$ დიაპიზონში 1-ს ტოლ სიდიდეს. $1,5 \le x < 2,5$ დიაპაზონში ღებულობენ 2 და ა.შ.



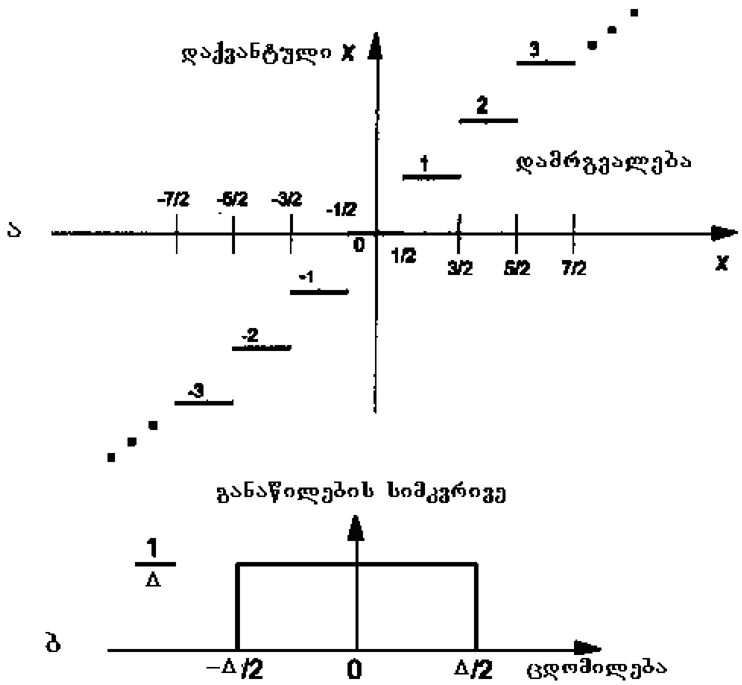
ნახ. 10.9

დამრგვალების ცდომილების განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია წარმოდგენილია ნახ. 10.9ბ-ზე.

თუ გამოიყენება მონაცემების წარმოდგენის ფიქსირებული მძიმის ფორმატი, მაშინ შეკრების და გამოკლების არითმეტიკული ოპერაციების დროს დამრგვალების ეფექტი გამორიცხულია. ამ შემთხვევაში მოსალოდნელია მხოლოდ რეგისტრის თანრიგების გადავსება. რაც შეეხება ფიქსირებული მძიმით წარმოდგენილი რიცხვების გამრავლების ოპერაციამ შესაძლებელია გამოიწვიოს შედეგების დამრგვალების აუცილებლობა.

თუ მონაცემების წარმოსადგენად გამოიყენება მცოცავი მძიმის ფორმატი, მაშინ შეკრების ოპერაციამ შეიძლება გამოიწვიოს სიზუსტის დაკარგვა. რაც შეეხება გამრავლების ოპერაციას, ისევე როგორც ფიქსირებული მძიმის ფორმატისა, აქაც შეიძლება საჭირო გახდეს შედეგების დამრგვალება.

მონაცემების ჩამოჭრა. ჩამოჭრა წარმოადგენს პროცესს, რომლის შედეგადაც მონაცემების მნიშვნელობები წარმოდგინდებიან დაქვანტვის უმცირესი დონით. მაგალითად, თუ დაქვანტვის დონე აღინიშნება მთელი რიცხვებით, მაშინ ნამდვილი მნიშვნელობა 1,2-ს ჩამოჭრა ხდება 1-მდე. მთელ მნიშვნელობამდე ჩამოჭრის პროცედურა წარმოდგენილია ნახ. 10.10ა-ზე, სადაც $0 \le x < 1$ დიაპაზონის ყველა x ჩამოჭრის შემდეგ ღებულობს ნულოვან მნიშვნელობას, ხოლო $1 \le x < 2$ დიაპაზონში x ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას. $2 \le x < 3$ დიაპაზონში x ღებულობს 2-ის ტოლ მნიშვნელობას და ა.შ.



ნახ. 10.10

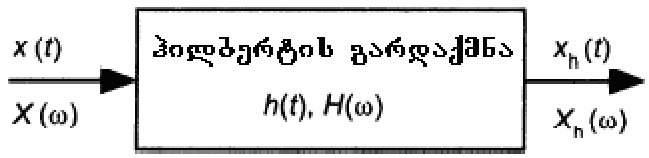
ჩამოჭრის ცდომილების განაწილების სიმკვრივის ფუნქცია წარმოდგენილია ნახ. 10.10ბ-ზე.

ჩამოჭრის ცდომილება დამოკიდებულია სამ ფაქტორზე: 1) ჩამოჭრის თანრიგების რაოდენობაზე, 2) ჩამოჭრილი ბიტების მნიშვნელობებზე (ანუ იყვნენ თუ არა ეს ბიტები ნულის ან ერთის ტოლი) და 3) ჩამოჭრის შედეგად დარჩენილი ორობითი რიცხვის მოდული. ცხადია, რომ ჩამოჭრის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღება, როცა ყველა ჩამოჭრილი ბიტი ერთის ტოლია.

11. ჰილბერტის დისკრეტული გარდაქმნა

11.1 ჰილბერტის გარდაქმნის არსი

ჰილბერტის დისკრეტული გარდაქმნა წარმოადგენს პროცედურას, რომელიც გამოიყენება ნამდვილი სიგნალიდან კომპლექსური სიგნალის მიღებისათვის. ნამდვილი სიგნალების მაგივრად კომპლექსური სიგნალების გამოყენება ხშირად ამარტივებს სიგნალების დამუშავების მრავალ ოპერაციას და ზრდის დამუშავების ეფექტიანობას.



ნახ. 11.1

როგორც ნახ. 11.1 –დან ჩანს, ჰილბერტის გარდაქმნა წარმოადგენს მათემატიკურ ოპერაციას ნამდვილი $x(t)$ სიგნალის მიმართ, რომლისგანაც ვღებულობთ ახალ $x_h(t)$ ნამდვილ სიგნალს. ჩვენი მიზანია $x_h(t)$ სიგნალი იყოს $\pi/2$ ფაზით წანაცვლებული (დაძრული) $x(t)$ სიგნალის მიმართ.

დაუშვათ გვაქვს $x(t)$ სიგნალი. $x(t)$ სიგნალის ორთოგონალური დანამატი ეწოდება ისეთ $x_i(t)$ სიგნალს, როდესაც სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)x_i(t)dt = 0 .$$

ამ დროს იგულისხმება, რომ $x_i(t)$ სიგნალი იგივეობრივად არ არის ნულის ტოლი. აღმოჩნდა, რომ მოცემული ნამდვილი $x(t)$ სიგნალი და მისი ორთოგონალური დანამატი $x_i(t)$ შეგვიძლია დავაკავშიროთ კომპლექსურ $x_c(t)$ სიგნალთან შემდეგნაირად:

$$x_c(t) = x(t) + jx_i(t). \tag{11.1}$$

კომპლექსურ $x_c(t)$ სიგნალს ეწოდება **ანალიტიკური სიგნალი** (იმიტომ, რომ ის არ შეიცავს სიხშირეების უარყოფით სპექტრულ კომპონენტებს), რომლის ნამდვილი ნაწილი საწყისი $x(t)$ სიგნალის ტოლია, ხოლო მისი წარმოსახვითი $x_i(t)$ მდგენელი დაკავშირებულია საწყის $x(t)$ სიგნალთან შემდეგი გარდაქმნით:

$$x_i(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{t-\tau} d\tau ,$$

რომელსაც ჰილბერტის გარდაქმნა ეწოდება. როგორც ამ გამოსახულებიდან ჩანს, ჰილბერტის გარდაქმნის შედეგი წარმოადგენს $x(t)$ სიგნალის და $h(t) = \dfrac{1}{\pi t}$ ფუნქციის ნაკეცს. $h(t)$ ფუნქციას უწოდებენ ჰილბერტის გარდაქმნის ბირთვს ანუ იმპულსურ მახასიათებელს. განვსაზღვროთ ჰილბერტის გარდაქმნის სიხშირული მახასიათებელი

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t}\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t}\sin(\omega t)dt$$

ამ გამოსახულების პირველი ინტეგრალი ნულის ტოლია, რადგან $h(t)$ კენტი ფუნქციაა და თანაც ინტეგრირება ხდება დროის მთელ ღერძზე. ე.ი. გვექნება:

$$H(\omega) = -\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt \quad .$$

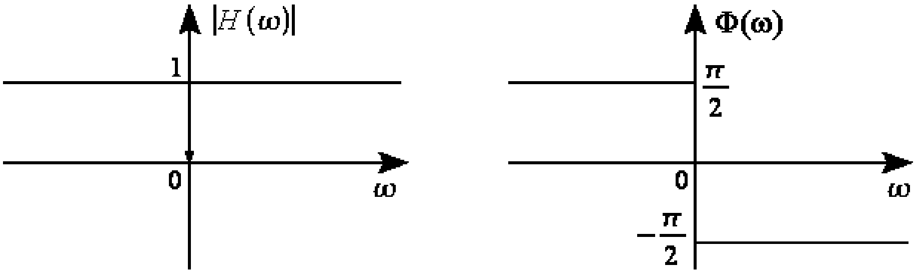
რადგან $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt = \pi \cdot sign(\omega)$ ამიტომ $H(\omega) = -\frac{j}{\pi}\pi sign(\omega) = -jsign(\omega)$, სადაც

$$-jsign(\omega) = \begin{cases} j, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ -j, & \omega > 0 \end{cases}$$

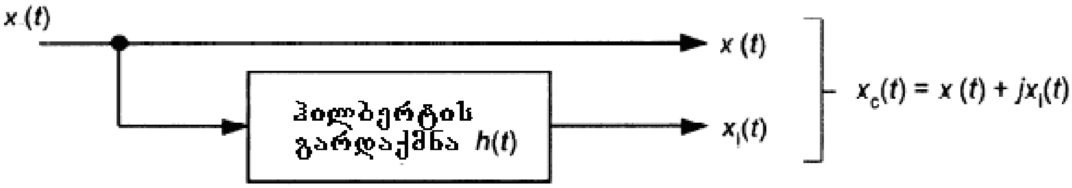
ამრიგად, ჰილბერტის გარდაქმნის სიხშირული მახასიათებელი ტოლია:

$$H(\omega)=\begin{cases} j, & \omega<0 \\ 0, & \omega=0 \\ -j, & \omega>0 \end{cases} \qquad (11.2)$$

ჰილბერტის გარდაქმნის ამპლიტუდური და სიხშირული მახასიათებლები წარმოდგენილნი არიან შემდეგ ნახაზზე:



როგორც ვხედავთ, ჰილბერტის გარდაქმნა წარმოადგენს იდეალურ ფართოზოლიან ფაზამაბრუნებელს. უნდა აღინიშნოს, რომ ფაზის მობრუნებასთან ერთად ჰილბერტის გარდაქმნა აღმოფხვრის სიგნალის მუდმივ მდგენელს. აქედან გამომდინარე, ჰილბერტის გარდაქმნის შედეგად ნამდვილი $x(t)$ სიგნალი და ანალიტიკური $x_c(t)$ სიგნალები ფაზებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან $\pi/2$ სიდიდით. ამასთან $x(t)$ და $x_c(t)$ სიგნალებს უწოდებენ ჰილბერტით შეუღლებულებს. აქედან გამომდინარე $\cos(\omega t)$ და $\sin(\omega t)$ წარმოადგენენ ჰილბერტით შეუღლებულებს. ანალიტიკური სიგნალის მიღების ბლოკ-სქემას აქვს შემდეგი სახე:



ნაკეცის თვისებიდან გამომდინარე სიხშირულ არეში ჰილბერტის გარდაქმნა შეიძლება ასე ჩაიწეროს: $X_i(\omega)=H(\omega)X(\omega)$..

არსებობს ჰილბერტის უკუ გარდაქმნაც

$$x(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_i(t)}{t-\tau}d\tau\,. \qquad (11.3)$$

ამისათვის განვიხილოთ სიგნალის ორთოგონალური დანამატის ჰილბერტის გარდაქმნა, რომელიც წარმოდგენილია ნაკეცის სახით $x(t)=h(t)\oplus x_i(t)$. სიხშირულ არესათვის გვექნება: $X(\omega)=H(\omega)X_i(\omega)$.. მოვახდინოთ ფურიეს უკუ გარდაქმნა (11.2) ფორმულის გათვალისწინებით

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_i(\tau)}{\pi(t-\tau)}d\tau=F^{-1}\left[H(\omega)\cdot X_i(\omega)\right]=F^{-1}\left[H(\omega)H(\omega)X(\omega)\right]=F^{-1}\left[-X(\omega)\right]=-x(t),$$

სადაც $H(\omega)H(\omega)=j^2=-1$. ე.ი. მივიღეთ (11.3) ფორმულა.

განვიხილოთ ანალიტიკური სიგნალის სპექრტი

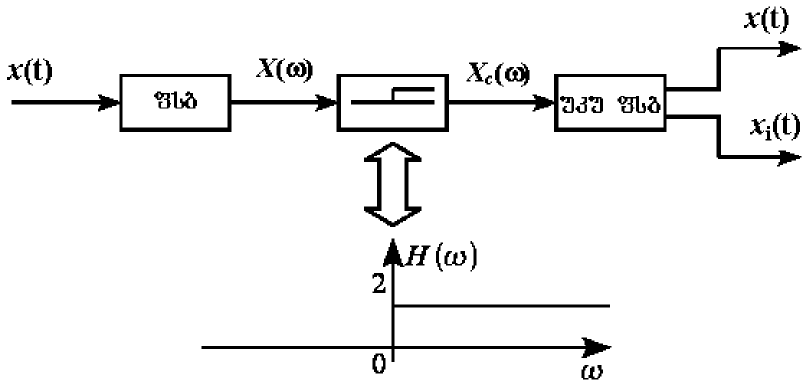
$$X_c(\omega) = X(\omega) + jX_i(\omega) = X(\omega) + j \cdot H(\omega) X(\omega)$$

თუ გავითვალისწინებთ (11.2) ფორმულას მაშინ

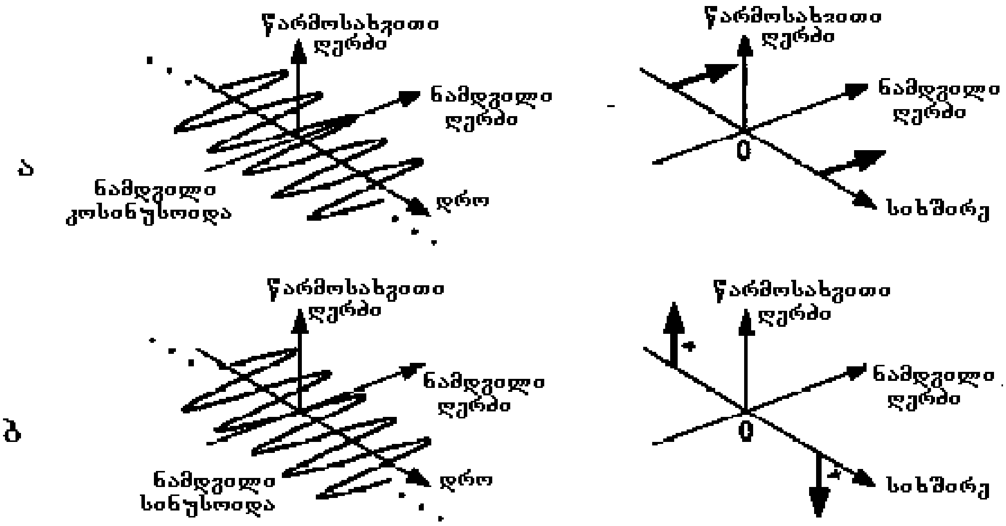
$$X_c(\omega) = \begin{cases} X(\omega) + j \cdot j\,X(\omega), & \omega < 0 \\ X(0), & \omega = 0 \\ X(\omega) - j \cdot j\,X(\omega), & \omega > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ X(0), & \omega = 0 \\ 2X(\omega), & \omega > 0 \end{cases}$$

ამრიგად, ანალიტიკური სიგნალის სპექტრი ნულისაგან განსხვავდება მხოლოდ დადებით სიხშირეთა არეში, ხოლო უარყოფითი სიხშირეების დროს ის ნულის ტოლია. ანალიტიკური სიგნალის ეს თვისება ფართოდ გამოიყენება ერთპოლუსიანი მოდულაციის სიგნალის ფორმირებისათვის.

გარდა ამისა, ანალიტიკური სიგნალი შეიძლება გამოვიყენოთ ორთოგონალური დანამატის მისაღებად. ამისათვის უნდა მოვახდინოთ საწყისი $x(t)$ სიგნალის ფურიეს გარდაქმნა, გავანულოთ მიღებული სპექტრის მნიშვნელობები უარყოფითი სიხშირულ არეში და დადებით სიხშირის არეში სპექტრი გავაორმაგოდ. ამის შემდეგ მოვახდინოთ მიღებული სპექტრის ფურიეს უკუ გარდაქმნა და მივიღებთ ანალიტიკურ სიგნალს, რომლის საშუალებითაც მიიღება საწყისი სიგნალი და მისი ორთოგონალური დანამატი. ასეთი პროცესის რეალიზაცია წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე:



იმისათვის, რომ მოვიყვანოთ ჰილბერტის გარდაქმნის მარტივი მაგალითი, ამისათვის ნახ. 11.2ა–ზე წარმოდგენილია სამგანზომილებიან სივრცეში ნამდვილი კოსინუსოიდალური სიგნალი $\cos(\omega t)$ როგორც დროით, ასევე სიხშირულ არეში.



ნახ. 11.2

ნახ. 11.2ბ გვიჩვენებს, რომ $\cos(\omega t)$ სიგნალის ჰილბერტის გარდაქმნა გვაძლევს სინუსოიდალურ $\sin(\omega t)$ სიგნალს. ნახ. 11.2ბ-ს მარჯვენა მხარეს წარმოდგენილი კომპლექსური სპექტრი გვიჩვენებს ჰილბერტის გარდაქმნა როგორ აბრუნებს კოსინუსოიდალურ სიგნალის დადებითი სიხშირის კომპონენტებს $-j$-თი, ხოლო უარყოფით სიხშირის კომპონენტებს $+j$-თი. ამრიგად, $+j$-ზე გამრავლების ოპერაცია სპექტრულ კომპონენტებს აბრუნებს სიხშირული ღერძის ირგვლივ $+90^0$-ით საათის ისრის საწინაღმდეგო მიმართულებით.

ანალიტიკურ სიგნალს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. ანალიტიკურ სიგნალის სპექტრი $X_c(\omega)$ შეიცავს მხოლოდ დადებით სიხშირეებს

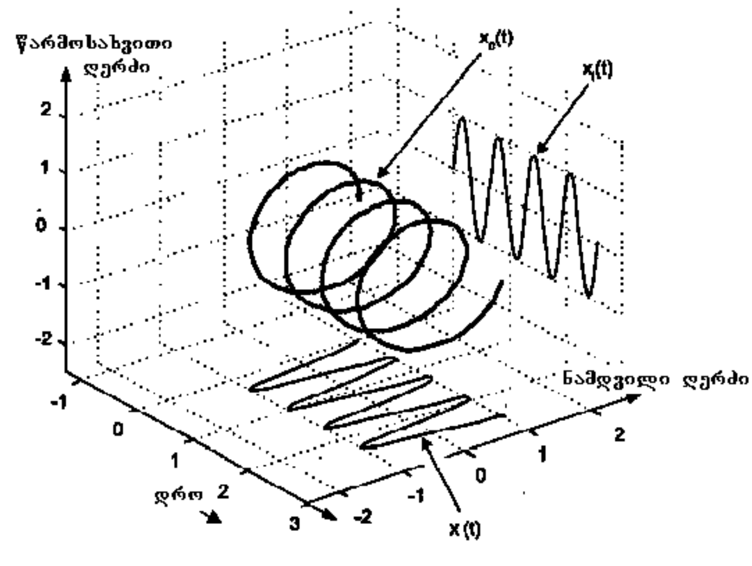
$$X_c(\omega)=\begin{cases}2X(\omega), & \omega\ge 0\\ 0, & \omega<0\end{cases}$$

2. ანალიტიკური სიგნალის $x_c(t)=x(t)+jx_i(t)$ ნამრავლი მის შეუღლებულ $x_c^*(t)=x(t)-jx_i(t)$ სიგნალთან ტოლია საწყისი $x(t)$ სიგნალის მომვლების კვადრატისა. ეს იმას ნიშნავს, რომ ანალიტიკური სიგნალის მოდული $x(t)$ სიგნალის მომვლების ტოლია.

3. ანალიტიკური სიგნალის ენერგია საწყისი სიგნალის გაორმაგებული ენერგიის ტოლია.

სწორედ ამ თვისებების გამო ანალიტიკური სიგნალის გამოყენება სიგნალების ციფრული დამუშავებისას საკმაოდ სასარგებლოა, განსაკუთრებით რთული სიგნალების ანალიზისას.

მივცეთ $x_c(t)$ სიგნალს გარკვეული ფიზიკური არსი. განვისილოთ ნამდვილი სიგნალი $x(t)=\cos(\omega_0 t)$ და მისი ჰილბერტის გარდაქმნა $x_i(t)$, რომელიც წარმოადგენს სინუსოიდალურ სიგნალს (ნახ. 11.3), სადაც ანალიტიკური სიგნალი გამოსახულია სპირალის სახით.

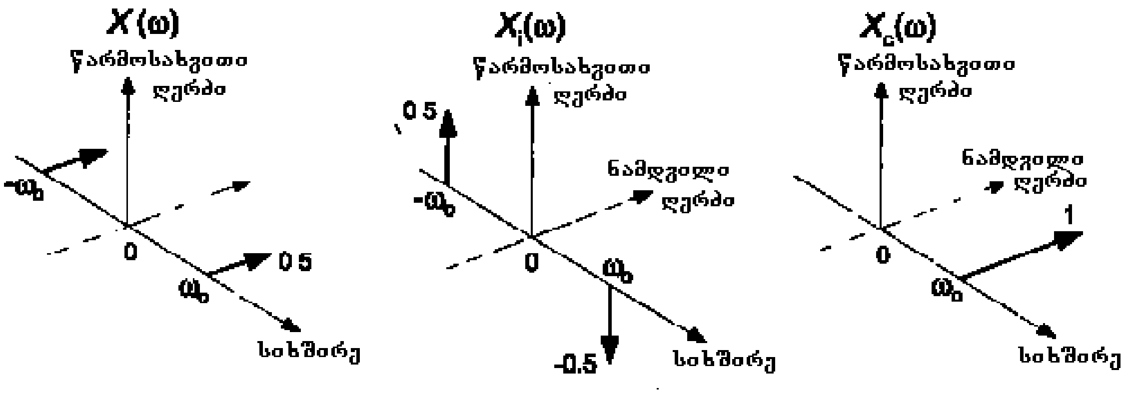


ნახ. 11.3

ეილერის ფორმულის თანახმად ანალიტიკური სიგნალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ კომპლექსური ექსპონენტის საშუალებით:

$$x_c(t)=x(t)+jx_i(t)=\cos(\omega_0 t)+j\sin(\omega_0 t)=e^{j\omega_0 t}. \qquad (11.4)$$

ამ სიგნალის სპექტრები წარმოდგენილნი არიან ნახ. 11.4.



ნახ. 11.4

როგორც ვხედავთ, (11.4) ფორმულის თანახმად თუ ჩვენ $X_i(\omega)$ მოვაბრუნებთ + 90^0-ით საათის ისრის მოძრაობის საწინაღმდეგოთ (+j) და დაუმატებთ $X(\omega)$, მაშინ მივიღებთ:

$$X_c(\omega)=X(\omega)+jX_i(\omega)\ .$$

როგორც ვხედავთ, $X_c(\omega)$ მოდული ტოლია გაორმაგებული $X(\omega)$ მოდულისა, ე.ი. $|X_c(\omega)|=2|X(\omega)|$. გარდა ამისა, $X_c(\omega)$ ნულის ტოლია ყველა უარყოფითი სიხშირეებისათვის. სწორედ ამის გამო, როცა უარყოფითი სიხშირეები არ არსებობენ, $x_c(t)$ სიგნალს უწოდებენ ანალიტიკურ სიგნალს.

11.2 ჰილბერტის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები

განვიხილოთ ჰილბერტის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები. დაუშვათ $x(t)$ და $y(t)$ სიგნალებს გააჩნიათ ჰილბერტის გარდაქმნა შესაბამისად $x_i(t)$ და $y_i(t)$. მაშინ შესაძლებელია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თვისებები:

1. წრფიობა. მოცემული $c(t) = ax(t) + by(t)$ სიგნალის, სადაც a და b მუდმივი სიდიდეებია, ჰილბერტის გარდაქმნა ტოლია:

$$c_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ax(\tau) + by(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ax(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{by(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau + b\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau = ax_i(t) + by_i(t)$$

ამრიგად, ორი სიგნალის ჯამის ჰილბერტის გარდაქმნა ტოლია თითოეული სიგნალის ჰილბერტის გარდაქმნის ჯამისა. ე.ი. წრფიობის პირობა სრულდება.

2. მასშტაბირება. თუ $y(t)$ სიგნალს გააჩნია $y_i(t)$ ჰილბერტის გარდაქმნა, მაშინ $y(at)$ სიგნალის, სადაც a მუდმივი სიდიდეა, ჰილბერტის გარდაქმნა იქნება:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(a\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau .$$

შემოვიტანოთ $a\tau = x$ აღნიშვნა, მაშინ $\tau = x/a$, $d\tau = dx/a$ და მივიღებთ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(a\tau)}{\pi(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x)}{\pi\left(t - x/a\right)} dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x)}{\pi\left(\dfrac{at-x}{a}\right)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x)}{\pi(at-x)} dx = y_i(at)$$

ე.ი. სიგნალის მასშტაბირებას (შეკუმშვა–გაჭიმვას) მივყევართ მისი ჰილბერტის გარდაქმნის იგივე მასშტაბირებაზე.

3. დროით დაძვრა. თუ $y(t)$ სიგნალს გააჩნია $y_i(t)$ ჰილბერტის გარდაქმნა, მაშინ $y(t-a)$ სიგნალს, სადაც a მუდმივია, გააჩნია ჰილბერტის გარდაქმნა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\tau-a)}{\pi(t-\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(x)}{\pi(t-a-x)} dx = y_i(t-a) \quad ,$$

სადაც $\tau - a = x$, $\tau = x + a$, $d\tau = dx$. ამრიგად, სიგნალის დროით დაძვრა იწვევს მისი ჰილბერტის გარდაქმნის იგივე სიდიდით დაძვრას.

4. ნაკეცი. დაუშვათ $x(t)$ და $y(t)$ სიგნალებს შესაბამისად გააჩნიათ ჰილბერტის გარდაქმნა $x_i(t)$ და $y_i(t)$. განვიხილოთ ამ სიგნალების ნაკეცის $c(t) = x(t) \otimes y(t)$ ჰილბერტის გარდაქმნა. ამისათვის გადავიდეთ სიხშირულ არეში, მაშინ გვექნება:

$$C_i(\omega) = H(\omega)\cdot C(\omega) = H(\omega)[X(\omega)\cdot Y(\omega)] = [H(\omega)X(\omega)]Y(\omega) = [H(\omega)Y(\omega)]X(\omega)$$

გადავიდეთ დროით არეში. რადგან

$$[H(\omega)X(\omega)]Y(\omega) = [H(\omega)Y(\omega)]X(\omega) = x_i(t) \otimes y(t) = y_i(t) \otimes x(t),$$

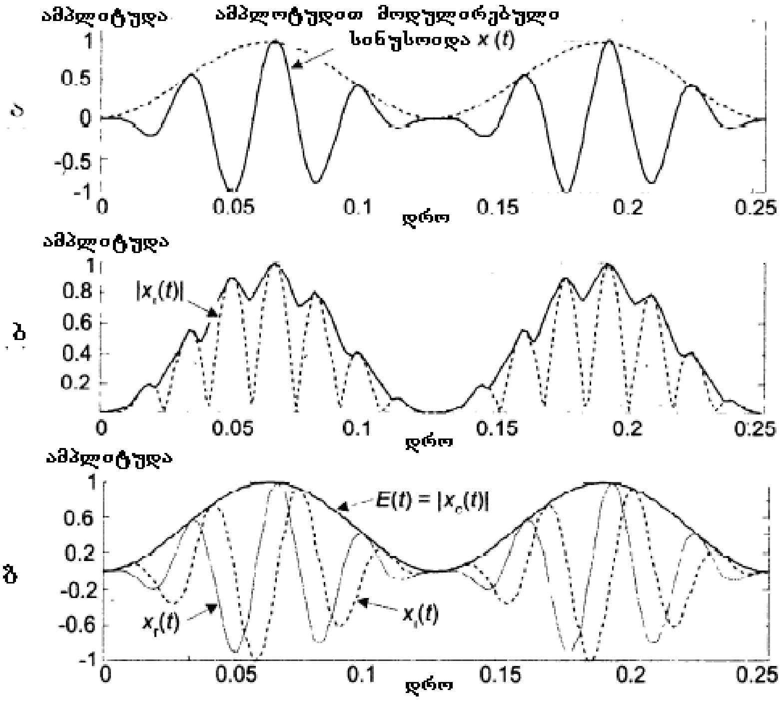
ამიტომ მივიღებთ: $c_i(t) = x_i(t) \otimes y(t) = y_i(t) \otimes x(t)$

11.3 ჰილბერტის გარდაქმნის გამოყენების მაგალითები

ანალიტიკური სიგნალის საშუალებით შესაძლებელია დროის მოცემულ მომეტისათვის სიგნალის მყისიერი პარამეტრების განსაზღვრა, როგორიცაა ამპლიტუდა, ფაზა ან სიხშირე. დაუშვათ გვაქვს ამპლიტუდით მოდულირებული ნამდვილი სიგნალი, რომლის მომვლებს გააჩნია რაიმე ინფორმაცია, მაშინ $E(t)$ მომვლების მყისიერი ამპლიტუდა ტოლია:

$$E(t) = |x_c(t)| = \sqrt{x(t)^2 + x_i(t)^2} \tag{11.5}$$

და სიგნალის მომვლები დაემთხვევა $x_c(t)$ სიგნალის მოდულს., როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ. 11.5.



ნახ. 11.5

ნახ. 11.5ა ნაჩვენებია ამლიტუდით მოდულირებული სიგნალის დემოდულაცია, სადაც სინუსოიდალური სიგნალი მოდულირებულია ამპლიტუდით დაბალსიხშირიანი სინუსოიდით (წყვეტილი მრუდი). სამოდულაციო სიგნალის ტრადიციული სქემით აღსადგენად საჭიროა მოდულირებული სიგნალის გამართვა და შემდეგ მისი გატარება დაბალი სიხშირის ფილტრში. ფილტრის გამოსავალი სიგნალი ნაჩვენებია ნახ. 11.5ბ (მთლიანი მრუდი), რომელიც წარმოადგენს სამოდულაციო სიგნალს. ამ პროცედურის მაგივრად თუ განვსაზღვრავთ $x(t)$ სიგნალის ჰილბერტის გარდაქმნას, მივიღებთ $x_i(t)$ სიგნალს, რომლის საშუალებით ფორმირდება ანალიტიკური სიგნალი $x_c(t) = x(t) + jx_i(t)$. ბოლოს სამოდულაციო სიგნალის გამოსაყოფად, რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 11.5გ (მსხვილი მრუდი), (11.5) ფორმულით ვღებულობთ $x_c(t)$ სიგნალს მოდულს, რომელიც ზუსტად წარმოადგენს სამოდულაციო სიგნალს.

მეორეს მხრივ, დაუშვათ, რომ ნამდვილი სინუსოიდალური $x(t)$ სიგნალი ფაზით არის მოდულირებული. ჩვენ შეგვიძლია $x_c(t)$ სიგნალის $\varphi(t)$ მყისიერი ფაზის განსაზღვრა შემდეგი გამოსახულებით:

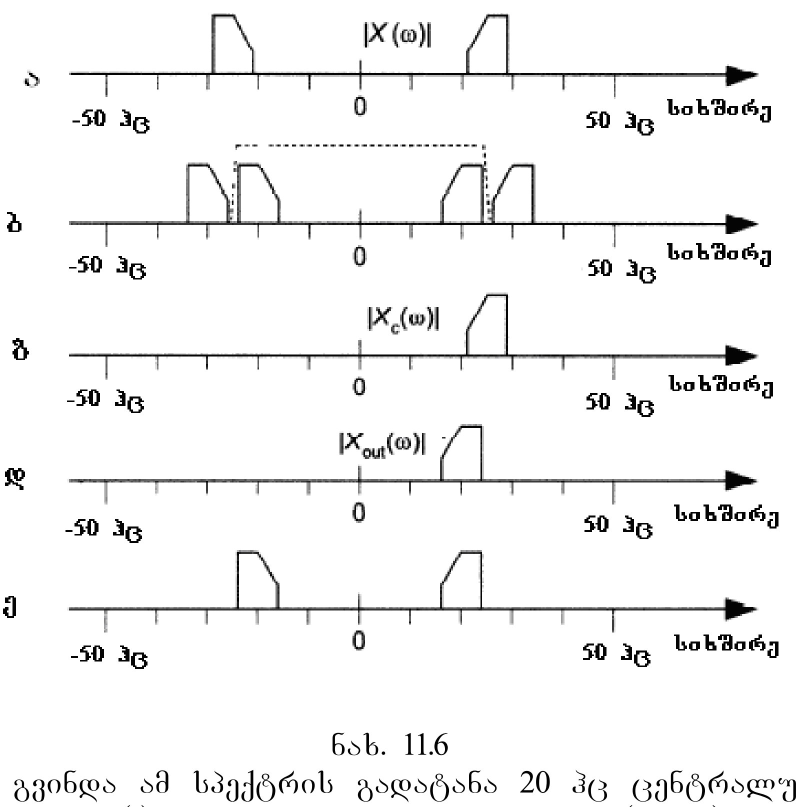
$$\varphi(t) = arctg\left[\frac{x_i(t)}{x(t)}\right] .$$

$\varphi(t)$ ფაზის განსაზღვრა ექვივალენტურია $x(t)$ სიგნალის ფაზური დემოდულაციისა. ანალოგიურად, თუ ნამდვილი სინუსოიდალური სიგნალი მოდულირებულია სიხშირით, მაშინ შეგვიძლია მისი მყისიერი სიხშირის განსაზღვრა მყისიერი ფაზის გაწარმოებით:

$$F(t) = \frac{d(\varphi(t))}{dt} = \frac{d\left[arctg\,\frac{x_i(t)}{x(t)}\right]}{dt} .$$

$F(t)$ განსაზღვრა ექვივალენტურია $x(t)$ სიგნალის სიხშირული დემოდულაციის. თუ $\varphi(t)$ იზომება რადიანებში, მაშინ $F(t)$ საზომი ერთეულია რადიანი/წამში. თუ $F(t)$ გავყოფთ 2π-ზე, მივიღებთ სიხშირეს ჰერცებში.

განვიხილოთ ჰილბერტის გარდაქმნის გამოყენების კიდევ ერთი მაგალითი. ვთქვათ, ნამდვილი $x(t)$ სიგნალის სპექტრის მოდული $|X(\omega)|$ განთავსებულია 25 ჰც ცენტრალური სიხშირის მიმართ (ნახ. 11.6ა).



ნახ. 11.6

დაუშვათ, ჩვენ გვინდა ამ სპექტრის გადატანა 20 ჰც ცენტრალურ სიხშირეზე. ამისათვის საჭიროა $x(t)$ სიგნალი გავამრავლოთ $\cos(2\pi 50t)$ სიდიდეზე, რათა მივიღოთ ნამდვილი სიგნალი, რომლის სპექტრი თავმოყრილია 20ჰც ცენტრალურ სიხშირის გარშემო (ნახ. 11.6ბ). ასეთი მეთოდის პრობლემა მდგომარეობს იმაში, რომ მაღალი სიხშირეების ჩასახშობად გვჭირდება

ფილტრი პრაქტიკულად არარეალიზებადი სიხშირული მახასიათებლით, რომელიც ნახ. 11.6ბ წარმოდგენილია წყვეტილი ოთხკუთხედის სახით.

მეორეს მხრივ, თუ განვსაზღვრავთ $x(t)$ სიგნალიი ჰილბერტის გარდაქმნას და მივიღებთ $x_i(t)$ სიგნალს, მაშინ ამ ორი სიგნალით მივიღებთ ანალიტიკურ სიგნალს (11.1), რომლის ცალმსრივი სპექტრი ნაჩვენებია ნახ. 11.6გ. შემდეგ, $x_c(t)$ სიგნალს გავამრავლებთ კომპლექსურ $e^{-j2\pi 50t}$ ექსპონენტაზე და ვღებულობთ სიხშირით დაძრულ $x_{out}(t)$ კომპლექსურ სიგნალს, რომლის სპექტრი ნაჩვენებია ნახ. 11.6დ. თუ ამ სპექრტიდან ავიღებთ ნამდვილ ნაწილს მივიღებთ საჭირო სიხშირის ნამდვილ სიგნალს, რომლის ცენტრალური სიხშირე 20ჰც ტოლია (ნახ. 11.6ე).

11.4 ჰილბერტის ციფრული ფილტრი

როგორც უკვე აღვნიშეთ ჰილბერტის გარდაქმნა შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც საწყისი სიგნალის და ჰილბერტის გარდაქმნის ბირთვის ნაკეცი $x_i(t)=h(t)\otimes x(t)$, სადაც $h(t)$ წარმოადგენს ჰილბერტის გარდაქმნის ბირთვს ანუ იმპულსურ მახასიათებელს, რომელიც ფაქტობრივად წარმოადგენს წრფივი ფილტრის იმპულსურ მახასიათებელს. აქედან გამომდინარე, ასეთ ფილტრს ჰილბერტის ფილტრი ეწოდება.

განვიხილოთ ჰილბერტის ციფრული ფილტრი. დაუშვათ, მოცემულია N განზომილებიანი დისკრეტული თანმიმდევრობა $x(n\Delta t)$, სადაც Δt დისკრეტიზაციის ინტერვალია. თუ დისკრეტული სიგნალის სპექტრი პერიოდულია $T = {}^{2\pi}\!/_{\Delta t}$ პერიოდით, მაშინ ჰილბერტის ციფრული ფილტრის კოეფიციენტები შეიძლება განისაზღვროს ჰილბერტის ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის ფურიეს უკუ გარდაქმნით

$$h(n\cdot\Delta t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2}H(\omega)e^{j\omega n\Delta t}d\omega\,,\qquad n=0,1,2,3,.....$$

დაუშვათ, რომ $\Delta t=1$, მაშინ

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(\omega)e^{j\omega n}d\omega\,,\qquad n=0,1,2,3,.....$$

თუ გავითვალისწინებთ ჰილბერტის ფილტრის სიხშირულ მახასიათებლს

$$H(\omega)=\begin{cases} j, & \omega<0\\ 0, & \omega=0\\ -j, & \omega>0\end{cases},$$

და ინტეგრირების მთელი ინტერვალს დავყობთ დადებით და უარყოფით არეებად, მაშინ მივიღებთ:

$$h(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}j\,e^{j\omega n}d\omega+\frac{1}{2\upsilon}\int_{0}^{\pi}(-j)e^{j\omega n}d\omega=\frac{j}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}e^{j\omega n}d\omega+\int_{0}^{\pi}e^{j\omega n}d\omega\right].$$

ინტეგრალების ამოხსნის შედეგად მივიღებთ:

$$h(n)=\frac{j}{j2\pi n}\left[1-e^{-j\pi n}-e^{j\pi n}+1\right]=\frac{1}{2\pi n}\left[2-\left(e^{-j\pi n}+e^{j\pi n}\right)\right]=\frac{2}{2\pi n}\left[1-\frac{e^{-j\pi n}+e^{j\pi n}}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi n}\left[1-\cos(\pi n)\right]$$

ამრიგად მივიღეთ ჰილბერტის ციფრული ფილტრის იმპულსური მახასიათებელი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$h(n)=\frac{1}{\pi n}\left[1-\cos(\pi n)\right].$$

როგორც ამ გამოსახულებიდან ჩანს, ლუწი $n=0,2,4,6,\ldots$ დროს ჰილბერტის ციფრული ფილტრის იმპულსური მახასიათებელი ნულის ტოლია, ხოლო როცა n კენტია $n=1,3,5,\ldots.$ მაშინ $h(n)=2/(\pi n)$.

შეიძლება დავასკვნათ, რომ ჰილბერტის ციფრული ფილტრი წარმოადგენს იდეალურ ფართოზოლიან ფაზამაბრუნებელს და როგორც ყველა იდეალური ფილტრი ფიზიკურად არარეალიზებადია. უნდა აღინიშნოს, რომ ფაზის მობრუნებასთან ერთად ჰილბერტის ფილტრი აღმოფხვრის სიგნალის მუდმივ მდგენელს.

რადგან პრაქტიკაში უსასრულო რიგის ჰილბერტის ციფრული ფილტრის გამოყენება შეუძლებელია, ამიტომ სასრულო რიგის ჰილბერტის ციფრული ფილტრი, იდეალურ ფილტრთან შედარებით, იწვევს ფილტრის სიხშირული მახასიათებლის დამახინჯებას, რაც გამოიხატება უარყოფით არეში ანალიტიკური სიგნალის სპექტრის არასრულ ჩახშობაში.

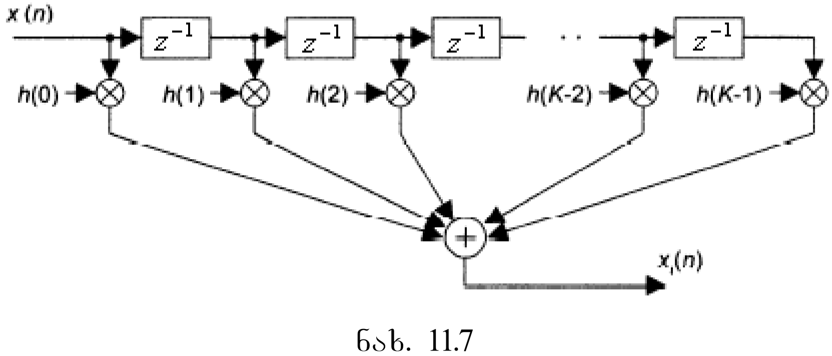
11.5 დისკრეტული ჰილბერტის გარდაქმნის პროექტირება

დისკრეტული ჰილბერტის გარდაქმნა შეიძლება რეალიზირებული იყოს როგორც დროით ასევე სიხშირულ არეებში. განვიხილოთ ორივე მათგანი.

1. **ჰილბერტის გარდაქმნა დროით არეში**. გავიხსენოთ, რომ $x_i(n)$ დისკრეტული სიგნალი შეიძლება მივიღოთ $x(n)$ და $h(k)$ სიგნალების ნაკეცით. ანალიტიკურად ეს გამოისახება შემდეგნაირად:

$$x_i(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)x(n-k).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ ჰილბერტის გარდაქმნა შეიძლება რეალიზირებული იყოს დისკრეტული არარეკურსიული ფილტრის საშუალებით, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგ ნასაზზე:



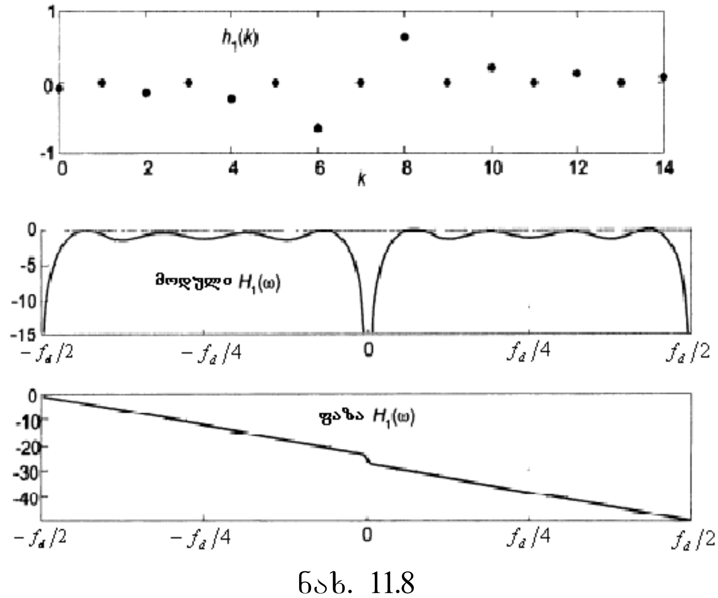
ნახ. 11.7

როგორც ვხედავთ ჰილბერტის გარდაქმნა დაიყვანება მისი იმპულსური $h(k)$ მახასიათებლის განსაზღვრაში, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია ნახ. 11.1-ზე მოყვანილი სქემის რეალიზირება.

დასაწყისათვის უნდა გადავწყვიტოთ $h(k)$ კენტი თუ ლუწი სიგრძისა უნდა იყოს. უნდა გვახსოვდეს, რომ არარეკურსიული ფილტრების რეალიზაციას გააჩნიათ კენტი ან ლუწი სიგრძის ანტისიმეტრიული კოეფიციენტები (შესაბამისად III და IV ტიპის ფილტრები). კენტი სიგრძის დროს $|H(0)| = 0$ და $|H(\omega_d/2)| = 0$. ლუწი სიგრძის დროს გვექნება: $|H(0)| = 0$ და $|H(\omega_d/2)|$-ს შეზღუდვა არ გააჩნია.

ყოველივე ეს გვიჩვენებს, რომ ჰილბერტის გარდაქმნის ამპლიტუდერ-სიხშირული მახასიათებელი კენტი სიგრძის დროს ნულის ტოლია როგორც ნულოვან სიხშირეზე, ასევე დისკრეტიზაციის სიხშირის ნახევარზე. რაც შეეხება ლუწი რაოდენობის განშტოების მქონე ჰილბერტის გარდაქმნას მისი ამპლიტუდერ-სიხშირული მახასიათებელი ნულოვან სიხშირეზე ყოველთვის ნულის ტოლია. განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

ნახ. 11.8-ზე ნაჩვენებია ჰილბერტის გარდაქმნის ამპლიტუდერ-სიხშირული მახასიათებელის თანმიმდევრობა $(n=15)$, რომელთა კოეფიციენტები აღნიშნულია $h_1(k)$ სიმბოლოთი.



ნახ. 11.8

ნახ. 11.8–დან გამომდინარე შეგვიძლია გავაკეთოდ შემდეგი დასკვნები:

1. კენტი სასრულო რაოდენობის იმპულსური მახასიათებლის რეალიზაციას გააჩნია ნულოვანი მნიშვნელობის ამპლიტუდერ-სიხშირული მახასიათებელი ნულოვან და $\pm f_d/2$ ჰც სიხშირეებზე. ეს იმას ნიშნავს, რომ კენტი რაოდენობის იმპულსური მახასიათებლები (III ტიპის ფილტრი) მოქმედებენ ისე, როგორც ზოლოვანი ფილტრი.

2. $H_1(\omega)$ გაშვების ზოლში გააჩნია პულსაცია. ეს მოსალოდნელია, რადგან ჩვენ არ შეგვიძლია $h_1(k)$ უსასრულო თანმიმდევრობის გამოყენება და ამიტომ დროის არეში იმპულსური მახასიათებლის წაკვეთა იწვევს სიხშირულ არეში პულსაციას (გიბსის მოვლენა). როგორც ვიცით პულსაციის ჩაქრობა შესაძლებელია თუ $h_1(k)$ თანმიმდევრობას გავამრავლებთ ფანჯარაზე, თუმცა ეს

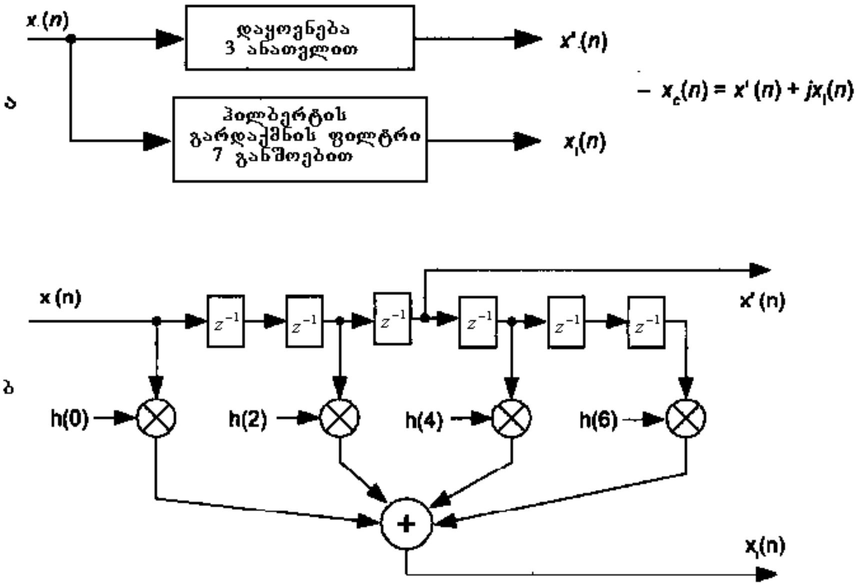
მოვლენა იწვევს $H_1(\omega)$-ს გატარების ზოლის შემცირებას და ამიტომ საჭირო ხდება კოეფიციენტების რაოდენობის გაზრდა.

3. ძალზე ძნელია ჰილბერტის გარდაქმნის გამოყენება დაბალსიხშირიანი სიგნალისათვის. ჩვენ შეგვიძლია გატარების ზოლის რამდენადმე გაზრდა და შევამციროთ $H_1(\omega)$-ს გარდამავალი ზოლის სიგანე, მაგრამ ყოველივე ეს მოითხოვს ფილტრის სიგრძის მნიშვნელოვან გაზრდას.

4. ფაზურ-სიხშირული $H_1(\omega)$ მახასიათებელი წრფივია (იმპულსური მახასიათებლის სიმერტიულობის გამო), რომლის დახრილობა პროპორციულია დაყოვნებაზე, რომელსაც განიცდის სიგნალი არარეკურსიულ ფილტრში გავლის დროს. ფაზურ-სიხშირული $H_1(\omega)$ მახასიათებელის წყვეტა 0 ჰც დროს შეესაბამება π რადიანს.

ანალიტიკური სიგნალის წარმოქმნისას საჭიროა $H_1(\omega)$ არსებული წრფივი ფაზური წანაცვლების (ძვრის) კომპესაცია. კერძოდ, დროში მუდმივი დაყოვნება, რომელიც ფილტრის ჯგუფურ დაყოვნების ტოლია. ეს შეიძლება გაკეთდეს საწყისი $x(t)$ სიგნალის დროში დაყოვნებით, რომელიც $h_1(k)$ იმპულსური მახასიათებლის მქონე ჰილბერტის გარდაქმნის ჯგუფურ დაყობნების ტოლია.

ნახ. 11.9 წარმოდგენილია არარეკურსიული ფილტრის საშუალებით კომპლექსური $x_c(n)$ თანმიმდებრობის წარმოქმნის სქემა, რომელსაც გაანია 7 განშტოება.

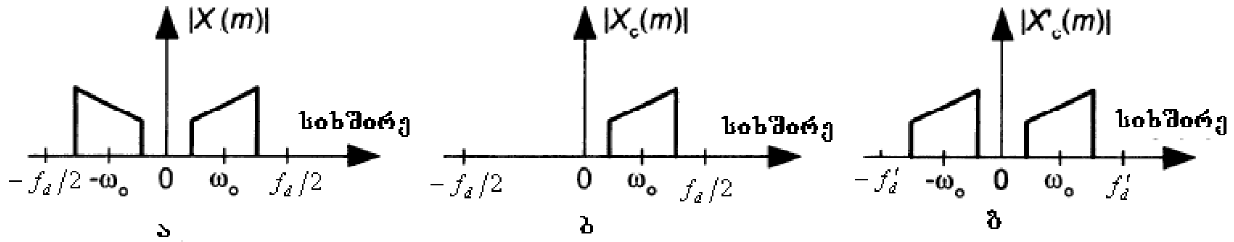


ნახ. 11.9

რეკურსიული ფილტრისათვის ჯგუფური დაყოვნება განისაზღვრება ფორმულით: $G=(k-1)/2$, სადაც k – ფილტრის განშტოების რაოდენობაა. ნახ. 11.9ა-ზე ნაჩვენებია კომპლეკსური $x_c(n)$ თანმიმდებრობის წარმოქმნის ბლოკ-სქემა, სადაც ხდება $x(n)$ დაყოვნება $G=(7-1)/2=3$ ანათვლით, რომლის შედეგადაც ვღებულობთ დაყოვნებულ $x'(n)$ თანმიმდევრობას.

თუ ჩვენ ვახდენთ ნახ. 11.9ა სქემის პროგრამულად მოდულირებას, მაშინ დაყოვნებული $x'(n)$ თანმიმდევრობის მიღება შესაძლებელია 3 ნულოვანი ანათვლის შეტანით $x(n)$ თანმიმდევრობის დასაწყისში.

2. ჰილბერტის გარდაქმნა სიხშირულ არეში. ჰილბერტის გარდაქმნა სიხშირულ არეში მდგომარეობს შემდეგში. N სიგრძის დისკრეტული $x(n)$ ანალიტიკური თანმიმდევრობიდან ღებულობენ $X(\omega)$ სპექტრს, რომელიც ნაჩვენებია ნახ. 11.10ა-ზე.



ნახ. 11.10

შემდეგ ვქმნით ახალ სპექტრს $X_c(\omega)=2X(\omega)$, რომლის უარყოფით სიხშირეებსანულებენ, რის შედეგადაც ვღებულობთ ცალმხრივ $X_c(\omega)$ სპექტრს (ნახ. 11.10ბ). მიღებულ $X_c(\omega)$ სპექტრის მნიშვნელობებს ვყოფთ $X_c(0)$ მუდმივ მდგენელზე და $X_c(N/2)$ სიდიდეს 2 რიცხვზე. საბოლაოდ $X_c(\omega)$ სპექტრიდან დროით არეში ფურიეს უკუგარდაქმნით ვღებულობთ ანალიტიკურ $x_c(n)$ თანმიმდევრობას. $x_c(n)$ თანმიმდევრობის ნამდვილი ნაწილი წარმოადგენს საწყის $x(n)$ თანმიმდევრობას, ხოლო წარმოსახვითი $x_c(n)$ წარმოადგენს $x(n)$ თანმიმდევრობის ჰილბერტის გარდაქმნას.

სიხშირულ არეში ანალიტიკური სიგნალის მიღების პირდაპირი მეთოდით გამოყენებისას მხედველობაში უნდა მივიღოთ შემდეგი:

1. სასურველია $x(n)$ თანმიმდევრობის განზომილება ორის ხარისხის ტოლი იყოს, რათა ეფექტურად იყოს ფურიეს სწრაფი გარდაქმნის გამოყენება.

2. $X_c(\omega)$ სპექტრის თანმიმდევრობის სიგრძე ტოლი უნდა იყოს საწყისი $X(\omega)$ სპექტრს თანმიმდევრობის სიგრძისა. უნდა გვახსოვდეს, რომ უარყოფითი სიხშირეების განულდება არ ნიშნავს მათ გამორიცხვას მასივიდან.

3. $X_c(\omega)=2X(\omega)$ ტოლობაში მამრავლი 2 ამპლიტუდის ორჯერ დაქვეითობასა აკომპესირებს, რაც გამოწვეულია უარყოფით სიხშირეებზე სპექტრის ენერგიის დანაკარგებით.

4. სიგნალების ციფრული დამუშავების სწრაფი მიკროსქემების და ფურიეს სწრაფი დისკრეტული გარდაქმნის კონვეირული მეთოდების გამოჩენამ ანალიტიკური სიგნალის მიღების ზემოდ განხილულ სქემა მისი პრაქტიკაში გამოყენებისათვის შეიძლება აღმოჩნდეს სიცოცხლისუნარიანი.

შენიშვნა. ჰილბერტის გარდაქმნის ტრადიციული მეთოდები განკუთვნილია წრფივი სტაციონარული სიგნალებისა და სისტემებისათვის. მხოლოდ ბოლო ათეულ წლეებში მიმდინარეობს ინტესიური მუშაობა არასტაციონარული პროცესებისათვის ჰილბერტის გარდაქმნის დამუშავება, რომელსაც **ჰილბერტ–ჰუანის გარდაქმნა** ეწოდება. ეს მეთოდი 1995წ აშშ შემოგვთავაზა ნ. ჰუანმა ტაიფუნების ზედაპირული ტალღების შესასწავლად. დღეისათვის მიმდინარეობს გარდაქმნის მათემატიკური თეორიის დამუშავება.

12. მოდულაცია და დემოდულაცია

ბიოსიგნალების უშუალოდ გადაცემა კავშირის არხების საშუალებით არ შეიძლება. საქმე იმაში კი არაა, რომ ეს სიგნალები დაბალი ამპლიტუდებისაა, არამედ იმაში, რომ ისინი შედარებით დაბალსიხშირიანი სიგნალები არიან. გარდა ამისა, ხშირად კავშირის ერთი და იმავე არხით საჭიროა ერთდროულად რამოდენიმე სხვადასხვა სიხშირიანი სიგნალის გადაცემა. ამ პრობლემის გადაწყვეტის ერთ-ერთ მეთოდს წარმოადგენს არხების სიხშირული დაყოფა, რომლის დროსაც სხვადასხვა სიგნალებს უკავიათ გადაუკვეთავი სიხშირული ზოლები. იმისათვის, რომ მოვახდინოთ სიგნალების ეფექტური გადაცემა, საჭიროა ამ სიგნალების სპექტრი დაბალი სიხშირის არედან გარდავქმნათ საკმაოდ მაღალსიხშირულ არეში. ამ პროცედურას **მოდულაცია** ეწოდება.

მოდულაცის არსი შემდეგში მდგომარეობს. ფორმირდება გარკვეული მაღალსიხშირული რხევა (ძირითად ჰარმონიული), რომელსაც გადამტანი რხევა (სიგნალი), ანუ უბრალოდ **გადამტანი** ეწოდება, რომლის რომელიმე პარამეტრი დროში იცვლება საწყისი სიგნალის პროპორციულად. გადამტან სიგნალად შეიძლება გამოვიყენოთ:

– ჰარმონიული სიგნალი. ამ შემთხვევაში მოდულაციას ეწოდება ანალოგური ან უწყვეტი;

– პერიოდული იმპულსების თანმიმდევრობა. ამ შემთხვევაში მოდულაციას ეწოდება იმპულსური მოდულაცია.

1. ანალოგური მოდულაციის სახეები:

– ამპლიტუდური მოდულაცია, როცა გადამტანის ამპლიტუდა იცვლება:

– სიხშირული მოდულაცია, როცა გადამტანის სიხშირე იცვლება;

– ფაზური მოდულაცია, როცა გადამტანის ფაზა იცვლება.

2. იმპულსური მოდულაციის სახეები:

– ამპლიტუდურ-იმპულსური მოდულაცია, როცა გადამტანის იმპულსების ამპლიტუდა იცვლება ;

– სიხშირულ–იმპულსური მოდულაცია, როცა გადამტანის იმპულსების სახშირე იცვლება;

– ფაზურ–იმპულსური მოდულაცია, როცა გადამტანის იმპულსების ფაზა იცვლება;

– განივ–იმპულსური მოდულაცია, როცა გადამტანის იმპულსების ხანგრძლივობა იცვლება.

საწყის სიგნალს **სამოდულაციო სიგნალი** ეწოდება, ხოლო მიღებულ დროში ცვალებად პარამეტრებიან რხევას ეწოდება **მოდულირებული სიგნალი**. უკუპროცესს – მოდულირებული სიგნალიდან სამოდულაციო სიგნალის მიღებას ეწოდება **დემოდულაცია**.

მოდულირებული სიგნალიდან საწყისი სიგნალის მისაღებად გამოიყენება გადამტანი სიგნალის რომელიმე განმასხვავებელი ნიშანი. ასეთ ნიშნად ხშირად იყენებენ გადამტანი სიგნალის სიხშირეს. ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს სიგნალის სიხშირულ გაყოფას. სიგნალის სიხშირული გაყოფისათვის იყენებენ სიხშირულ ფილტრებს, რომლებიც ატარებენ გადამტანი სიგნალის სიხშირეს.

დაუშვათ კავშირის არხით გვინდა გადავცეთ დაბალი სიხშირის $x(t)$ სიგნალი. ჩავწეროთ ზოგადი სახის მაღალსიხშირიანი ჰარმონიული რხევა

$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$, რომელსაც გააჩნია სამი პარამეტრი: ამპლიტუდა A, სიხშირე ω_0 და საწყისი ფაზა φ_0. თითოეულ მათგანს შეუძლია დაკავშირებული იყოს სამოდულაციო სიგნალთან, რის გამოც მიიღება მოდულაციის სამი სახე: ამპლიტუდური, სიხშირული და ფაზური. სიხშირული და ფაზური მოდულაციები ძლიერ არიან ურთიერთდაკავშირებულნი, რადგან ორივე მოქმედებს კოსინუს ფუნქციაზე. ამიტომ ამ ორი ტიპის მოდულაციას გააჩნიათ საერთო დასახელება **– კუთხური მოდულაცია**.

თანამედროვე ციფრულ გადამცემ სისტემებში გავრცელებულია კვადრატული მოდულაცია, რომლის დროსაც ერთდროულად იცვლებიან სიგნალის ამპლიტუდა და ფაზა. ჩვენ განვიხილავთ ანალოგურ მოდულაციას, კერძოდ ამპლიტუდურ, სიხშირულ და ფაზურ მოდულაციებს.

12.1 ამპლიტუდური მოდულაცია

ამპლიტუდური მოდულაციის დროს იცვლება გადამტანის რხევის ამპლიტუდა:

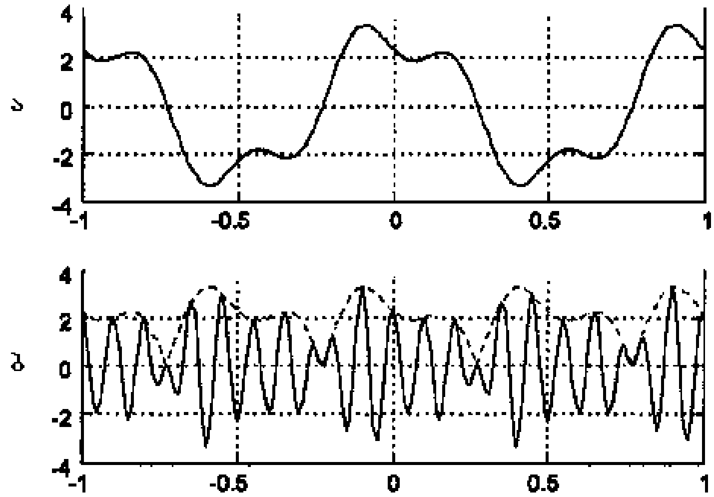
$$x_M(t)=A(t)\cos(\omega_0 t+\varphi_o).$$

ამპლიდუდით მოდულირებული $x_{AM}(t)$ სიგნალი წარმოადგენს სამოდულაციო სიგნალის მომვლების $A(t)$ და გადამტანის ჰარმონიული $\cos(\omega_0 t+\varphi_o)$ რხევის შევსების ნამრავლს. ამპლიტუდური მოდულაციის დროს კავშირი $A(t)$ მომვლებსა და სამოდულაციო $x(t)$ სიგნალს შორის განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$A(t)=A_m[1+mx(t)] \quad ,$$

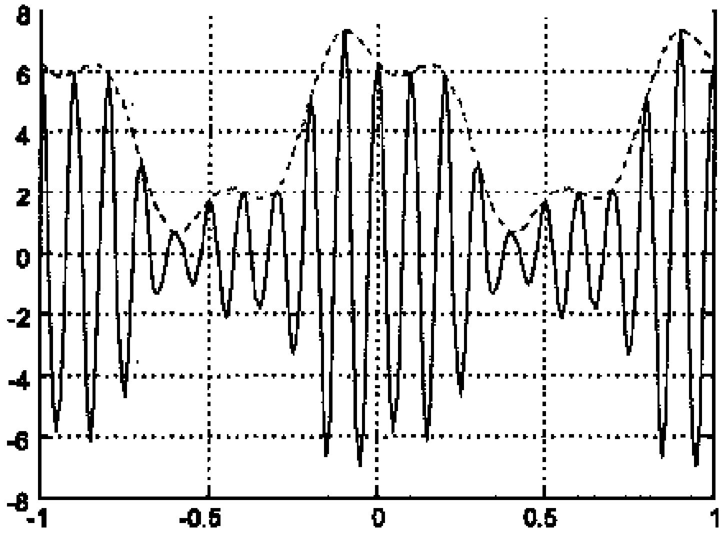
სადაც A_m- მუდმივი კოეფიციენტია, რომელიც ტოლია გადამტანი სიგნალის ამპლიტუდისა, $m-$ ამპლიტუდური მოდულაციის კოეფიციენტია (12.3).

თუ $x_{AM}(t)$ სიგნალის $A(t)$ ამპლიტუდას გავხდით სამოდულაციო $x(t)$ სიგნალის პროპორციულს, მაშინ შეიძლება წარმოიშვას შემდეგი პრობლემა. როგორც წესი, სამოდულაციო სიგნალი ნიშანცვლადი სიგნალია. განვიხილოთ ასეთი სიგნალი $x(t)=3\cos(2\pi t)-\sin(6\pi t+\pi/4)$ (ნახ. 12.1 ა)



ნახ. 12.1

ნახ. 12.1 ბ – დან ჩანს, რომ დემოდულაციის დროს გამოყოფილი ამპლიტუდის მომვლები (წყვეტილი ხაზები) აღმოჩნდება არასწორი – იგი შეესაბამება საწყისი სიგნალის მოდულს. ამიტომ სიგნალის ამლიტუდური მოდულაციის დროს სამოდულაციო $x(t)$ სიგნალს უნდა დაუმატოთ მუდმივი მდგენელი, რათა იგი გახდეს ერთნიშნიანი. $A(t)=A_0+kx(t)$. ნახ. 12.2-ზე წარმოდგენილ სიგნალისათვის საკმარისია $k=$ 4.



ნახ. 12.2

ეხლა მოვლების ფორმა შეესაბამება სამოდულაციო სიგნალს ზუსტად მუდმივი მდგენელამდე. რაც შეეხება მუდმივ მდგენელს იგი დემოდულაციის შემდეგ ადვილად შეიძლება გამოვრიცხოთ სიგნალიდან. ამრიგად, სიგნალის ამპლიტუდური მოდულაცია საბოლაოდ შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$x_{AM}(t)=[A_0+kx(t)]\cos(\omega_0 t+\varphi_0). \qquad (12.1)$$

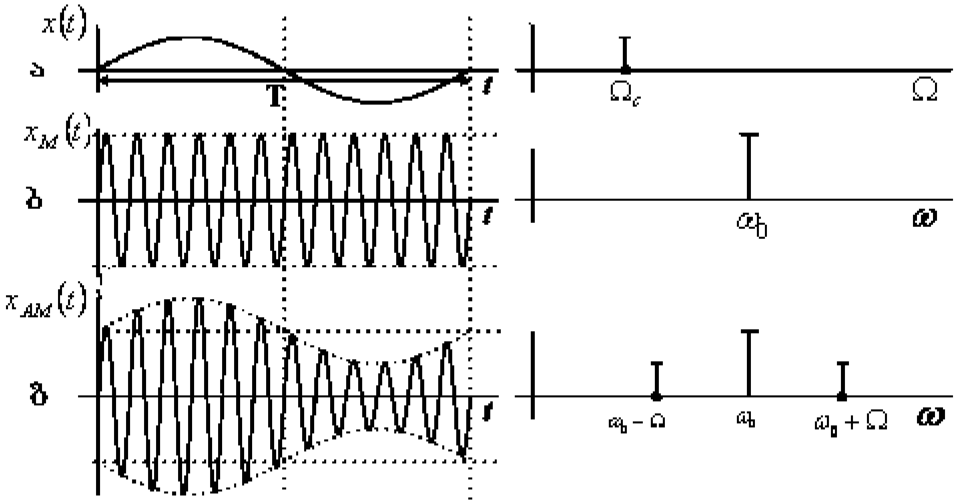
ერთტონალური ამპლიტუდური მოდულაცია. ამპლიტუდური მოდულაციის და მისი სპექტრული სტრუქტურის არსის გასაგებად სასარგებლოა განვიხილოთ მარტივი შემთხვევა, როცა სამოდულაციო სიგნალს წარმოადგენს ჰარმონიული რხევა Ω სიხშირით და Φ_0 ფაზით,

$$x(t) = A_M \cos(\Omega t + \Phi_0)\ ,$$

ხოლო გადამტან სიგნალს გააჩნია ერთი ω_0 სიხშირე φ_0 – ფაზით. მაშინ (12.1) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$x_{AM}(t) = [A_0 + A_M \cos(\Omega t + \Phi_0)]\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (12.2)$$

სადაც $\Omega << \omega_0$. იმ შემთხვევაში, როცა სამოდულაციო სიგნალს წარმოადგენს ჰარმონიული რხევა, ვღებულობთ ე.წ. ერთტონალურ ამპლიტუდურ მოდულაციას, რომელიც წარმოდგენილია შემდეგ ნახაზზე :



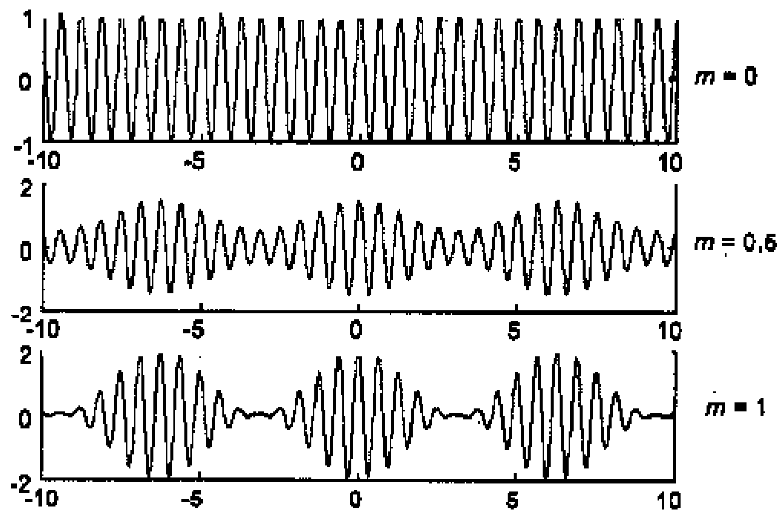
სამოდულაციო სიგნალის ამპლიტუდის A_M ფარდობა გადამტანი სიგნალის A_0 ამპლიტუდასთან

$$m = \frac{A_M}{A_0} \qquad (12.3)$$

ეწოდება მოდულაციის კოეფიციენტი ან მოდულაციის სიღრმე. (12.3) გამოსახულების გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$x_{AM}(t) = A_0[1 + m\cos(\Omega t + \Phi_0)]\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (12.4)$$

ნახ. 12.3 ნაჩვენებია სიგნალის ამპლიტუდური მოდულაცია სხვადასხვა მოდულაციის კოეფიციენტებისათვის.

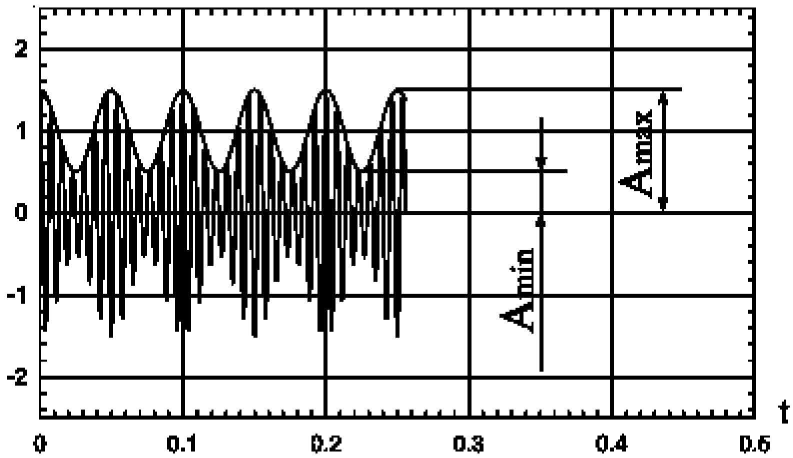


ნახ. 12.3

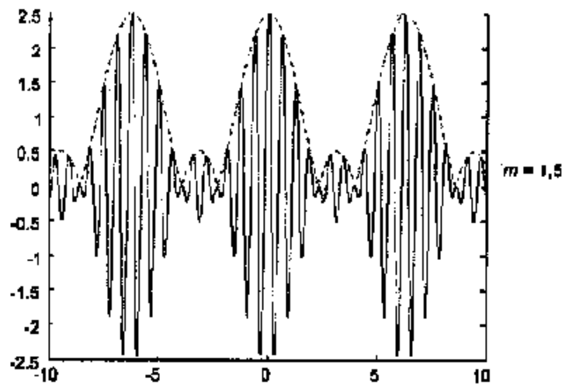
ცხადია, რომ ამპლიტუდით მოდულირებული სიგნალის მოვლების მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა, როცა ორივე კოსინუსი ერთის ტოლია. ე,ი. $A_{\max} = A(1+m)$. მომვლების მინიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება იმ მომენტებს, როცა მოდულირებული სიგნალის კოსინუსი -1 ტოლია. ე.ი. $A_{\min} = A(1-m)$. აქედან გამომდინარეობს მოდულაციის კოეფიციენტის განსაზღვრის ფორმულა:

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} \quad .$$

ისე როგორც ეს ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე (m = 0,5):



საზოგადოდ მოდულაციის კოეფიციენტი იცვლება $[0;1]$ დიაპაზონში. როცა $m>1$, მაშინ საქმე გვაქვს გადაჭარბებულ მოდულაციაზე (ნახ, 12.4)



ნახ. 12.4

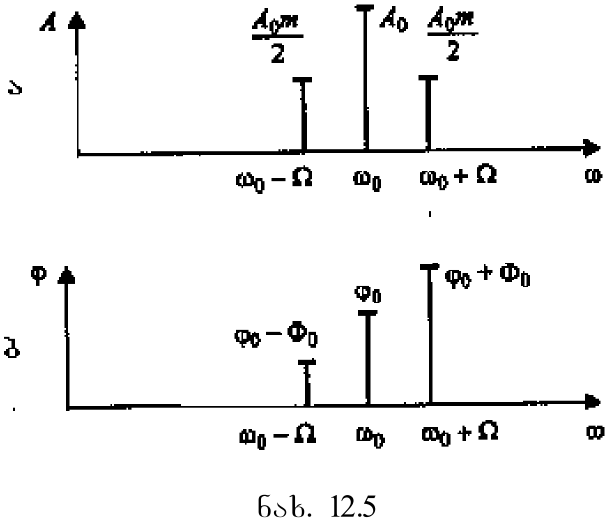
როგორც ამ ნახაზიდან ჩანს ამპლიტუდის მომვლები დამახინჯებულია.

განვიხილოთ ერთტონალური მოდულაციის სპექტრული ანალიზი. ამისათვის (12.4) ფორმულაში თუ გავხსნით ფრჩხილებს და გამოვიყენებთ ცნობილ ტრიგონემეტრიულ ფორმულას $\cos x \cos y = 1/2\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$, მაშინ მივიღებთ:

$$x_{AM}(t) = A_0\cos(\omega_0 t + a\varphi_0) + A_0 m\cos(\Omega t + \Phi_0)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$
$$= A_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A_0 m/2\cos\left[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0\right] + A_0 m/2\cos\left\|(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0\right\| \qquad (12.5)$$

მიღებული შედეგი გვიჩვენებს, რომ სიგნალის ამპლიტუდური მოდულაცია შედგება სამი ჰარმონიული მდგენელისაგან. ერთი მათგანი წარმოადგენს გადამტანის რხევას ω_0 სიხშირით, ხოლო დანარჩენი ორი, რომლებსაც გვერდითი სიხშირეები ეწოდებათ, ჩამორჩებიან ω_0 სიხშირეს ზევით და ქვევით Ω სიხშირით. გადამტანის რხევის ამპლიტუდა A_0 –ის ტოლია და იგი არ არის დამოკიდებული მოდულირებული სიგნალის დონეზე. გვერდითი სიხშირეების ამპლიტუდები $A_0 m/2$ მოდულაციის კოეფიციენტის პროპორციულია.

გვერდითი მაღალი სიხშირეებისათვის ხდება გადამტანის და მოდულირებული სიგნალების საწყისი ფაზების აჯამვა $(\omega_0 + \Omega)$, ხოლო დაბალი სიხშირეებისათვის – გამოკლება $(\omega_0 - \Omega)$. მოდულირებული სიგნალის ამპლიტუდური და ფაზური სპექტრები მოყვანილია ნახ. 12.5

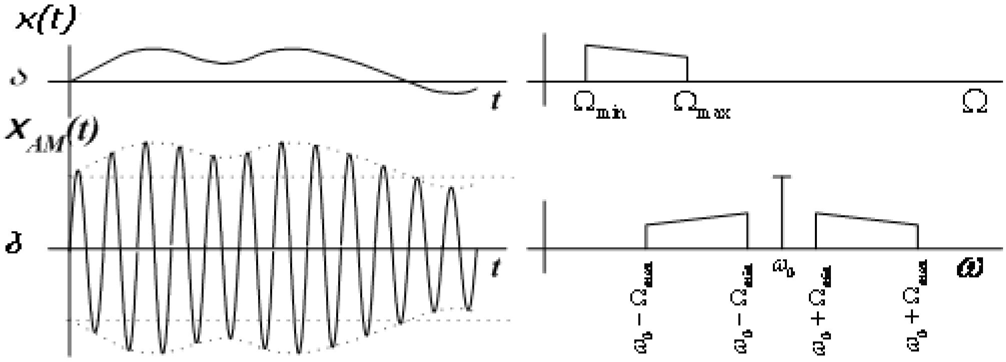


ნახ. 12.5

სადაც ა – ამპლიტუდური და ბ – ფაზური სპექტრებია. ნახ. 12.5 ჩანს, რომ ამპლიტუდით მოდულირებული სიგნალის სპექტრის სიგანე ორჯერ მეტია სამოდულაციო სიგნალის სიხშირეზე: $\Delta\omega = 2\Omega$.

ერთტონალური ამპლიტუდური მოდულაცია პრაქტიკაში იშვიათად გვხდება. უმეტეს შემთხვევაში სამოდულაციო სიგნალი $x(t)$ წარმოადგენს დროზე დამოკიდებულ რთულ ფუნქციას. ცნობილია, რომ თუ გამოვიყენებთ ფურიეს მწკრივს ან ფურიეს გარდაქმნას, მაშინ ნებიემიერი რთული ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ სასრულო ან უსასრულო ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით. $x(t)$ სიგნალის ყოველი Ω_i სიხშირის ჰარმონიული მდგენელი ამპლიტუდური მოდულაციის დროს ქმნის $\omega_0 \pm \Omega_i$ სიხშირის ორ გვერდით მდგენელს.

Ω_i, $i = 1,2,....,N$ სიხშირეების მრავლობითი ჰარმონიკები შესაბამისად წარმოქმნიან $\omega_0 \pm \Omega_i$, $i = 1,2,...,N$ გვერდით სიხშირეებს. თვალსაჩინოებისათვის სპექტრის ასეთი გარდაქმნა ამპლიტუდური მოდულაციის დროს ნაჩვენებია შემდეგ ნახაზზე:



როგორც ნახაზიდან ჩანს, ამპლიტუდით მოდულირებული სიგნალის სპექტრი გარდა გადამტანის ω_0 სიხშირისა შეიცავს გვერდით ზედა და ქვედა არეებს. ამ შემთხვევაში ზედა გვერდითი სიხშირის არე წარმოადგენს სამოდულაციო $x(t)$ სიგნალის კოპირებულ სპექტრს, რომელიც დაძრულია ზედა სიხშირეების არეში ω_0 სიდიდით. ქვედა სიხშირული არე იმეორებს $x(t)$ სიგნალის სპექტრულ დიაგრამას, სადაც სიხშირეები განლაგებულნი არიან სარკისებრად გადამტანის ω_0 სიხშირის მიმართ.

ერთტონალური ამპლიტუდური მოდულაცის სიმძლავრე. განვიხილოთ სიგნალის ერთტონალური ამპლიტუდური მოდულაცის (12.5) გამოსახულება. გავიხსენოთ, რომ A ამპლიტუდის მქონე ჰარმონიული რხევის სიმძლავრე ტოლია $A^2/2$ სიდიდისა. გარდა ამისა, რადგან სხვადასხვა სიხშირის ჰარმონიული რხევები არაკორელირებულნი არიან, ამიტომ მათი სიმძლავრეები იჯამება. აქედან გამომდინარე, (12.5) გამოსახულების საშუალო სიმძლავრე ტოლია:

$$\overline{P} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2 m^2}{4} \quad . \qquad (12.6)$$

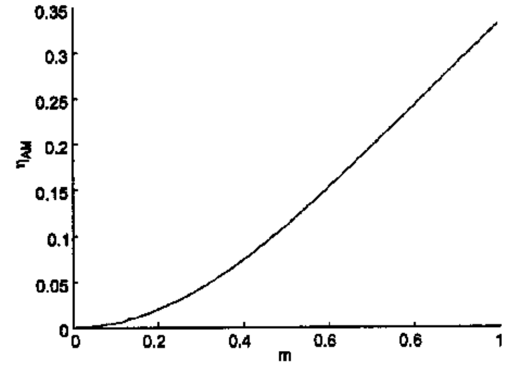
როგორც ვხედავთ, მიღებულ (12.6) გამოსახულების პირველი მდგენელი არ არის დამოკიდებული მოდულაციის კოეფიციენტზე და ამიტომ ის წარმოადგენს არამოდულირებული გადამტანის სიმძლავრეს. სასარგებლო სიმძლავრე

თავმოყრილია მხოლოდ მოდულირებული სიგნალის გვერდით სიხშირეებზე (12.6 ფორმულის მეორე მდგენელი).

შემოვიტანოთ ამპლიტუდური მოდულაცის მარგი ქმედების კოეფიციენტის ცნება, რომელიც განისაზღვრება გვერდითი სიხშირეების სიმძლავრის ფარდობით სიგნალის საერთო სიმძლავრესთან:

$$\eta_{Am} = \frac{A_0^2 \dfrac{m^2}{4}}{A_0^2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{m^2}{4}\right)} = \frac{m^2}{m^2+2}.$$

ნახ. 12.6 –ზე წარმოდგენილია η_{Am} - ს დამოკიდებულება m – ზე.



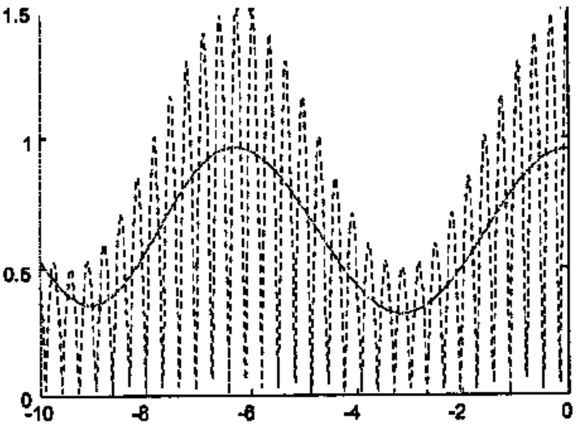
ნახ. 12.6

როგორც ნახაზიდან ჩანს, მოდულაციის კოეფიციენტის მაქსიმალური მნიშვნელობის დროს (m = 1) მარგი ქმედების კოეფიციენტი მხოლოდ 33%-ია. ე.ი. სიმძლავერის 2/3 იხარჯება ინფორმაციის თვალსაზრისით უსარგებლო გადამტანი რხევის გადაცემაზე.

სწორედ ამიტომ, დაბალი მარგი ქმედების კოეფიციენტის და სპექტრის დიდი სიგანის გამო, რომელიც ორჯერ აღემატება სამოდულაციო სიგნალის სპექტრის სიგანეს, ამპლიტუდური მოდულაცია ნაკლებად გამოიყენება პრაქტიკაში. დღეისათვის ამპლიტუდური მოდულაცია გამოიყენება შედარებით დაბალი სიხშირის რადიოსიგნალების და სატელევიზიო გამოსახულებების გადასაცემად.

12.2 ამპლიტუდური მოდულაციის დემოდულაცია

ამპლიტუდურად მოდულირებული სიგნალის დემოდულაცია შეიძლება რამოდენიმე მეთოდით. უმარტივესი მეთოდის არსი შემდეგში მდგომარეობს. განისაზღვრება მოდულირებული სიგნალის მოდული და შემდეგ გაგლუვების მეთოდის გამოყენებით მიიღება ერთნიშნიანი კოსინუსოიდალური იმპულსები და შემდეგ ხდება მათი გაგლუვება დაბალი სიხშირის ფილტრის საშუალებით. (ნახ. 12.7)



ნახ. 12.7

ცხადია, რომ ეს მეთოდი არ იმუშავებს გადაჭარბებული მოდულაციის დროს. დემოდულაციის შემდეგ მეთოდს სინქრონული დეტექტირება ეწოდება, რომლის არსი მდგომარეობს სიგნალის სიხშირის გადამტანი სიხშირის მქონე საყრდენი რხევის ნამრავლზე:

$$y(t) = x_{AM}(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A(t)\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{2}A(t)\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_0)$$

გამრავლების შედეგი შეიცავს ორ მდგენელს. პირველი არის საძებნი ამპლიტუდური ფუნქცია, ხოლო მეორე – გადამტანის $2\omega_0$ სიხშირის მოდულირებული სიგნალი. ეს მაღალი სიხშირის სიგნალი ადვილად შეიძლება ჩაიხშოს, თუ სიგნალს გავატარებთ დაბალი სიხშირის ფილტრში (ნახ. 12.7).

ამ შემთხვევაში მეტად მნიშვნელოვანია საწყისი ფაზის, საყრდენი რხევის სიხშირის და მოდულირებული სიგნალის გადამტანის სიხშირის ზუსტი თანხვედრა. თუ ხდება სიხშირეების თანხვედრა, მაგრამ საწყისი ფაზები განსხვავდებიან, მაშინ დაბალსიხშირიანი სიგნალი აღმოჩნდება გამრავლებული ფაზური ცდომილების კოსინუსზე, რაც იწვევს რეგულატორის გამოსავალზე სასარგებლო სიგნალის დონის დაწევას, ხოლო თუ ფაზთაშორისო ცდომილება აღწევს 90^0, მაშინ სიგნალი ნულის ტოლი ხდება.

როდესაც ხდება სიხშირული ძვრა გადამტან სიგნალსა და საყრდენ სიგნალს შორის სიტუაცია კიდევ უფრო მძიმდება, კერძოდ გამოსავალი დაბალსიხშირიანი სიგნალი აღმოჩნდება გამრავლებული ჰარმონიულ რხევაზე, რომლის სიხშირეა სიხშირეთა სხვაობა. ეს საბოლაოდ იწვევს გამოსავალი სიგნალის პულსირებას $\Delta\omega$ სიხშირით. ამ მოვლენას დარტყმები ეწოდება, ხოლო სიხშირეების $\Delta\omega$ სხვაობას – დარტყმის სიხშირე.

გადამტანსა და საყრდენ რხევას შორის სიხშირული და ფაზური სინქრონიზაციის შენარჩუნებისათვის გამოიყენება სპეციალური სისტემები, კერძოდ სიხშირის ფაზური ავტორეგულირების სისტემა.

სინქრონული დეტექტირების ღირსებას წარმოადგენს ის, რომ იგი სწორად ახდენს სიგნალის დემოდულაციას მაშინაც კი, როცა ხდება მოდულაციის გადარჭარბება.

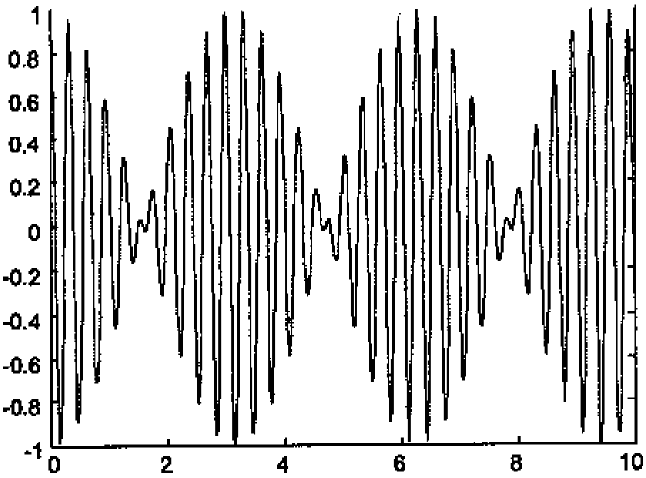
12.3 ამპლიტუდური მოდულაციის ნაირსახეობა

ამპლიტუდური მოდულაციის მახასიათებლების გაუმჯობესებისათვის დამუშავდა რამოდენიმე მოდიფიკაცია. განვიხილოთ ზოგიერთი მათგანი.

1. გადამტანის ჩახშობა. ამპლიტუდური მოდულაციის მარგი ქმედების კოეფიციენტის გაზრდისათვის შეიძლება უარი ვთქვათ გამოუსადეგარ გადამტან რხევაზე, უარი ვთქვათ სამოდულაციო სიგნალზე მუდმივი მდგენელის დამატებაზე. ასეთ მეთოდს ეწოდება ამპლიტუდური მოდელაცია გადამტანის ჩახშობით:

$$x(t) = x_M(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \ ,$$

რომლის გრაფიკული გამოსახულება წარმოდგენილია ნახ. 12.8



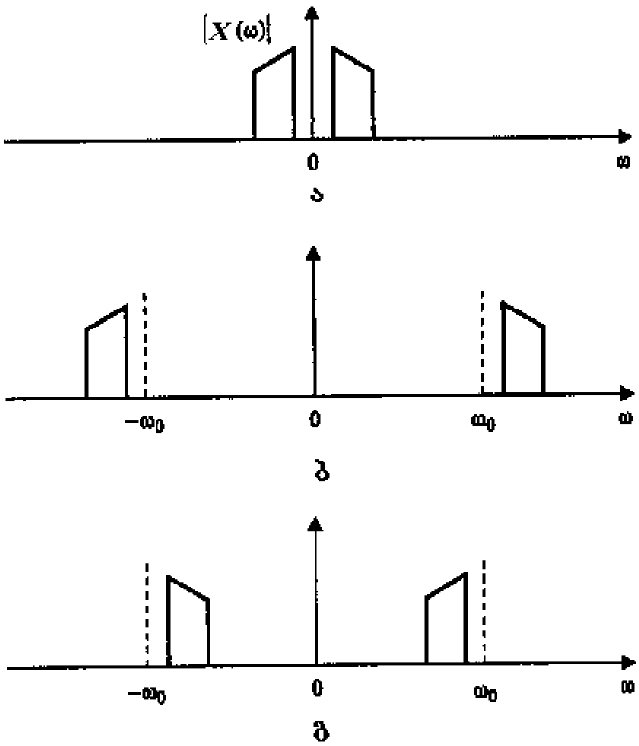
ნახ. 12.8

ენერგეტიკული მოგება საკმაოდ დიდია (მარგი ქმედების კოეფიციენტი 100% ტოლია). მაგრამ, მოდულირებული სიგნალის სპექტრის სიგანე იგივე რჩება, რადგან ხდება გადამტანის საშუალო სიხშირის ჩახშობა, ხოლო გვერდითი სიხშირეები ადგილზე რჩებიან.

ამრიგად, ამპლიტუდური მოდელაციას გადამტანის ჩახშობით, ჩვეულებრივი ამპლიტუდურ მოდელაციასთან შედარებით გააჩნია გარკვეული უპირატესობები. მაგრამ, ამ მეთოდმა პრაქტიკაში ვერ პოვა ფართო გამოყენება იმის გამო, რომ დემოდულაციის დროს წარმოიქმნება გარკვეული პრობლემები. კერძოდ, დემოდულაციის დროს საჭიროა გადამტანის სიხშირის და ფაზის ზუსტი შესაბამისობა საყრდენ რხევასთან.

2. ერთპოლუსიანი მოდულაცია. ზემოდ განხილული ამპლიტუდური მოდულაციის სპექტრის გვერდითი სიხშირეები ერთმანეთის მიმართ სარკისებრად არიან განლაგებულნი და გააჩნიათ ერთი და იგივე ინფორმაცია. ამიტომ ერთ-ერთი გვერდითი სიხშირე შეგვიძლია გამოვრიცხოთ. ასეთ მოდულაციას ერთპოლუსიანს უწოდებენ.

იმის მიხედვით, თუ რომელი გვერდითი სიხშირე რჩება, ვღებულობთ ერთპოლუსიან მოდულაციას ზედა ან ქვედა გვერდითი სიხშირის ზოლით. ერთპოლუსიანი სიგნალის ფორმირებისათვის განვიხილოთ რამოდენიმე სპექტრული გრაფიკი (ნახ. 12.9)



ნახ. 12.9

სადაც ა – სამოდულაციო სიგნალის სპექტრია, ბ – ერთმოდულიანი სიგნალის სპექტრი ზედა გვერდითი სიხშირის ზოლით, გ – იგივე ქვედა გვერდითი სიხშირის ზოლით.

ამრიგად, ერთპოლუსიან მოდულაციის დროს ხდება სიგნალის სპექტრის დაძვრა გადამტანის არეში. ამლიტუდური მოდულაციასთან შედარებით ხდება ყოველი „ნახევარი" სპექტრის წანაცვლება თავის მიმართულებით: დადებითი სიხშირეების არეში ω_0-კენ ან უარყოფითი სიხშირეების არეში $-\omega_0$-კენ.

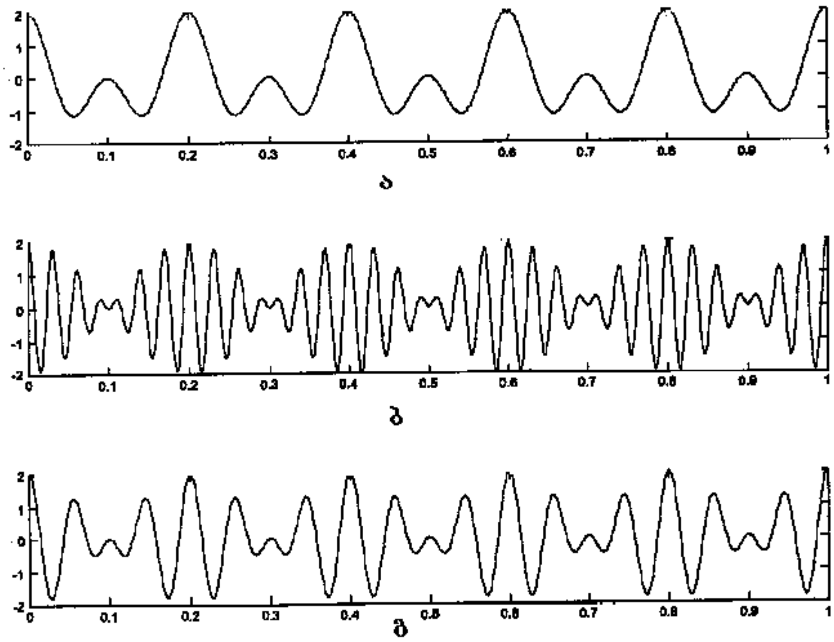
ცხადია, რომ ერთპოლუსიანი სიგნალის სპექტრის სიგანე სამოდულაციო სიგნალის სპექტრის სიგანის ტოლია. ე.ი. ერთპოლუსიანი სიგნალის სპექტრი ორჯერ უფრო ვიწროა ვიდრე ჩვეულებრივი ამპლიტუდური მოდულაციის დროს.

ერთპოლუსიანი მოდულაციის განსახორციელებლად უნდა გამოვიყენოთ ჰილბერტის გარდაქმნა. პირველ რიგში საჭიროა სამოდულაციო სიგნალიდან მივიღოთ ანალიტიკური სიგნალი, რომელსაც გააჩნია ცალმხრივი სპექტრი. თუ ამ სიგნალს გავამრავლებთ $e^{j\omega_0 t}$ კომპლექსურ სიდიდეზე, მაშინ ხდება ცალმხრივი სპექტრის დაძვრა ω_0 სიხშირით მარჯვნივ, რის შედეგად ფორმირდება ერთპოლუსიანი სიგნალის ცალმხრივი სპექტრი ზედა გვერდითი სიხშირის ზოლით. იმისათვის ,რომ ანალიტიკური სიგნალიდან გადავიდეთ ნამდვილ სიგნალზე, საჭიროა ავიღოთ ანალიტიკური სიგნალის ნამდვილი ნაწილი. ანალოგიურად ხდება ქვედა გვერდითი სიხშირის დროს იმ განსხვავებით, რომ ანალიტიკური სიგნალი უნდა გავამრავლოთ $e^{-j\omega_0 t}$ სიდიდეზე (მაშინ სპექტრი გადაადგილდება მარცხნივ უარყოფითი სიხშირრეების არეში).

ამრიგად, ერთპოლუსიანი სიგნალი შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც ორი ამპლიტუდით მოდულირებული სიგნალების ჯამი, რომელთა გადამტანის რხევებს გააჩნიათ ერთი და იგივე სიხშირე, ოღონდ ურთიერთმიმართ ფაზით დაძრულნი არიან 90^0-ით. იმისდამიხედვით ხდება ამ ორი სიგნალის აჯამვა თუ

გამოკლება ფორმირდება სიგნალი ზედა ან ქვედა გვერდითი სიხშირული ზოლებით.

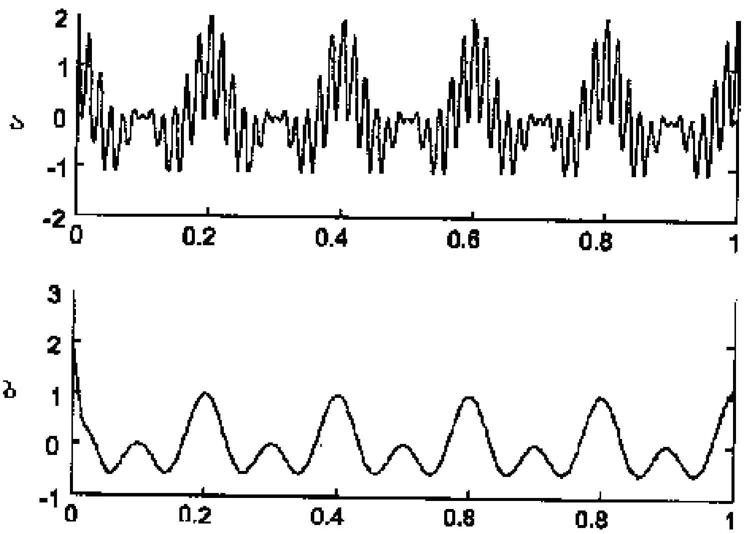
უნდა აღინიშნოს, რომ ერთპოლუსიანი სიგნალის ამპლიტუდების მომვლები განსხვავდება დაბალსიხშირიანი სამოდულაციო სიგნალისაგან. ნახ. 12.10 წარმოდგენილია ორი ჰარმონიკის მქონე სამოდულაციო სიგნალი (ნახ. 12.10 ა)



ნახ. 12.10

ნახ. 12.10ბ ნაჩვენებია სიგნალი ზედა გვერდითი სიხშირით, ხოლო გ – სიგნალი ქვედა გვერდითი სიხშირით.

ერთპოლუსიანი სიგნალის დემოდულაცია. მიუხედავად იმისა, რომ ვიზუალურად ერთპოლუსიანი სიგნალი განსხვავდება ჩვეულებრივი ამპლიტუდით მოდულირებული სიგნალიდან, დემოდულაცია შესაძლებელია იგივე სინქრონული დეტექტირების მეთოდით, კერძოდ სიგნალის საყრდენ რხევაზე გამრავლებით. ნამრავლის შედეგი (ნახ. 12.11ა) შედგება ორი მდგენელისაგან: პირველი არის სამოდულაციო სიგნალი, ხოლო მეორე – ერთპოლუსიანი $2\omega_0$ სიხშირის გადამტანი სიგნალი.



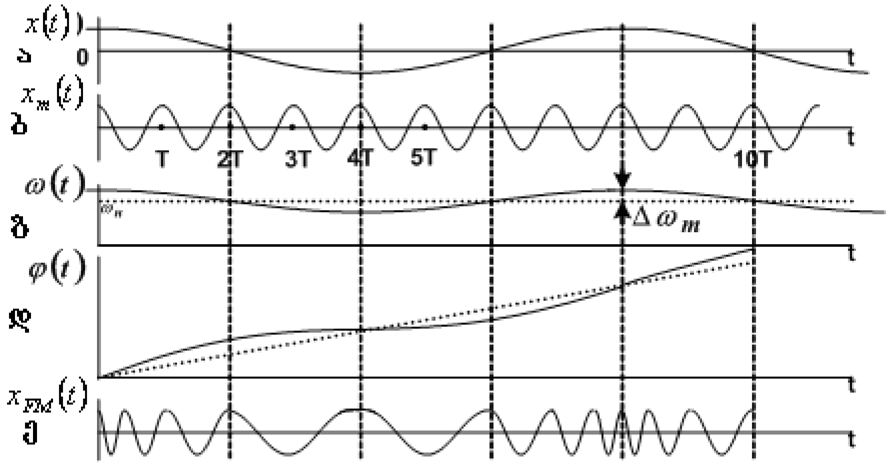
ნახ. 12.11

რჩება მხოლოდ მოდულირებული სიგნალის გამოყოფა დაბალი სიხშირის ფილტრით (ნახ. 12.11ბ).

12.4 სიხშირული და ფაზური მოდულაცია

სიხშირული მოდულაცია. სიხშირული მოდულაციის დროს გადამტანის ამპლიტუდა მუდმივი რჩება, ხოლო მყისიერი სიხშირე $\omega(t)$ იცვლება სამოდულაციო სიგნალის ცვლილებასთან ერთად: $\omega(t)=\omega_0+kx(t)$, სადაც k-–პროპორციულობის კოეფიციენტია, რომელიც დაკავშირებულია $\omega(t)$ სიხშირის გადახრასთან თავის ნომინალური ω_0 სიხშირიდან და სამოდულაციო $x(t)$ სიგნალიდან, რომელიც იწვევს ამ გადახრას.

განვიხილოთ ყველაზე მარტივი შემთხვევა, კერძოდ ერთტონალური სიხშირული მოდულაცია. ნახ. 12.12 წარმოდგენილია ერთტონალური სიხშირული მოდულაციის მყისიერი სიხშირისა და ფაზის ცვლილებების დროითი დიაგრამები.



ნახ. 12.12

ერთტონალური სამოდულაციო სიგნალის $x(t)=A_M\cos\Omega t$ (ნახ. 12.12ა) მოდულაცია ხდება $x_m(t)$ გადამტანით (ნახ, 12.12ბ). ამავე დროს გადამტანის სიხშირე $\omega(t)=\omega_0+kA_M\cos\Omega t$ იმეორებს სამოდულაციო სიგნალის ცვლილების კანონზომიერებას (ნახ. 12.12გ). გადამტანის სიხშირის მაქსიმალურ გადახრას ω_0 საშუალო სიხშირიდან ეწოდება **სიხშირის დევიაცია**:

$$\Delta\omega_m=\left|\omega(t)-\omega_0\right|_{\max}$$

სიხშირის დევიაციის ფარდობას სამოდულაციო სიგნალის Ω სიხშირესთან ეწოდება სიხშირული **მოდულაციის ინდექსი:**

$$m_{FM}=\frac{\Lambda\omega_m}{\Omega}.$$

$t=0$ და $t=8T$ დროის მომენტებში მყისიერი სიჩქარე მაქსიმალურია, ხოლო $t=4T$ დროს – მინიმალური. გადამტანის მყისიერი $\varphi(t)$ ფაზის ცვლილების კანონზომიერება (ნახ. 12.12დ) განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით:

$$\varphi(t)=\int_0^t\omega(t)dt\ ,\qquad \varphi(t)=\omega_0t+m\sin\Omega t$$

თუ გავითვალისწინებთ კავშირს სიხშირესა და ფაზას შორის, მაშინ:

$$x_{FM}(t)=A_0\cos\left[\int_0^t\omega(t)dt\right]=A_0\cos\left[\omega_0+k\int_0^t x(t)dt\right].$$

აქედან გამომდინარე, ერთტონალური სიხშირული მოდულაცია შეიძლება ასე წარმოვადგინოთ:

$$x_{FM}(t)=A_0\cos(\omega_0t+m\sin\Omega t).$$

ფაზური მოდულაცია. ფაზური მოდულაცია წარმოადგენს გადამტანის მყისიერი $\varphi(t)$ ფაზის ცვლილების პროცესს, რომელიც პროპორციულია სამოდულაციო სიგნალის ცვლილებებისა:

$$\varphi(t)=\omega_0t+\Delta\varphi(t)=\omega_0t+m_{\Phi M}x(t). \qquad (12.7)$$

ამრიგად გვექნება:

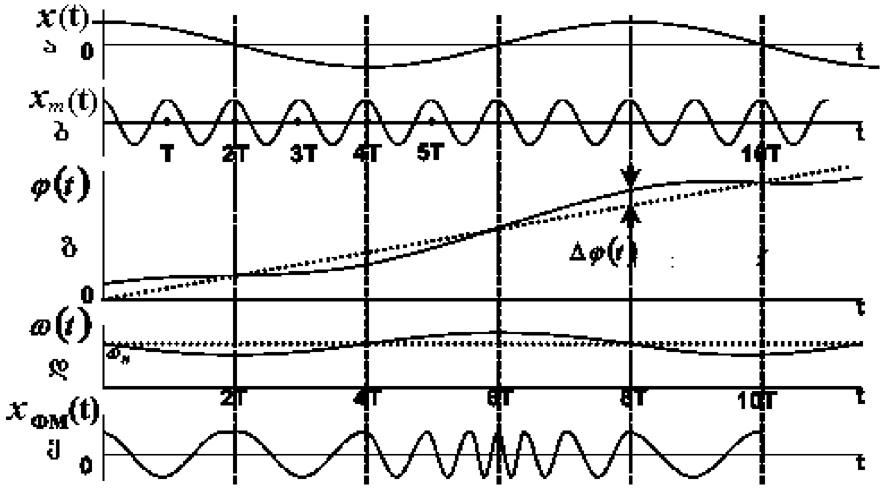
$$x_{\Phi\mathrm{M}}(t)=A_0\cos[\omega_0t+m_{\Phi\mathrm{M}}x(t)],$$

სადაც $m_{\Phi\mathrm{M}}$– ფაზური მოდულაციის ინდექსია.

თუ გვაქვს ერთტონალური ფაზური მოდულაცია: $x(t)=A_M\cos\Omega t$, მაშინ მივიღებთ:

$$x_{\Phi\mathrm{M}}(t)=A_0\cos[\omega_0t+m_{\Phi\mathrm{M}}\cos\Omega t].$$

ნახ. 12.13 ნაჩვენებია ტონალური ფაზური მოდულაციის დროს როგორ იცვლება მყისიერი სიხშირე და ფაზა.



ნახ. 12.13

ერთტონალური $x(t)$ სიგნალის (ნახ. 12.13ა) მოდულირება ხდება $x_m(t)$ გადამტანით (ნახ. 12.13ბ). ამ დროს გადამტანის მყისიერი ფაზის ცვლილების კანონზომიერება (12.7) იმეორებს $x(t)$ სიგნალის ცვლილების კანონს (ნახ. 12.13გ), ანუ წრფივად ცვალებად ფაზაზე (ნახაზზე წყვეტილები) ხდება ცვლადი $\Delta\varphi(t)=\varphi(t)-\omega_0 t$ ნაზრდის ზედდება. გადამტანის მყისიერი $\omega(t)$ სიხშირის ცვალებადობის კანონი განისაზღვრება შემდეგი ფორმული:

$$\omega(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\omega_0 t+m_{\Phi\mathrm{M}}\cos\Omega t\right)=\omega_0-m_{\Phi\mathrm{M}}\sin\Omega t\,.$$

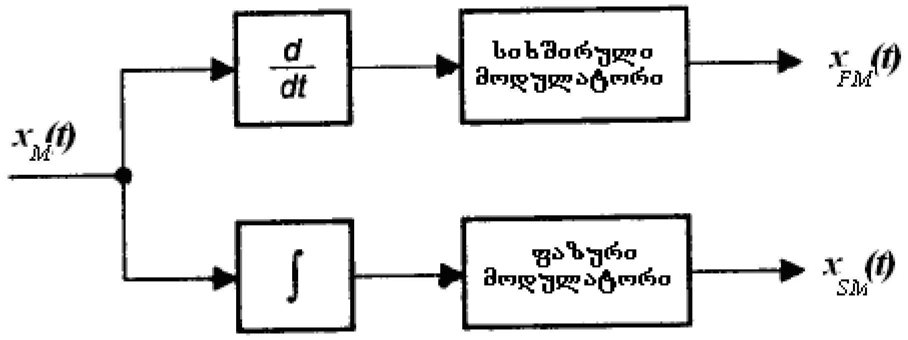
ფაზით მოდულირებული რხევა (ნახ. 12.13ე) აგებულია $\omega(t)$ ფუნქციის გრაფიკის საფუძველზე. t=2T და t=10T დროის მომენტებში ფაზით მოდულირებულ სიგნალს $x_{\Phi\mathrm{M}}(t)$ სიგნალს გააჩნია მინიმალური, ხოლო t=6T დროის მომენტში მაქსიმალური მყისიერი სიხშირე.

ამრიგად, სიხშირული და ფაზური მოდულაციები ურთიერთკავშირში არიან, კერძოდ თუ რხევის საწყისი ფაზა იცვლება, მაშინ იცვლება აგრეთვე მისი მყისიერი სიხშრეც და პირიქით. ამ მიზეზების გამო მოდულირების ეს ორი სახე გაერთიანებულია „კუთხური მოდულაციის“ საერთო დასახელებით.

ნათქვამიდან გამომდინარე, შეიძლება გავაკეთოდ შემდეგი დასკვნები:

1. კუთხური მოდულაციის ფორმის მიხედვით შეუძლებელია განისაზღვროს ფაზური მოდულაცია ეს თუ სიხშირული. ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ სამოდულაციო სიგნალი.

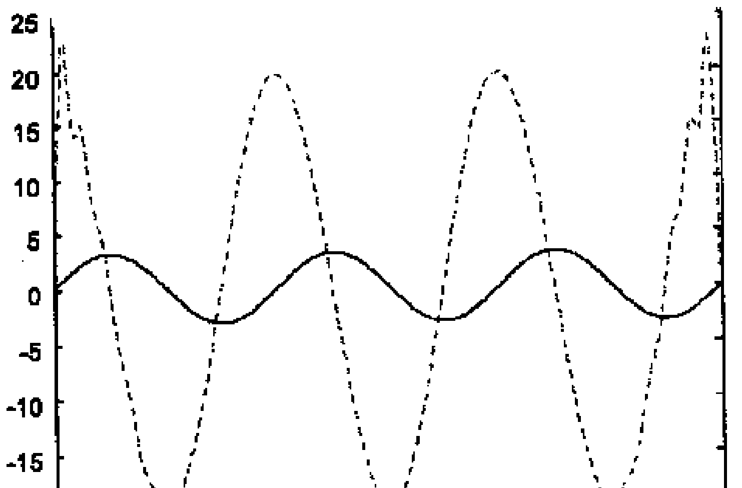
2. თუ სამოდულაციო სიგნალს გავატარებთ იდიალურ დიფერეცირების მოწყობილობაში, ხოლო შემდეგ მივაწვდით მას სიხშირულ მოდულიატორს, მაშინ მივიღებთ ფაზურ მოდულაციას (ნახ. 12.14 ზედა შტო).



ნახ. 12.14

3. თუ სამოდულაციო სიგნალს გავატარებთ იდიალურ მაინტეგრირებელ მოწყობილობაში, ხოლო შემდეგ მას მივაწვდით ფაზურ მოდულატორს, მაშინ მიიღება სიხშირული მოდულაცია (ნახ. 12.14 ქვედა შტო).

დემოდულაცია. ისევე როგორც ამპლიტუდური მოდულაციის დროს, კუთხური მოდულაციის დემოდულაცია შეიძლება შევასრულოთ მრავალი მეთოდით. ყველახე უფრო რადიკალური მიდგომაა ანალიტიკური სიგნალის განსაზღვრა და შემდეგ მისგან გამოვყოთ ფაზური ფუნქცია. შემდეგი მოქმედება დამოკიდებულია იმაზე თუ რა სახის მოდულაციასთან გვაქვს საქმე. კერძოდ, ფაზური მოდულაციის დროს ფაზური ფუნქციიდან განისაზღვრება წრფივი $\omega_0 t$ მდგენელი, რომელიც შეესაბამება არამოდულირებულ გადამტანს. თუ სიხშირული მოდულაციაა, მაშინ ფაზური ფუნქცია გაწარმოებდება და მიღებულ შედეგიდან განისაზღვრება ω_0 მუდმივა (ნახ. 12.15)



ნახ. 12.15

ნახ. 12.15 წარმოდგენილია სიგნალის ფაზური (უწყვეტი მრუდი) და სიხშირული (წყვეტილი მრუდი) დემოდულაციის შედეგები.

ლიტერატურა

1. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов.СПб: Питер, 2002.
2. Р.Лайонс. Цифровая обработка сигналов.,М.Бином-Пресс, 2006.
3. Э.Айфичер, Б.Джервис. Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.Б.,Вильямс, 2004.
4. Юкио Сато. Без паники. Цифровая обработка сигналов. Додэка-XXI, 2010.
5. А. Оппенгейм, Р.Шафер. Цифровая обработка сигналов. М., Техносфер, 2006.
6. Рангайян Р.Н. Анализ биомедицинских сигналов.Практический подход. М., Физматлит, 2007.
7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М., Высшая школа, 2000.
8. Микрокомпьютерные медицинские системы. Проектирование и применения. Под ред. У.Томпкинса,Дж.Уэбстера. М., Мир, 1983.
9. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов. Под рад. У.Кестера, М., Техносфера, 2010.
10. Солонина А.И., Улахович Д.А. Линейные дискретные системы. Учебное пособие, СПбГУТ. СПб, 2005.