საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკის და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
კომპიუტერული ინჟინერიის დეპარტამენტი
„გამოყენებითი მათემატიკის და კომპიუტერული მოდელირების"
სასწავლო-სამეცნიერო მიმართულება

ი. ჯ. დოჭვირი

კომპიუტერული მათემატიკა

ლოგიკური და სიმრავლურ-ტოპოლოგიური კონსტრუქციები

დამტკიცებულია სტუ-ს
სარედაქციო-საგამომცემლო
საბჭოს მიერ სახელმძღვანელოდ

თბილისი-2008

სახელმძღვანელოში განხილულია ორმნიშვნელობიანი და არამკაფიო მათემატიკური ლოგიკის, სიმრავლეთა ალგებრის და ინტერვალური ანალიზის, წერტილოვანი და მრავალსახა ასახვების ფუნდამენტური საკითხები, აგრეთვე მონაცემთა სიახლოვის დასადგენად სიმრავლური ტოპოლოგიის და მეტრიკული სივრცეების თეორიის ელემენტები. წიგნში გადმოცემული მათემატიკური აპარატი გამოიყენება კომპიუტერულ მეცნიერებებში მონაცემთა ბაზების ფორმირებისას, კომპიუტერული გრაფიკის, სახეთა ამოცნობის და სხვა პრაქტიკული პრობლემების გადასაწყვეტად.

სახელმძღვანელო განკუთვნილია ინფორმატიკის და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ,,გამოყენებითი მათემატიკის და კომპიუტერული მოდელირების'', ,,კომპიუტერული ქსელების და სისტემების'', ,,მართვის ავტომატიზებული სისტემების'' და ,,ხელოვნური ინტელექტის'' სასწავლო-სამეცნიერო მიმართულებების სტუდენტებისათვის. იგი სასარგებლო იქნება, აგრეთვე მათთვის ვინც დაინტერესებულია მონაცემთა დასამუშავებლად საჭირო ლოგიკური, სტრუქტურულ-ტოპოლოგიური და მეტრიკული ანალიზის მეთოდების შესწავლით.

რეცენზენტები: ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
,,ინფორმატიკის'' მიმართულების სრული პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი გ. სირბილაძე

ივ. ჯავახიშვილის სახ. თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
ზუსტი და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
,,ალგებრა-გეომეტრიის'' მიმართულების ასოცირებული პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი მ. ამაღლობელი

ISBN 978-9941-14-123-2

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

კომპიუტერული ტექნიკის პროგრესი სულ უფრო მეტადაა დამოკიდებული მათემატიკის მიღწევებზე, რის გამოც მსოფლიოს მოწინავე უნივერსიტეტებში ფაკულტეტების სპეციფიკიდან გამომდინარე ფართოვდება სტუდენტებისათვის შესაბამისი მათემატიკური დისციპლინების სწავლება. განსაკუთრებით, კომპიუტერული მეცნიერების (ინფორმატიკის) ფაკულტეტებზე ე.წ. უმაღლესი მათემატიკის (კალკულუსის) გარდა, სტუდენტებს სავალდებულო ფორმატში ეკითხებათ კომპიუტერული პროგრამების შესაქმნელად საჭირო მათემატიკური საგნები ისეთ მიმართულებებში, როგორებიცაა: ორმნიშვნელობიანი და არამკაფიო მათემატიკური ლოგიკა, ინტერვალური ანალიზი და სპეცთავები მრავალსახა ასახვების თეორიიდან, სიმრავლური ტოპოლოგიიდან და სხვ.

წინამდებარე სახელმძღვანელო მიზნად ისახავს ინფორმატიკის და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სტუდენტებისათვის ჩამოთვლილ მათემატიკურ დისციპლინათა ზოგიერთი ფუნდამენტური საკითხების გაცნობას, რომელიც შედგენილია ავტორის მიერ ,,კომპიუტერული მათემატიკის'', ,,მონაცემთა სიახლოვის ანალიზური მეთოდების'', ,,მათემატიკური ლოგიკისა და ზოგადი ტოპოლოგიის'' საგნებში წაკითხული ლექციებისა და სამეცნიერო საქმიანობიდან მიღებული გამოცდილების საფუძველზე.

გამოთვლით მათემატიკაში შემუშავებულმა თეორიულმა მეთოდებმა შეასრულეს უდიდესი როლი კომპიუტერული მოდელირების

ამოცანებში დინამიკური სისტემების კვლევისას. მრავალი ფიზიკური პრობლემის სწრაფი და მაღალი სიზუსტით გადაწყვეტა შესაძლებელი გახდა იმ კომპიუტერული პროგრამებით, რომლებიც შედგენილი იყო რიცხვითი ანალიზის მეთოდების გამოყენებით. თანამედროვე კომპიუტერული პროგრამები Matlab, Mathcad და ა.შ. მრავალი სხვადასხვა ტიპის რთული ამოცანების გადაწყვეტის შესაძლებლობას იძლევა, კერძოდ: ალგებრული და დიფერენციალური განტოლებებისა, და აგრეთვე რიცხვით-პარამეტრებიანი მატრიცული გამოსახულებების ამოხსნის, წირებისა და ზედაპირების ვიზუალიზაციის, მრავალი თავისუფლების ხარისხის მქონე დინამიკური სისტემების ოპტიმიზების და სხვ.

მონაცემთა სიმრავლეების ურთიერთსიახლოვის დადგენა დიდი მოცულობის მონაცემთა ბაზებში ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ამოცანაა. მონაცემთა სიმრავლეების ურთიერთსიახლოვის დასახასიათებლად მოსახერხებელია ლოგიკური, სიმრავლურ-ტოპოლოგიური და მეტრიკული სტრუქტურების განხილვა, რაც კომპიუტერული ძებნის და სელექციის ალგორითმების შესამუშავებლადაა გამიზნული. წიგნში გადმოცემულია მათემატიკის ის სპექტავები, რომლებიც დღემდე არ არის ასახული ქართულენოვან სახელმძღვანელოებში და რომელთა შესწავლა აუცილებელია ინფორმატიკის და მართვის სისტემების სპეციალობათა სტუდენტებისათვის მათი მეცნიერულად მომზადების მიზნით (ისე როგორც ეს ხორციელდება დასავლეთის მოწინავე უნივერსიტეტებში [1; 3; 5-11; 14-27]). მასში

მოყვანილი საკითხები თანამედროვე უცხოური სასწავლო სახელმძღვანელოებისა და სამეცნიერო შრომების გათვალისწინებითაა შერჩეული. სახელმძღვანელოში განსაკუთრებული ყურადღებაა გამახვილებული საკითხებზე: ორმნიშვნელობიანი და არამკაფიო მათემატიკური ლოგიკიდან, სიმრავლეთა და წერტილოვან ასახვათა თეორიებიდან, ინტერვალური ანალიზიდან, მრავალსახა ასახვების თეორიიდან, კლასიკური, ასიმეტრიული და არამკაფიო ტოპოლოგიებიდან. მათი შესწავლა პროგრამისტობაზე ორიენტირებულ სტუდენტებს შესძენს კომპიუტერზე მონაცემთა დასამუშავებლად აუცილებელ მათემატიკურ ცოდნას. აღსანიშნავია, რომ ისეთი ტიპის ამოცანათა გადაჭრა და კომპიუტერული დამუშავება, რომლებიც არარიცხვითი მონაცემებით აღიწერებიან (ან ვერ ხერხდება მონაცემთა სტრუქტურების ალგებრაიზაცია, ე.ი. ელემენტების შეკრების, გამრავლების და სხვა ოპერაციათა განმარტება), ხშირად შესაძლებელია მხოლოდ მათემატიკური ლოგიკისა და სიმრავლურ-ტოპოლოგიური მეთოდების სინთეზირებით. მონაცემთა კომპიუტერული დამუშავების, კომპიუტერული გრაფიკის, სახეთა ამოცნობის და მრავალი სხვა პრაქტიკული პრობლემის გადაწყვეტა მოითხოვს სწორედ აღნიშნული მათემატიკური მეთოდების დაუფლებას.

გამოყენებული აღნიშვნები, ფორმულები და შეფასებები

1. **R, N, Z, Q, I, C**-ნამდვილ რიცხვთა, ნატურალურ რიცხვთა, მთელ რიცხვთა, რაციონალურ რიცხვთა, ირაციონალურ რიცხვთა და კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეები;
2. $\mathbf{R^n}$-ით ჩვეულებრივ აღნიშნავენ ერთობლიობას ყველა ვექ-ტორებისა $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, სადაც $n \geq 2$ და ყოველი $x_k \in \mathbf{R}$, $k=1;2;...;n$.
3. $a_1+a_2+...+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ და $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.
4. ფაქტორიალი: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ -რიცხვი n -ელემენტიანი სიმრავლის ელემენტების ყველა შესაძლო გადანაცვლებებისა.
5. ჯუფთება: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ -მოცემული n -ელემენტიანი სიმრავ-ლის ყველა შესაძლო k -ელემენტიანი ქვესიმრავლეებისა რაოდენობა ($k \leq n$).
6. ნიუტონის ბინომი: $(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$.
7. $Z_n = \{0; 1; 2; ...; (\mathrm{n-1})\}$ სიმრავლე, სადაც $n \geq 0$ და მასზე განმარ-ტებული შეკრების შემდეგი სახის ოპერაციით: $0+1=1;$ $1+1=2;$ $2+1=3;$ ... $(n-1)+1=0$, იწოდება ნაშთების ადიციურ ჯგუფად n -მოდულით.

8. თუ X დალაგებული სიმრავლეა, მაშინ $A \subset X$ ქვესიმრავლის ინფიმუმი ეწოდება X-ის $\inf A = \max\{x \in X \mid x \le a, \forall a \in A\}$ ელემენტს, ხოლო A სიმრავლის სუპრემუმი კი ეწოდება $\sup A = \min\{x \in X \mid x \ge a, \forall a \in A\}$ ელემენტს.

9. თუ A და B რაიმე ქვესიმრავლეებია $\mathbf{R}$-ში, მაშინ სამართლიანია ტოლობები:

$$\inf\{a+b \mid a \in A, b \in B\} = \inf A + \inf B ;$$

$$\sup\{a+b \mid a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B .$$

10. ნებისმიერი $a, b \in \mathbf{R}$-თვის სრულდება $|a+b| \le |a| + |b|$ უტოლობა.

11. თუ $f(x)$ და $g(x)$ ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციები განსაზღვრულია A-სიმრავლეზე, მაშინ სამართლიანია:

$$\max_{x \in A} | f(x) + g(x) | \le \max_{x \in A} | f(x) | + \max_{x \in A} | g(x) | .$$

12. საშუალო მნიშვნელობის თეორემა: თუ $f(x)$ არის რაიმე $[a;b]$ სეგმენტზე დიფერენცირებადი ფუნქცია, მაშინ არსებობს ისეთი $\xi \in [a;b]$ წერტილი, რომ $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ [13].

13. თუ $P(A)$ და $P(B)$ შესაბამისად არის A და B ხდომილობების ალბათობები, მაშინ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) .$$

14. თუ f-ფუნქცია ისეთია, რომ $f(x_k) = b_k$, სადაც $k = \overline{0;n}$, მაშინ მისი აპროქსიმაცია ხარისხოვანი ფუნქციის სახით შე-

საძლებელია ლაგრანჟის n-ური რიგის $L_n(x)$-საინტერპოლ-აციო მრავალწევრით:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x),$$

ამასთან
$$p_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}.$$

თავი I. ორმნიშვნელობიანი მათემატიკური ლოგიკის და სიმრავლეთა თეორიის ფუნდამენტური კონსტრუქციები

§1.1. გამონათქვამები და პრედიკატები ორმნიშვნელობიან მათემატიკურ ლოგიკაში

კომპიუტერულ მეცნიერებათა განვითარება არსებითად ეფუძნება მათემატიკური ლოგიკის ფუნდამენტურ პრინციპებს [1; 4; 5; 6; 15; 16; 18; 19; 22; 26]. ჭეშმარიტი გადაწყვეტილებების მიღება, განსაკუთრებით არარიცხვით-პარამეტრებიან ამოცანებში, შესაძლებელია მხოლოდ მათემატიკიური ლოგიკის თეორიული მეთოდების საფუძველზე. ორმნიშვნელობიანი ლოგიკის ფარგლებში ჩვეულებრივ განიხილება ამოცანები, რომლებიც საჭიროებენ პასუხის გამორჩევას „ჭეშმარიტებასა" და „მცდარს" შორის.

გამონათქვამები და პრედიკატები: ორმნიშვნელობიან მათემატიკურ ლოგიკაში **გამონათქვამებს** ჩვეულებრივ უწოდებენ ისეთ წინადადებებს (ჩაწერილს "სიტყვიერ" ან მათემატიკურ ენაზე), რომლებზეც შეიძლება ითქვას ერთ-ერთი: გამონათქვამი არის ჭეშმარიტი ან მცდარი. რა თქმა უნდა დაუზუსტებლობა ჭეშმარიტების ან მცდარისა არამკაფიოს ხდის გამონათქვამს, თუმცა მათემატიკური გამონათქვამებისათვის პრინციპში ეს არის ყოველთვის შესაძლებელი (ე.ი. განვსაზღვროთ არის თუ არა გამონათქვამი „ჭეშმარიტი" ან „მცდარი").

მაგალითად ჩანაწერები: [7<28]-ჭეშმარიტი გამონათქვამია; [–4>9]-მცდარია; [9-*ლუწი რიცხვია*]-მცდარია და ა.შ. აღსანიშნავია, რომ $=$; $\neq$; $\leq$; $\geq$; $<$; $>$-მიმართებების ნიშნებით ჩაწერილი გამონათქვამების მნიშვნელობები შესაძლებელია გამოვთვალოთ, ამასთან გამო-

თვლის რეზულტატი იქნება ერთ-ერთი ლოგიკური მნიშვნელობა: 1-ჭეშმარიტი, ხოლო 0-მცდარი. ამის გათვალისწინებით, ზემოთ აღნიშნულ მაგალითებში დავწერთ: $[7<28]=1$; $[-4>9]=0$; [9-*ლუწი რიცხვია*]$=0$ და ა.შ.

ამბობენ, რომ განსაზღვრულია რაიმე **პრედიკატი**, თუ მოცემულია რაიმე სიმრავლე წოდებული პრედიკატის განსაზღვრის არედ, გარდა ამისა, ფიქსირებულია სიმრავლე {0 (მცდარი); 1 (ჭეშმარიტება)}-წოდებული პრედიკატის მნიშვნელობათა არედ და რაც მთავარია მითითებულია (მოცემულია) წესი, რომლის მიხედვითაც განსაზღვრის არის ყოველ წერტილს შეესაბამება მნიშვნელობათა არის ერთ-ერთი ელემენტი. ცხადია, რომ პრედიკატის განმარტება არის კერძო შემთხვევა ფუნქციისა, განსხვავება მხოლოდ იმაშია, რომ პრედიკატს გააჩნია მკაფიოდ ფიქსირებული მნიშვნელობათა არე.

აბსტრაქტული (დაუკონკრეტებელი აზრის) პრედიკატები ხშირად აღინიშნებიან $\upsilon=p(x)$; $\omega=p(y)$; $\upsilon=q(x,y)$; $\omega=q(x,y,z)$ და ა.შ. p და q სიმბოლოები შესაბამისობების აღსანიშნავად გამოიყენება, ხოლო x,y,z-არგუმენტების აღსანიშნად. ჩვეულებრივ, υ და ω ბულის ცვლადებად იწოდებიან, ამასთან ისინი იღებენ მნიშვნელობებს {0; 1}-სიმრავლიდან. განასხვავებენ ერთ, ორ და მრავალ ადგილიან პრედიკატებს. ასე მაგალითად: 1) ერთადგილიანი პრედიკატია <<x-*მათემატიკოსია*>>, რომლის განსაზღვრის არე შეიძლება იყოს უნივერსიტეტის ვესტიბიულში მყოფ ადამიანთა ერთო-

ბლიობა; 2) ორადგილიანი პრედიკატის მაგალითია << x *იაფია* y-*ზე*>>, რომლის განსაზღვრის არეა სუპერმარკეტში წარმოდგენილი სხვადასხვა ნაირსახეობის ძეხვეულისაგან წარმოქმნილი სიმრავლე; 3) სამადგილიანი პრედიკატია << x *მდებარეობს* y *და* z-*ს შორის*>>, რომლის განსაზღვრის არეა ფიქსირებულ წრფეზე წერტილთა სიმრავლე. აღნიშნულის მსგავსად ჩვენ შეგვიძლია შევადგინოთ მრავალადგილიანი პრედიკატების მაგალითები.

ზემოთ აღნიშნული განმრატებები ერთი შეხედვით წააგავს მათემატიკური ანალიზის ფუნდამენტურ ცნებებს, მაგრამ რამდენადმე განზოგადებული და სპეციფიკური ტერმინოლოგიით აღწერილია. ეს განპირობებულია იმ გარემოებებით, რომ მათემატიკურ ლოგიკაში ყველა მსჯელობა უნდა ჩატარდეს საგნობრივ სიმრავლეთა კონკრეტული ბუნების გათვალისწინების გარეშე.

ვთქვათ $p(x_1, x_2, ..., x_k)$-ნებისმიერი k-ადგილიანი პრედიკატია, განსაზღვრული რაიმე M-სიმრავლეზე. ამბობენ, რომ $(a_1, a_2, ..., a_k)$ არგუმენტების k-ეული აკმაყოფილებს $p(x_1, x_2, ..., x_k)$ პრედიკატს, თუკი $p(a_1, a_2, ..., a_k) = 1$. თუ $p(a_1, a_2, ..., a_k) = 0$, მაშინ ამბობენ, რომ აღნიშნული k-ეული არ აკმაყოფილებს პრედიკატს. პრედიკატს $p(x_1, x_2, ..., x_k)$ ეწოდება **შესრულებადი,** თუ არგუმენტის თუნდაც ერთი k-ეულისთვის $(a_1, a_2, ..., a_k)$ სრულდება ტოლობა $p\ (a_1, a_2, ..., a_k) = 1$. პრედიკატს ეწოდება **იგივურად ჭეშმარიტი** (შესაბამისად, **იგივუ-**

რად მცდარი) თუ განსაზღვრის არის ყოველი k-ეულისთვის სრულდება $p(x_1, x_2, ..., x_k) = 1 \quad (p(x_1, x_2, ..., x_k) = 0)$, .

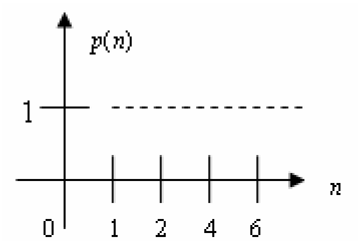
მაგალითი 1.1.1. $p(x) = << x + 7 = 0 >>$ -პრედიკატია, რომელიც განსაზღვრულია **R**-ზე. ცხადია, რომ $x = -7$ -თვის $[-7 + 7 = 0] = 1$, მაგრამ $x = 2$ -თვის $[2 + 7 = 0] = 0$. მაშასადამე $p(x)$ -შესრულებადი პრედიკატია.

ვთქვათ, რომ ცვლადები x, y განსაზღრულია **R**-ზე, მაშინ პრედიკატი $p(x) = << x^2 \geq 0 >>$ -იგივურად ჭეშმარიტია, ხოლო პრედიკატი $q(x, y) = << x^2 + y^2 < 0 >>$ -კი იგივურად მცდარი. ცხადია, რომ პრედიკატი $r(y) = << 3y - 6 > 1 >>$ -შესრულებადია.

თუ, განვიხილავთ პრედიკატებს $<< \sin x = 2 >>$ და $<< x^2 < 0 >>$, რომელთა განსაზღვრის არეა **R**, მაშინ ცხადია, რომ თითოეული ეს პრედიკატი, იგივურად მცდარია. ამრიგად, აღნიშნული პრედიკატები მცდარი პრედიკატებია. ამ უკანასკნელზე დაყრდნობით იოლია იგივურად ექვივალენტური ორი პრედიკატის განსაზღვრა.

პრედიკატი შეიძლება განსაზღრული იყოს აგრეთვე გრაფიკულად ან ცხრილით, ისე როგორც ქვემოთაა მოცემული:

$p(1)$	$p(2)$	$p(4)$	$p(6)$
0	1	1	1



ზოგადობის და არსებობის კვანტორები: ვთქვათ $p(x)$-რაიმე პრედიკატია განსაზღვრული M-სიმრავლეზე, მაშინ ჩანაწერი $\forall x\ p(x)$ აღნიშნავს, რომ: ყოველი $x \in M$ ელემენტისათვის სრულდება $p(x)$ (ანუ, $p(x)=0$ ყველა $x \in M$-თვის; ან $p(x)=1$ ყველა $x \in M$-თვის). მაშასადამე, თუ გვსურს დავრწმუნდეთ $\forall x\ p(x)$-გამონათქვამის ჭეშმარიტებაში, საჭიროა $p(x)$-პრედიკატის მნიშვნელობები შევამოწმოთ ყველა $x \in M$-თვის, ე.ი. უნდა სრულდებოდეს ტოლობები: $p(x_1)=1$, $p(x_2)=1$, ...

ზემოთ აღნიშნულის გასააზრებლად სასარგებლოა შემდეგი მაგალითი. განვიხილოთ **R**-ზე პრედიკატი:

$$q(x) \equiv << x^2 + x + 1 > 0 >> ,$$

როგორც ვიცით აღნიშნული სამწევრი არის x-ის ნებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობისათვის დადებითი, ამიტომ ჩვენ ჩავწერთ $\forall x\ q(x)$.

თუკი $p(x)$ რაიმე პრედიკატია, მაშინ $\exists x\ p(x)$ ჩანაწერი აღნიშნავს, რომ: „*არსებობს ელემენტი* $x \in M$, *რომლისთვისაც სრულდება* $p(x)$".

ჩანაწერი $\exists x\ p(x)$-არ არის პრედიკატი, ის წარმოადგენს $p(x)$-პრედიკატზე გამონათქვამს, ამასთან ისეთს, რომ გამონათქვამი $\exists x\ p(x)$ არის ჭეშმარიტი, როცა $p(x)$-შესრულებადი პრედიკატია.

განვიხილოთ $c(x) \equiv << x^3 - 14x^2 + 49x - 1 < 0 >>$ პრედიკატი **N**-სიმრავლეზე, მაშინ $x = 1;2;3;4$-თვის მივიღებთ გამონათქვამებს:

$$[\,c(1) \equiv 1^3 - 14 \cdot 1^2 + 49 \cdot 1 - 1 < 0 \ \text{ანუ } (35<0)] = 0;$$

$$[\,c(2) \equiv 2^3 - 14 \cdot 2^2 + 49 \cdot 2 - 1 < 0 \ \text{ანუ } (49<0)] = 0;$$

$$[\,c(3) \equiv 3^3 - 14 \cdot 3^2 + 49 \cdot 3 - 1 < 0 \ \text{ანუ } (47<0)] = 0;$$

$$[\,c(4) \equiv 4^3 - 14 \cdot 4^2 + 49 \cdot 4 - 1 < 0 \ \text{ანუ } (35<0)] = 0.$$

ყველა ეს გამონათქვამები მცდარია (გააჩნიათ ნულოვანი მნიშვნელობა). არის თუ არა მიღებული შეფასებები საფუძველი იმისა, რომ განვაცხადოთ: $\exists x\ c(x)$-გამონათქვამი არის მცდარი? (ანუ, რომ არ მოიძებნება ისეთი $n \in \mathbf{N}$, რომ $c(n)$-გამონათქვამი იყოს ჭეშმარიტი?)–არა, ჩვენ ასეთი დასკვნის გაკეთების საფუძველი არა გვაქვს. თუ, ჩვენ გავაგრძელებთ შემოწმებებს:

$$[c(5) \equiv 19 < 0] = 0;$$

$$[c(6) \equiv 5 < 0] = 0;$$

$$[c(7) \equiv -1 < 0] = 1.$$

მაშასადამე, ჩვენ დავადგინეთ, რომ $c(5)$ და $c(6)$-მცდარი გამონათქვამებია, ხოლო $c(7)$-ჭეშმარიტია. ამრიგად, ჩვენ მოვძებნეთ $n = 7$-რიცხვი, რომლისთვისაც $c(n)$-ჭეშმარიტია, ე.ი. $\exists x\ c(x)$-ჭეშმარიტი გამონათქვამია, რის გამოც ცხადია $c(x)$-შესრულებადი პრედიკატია.

$\forall x$ და $\exists x$ გამოსახულებებს ლოგიკაში, შესაბამისად, ეწოდებათ **ზოგადობის და არსებობის კვანტორები**. ეს კვანტორები ცხადია, რომ შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას m-ადგილიანი პრედიკატებისთვისაც. თუ $p(x_1, x_2, ..., x_m)$ რაიმე პრედიკატია, მაშინ ნათელია

შემდეგი გამონათქვამის აზრი $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \quad p(x_1, x_2, ..., x_m)$ —ნებისმიერი x_1, x_2 და ა.შ. x_m-თვის სრულდება გამონათქვამი $[p(x_1, x_2, ..., x_m)]$.

ლოგიკური ოპერაციები, ლოგიკური კანონები: აქ ჩვენ მნიშვნელოვნად გავაფართოვებთ გამონათქვამების ფორმების კლასს. თუ $x, y, z,$ -ცვლადები განმარტებულია **R**-ზე, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ პრედიკატები:

$$p(x, y, z) \equiv << \text{ თუ } x > y \text{ და } y > z \text{ , მაშინ } x > z >> ;$$

$$q(x, y) \equiv << x \geq y \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა } x = y \text{ ან } x > y >>;$$

$$r(x, y) \equiv << \text{თუ } x \text{ არ უდრის } y, \text{ მაშინ } x > y \text{ ან } y > x >>;$$

$$s(y) \equiv << \text{თუ } x \neq 0, \text{ მაშინ } x > 0 \text{ ან } x < 0 >>;$$

პირდაპირი დაკვირვებიდან ჩანს, რომ ყველა ეს პრედიკატი იგივურად ჭეშმარიტია (ცვლადების ნაცვლად ნებისმიერი რიცხვების ჩასმით მივიღებთ ჭეშმარიტ გამონათქვამებს).

მათემატიკურ ლოგიკაში გამონათქვამი: “*თუ* υ, *მაშინ* u” შეგვიძლია შევცვალოთ ჩანაწერით $\upsilon \Rightarrow u$, ”υ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ* u” ჩაიწერება $\upsilon \Leftrightarrow u$; “$\upsilon$ *და* u”—$\upsilon \wedge u$; “υ *ან* u”— $\upsilon \vee u$, ხოლო ”*არა* υ”- $\neg \upsilon$.

ოპერაციებს $\neg; \wedge; \vee; \Rightarrow; \Leftrightarrow$ ეწოდება ლოგიკური (ან ელემენტარული ბულის) ოპერაციები.

ლოგიკური უარყოფა: ყოველი გამონათქვამიდან შეიძლება მივიღოთ ახალი გამონათქვამი, მისი უარყოფით: υ გამონათქვამს არ აქვს ადგილი ჩაიწერება $\neg \upsilon$.

$[\upsilon]$	$[\neg\upsilon]$
0	1
1	0

ცხრილიდან ჩვენ ვხედავთ, რომ გამონათქვამი $\neg\upsilon$ მცდარია, თუ υ-ჭეშმარიტია, და პირიქით $\neg\upsilon$ ჭეშმარიტია, როცა υ-მცდარია. ეს ჩვენ გვაძლევს საფუძველს ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი კანონი: როგორიც არ უნდა იყოს გამონათქვამი υ, ორი გამონათქვამიდან υ და $\neg\upsilon$-ერთი ჭეშმარიტია, მეორე კი მცდარი.

თუ, a-ნებისმიერი გამონათქვამია, მაშინ $\neg a$-ასევე არის გამონათქვამი. რის გამოც, შესაძლებელია განვიხილოთ მისი უარყოფაც, ანუ $\neg\neg a$, რომელსაც a-ს ორმაგ უარყოფას ვუწოდებთ.

ორმაგი უარყოფის ლოგიკური კანონი: $\neg\neg a = a$.

მესამის გამორიცხვის კანონი: ყოველი გამონათქვამი არის ჭეშმარიტი ან მცდარი.

წინააღმდეგობის კანონი: არცერთი გამონათქვამი არ შეიძლება იყოს ერთდროულად ჭეშმარიტი და მცდარი.

მხედველობაში უნდა გვქონდეს, რომ წინადადება რომელზეც ცალსახად არ შეიძლება ვთქვათ ჭეშმარიტია იგი თუ მცდარი, არ წარმოადგენს გამონათქვამს.

განვიხილოთ ახლა საკითხი გამონათქვამების უარყოფაზე, რომლებიც შეიცავენ $\forall$ და $\exists$ კვანტორებს. მათთვის ქვემოთ ჩვენ ჩამოვაყალიბებთ დე-მორგანის კანონებს.

1) ვთქვათ $p(x)$-რაიმე პრედიკატია M-სიმრავლეზე, მისით ჩვენ შეგვიძლია ვაწარმოოთ გამონათქვამი $\forall x\ p(x)$. ამ გამონათქვამის უარყოფა შეიძლება ორგვარად:

ა) შეიძლება დავსვათ უარყოფის ნიშანი მთლიანი გამონათქვამის წინ, ე.ი. $\neg\forall x\ p(x)$, ანუ არ სრულდება დებულება, რომ ყოველი x-თვის ადგილი აქვს $p(x)$;

ბ) შესაძლებელია უარყოფის ნიშანი დავსვათ $\forall x$-ის შემდეგ, მაგრამ მაშინ ნებისმიერობის ნიშანი $\forall$ აუცილებლად უნდა შეიცვალოს არსებობის ნიშნით $\exists x \neg p(x)$, ანუ არსებობს M-ში ისეთი x ელემენტი, რომლისთვისაც არ სრულდება $p(x)$.

ვინაიდან ეს ორი გამონათქვამი არის ერთი და იმავე გამონათქვამის უარყოფები (კერძოდ, $\forall x\ p(x)$-ის უარყოფა), ამიტომ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\neg\ \forall x\ \ p(x) \equiv \exists x\ \neg\ p(x)\ .$$

2) განვიხილოთ ახლა გამონათქვამი $\exists x\ p(x)$, ანუ: არსებობს x-ელემენტი M-ში, რომლისთვისაც ადგილი აქვს $p(x)$. აღნიშნულის უარყოფა შეგვიძლია ჩავწეროთ ორგვარად:

ა) დავწეროთ უარყოფის ნიშანი მთლიანი გამონათქვამის წინ: $\neg\ \exists x\ \ p(x)$;

ბ) შესაძლებელია დავწეროთ უარყოფის ნიშანი $\exists x$-ის შემდეგ, მაგრამ მაშინ აუცილებელია, რომ $\exists$-ნიშანი შევცვალოთ $\forall$-ით: $\forall x\ \neg\ p(x)$.

ამრიგად ადგილი აქვს ტოლობას: $\neg\,\exists x\ p(x) \equiv \forall x\,\neg\, p(x)$.

ამ კანონებიდან გამომდინარეობს, რომ $\neg\,\forall x\,\neg\, p(x) \equiv \exists x\ p(x)$ და $\neg\,\exists x\ \neg\, p(x) \equiv \forall x\ p(x)$.

ლოგიკურ გამონათქვამთა კონიუნქცია, დიზიუნქცია, იმპლიკაცია და ეკვივალენცია. ტავტოლოგიები: ლოგიკური გამონათქვამი "υ *და* u" იწოდება **კონიუნქციად** და ჩაიწერება $\upsilon \wedge u$ -სახით, იგი υ და u გამონათქვამების ერთობლიობას წარმოადგენს.

ლოგიკური გამონათქვამი "υ *ან* u" ჩაიწერება $\upsilon \vee u$ -სახით და იწოდება **დიზიუნქციად**.

ლოგიკური გამონათქვამი "თუ υ, მაშინ u" იწოდება **იმპლიკაციად** და წერენ $\upsilon \Rightarrow u$. აღსანიშნავია, რომ $a \Rightarrow b$ იგივეა რაც $\neg\, b \Rightarrow \neg\ a$.

თუ $(\upsilon \Rightarrow u) \wedge (u \Rightarrow \upsilon)$, მაშინ ჩვენ დავწერთ $\upsilon \Leftrightarrow u$, ანუ $\upsilon \equiv u$ და ვიტყვით, რომ υ და u ლოგიკურად **ექვივალენტური** გამონათქვამებია.

ქვემოთ წარმოდგენილია ცხრილი, რომელიც ორი გამონათქვამის მნიშვნელობების (*ჭეშმარიტისა* და *მცდარის*) მიხედვით შედგენილი ლოგიკური გამონათქვამების მნიშვნელობების გამოთვლის საშუალებას იძლევა:

$[\upsilon]$	$[u]$	$[\upsilon \wedge u]$	$[\upsilon \vee u]$	$[\upsilon \Rightarrow u]$	$[\upsilon \Leftrightarrow u]$
0	0	0	0	1	1

0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

ცხრილიდან ჩვენ იოლად დავასკვნით, რომ $[\upsilon \vee \neg \upsilon] \equiv 1$ (*ჭეშმარიტება*) და $[\upsilon \wedge \neg \upsilon] \equiv 0$ (*მცდარი*), ამასთან

$$\forall x \;\; p(x) \equiv p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge ... \wedge p(a_n)\,;$$

$$\exists x \;\; p(x) \equiv p(a_1) \vee p(a_2) \vee ... \vee p(a_n)\,.$$

ლოგიკური ტავტოლოგიები ეწოდება ისეთ გამონათქვამებს, აგებულს $u, v, w, ...$ ასონიშნებით და $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ კავშირებით, რომ თუ ასო-ნიშნებს შევცვლით ნებისმიერად გამონათქვამებით (*ჭეშმარიტით* ან *მცდარით*), მაშინ მიიღება ჭეშმარიტი გამონათქვამები. შემოწმება იმისა, რომ საკვლევი ლოგიკური გამონათქვამი არის ტავტოლოგია შესაძლებელია $u, v, w, ...$-ების ნაცვლად 0 და 1 მნიშვნელობების ყველა შესაძლო ჩასმით და შედგენილ გამონათქვამთა მნიშვნელობების ლოგიკური გამოთვლებით. თუ აღმოჩნდა, რომ ყველა ეს მნიშვნელობა ტოლია 1-ის, მაშინ ჩვენ დავასკვნით, რომ საქმე გვაქვს ტავტოლოგიასთან.

მაგალითი 1.1.2 გამონათქვამი $(u \wedge v) \Rightarrow (u \vee w)$, რომ წარმოადგენს ტავტოლოგიას ადვილი დასანახია ჭეშმარიტების შემდეგი ცხრილიდან:

$[u]$	0	0	0	1	1	0	1	1

$[v]$	0	0	1	0	0	1	1	1
$[w]$	0	1	1	0	1	0	0	1
$[(u \wedge v) \Rightarrow (u \vee w)]$	1	1	1	1	1	1	1	1

ტავტოლოგიების საფუძველზე შესაძლებელია იოლად დავრწმუნდეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი სახის ლოგიკური კანონები:

ა) $v \wedge w \Leftrightarrow w \wedge v$; ბ) $v \vee w \Leftrightarrow w \vee v$; გ) $(v \wedge w) \wedge u \Leftrightarrow v \wedge (w \wedge u)$;

დ) $(v \vee w) \vee u \Leftrightarrow v \vee (w \vee u)$; ე) $(v \vee w) \wedge u \Leftrightarrow (v \wedge u) \vee (w \wedge u)$;

ვ) $(v \wedge w) \vee u \Leftrightarrow (v \vee u) \wedge (w \vee u)$; ზ) $v \wedge v \Leftrightarrow v$; თ) $v \vee v \Leftrightarrow v$;

ი) $v \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$; კ) $v \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$; ლ) $v \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow v$; მ) $v \vee \perp \Leftrightarrow v$, ამასთან $[\perp] = 0$, ხოლო $[\mathrm{T}] = 1$. ა) და ბ)–იწოდება დიზიუნქციის და კონიუნქციის კომუტაციურობის; გ) და დ)–ასოციაციურობის; ე) და ვ) დისტრიბუციულობის; ზ) და თ)–იდემპოტენტურობის, ხოლო ი)-მ)–ჩაქრობის კანონებად.

სავარჯიშოები

I.1.1 განვიხილოთ პრედიკატი $p(x,y) \equiv << 5x^3 + 8y^2 = 5 >>$, რომელიც განსაზღვრულია ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეზე. დაადგინეთ შესრულებადია თუ არა $p(x,y)$ პრედიკატი.

I.1.2 გაარკვიეთ იგივურად ჭეშმარიტია, თუ შესრულებადია პრედიკატი: $<< \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 >>$.

I.1.3. სხვადასხვა ფერის სამ ყუთში ბურთები აწყვია: ლურჯში–ლურჯი ბურთები, ყვითელში–ყვითელი ბურთები და მწვანე-

ში—მწვანე ბურთები. წინასწარ უცნობი კანონით მოახდინეს ყუთებ-ში ყველა ბურთების შეცვლა, რის შედეგადაც მივიღეთ, რომ სამი-ვე ყუთის ფერი შეუსაბამოა მათში მოთავსებული ბურთების ფე-რის. ლურჯი ყუთის გახსნით დადგინდა, რომ მასში მწვანე ფე-რის ბურთებია მოთავსებული. რა ფერის ყუთშია ყვითელი ბურ-თები?

I.1.4. ვთქვათ სამართლიანია შემდეგი დებულებები: ა) ნარინჯისფე-რი ფორთოხალი მწიფეა; ბ) მწიფე ფორთოხალი ნარინჯისფერია; გ) გვიან შემოდგომით დაკრეფილი ფორთოხალი ნარინჯისფერია.

ჩამოთვლილი გამონათქვამებიდან, რომელი გამონათქვამის სამა-რთლიანობა გამომდინარეობს ზემოთ მოყვანილი პირობებიდან:

(1) თუ ფორთოხალი მწიფე არაა, მაშინ იგი ნარინჯისფერია;

(2) თუ ფორთოხალი მწიფე არ არის, მაშინ ის არ არის გვიან შემოდგომაზე დაკრეფილი;

(3) მწიფე ფორთოხალი გვიან შემოდგომაზეა დაკრეფილი.

I.1.5. რომელი გამონათქვამია მცდარი და რომელია ჭეშმარიტი: ა) კატა ცხოველია და თევზს არ ჭამს; ბ) კატა ცხოველი არაა ან კატა თევზს არ ჭამს; გ) კატა ცხოველი არაა და კატა თევზს არ ჭამს; დ) კატა ცხოველია ან კატა თევზს არ ჭამს.

I.1.6. გამოთვალეთ $[(u \wedge \neg v) \Rightarrow (w \Leftrightarrow (\neg u \vee v))]$, თუ ცნობილია, რომ $[u]=1$; $[v]=0$ და $[w]=1$.

I.1.7. გამოთვალეთ $[w \Rightarrow ((u \vee v) \Rightarrow (\neg u \wedge v))]$, თუ ცნობილია, რომ $[u]=1$; $[v]=1$ და $[w]=0$.

I.1.8. რას უდრის $[u]$ და $[v]$, თუ ცნობილია, რომ $[u \wedge v] = 0$ და $[u \vee \neg v] = 0$.

I.1.9. რას უდრის $[u]$ და $[v]$, თუ ცნობილია, რომ $[(u \wedge v) \Leftrightarrow \neg v] = 0$, $[u] + [v] > 0$.

I.1.10. ტავტოლოგიაა თუ, არა შემდეგი სახის ლოგიკური გამონათქვამი: $\neg u \Rightarrow \neg(u \wedge v)$?.

§1.2. მათემატიკური ინდუქციის და საწინააღმდეგო აზრის დაშვების მეთოდები

მონაცემთა ანალიზისას შენიშნული მათემატიკური კანონზომიერებების უტყუარობის შესამოწმებლად და ზოგადი რეზულტატის დასადგენად ხშირად გამოიყენება მათემატიკური ინდუქციის და საწინააღმდეგო აზრის დაშვების მეთოდები. მათი ცოდნა სასარგებლოა ოპტიმალური მოცულობის კომპიუტერული ალგორითმების შედგენისას [1; 3; 4; 6; 15; 26].

არსებობენ ფორმულები და თეორემები, რომლებიც სამართლიანია ნებისმიერი ნატურალური $n \in \mathbf{N}$-თვის, მაგ. ნიუტონის ცნობილი ბინომი; არითმეტიკული და გეომეტრიული პროგრესიის წევრების და ჯამის გამოსათვლელი ფორმულები და სხვ. ამ ტიპის რეზულტატების სამართლიანობაში დასარწმუნებლად შესაძლებელია გამოვიყენოთ **მათემატიკური ინდუქციის მეთოდი:** როდესაც სურთ დაამტკიცონ რაიმე დებულების სამართლიანობა, რომელიც დამოკიდებულია ნებისმიერ ნატურალურ რიცხვზე $n \in \mathbf{N}$, მოქმედებენ შემდეგი თანმიმდევრობით:

I) აჩვენებენ, რომ $n = 1$ -თვის (საწყის ეტაპზე) რეზულტატი არის სამართლიანი;

II) უშვებენ ჭეშმარიტებას რეზულტატისა რაიმე $n \in \mathbf{N}$-თვის, მის საფუძველზე წარმართავენ მტკიცებას $n+1$-თვის. თუკი აღმოჩნდა, რომ ამ შემთხვევაშიც რეზულტატი არის ძალაში, მაშინ საბოლოოდ იგი სამართლიანად ცხადდება.

მაგალითი 1.2.1 ვაჩვენოთ $\sum_{i=1}^{n} 5^i = \frac{5^{n+1}-5}{4}$ ტოლობის სამართლიანობა.

თავდაპირველად შევნიშნოთ, რომ $5^1 = \frac{5^{1+1}-5}{4}$. მეორე ეტაპზე, თუკი დავუშვებთ დასამტკიცებელი ტოლობის სამართლიანობას, მაშინ $\sum_{i=0}^{n+1} 5^i$ -თვის გვექნება $\sum_{i=0}^{n+1} 5^i = \sum_{i=0}^{n} 5^i + 5^{n+1} = \frac{5^{n+1}-5}{4} + 5^{n+1} =$

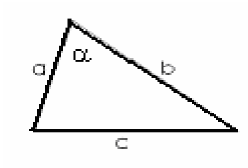
$= \frac{5 \cdot 5^{n+1}-5}{4} = \frac{5^{n+2}-5}{4}$, ე.ი. ჩვენ $\forall n \in \mathbf{N}$-თვის მივიღეთ აღნიშნული ტოლობის სამართლიანობა.

საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდის გამოყენება ეფუძნება გამონათქვამებისათვის დადგენილ ლოგიკურ კანონებს. სახელდობრ, თუ დავუშვებთ, რომ დასამტკიცებელი დებულების დასკვნითი ნაწილი არის მცდარი, მტკიცების პროცესში (ცნობილი მათემატიკური ჭეშმარიტებების გამოყენებისას) უნდა მივიდეთ მცდარ გამონათქვამამდე (პირობით ცნობილი, ანდა ადრე დამტკიცებული რომელიმე რეზულტატის უარყოფამდე). ასეთ შემთხვევაში დებულება სამარ-

თლიანად გამოცხადდება. ამ მეთოდის საილუსტრაციოდ გამოდგება შემდეგი

მაგალითი 1.3.2 დავამტკიცოთ, რომ თუ სამკუთხედში რომელიმე ორი გვერდის კვადრატების ჯამი ტოლია მესამე გვერდის კვადრატის, მაშინ ის მართკუთხა სამკუთხედია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ $c^2 = a^2 + b^2$, მაგრამ სამკუთხედი არაა მართკუთხა. ამრიგად, ჩვენი დაშვებით ნახ.1.2.1-ზე $\alpha \neq 90^\circ$ -კუთხეა.



ნახ.1.2.1

კოსინუსების თეორემის თანახმად შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობა $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, საიდანაც ცხადია, რომ $c^2 \neq a^2 + b^2$. პირობასთან მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს დებულების სამართლიანობას.

სავარჯიშოები

I.2.1. დაამტკიცეთ $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ უტოლობის სამართლიანობა $\forall n \in \mathbf{N}$-თვის.

I.2.2. დაამტკიცეთ, რომ თუ $a > 0$, მაშინ $(1+a)^n \ge 1+na$, $\forall n \in \mathbf{N}$-თვის.

I.2.3. მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დაამტკიცეთ ტოლობა: $\sum_{k=1}^{n} arctg\left(\frac{1}{2k^2}\right) = arctg\left(\frac{n}{n+1}\right)$, $\forall n \in \mathbf{N}$-თვის.

I.2.4. დაამტკიცეთ, რომ $\left|\sin \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} \sin \alpha_k$, სადაც $\forall \alpha_k \in [0^\circ;\ 180^\circ]$.

I.2.5. დაამტკიცეთ, რომ $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$, სადაც $n > 1$.

I.2.6. დაამტკიცეთ, რომ ყოველ ნამდვილკოეფიციენტებიან n-ური რიგის პოლინომს გააჩნია კომპლექსურ რიცხვთა $\mathbf{C}$ სიმრავლეში ზუსტად n-ცალი ფესვი.

I.2.7. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$, სადაც $\forall a_k \in \mathbf{R}$, მაშინ $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

I.2.8. საწინააღმდეგოს დაშვების გზით დაამტკიცეთ, რომ $e^{x_1} \ne e^{x_2}$, $\forall x_1 \ne x_2$-ნამდვილი მნიშვნელობებისთვის.

I.2.9. აჩვენეთ, რომ ყოველ კრებად რიცხვით მიმდევრობას გააჩნია ერთადერთი ზღვარი.

I.2.10. რიცხვთა თეორიიდან ცნობილია შემდეგი თეორემა: $\forall r \in \mathbf{R}$-თვის $\exists p_1; p_2; ...; p_n$-მარტივი რიცხვები ისეთი, რომ $r = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_n^{k_n}$, სადაც $k_1; k_2; ...; k_n \in \mathbf{Q}$. აღნიშნულ თეორემაზე დაყრდნობით და საწი-

საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდით დაამტკიცეთ, რომ მარტივ რიცხვ-თა სიმრავლე უსასრულოა.

§1.3. სიმრავლეთა ალგებრა და კარდინალური რიცხვები

დიდი მოცულობის მონაცემთა ბაზებში ცალკეულ ერთობლიობებში (მაგ. მასივებში) სასურველი კომპონენტების (ნაწილების) სწრაფად მოსაძებნად ან სხვადასხვა გამონათქვამებრივი მონაცემების ლოგიკური კომბინაციების (კონიუნქციური, დიზიუნქციური, და სხვ.) შესასრულებლად საჭიროა სპეციფიური კომპიუტერული პროგრამების შემუშავება, რისთვისაც ძალზედ მნიშვნელოვანია სიმრავლეთა თეორიის აპარატის დაუფლება [1-3; 12; 14; 16; 18; 19; 22].

სიმრავლეები წარმოადგენენ გარკვეული საგნებისა ან ობიექტების ერთობლიობებს. სიმრავლის შემადგენელ აბსტრაქტულ ობიექტებს ამ სიმრავლის **ელემენტები** ეწოდებათ. სიმრავლეებს დიდი, ხოლო მათ ელემენტებს მცირე ლათინური ან ბერძნული ასოებით აღნიშნავენ. იმ შემთხვევაში, როცა a არის A სიმრავლის ელემენტი გამოიყენება ჩანაწერი $a \in A$, წინააღმდეგ შემთხვევაში $a \notin A$. აღსანიშნავია რომ, რაიმე ელემენტების ერთობლიობა მხოლოდ მაშინ იწოდება სიმრავლედ როცა მის ელემენტობრივ ჩამონათვალში არ მონაწილეობენ ერთი და იგივე ელემენტები. ასე მაგ., $A = \{a,b,c,d\}$ -სიმრავლეა, მაგრამ ერთობლიობა $A' = \{a,b,a,c\}$ -არ იწოდება სიმრავლედ (მას მათემატიკაში სიტყვას უწოდებენ). ჩვეულებრივ, განასხვავებენ სასრულ და უსასრულო სიმრავლეებს. სიმრავლეს ეწოდება სასრული თუ, ის სასრული რაოდენობა ელემენტებისაგან შედგება. სხვა შემთხვევაში სიმრავლეს უსასრულო ეწ-

ოდება. სასრული სიმრავლის მაგალითებია: აუდიტორიაში სტუდენ-ტების სიმრავლე, ხეზე ფოთლების სიმრავლე, ოკეანეში მოლეკუ-ლების სიმრავლე და ა.შ. უსასრულო სიმრავლეებს წარმოადგენენ **R**, **N, Z, Q, I** და სხვ.

სიმრავლეს, რომელიც არცერთ ელემენტს არ შეიცავს ცარიე-ლი სიმრავლე ეწოდება და აღინიშნება ϕ-ით.

ჩვეულებრივ დავწერთ, რომ $A \subset B$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$, მაგრამ ჩართვა $A \subseteq B \Leftrightarrow (A \subset B) \vee (A = B)$. ჩანაწე-რი $A \subset B$ აღნიშნავს, რომ A სიმრავლე არის B-ს ნაწილი, ანუ ქვესიმრავლე.

თუ A და B რაიმე სიმრავლეებია, მაშინ მათი

ა) **ტოლობა** $A = B$ ექვივალენტურია შემდეგი ჩართვებისა $A \subset B$ და $B \subset A$;

ბ) **გაერთიანება** ეწოდება სიმრავლეს

$$A \cup B \equiv \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\};$$

გ) **თანაკვეთა** ეწოდება სიმრავლეს

$$A \cap B \equiv \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\};$$

დ) **სხვაობა** ეწოდება სიმრავლეს

$$A \setminus B \equiv \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\};$$

ე) **სიმეტრიული სხვაობა** ეწოდება სიმრავლეს

$$A \Delta B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A);$$

ვ) **დეკარტული ნამრავლი** ეწოდება სიმრავლეს

$$A \times B \equiv \{(a,b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

განმარტებული სიმრავლური ოპერაციების თვალსაჩინოების მიზნით განვიხილოთ

მაგალითი 1.3.1. განვიხილოთ $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ და $B = \{a,c,f,g\}$ სიმრავლეები. შესაბამისი განმარტებების გათვალისწინებით ჩვენ გვექნება:

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g\}; \quad A \cap B = \{a,c,f\}; \quad A \setminus B = \{b,d,e\}; \quad A \Delta B = \{b,d,e,g\}.$$

ცხადია, რომ მათი დეკარტული ნამრავლი ტოლი იქნება:

$$A \times B = \{(a,a),(a,c),(c,a),(a,f),(a,g),(b,a),$$
$$(b,c),(b,f),(b,g),(c,c),(c,f),(c,g),(d,a),(d,c),(d,f),$$
$$(d,g),(e,a),(e,c),(e,f),(e,g),(f,a),(f,c),(f,f),(f,g)\}.$$

ამბობენ, რომ X-სიმრავლეზე განსაზღვრულია **ბინარული მიმართება** R, თუკი $R \subset X \times X$. ვთქვათ $(a;b) \in R$, მაშინ ჩვენ დავწერთ aRb და ვიტყვით, რომ a და b ელემენტები არიან ერთმანეთთან R მიმართებაში, წინააღმდეგ შემთხვევაში $a\bar{R}b$. აღსანიშნავია, რომ R-იწოდება **ეკვივალენტობის მიმართებად** თუკი ის აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს: ა) aRa (რეფლექსურობა); ბ) $aRb \Rightarrow bRa$ (სიმეტრიულობა); გ) $(aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$ (ტრანზიტულობა).

მაგალითი 1.3.2. განვიხილოთ $X = \{a;b;c;d\}$ სიმრავლე და მასზე $R = \{(a,d);\ (b,c)\}$-მიმართება. ცხადია, რომ ბინარული R-მიმართებაა, მაგრამ იგი არაა ეკვივალენტობის მიმართება.

მაგალითი 1.3.3. იოლია დარწმუნება იმაში, რომ ყველა სამკუთხედების ოჯახში ეკვივალენტობის მიმართებას წარმოადგენს სამკუთხედების მსგავსება.

აღსანიშნავია, რომ თუ R ეკვივალენტობის მიმართებაა X-ზე და $a \in X$, მაშინ $R(a) = \{x \mid x \in X,\ (a,x) \in R\}$-სიმრავლეს ეწოდება a-ელემენტის R-ეკვივალენტობის კლასი. ცხადია, რომ ეკვივალენტობის კლასები არ თანაიკვეთებიან, რის გამოც ისინი წარმოქმნიან X-ის დაყოფას. სიმრავლეს ეკვივალენტობის კლასებისა ეწოდება X-ის **ფაქტორსიმრავლე** R ეკვივალენტობის მიმართ და მას აღნიშნავენ X/R-ით.

მაგალითი 1.3.4. მთელ რიცხვთა $\mathbf{Z}$-სიმრავლეში განვიხილოთ ეკვივალენტობა: ყველა ლუწი რიცხვი გაიგივდეს 0-თან, ხოლო კენტი რიცხვები კი 1-თან. ასეთი ეკვივალენტობის მიმართება წარმოშობს ფაქტორსიმრავლეს, რომელიც აღინიშნება $\mathbf{Z}_2=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-ით.

ზემოთ აღნიშნული სიმრავლური ოპერაციების განმარტებებიდან შეგვიძლია მარტივად დავასკვნათ, რომ ადგილი აქვს შემდეგი სახის ტოლობებს: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$, $A \Delta B = B \Delta A$, მაგრამ $A \times B \neq B \times A$, როცა $A \neq B$. ამასთან ცხადია, რომ $A \cap A = A \cup A = A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap \phi = \phi$ და $A \cup \phi = A$.

თეორემა 1.3.1. სიმრავლურ ოპერაციებს გააჩნიათ შემდეგი ძირითადი თვისებები:

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

3) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

4) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

დამტკიცება. 1)-ის მისაღებად საჭიროა განვიხილოთ $\forall\xi\in\left(A\cap(B\cup C)\right)\Leftrightarrow \xi\in A\wedge\xi\in(B\cup C)\Leftrightarrow \xi\in A\wedge(\xi\in B\vee\xi\in C)\Leftrightarrow$ $\xi\in(A\cap B)\vee\xi\in(A\cap C)\Leftrightarrow \xi\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. მაშასადამე ადგილი აქვს 1)-ტოლობას.

2)-თვის ავიღოთ $\forall\xi\in(A\cup(B\cap C))\Leftrightarrow\xi\in A\vee\xi\in(B\cap C)\Leftrightarrow$ $\xi\in A\vee(\xi\in B\wedge\xi\in C)\Leftrightarrow\xi\in(A\cup B)\wedge\xi\in(A\cup C)\Leftrightarrow\xi\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, ანუ ჩვენ მივიღეთ რომ სამართლიანია 2)-ტოლობა.

3)-თვის $\forall\xi\in(A\setminus(B\cup C))\Leftrightarrow\xi\in A\wedge\xi\notin(B\cup C)\Leftrightarrow\xi\in A\wedge(\xi\notin B\wedge\xi\notin C)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\xi\in(A\setminus B)\wedge\xi\in(A\setminus C)\Leftrightarrow\xi\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$, ე.ი. მივიღეთ 3)-ის ჭეშმარიტება.

4)-ის საჩვენებლად განვიხილოთ $\forall\xi\in(A\setminus(B\cap C))\Leftrightarrow\xi\in A\wedge$ $\xi\notin(B\cap C)\Leftrightarrow\xi\in A\wedge(\xi\notin B\vee\xi\notin C)\Leftrightarrow\xi\in(A\setminus B)\vee\xi\in(A\setminus C)\Leftrightarrow$ $\xi\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$. ამრიგად, 4)-ტოლობა დამტკიცებულია.■

შევნიშნოთ, რომ 4)-დან უშუალოდ გამომდინარეობს ტოლობა $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

სიმრავლური ოპერაციების შემოკლების მიზნით ხშირად გამოიყენება შემდეგი ჩანაწერები:

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \equiv \{a \mid \exists\alpha_0 \in \Lambda : a \in A_{\alpha_0}\};\ \ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \equiv A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\,;$$

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \equiv \{a \mid a \in A_\alpha, \forall\alpha \in \Lambda\};\ \ \bigcap_{k=1}^{n} A_k \equiv A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\,;$$

$$A_1 \times \ldots \times A_n \equiv \prod_{k=1}^{n} A_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \forall i = \overline{1;n}\};$$

ამასთან Λ-ინდექსთა რაიმე (სასრული ან უსასრულო) დალაგებული სიმრავლეა (ანუ სიმრავლე, რომელშიაც $\forall\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \Lambda$-თვის $\alpha_1 < \alpha_2$ ან $\alpha_2 < \alpha_1$).

თეორემა 1.3.1-ში მოყვანილი 1)-4) თვისებების გათვალისწინებით იოლად მტკიცდება, რომ თუ X ნებისმიერი სიმრავლეა, ხოლო $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ სიმრავლეთა რაიმე ერთობლიობაა, მაშინ

$$\text{ა) } X \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (X \cap A_\alpha)\,;\ \ \text{ბ) } X \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (X \cup A_\alpha)\,;$$

$$\text{გ) } X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (X \setminus A_\alpha)\,;\qquad \text{დ) } X \setminus \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (X \setminus A_\alpha)\,.$$

აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ გ) და დ)-კანონები სიმრავლეთა თეორიაში იწოდება დე-მორგანის კანონებად.

ყოველი სიმრავლის შემადგენელი ელემენტების რაოდენობას მის **კარდინალურ რიცხვს (ან სიმძლავრეს)** უწოდებენ. თუ მოცემული გვაქვს $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ სიმრავლე, მაშინ A-ს კარდინალური რიცხვია $cardA = n$.

სიმრავლეს, რომელიც იმდენივე ელემენტს შეიცავს რამდენსაც ნატურალურ რიცხვთა **N**-სიმრავლე, **თვლადი სიმრავლე** ეწოდება. ამასთან მიღებულია აღნიშვნა $card\,\mathbf{N} = \aleph_0$ (’’ალეფ-ნული’’—ებრაული ანბანის პირველი ასონიშანი). სიმრავლეს, რომელიც იმდენივე ელემენტს შეიცავს რამდენსაც ნამდვილ რიცხვთა **R**-სიმრავლე, **კონტინუუმი** ეწოდება, ამასთან მიღებულია შემდეგი სახის აღნიშვნა $card\,\mathbf{R} = c$.

ნებისმიერი A სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეების ერთობლიობას უწოდებენ A-ს **ბულიანს** და აღვნიშნავთ $\mathrm{B}(A)$-ით.

თეორემა 1.3.2 თუ $cardA = n$, მაშინ $card\mathrm{B}(A) = 2^n$.

დამტკიცება. ცხადია, რომ A-ს 0-სიმძლავრის ქვესიმრავლეთა რაოდენობაა 1 (ასეთია მხოლოდ ϕ-სიმრავლე); A-ს ყველა 1-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა ტოლია C_n^1-ის; 2-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა C_n^2 ; და ა.შ. n-ელემენტიანი ქვესიმრავლეების რაოდენობა C_n^n. ცხადია, რომ n-ელემენტიანი სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლეების რაოდენობა გამოისახება ტოლობით $card\mathrm{B}(A) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = 2^n$. ■

დასასრულ, მოვიყვანოთ კარდინალური რიცხვების ზოგიერთი სასარგებლო თვისება:

1. $c = 2^{\aleph_0}$, ე.ი. $\aleph_0 < c$.
2. $card(A \cup B) = cardA + cardB - card(A \cap B)$.

3. $card(A\times B)=cardA\cdot cardB$.

4. თუ $cardA\geq\aleph_0$ ან $cardB\geq\aleph_0$, მაშინ $card(A\cup B)=\max\{cardA;\ cardB\}=$

$=card(A\times B)$.

სავარჯიშოები

I.3.1. ჯგუფში 30 სტუდენტია, მათგან 20 სტუდენტი სწავლობს ინგლისურ ენას, ხოლო 25 გერმანულს, რამდენი სტუდენტი სწავლობს ერთდროულად ორივე ენას?

I.3.2. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობები:

ა) $A\cup B=(A\setminus B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)$;

ბ) $A\cap B=(A\cup B)\setminus\big((A\setminus B)\cup(B\setminus A)\big)$

I.3.3. თუ $S=\left\{(x,y)\,|\,\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}=7\right\}$ და $I=[0;\ 1]$, მაშინ რას წარმოადგენს $S\times I$ -სიმრავლე (რომელი სივრცითი სხეულია)?

I.3.4. თუ $A=\{2;3;5\}$ და $B=\{(x,y)\,|\,8\leq x\leq 9,-3\leq y\leq 4\}$, როგორ განსხვავდება გეომეტრიულად $A\times B$ და $B\times A$ სიმრავლეები?

I.3.5. დაამტკიცეთ სიმრავლური ტოლობები:

ა) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$,

ბ) $A=(A\cap B)\cup(A\setminus B)$, გ) $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$,

დ) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$, ე) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$.

I.3.6. დაამტკიცეთ, რომ თუ A და B არის X -ის ქვესიმრავლეები, მაშინ $A\subset B\Leftrightarrow X\setminus B\subset X\setminus A$ და $A\setminus B=A\cap(X\setminus B)$.

I.3.7. რას უდრის $card(A\Delta B)$, თუ ცნობილია, რომ $card(A\cap B)=m$ ხოლო $card(A\cup B)=n$.

I.3.8. სიბრტყეზე დაფიქსირებულია L-წრფე და მასზე არამდებარე n ცალი ერთმანეთისაგან განსხვავებული წერტილი $\{p_1; p_2;...; p_n\}$. სამართლიანია თუ არა შემდეგი კარდინალური ტოლობები $card(\{p_1\}\cup L)=card(\{p_1; p_2\}\cup L)=...=card(\{p_1; p_2;...; p_n\}\cup L)=$ $card\,\mathbf{R}$?. დაასაბუთეთ, რომ შედეგი არ შეიცვლება მაშინაც თუკი L-წრფეზე არამდებარე წერტილთა სიმრავლე თვლადი ან კონტინუუმია.

I.3.9. თუ $A=\{-4;\ 5;\ 7\}$, $B=\mathbf{R}$, გამოსახეთ სიბრტყეზე $C=A\times B$ სიმრავლე და იპოვეთ $cardC$.

I.3.10. სამართლიანია თუ არა ტოლობა $card\,\mathbf{R}^{\mathrm{n}}=card\,\mathbf{R}=c$, სადაც $2\le n<\infty$?

§1.4. წერტილოვანი ასახვები და მათი თვისებები

კომპიუტერულ მეცნიერებათა მრავალი ამოცანა მოცემული თვისებების ობიექტებს შორის არსებული ფუნქციური ურთიერთკავშირის მოდელირებას საჭიროებს [2; 3; 6; 8; 12; 14; 16; 17; 26]. მათ გადასაწყვეტად კი განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია წერტილოვანი ასახვების ტიპებისა და თვისებების ცოდნა.

აბსტრაქტულ X სიმრავლზე განსაზღვრულ შესაბამისობის წესს, მნიშვნელობებით Y სიმრავლეში, რომლის დროსაც ყოველ ფიქსირებულ $x\in X$ ელემენტს შეესაბამება რაიმე $y\in Y$-ელემენტი, ასახვას უწოდებენ. თუ, $f: X\to Y$ ცნობილი ასახვაა, მაშინ $f: x_0\mapsto y_0$-ჩანაწერი მიუთითებს, რომ $x_0\in X$-ის კონკრეტულ

მნიშვნელობას შეესაბამება $y_0 \in Y$ -მნიშვნელობა. ცხადია, რომ ასახ-ვა წარმოადგენს ფუნქციის ცნების განზოგადებას აბსტრაქტული სიმრავლეებისათვის. გავიხსენოთ, რომ ფუნქციას ჩვეულებრივ უწ-ოდებენ ასახვას, რომლის განსაზღვრის და მნიშვნელობათა არეა **R**-ის ქვესიმრავლე.

მოვიყვანოთ ასახვების ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისება:

თეორემა 1.4.1. ვთქვათ $f: X \to Y$ რაიმე ასახვაა, მაშინ:

1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, $\forall A \subset X, B \subset X$ -თვის;

2) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, $\forall A \subset X, B \subset X$ -თვის.

დამტკიცება. 1)-თვის ავიღოთ $\forall y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists \xi \in A \cap B$ ისეთი, რომ $f(\xi) = y$. ცხადია, $\xi \in A \wedge \xi \in B \Rightarrow y = f(\xi) \in f(A) \wedge y = f(\xi) \in f(B) \Rightarrow$ $y \in f(A) \cap f(B)$. ამრიგად 1)-ჩართვა სამართლიანია.

2)-ის საჩვენებლად თავდაპირველად განვიხილოთ იმპლიკაცია: $\forall y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists \xi \in (A \cup B)$ ისეთი, რომ $f(\xi) = y$. ვინაიდან ადგილი აქ-ვს $\xi \in A \vee \xi \in B \Rightarrow y = f(\xi) \in f(A) \vee y = f(\xi) \in f(B) \Rightarrow y \in (f(A) \cup f(B))$. ამრი-გად, მივიღეთ რომ $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

ვაჩვენოთ ეხლა შებრუნებული ჩართვის სამართლიანობაც. ამ მიზნით ავიღოთ $\forall y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Rightarrow \exists \xi \in A \vee \eta \in B$ ისე-თი, რომ $f(\xi) = y \wedge f(\eta) = y$. ცხადია, რომ $\xi \in (A \cup B) \wedge \eta \in (A \cup B) \Rightarrow$ $y = f(\xi) \in f(A \cup B) \wedge y = f(\eta) \in f(A \cup B)$, ანუ შებრუნებული ჩართვაც $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ დამტკიცებულია. ამრიგად, 2)-ტოლობის სამა-რთლიანობა დამტკიცებულია. ■

ვთქვათ $f: A \to B$ ნებისმიერად ფიქსირებული ასახვაა, ჩვეულებრივ, $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$-სიმრავლეს ეწოდება $b \in B$ **წერტილის წინარე სახე** f-ასახვის დროს. აღნიშნულის საფუძველზე ჩვენ შეგვიძლია განვმარტოთ $B_1 \subset B$ სიმრავლის წინარე სახე: $f^{-1}(B_1) \equiv \bigcup\limits_{b \in B_1} f^{-1}(b)$. ამ ცნების გასაანალიზებლად სასარგებლოა განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 1.4.1. $A = \{a, b, c, d, e\}$ და $B = \{m, n, p\}$ სიმრავლეები. თუ $f: A \to B$ ასახვას განვმარტავთ $f(a) = f(b) = f(e) = m$, $f(c) = n$, $f(d) = p$ ტოლობებით, მაშინ $f^{-1}(m) = \{a, b, e\}$; $f^{-1}(n) = \{c\}$ და $f^{-1}(p) = \{d\}$. თუ-კი $B_1 = \{m, p\} \subset B \Rightarrow f^{-1}(B_1) = \ = \{a, b, d, e\}$.

თეორემა 1.4.2. თუ $f: X \to Y$ რაიმე ასახვაა, მაშინ:

1) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $\forall A \subset Y, B \subset Y$-თვის;

2) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, $\forall A \subset Y, B \subset Y$-თვის.

დამტკიცება. 1)-ის დასამტკიცებლად საჭიროა განვიხილოთ

$$\forall \xi \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(\xi) \in (A \cap B) \Leftrightarrow f(\xi) \in A \wedge f(\xi) \in B \Leftrightarrow \xi \in f^{-1}(A) \wedge \xi \in$$
$$\in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \xi \in \left(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\right).$$

2)-მიიღება თუ ავიღებთ $\forall \xi \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(\xi) \in (A \cup B) \Leftrightarrow f(\xi) \in A \vee$ $f(\xi) \in B \Leftrightarrow \xi \in f^{-1}(A) \vee \xi \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow \xi \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. ■

შენიშვნა 1.4.1. ასახვათა ზემოთ დამტკიცებული თვისებები შესაძლებელია განზოგადებულ სახეში ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

ა) $f\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha)$; ბ) $f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha)$;

გ) $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha)$; დ) $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha)$.

ინექციური, სურექციული და ბიექციური ასახვები: ქვემოთ ჩვენ განვმარტავთ სპეციალური ტიპის ასახვებს, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ მათემატიკურ ოპერაციებში.

ამბობენ, რომ $f: X \to Y$ ასახვა არის:

1) **ინექცია,** თუ $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ -თვის;

2) **სურექცია,** თუ $\forall y_0 \in Y$ -თვის $\exists x_0 \in X$, ისეთი რომ $f(x_0) = y_0$;

3) **ბიექცია,** თუ f ერთდროულად ინექციაც არის და სურექციაც.

თეორემა 1.4.3. თუ $f: X \to Y$ ასახვა

1) ინექციაა, მაშინ $f^{-1}(f(K)) = K$, $\forall K \subset X$ -თვის;

2) სურექციაა, მაშინ $A = f\left(f^{-1}(A)\right)$, $\forall A \subset Y$ -თვის.

დამტკიცება. 1)-ის დასამტკიცებლად საჭირო, რომ განვიხილოთ $\forall u_0 \in f^{-1}(f(K))$ წერტილი, მაშინ ცხადია: $f(u_0) \in f(K)$. მაშასადამე, $\exists k \in K$ ისეთი, რომ $f(k) = f(u_0)$. თუკი $k \neq u_0$, მაშინ ინექციურობის გამო უნდა შესრულდეს $f(k) \neq f(u_0)$. ამრიგად, ჩვენ დავასკვნით, რომ $k = u_0$, რის გამოც $u_0 \in K$, ე.ი. $f^{-1}(f(K)) \subset K$.

პირიქით, თუ $\forall k \in K \Rightarrow f(k) \in f(K) \Leftrightarrow k \in f^{-1}(f(K))$. ამრიგად, ადგილი აქვს ჩართვას: $K \subset f^{-1}(f(K))$ (მიაქციეთ ყურადღება, რომ აქ ჩვენ არ გვისარგებლია ინექციურობის პირობით!).

2)-ის დასამტკიცებლად განვიხილოთ $\forall v_0 \in A \Rightarrow \exists u_0 \in X$ (f-ის სურექციულობის გამო) ისეთი, რომ $f(u_0) = v_0$. ამრიგად, გვაქვს $u_0 \in f^{-1}(v_0) \subset f^{-1}(A)$. ამ უკანასკნელიდან თავის მხრივ ცხადია, რომ $v_0 = f(u_0) \in f\left(f^{-1}(A)\right)$, საიდანაც საბოლოოდ გვექნება დასამტკიცებელი $A \subset f\left(f^{-1}(A)\right)$ ჩართვა.

პირიქით, თუ ავიღებთ $\forall y_0 \in f\left(f^{-1}(A)\right) \Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(A)$ ისეთი, რომ $f(x_0) = y_0$. ცხადია, რომ $y_0 = f(x_0) \in A$, ე.ი. ადგილი აქვს $f\left(f^{-1}(A)\right) \subset A$ ჩართვას (მიაქციეთ ყურადღება, რომ აქ ჩვენ არ გვისარგებლია სურექციულობის პირობით!). ■

ვთქვათ $f: A \to B$ და $g: B \to C$ რაიმე ასახვებია. ასახვას $g \circ f: A \to C$ განმარტებულს შესაბამისობით $g \circ f: a \mapsto g(f(a))$, $\forall a \in A$-თვის, ეწოდება g და f ასახვების **კომპოზიცია**. ეს უკანასკნელი დიაგრამის სახით შემდეგნაირად გამოისახება:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

ამბობენ, რომ g ასახვა არის f-ის **შებრუნებული**, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები: $(g \circ f)(a) = a$, $\forall a \in A$-თვის და

$(f \circ g)(b) = b$, $\forall b \in B$-თვის. ასეთ შემთხვევაში ჩავწერთ, რომ $g \equiv f^{\text{inv}}$ (ანუ, g-ს ნაცვლად გამოვიყენებთ f^{inv}-ს). ზოგიერთ ლიტერატურაში f-ის შებრუნებული ასახვისათვის გამოიყენება აღნიშვნა f^{-1}. საგულისხმოა, რომ ასახვას $id_A : A \to A$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $id_A(a) = a$, $\forall a \in A$-თვის ეწოდება **იგივური ასახვა** A**-ზე**. ამრიგად, მოცემული ასახვის და მისი შებრუნებულის კომპოზიცია იგივური ასახვაა და პირიქით. ადვილია შემოწმება იმისა, რომ $(f^{\text{inv}})^{\text{inv}} = f$.

თეორემა 1.4.4. ვთქვათ A და B რაიმე სიმრავლეებია, მაშინ

ა) $f : A \to B$ ასახვა სურექციაა $\Leftrightarrow \exists g : B \to A$ ისეთი, რომ $f \circ g = id_B$.

ბ) თუ $f : A \to B$ ფიქსირებული ასახვაა და $\exists g : B \to A$ ისეთი ასახვა, რომ $g \circ f = id_A \Rightarrow f : A \to B$ ასახვა ინექციაა.

გ) თუ $f : A \to B$ ასახვა ინექციაა და $A \neq \phi \Rightarrow \exists g : B \to A$ ასახვა ისეთი, რომ $g \circ f = id_A$.

დამტკიცება. ა)-თვის განვიხილოთ $\forall b \in B$ ელემენტი, მაშინ f-ის სურექციულობის თანახმად $\exists \phi \neq M_b \subset A$ ისეთი, რომ $f(M_b) = b$. თუკი $g : B \to A$ ასახვას განვმარტავთ ტოლობით $g(b) = a$, სადაც $a \in M_b$ ნებისმიერი ელემენტია, მაშინ $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$, ანუ $f \circ g = id_B$.

პირიქით, თუკი $\exists g: B \to A$ ასახვა ისეთი, რომ $f \circ g = id_B$, მაშინ ცხადია $\forall b \in B$-თვის $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = b \Leftrightarrow g(b) \in f^{-1}(b) \Rightarrow \phi \neq f^{-1}(b)$.

ბ)-თვის დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ ვიგულისხმოთ, რომ $\exists x_1 \neq x_2$ ისეთები, რომ $f(x_1) = f(x_2)$. მაშასადამე, ადგილი აქვს იმპლიკაციას $g \circ f = id_A \Rightarrow x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, რაც ეწინააღმდეგება $x_1 \neq x_2$-ს.

გ)-ს დასამტკიცებლად საჭიროა ავიღოთ $\forall b \in B$, მაშინ გვექნება, რომ $f^{-1}(b) = \phi \vee f^{-1}(b) \neq \phi$. აღვნიშნოთ $E \equiv \{b \in B \mid f^{-1}(b) = \phi\} \subset B$. შევნიშნოთ, რომ f-ასახვის ინექციურობიდან გამომდინარეობს $card f^{-1}(b) = 1$, $\forall b \in (B \setminus E)$-თვის. თუკი g ასახვას განვმარტავთ პირობით

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b), & \text{როცა } b \in (B \setminus E) \\ a, & \text{როცა } b \in E, \end{cases}$$

სადაც $a \in A$-ნებისმიერად ფიქსირებული ელემენტია, მაშინ ცხადია, რომ $g \circ f = id_A$. ■

თეორემა 1.4.5. $f: A \to B$ ასახვას მაშინ და მხოლოდ მაშინ გააჩნია შებრუნებული, როდესაც f ბიექციაა.

დამტკიცება. თუკი f ბიექციური ასახვაა, მაშინ ცხადია, რომ $cardA = cardB$. ამიტომ ნებისმიერად აღებული $a \in A$-თვის არსებობს ერთადერთი $b \in B$, ისეთი, რომ $f(a) = b$. ახლა თუ ჩვენ განვმარტავთ $f^{\text{inv}}: B \to A$ ასახვას $f^{\text{inv}}(b) = a$-ით, მაშინ ადგილი ექნება ტო-

ლობებს: $(f^{\text{inv}} \circ f)(a) = a$ და $(f \circ f^{\text{inv}})(b) = b$. ეს კი ნიშნავს, რომ f^{inv} არის f-ის შებრუნებული.

პირიქით, დავუშვათ, რომ f ასახვას გააჩნია შებრუნებული f^{inv} და ვაჩვენოთ, რომ f –ბიექციაა (ანუ, ინექცია და სურექცია). ამ მიზნით ავიღოთ ისეთი $\forall x_1, x_2 \in A$ $x_1 \neq x_2$ წერტილები, მაშინ შებრუნებული ასახვის განმარტების ძალით შესრულდება $(f^{\text{inv}} \circ f)(x_1) = x_1$ და $(f^{\text{inv}} \circ f)(x_2) = x_2$. თუკი ადგილი აქვს ტოლობას $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{\text{inv}}(f(x_1)) = f^{\text{inv}}(f(x_2))$, მაშინ გვექნება $x_1 = x_2$, რაც შე-უძლებელია. ამრიგად $f(x_1) \neq f(x_2)$, ე.ი. f-ინექციაა. ახლა ვაჩვენ-ოთ, რომ f-სურექციაა. ავიღოთ $\forall y_0 \in B$ წერტილი, მაშინ შებრუნ-ებული ასახვის განმარტების ძალით $f\left(f^{\text{inv}}(y_0)\right) = y_0$, რაც ნიშნავს არსებობას ისეთი $a_0 \equiv f^{\text{inv}}(y_0) \in A$ წერტილისა, რომ $f(a_0) = y_0$. ამრ-იგად, f ასახვა სურექციაცაა და ე.ი.–ბიექციაა. ■

მაგალითი 1.4.2. განვიხილოთ $f(x) = 5x + 7$ ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის და მნიშვნელობათა არეა $\mathbf{R}$. შებრუნებული $f^{\text{inv}}(\xi)$ ასახვა უნდა განვსაზღვროთ $\xi = 5 \cdot f^{\text{inv}}(\xi) + 7$-დან, მაშასადამე $f^{\text{inv}}(\xi) = \frac{\xi - 7}{5}$. შევნიშნოთ, რომ $\left(f \circ f^{\text{inv}}\right)(\xi) = f\left(f^{\text{inv}}(\xi)\right) = f\left(\frac{\xi - 7}{5}\right) =$

$$= 5 \cdot \frac{\xi - 7}{5} + 7 = \xi \quad \text{და} \quad \left(f^{\text{inv}} \circ f\right)(x) = f^{\text{inv}}(f(x)) = f^{\text{inv}}(5x + 7) = \frac{(5x + 7) - 7}{5} = x.$$

ამრიგად, ჩვენ დავასკვნით რომ f და f^{inv} ურთიერთშებრუნებუ-ლი ასახვებია.

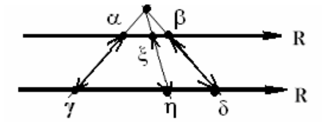
მაგალითი 1.4.3. $f: A \to B$ ასახვას განმარტებულს $A = \{a,b,c,d,e\}$-ზე, მნიშვნელობებით $B = \{k,l,m,n,p\}$-ში, $f(a) = m,\ \ f(b) = k,\ \ f(c) = n,$ $f(d) = p,\ \ f(e) = l$, გააჩნია შებრუნებული ასახვა $f^{\mathrm{inv}}: B \to A$, რომელიც განიმარტება $f^{\mathrm{inv}}(k) = b,\ \ f^{\mathrm{inv}}(l) = e,\ \ f^{\mathrm{inv}}(m) = a,\ \ f^{\mathrm{inv}}(n) = c,$ $f^{\mathrm{inv}}(p) = d$ პირობებით.

თუ, მოცემული გვაქვს ორი ასახვა $f: A \to B$ და $g: C \to D$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ ასახვა $f \times g: A \times B \to C \times D$, განმარტებული შემდეგი ტოლობით: $(f \times g)(a,b) = (f(a), g(b))$, $\forall (a,b) \in A \times B$-თვის, რომელსაც f და g **ასახვების დეკარტულ ნამრავლს ვუწოდებთ**.

რიგ შემთხვევებში ასახვის დახასიათება მოსახერხებელია მისი გრაფიკის მეშვეობით. ჩვეულებრივ, $f: A \to B$ **ასახვის გრაფიკს** უწოდებენ სიმრავლეს $G(f) \equiv \{(a,b) \mid f(a) = b\} \subset A \times B$. ცხადია, რომ ასახვის გრაფიკის ცნება წარმოადგენს ფუნქციის გრაფიკის განზოგადებას.

1.4.1-მაგალითში აგებული ფუნქციისათვის ცხადია, რომ გრაფიკი არის სიმრავლე $G(f) = \{(a,m);(b,m);(e,m);(c,n);(d,p)\}$ და რომლის ვიზუალიზება ვერ ხერხდება, რადგან A და B არარიცხვითი სიმრავლეებია.

შევნიშნოთ, რომ ვინაიდან $\exists f: A \to B$ ბიექცია $\Leftrightarrow cardA = cardB$, ამიტომ ნახ.1. 4.1-ზე გამოსახული შესაბამისობის საფუძველზე იოლად დავასკვნით შემდეგ ტოლობას: $card\,]\alpha;\beta[= card\,]\gamma;\delta[$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbf{R}$-თვის.



ნახ.1.4.1

სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის ცნებასთან მჭიდროდაა დაკავშირებული ე.წ. პროექციული ასახვები, რომლებიც ძალზედ მნიშვნელოვანია სხვადასხვა პრქტიკული ამოცანის გადაწყვეტისას.

განვიხილოთ ასახვები $P_A : A \times B \to A$ და $P_B : A \times B \to B$, რომლებიც განიმარტებიან ტოლობებით: $P_A(a,b) = a$ და $P_B(a,b) = b$, $\forall (a,b) \in A \times B$ - თვის და შესაბამისად იწოდებიან, **პროექციებად პირველი და მეორე თანამამრავლის გასწვრივ**. ცხადია, რომ ეს უკანასკნელი შესაძლებელია განხილულ იქნას უსასრულო რაოდენობა თანამამრავლების შემთხვევაშიც.

საყურადღებოა სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლის უნივერსალურობის შემდეგი თვისება:

თეორემა 1.4.6. თუ $f : M \to A$ და $g : M \to B$ რაიმე ასახვებია, მაშინ $\exists$ ერთადერთი ასახვა $h : M \to A \times B$, ისეთი რომ $f = P_A \circ h$ და $g = P_B \circ h$.

დამტკიცება. ასახვა $h : M \to A \times B$ განვმარტოთ $h(m) = \left(f(m); g(m)\right)$, $\forall m \in M$ -თვის. ცხადია, რომ $(P_A \circ h)(m) = P_A(h(m)) = P_A\left(f(m); g(m)\right) = f(m)$ და $(P_B \circ h)(m) = P_B(h(m)) = P_B\left(f(m); g(m)\right) = g(m)$, $\forall m \in M$ -თვის. ■

სავარჯიშოები

I.4.1. ცნობილია, რომ $f: X \to Y$ ისეთი ასახვაა, რომ რომელიღაც $A, B \subset X$ -თვის $\xi = A \cap B$, ამასთანავე ანასახები $f(A) = \{m, n, p\}$, ხოლო $f(B) = \{m, n, k, l\}$ და $f(\xi) \neq m$. იპოვეთ $f(\xi)$ -ს მნიშვნელობა.

I.4.2. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ფუნქციისათვის $f(x) = 7x^3$, იპოვეთ $f^{-1}([0;2])$.

I.4.3. ვთქვათ $X = \{a; b; c; d; e\}$, $Y = \{m; n; k\}$ და $f: X \to Y$ ასახვა ისეთია, რომ $f(a) = f(b) = n$; $f(c) = m$; $f(d) = f(e) = k$. იპოვეთ $f^{-1}(\{n; m\})$ და $f^{-1}(\{m; k\})$.

I.4.4. ვთქვათ მოცემულია $f: X \to Y$ ასახვა, ხოლო $A \subset B \subset X$ და $M \subset P \subset Y$. აჩვენეთ ჩართვები: $f(A) \subset f(B)$ და $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(P)$.

I.4.5. რას უდრის $f(x) = \dfrac{2}{3x - 17}$ -ის შებრუნებული f^{inv} -ფუნქცია.

I.4.6. განიხილეთ $f(x) = x^2 + 5x + 8$ -ფუნქცია და დაადგინეთ $f(x)$ -ინექ-ციაა, სურექციაა თუ ბიექციაა?

I.4.7. დაამტკიცეთ, რომ $f: A \to B$ ასახვა ინექციაა- პირობით უზრ-უნველყოფილია, რომ ყოველი $\varphi, \psi: C \to A$ ასახვების წყვილისათვის $f \circ \varphi = f \circ \psi$ -დან $\Rightarrow \varphi = \psi$.

I.4.8. დაამტკიცეთ, რომ $f: A \to B$ ასახვა სურექციაა- პირობით უზრუნველყოფილია, რომ ყოველი $\varphi, \psi: B \to C$ ასახვების წყვილი-სათვის $\varphi \circ f = \psi \circ f$ -დან $\Rightarrow \varphi = \psi$.

I.4.9. ააგეთ $f: Z \to Z$ ასახვის გრაფიკი, თუკი $f(x) = x^2$.

I.4.10. თუ $f(x) = \sin x$, ხოლო $g(x) = x$, იპოვეთ $card(G(f) \cap G(g))$.

თავი II. მონაცემთა ინტერვალური ანალიზის, მრავალსახა ასახვების თეორიის და არამკაფიო მათემატიკის საფუძვლები

§2.1. მონაცემთა ინტერვალური ანალიზის ძირითადი პრინციპები

ინტერვალური მათემატიკის მეთოდები კომპიუტერულ მეცნიერებათა ინტერესების სფეროში მოექცა მას შემდეგ, რაც აუცილებელი გახდა მონაცემთა არაზუსტი გაზომვების პირობებში ფიზიკური პროცესების მოდელირების ამოცანების გადაწყვეტა. იგი შესაძლებლობას იძლევა შესწავლილ იქნას სხვადასხვა ტიპის განუსაზღვრელობების შეფასებითი სიდიდეები.

მონაცემთა ინტერვალური ანალიზის მათემატიკური თეორიის განვითარება რ. მურის მიერ იქნა ინიცირებული [17]. ნამდვილ რიცხვთა **R**-სიმრავლის A ქვესიმრავლეს ჩვეულებრივ ეწოდება **ჩაკეტილი ინტერვალი**, თუკი $A=\{x \mid a \le x \le b\}=[a;b]$, რაიმე $a;b \in \mathrm{R}$-თვის. იმ შემთხვევაში, როცა $a=b$, A-ს ვუწოდებთ **წერტილოვანს** და ჩავწერთ, რომ $A=[a;a]=a$. თუ მოცემული გვაქვს R-ის ნებისმიერი ორი ჩაკეტილი ინტერვალი $A_1=[a_1;\, b_1]$ და $A_2=[a_2;\, b_2]$, მაშინ მათთვის შესაძლებელია განიმარტოს ინტერვალური შეკრების, გამოკლების, გამრავლების და გაყოფის ოპერაციები [17; 21]:

$$A_1+A_2=[(a_1+a_2);\ (b_1+b_2)];$$

$$A_1-A_2=[(a_1-b_2);\ (b_1-a_2)];$$

$$A_1\cdot A_2=[\min P;\ \max P],\ \text{აქ}\ \ P=\{(a_1\cdot a_2);(a_1\cdot b_2);(b_1\cdot a_2);(b_1\cdot b_2)\};$$

$$A_1 : A_2 = A_1\cdot\left[\frac{1}{b_2};\ \frac{1}{a_2}\right],\ \text{თუკი}\ \ 0\notin A_2\,.$$

აღნიშნულ არითმეტიკულ ოპერაციებზე დაყრდნობით ცხადია, რომ $\forall a \geq 0$ -თვის შესრულდება ტოლობები: $a + A_1 = [(a + a_1);\ (a + b_1)]$; $a \cdot A_1 = [(a \cdot a_1);\ (a \cdot b_1)]$; ხოლო როცა $a > 0$, მაშინ $A_1 : a = \left[\frac{a_1}{a};\ \frac{b_1}{a}\right]$; $(-1) \cdot A_1 = -A_1 = [-b_1;\ -a_1]$.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ გამოკლების და გაყოფის ინტერვალური ოპერაციები, შესაბამისად, არ წარმოადგენენ შეკრების და გამრავლების შებრუნებულ ოპერაციებს. ამ უკანასკნელში დასარწმუნებლად საკმარისია განვიხილოთ

მაგალითი 2.1.1. $[2; 5] - [2; 5] = [-3;\ 3] \neq 0 = [0;\ 0]$;

$$[3;\ 5] : [3;\ 5] = \left[\frac{3}{5};\ \frac{5}{3}\right] \neq 1 = [1;\ 1].$$

უნდა აღინიშნოს, რომ $O = [0;\ 0]$ და $E = [1;\ 1]$ სიმრავლეები ერთადერთია, რომლებიც ზემოთ განმარტებული შეკრების და გამრავლების ოპერაციების მიმართ ნეიტრალური ელემენტის როლს ასრულებენ. ამასთან $0 \in (A - A)$, $\forall A$ -თვის, ხოლო $1 \in (B : B)$, $0 \notin B$ -ტიპის ჩაკეტილი ინტერვალებისათვის.

ჩამოვთვალოთ ინტერვალური არითმეტიკის ზოგიერთი უმარტივესი კანონი:

1. $A + B = B + A$; 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3. $A \cdot B = B \cdot A$; 4. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

ნამდვილ რიცხვთათვის დისტრიბუციულობის კანონი ინტერვალურ არითმეტიკაში ტრანსფორმირდება $A(B + C) \subseteq AB + AC$ სახით

(ამ უკანასკნელს **ქვედისტრიბუციულობის** წესი ეწოდება), ამასთან ტოლობას ადგილი აქვს იმ შემთხვევაში, როცა A-წერტილოვანია.

მაგალითი 2.1.2. თუ $A=[-3;\ -2]$; $B=[2;\ 5]$ და $C=[-4;\ 7]$, მაშინ $A(B+C)=\ [-3;\ -2]\cdot[-2;\ 12]=[-36;\ 6]$. მეორეს მხრივ, პირდაპირი გამოთვლებით ცხადია, რომ $AB+AC=\ [-15;\ -4]+[-21;\ 12]=[-36;\ 8]$. ამრიგად $A(B+C)\subset AB+AC$. იმ შემთხვევაში თუკი $A=4$, მაშინ ჩვენ მივიღებთ $A(B+C)=4\cdot[-2;\ 12]=[-8;\ 48]$. შევნიშნოთ, რომ გამოსახულება $AB+AC=[8;\ 20]+[-16;\ 28]=[-8;48]$.

ქვემოთ მოყვანილი ფუნქციები არიან ინტერვალური ანალოგები ელემენტარული ფუნქციებისა:

1) $A^2=[a;b]^2=[a;b]\cdot[a;b]=[0;+\infty[\cap[\min P;\max P]$, სადაც

$P=\left\{a^2;\ (a\cdot b);\ b^2\right\}$;

2) $\sqrt{A}=\sqrt{[a;\ b]}=\begin{cases}[\sqrt{a};\ \sqrt{b}], & \text{თუ } a\ge 0,\\ [0;\ \sqrt{b}], & \text{თუ } a\le 0,\ b\ge 0;\end{cases}$

3) თუ $m\ge 0$, მაშინ $m^A=m^{[a;\ b]}=[m^a;\ m^b]$.

რიგ შემთხვევებში ინტერვალური გამოთვლებისას სასარგებლოა

ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ 2.1.1 თუ $f(x)$ რაიმე A-სეგმენტზე დიფერენცირებადი ფუნქციაა, მაშინ ადგილი აქვს $f(A)\subseteq f(A_m)+f'(A)\cdot\left(A-A_m\right)$ ჩართვას, სადაც $A_m=\dfrac{a+b}{2}$ არის A-ს შუაწერტილი.

დამტკიცება. მათემატიკური ანალიზის კურსიდან ცნობილი საშუალო მნიშვნელობის თეორემის თანახმად $\exists\xi\in A$ ისეთი, რომ

$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)\cdot(x - x_0)$, სადაც $x_0 \in A$. ვინაიდან $f'(\xi) \in f'(A)$, ამიტომ გვექნება $f(A) \subseteq f(A_m) + f'(A)\cdot(A - A_m)$. ■

აღნიშნული თეორემის გამოყენებით და ელემენტარულ ფუნქციათა წარმოებულებით იოლად დავასკვნით, რომ

3) $\ln A \subseteq \ln A_m + \frac{1}{A}\cdot(A - A_m)$, სადაც $\min A > 0$;

4) $\arcsin A \subseteq \arcsin A_m + \frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\cdot(A - A_m)$, სადაც $A \subset [-1;\ 1]$ და

$\min A > -1$, $\max A < 1$;

5) $\arccos A \subseteq \arccos A_m - \frac{1}{\sqrt{1-A^2}}\cdot(A - A_m)$, სადაც $A \subset [-1;\ 1]$ და

$\min A > -1$, $\max A < 1$;

6) $\mathrm{arctg} A \subseteq \mathrm{arctg} A_m + \frac{1}{1+A^2}\cdot(A - A_m)$.

მაგალითი 2.1.3. ინტერვალური მონაცემის ლოგარითმის გამოსათვლელად განვიხილოთ სეგმენტი $A = [3;7]$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\ln A \subseteq \ln 5 + \frac{1}{[3;7]}\cdot([3;7] - 5) = \left[\left(\ln 5 - \frac{2}{3}\right);\ \left(\ln 5 + \frac{2}{3}\right)\right].$$

ინტერვალური მატრიცები: მატრიცას, რომლის ერთი მაინც ელემენტი წარმოადგენს ინტერვალს ეწოდება **ინტერვალური მატრიცა**, ე.ი.

$$\underset{m\times n}{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

სადაც $A_{ik} = [\,\underline{a}_{ik};\ \overline{a}_{ik}\,]$ -ინტერვალია და $i = \overline{1;m}$, $k = \overline{1;n}$.

ინტერვალურ მატრიცთა შეკრების, გამოკლების და გამრავლე-ბის ოპერაციათა განმარტება ბუნებრივია საჭიროებს ზემოთ აღნიშ-ნული ინტერვალური არითმეტიკის გათვალისწინებას:

1) $\underset{m\times n}{\mathrm{A}} \pm \underset{m\times n}{\mathrm{B}} = \left(A_{ik} \pm B_{ik}\right)_{i=\overline{1;m},\ k=\overline{1;n}}$;

2) $\underset{m\times l}{\mathrm{C}} = \underset{m\times n}{\mathrm{A}} \cdot \underset{n\times l}{\mathrm{B}} = \left(C_{ik} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot B_{jk}\right)_{i=\overline{1;m},\ k=\overline{1;l}}$.

საგულისხმოა, რომ ინტერვალურ მატრიცთა გამრავლების ოპე-რაცია არაასოციაციურია, ანუ

$$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot \mathrm{C} \neq \mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \mathrm{C}).$$

მაგალითი 2.1.3 განვიხილოთ შემდეგი მატრიცები $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ და $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} [-1;\ 1] & 0 \\ 0 & [-1;\ 1] \end{pmatrix}$, მაშინ ზემოთ მოყვანილი ინტერ-ვალური ოპერაციების გამოყენებით ჩვენ იოლად დავასკვნით $(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & [-1;\ 1] \\ [-1;\ 1] & [-1;\ 1] \end{pmatrix}$. მეორეს მხრივ კი შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{A} \cdot (\mathrm{B} \cdot \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cdot \begin{pmatrix} [-1;\ 1] & 0 \\ 0 & [-1;\ 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-2;\ 2] & [-1;\ 1] \\ [-1;\ 1] & [-1;\ 1] \end{pmatrix}$. აღნიშნული ადას-ტურებს ინტერვალურ მატრიცთა ნამრავლის არაასოციაციურობას.

ინტერვალურ A მატრიცას ეწოდება რეგულარული თუკი ის აკმაყოფილებს პირობას: $0 \notin \det \mathrm{A}$. ცხადია, რომ თუ განვიხილავთ ინტერვალურ კოეფიციენტებიან წრფივ განტოლებათა სისტემას, რომელსაც გააჩნია რეგულარული მატრიცა, მაშინ შესაძლებელია

კრამერის წესის ანალოგიურად ცვლადების ინტერვალური მნიშვნელობების განსაზღვრა. აქვე უნდა აღინიშნოს, რომ ინტერვალურ ანალიზში ცნობილია წრფივ განტოლებათა სისტემების ინტერვალური ამონახსნების მიღების ნიუტონის ალგორითმი.

სავარჯიშოები

II.1.1. ჰორიზონტალურ ზედაპირზე მოთავსებულ სხეულზე, რომლის მასა $m \in [2;\ 3]$ კგ, მოქმედებენ F-ძალით, რომელიც მას $a \in [5;\ 6]$ მ/წმ^2 აჩქარებით ამოძრავებს. იპოვეთ F-ის ინტერვალური მნიშვნელობა, თუ ცნობილია, რომ ზედაპირსა და სხეულს შორის ხახუნის კოეფიციენტი $\mu \in [0{,}1;\ 0{,}3]$.

II.1.2. გამტარზე, რომლის წინაღობა არის $R \in [2;\ 3]$ ომი, მოდებულია ძაბვა $U \in [200;\ 220]$ ვ. იპოვეთ გამტარში გამავალი დენის ინტერვალური მნიშვნელობა.

II.1.3. თუ $z = x + iy$ კომპლექსური რიცხვი ისეთია, რომ $x \in [2;\ 7]$ და $y \in [4;\ 5]$, მაშინ როგორია z^3-ის ინტერვალური წარმოდგენა?

II.1.4. $f(x) = x^2 + 5x + 6$ ფუნქციისათვის გამოთვალეთ $f([-2;\ 3])$ პირდაპირი ჩასმით და საშუალო მნიშვნელობის ინტერვალური ფორმით. დაადგინეთ შედეგად მიღებულ ინტერვალებს შორის რომელია უფრო მოკლე?

II.1.5. გამოთვალეთ $\sqrt[[3;\ 4]]{2^{[1;\ 5]}}$-ინტერვალი.

II.1.6. როგორია $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$-ის ინტერვალური წარმოდგენა?

II.1.7. განვიხილოთ ტოლობა $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ და შევაფასოთ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$-ის და $\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)$-ის ინტერვალური მნიშვნელობები.

II.1.8. ამოხსენით ინტერვალური განტოლება $[2;\ 3]\cdot \mathrm{X}=[4;\ 8]$ და აჩვენეთ, რომ ზუსტი ამონახსნი $\mathrm{X}_{ზუსტი}=\left[2;\ \dfrac{8}{3}\right]\subset \mathrm{X}$.

II.1.9. რა ინტერვალში უნდა ვეძიოთ x_1 და x_2 ცვლადები, თუ

$$\begin{cases}[1;\ 3]x_1+[2;\ 4]x_2=[7;\ 9]\\ [4;\ 6]x_1-[0;\ 3]x_2=[-1;\ 2].\end{cases}$$

II.1.10. გამოთვალეთ $x=\left([-2;3];[5;7]\right)$ და $y=\left([4;8];[-5;9]\right)$ ინტერვალური ვექტორების სკალარული ნამრავლი.

§2.2. მრავალსახა ასახვების თეორიის ელემენტები

მრავალსახა ასახვების თეორიის განვითარება დაკავშირებულია სიმრავლურ-მნიშვნელობებიანი ასახვების მათემატიკურ შესწავლასთან. თანამედროვე კომპიუტერულ მეცნიერებაში ისინი პრაქტიკულ პრობლემათა იმ სპეციალური კლასის ამოცანებზეა ორიენტირებული, რომელთა გადაჭრა ვერ ხერხდება კლასიკური წერტილოვანი ასახვების თეორიული აპარატის გამოყენებით [26].

მრავალსახა ასახვები და მათი ძირითადი თვისებები: ვთქვათ X და Y რაიმე სიმრავლეებია, ხოლო $\mathrm{P}(Y)$-ით აღვნიშნოთ Y-ის ყველა არაცარიელი ქვესიმრავლეების კლასი. ამბობენ, რომ მოცემულია **მრავალსახა ასახვა** $F:X\to Y$, თუკი $\forall x\in X$-თვის ცნობილია $F(x)\subset Y$ სიმრავლე ისეთი, რომ $cardF(x)\ge 1$. მაშასადამე, ყოველი მრავალსახა $F:X\to Y$ ასახვა შეიძლება გავაიგივოთ ჩვეულებრივ

ერთწერტილოვან $F : X \to \mathrm{P}(Y)$ ასახვასთან. ამრიგად მრავალსახა ასახვების კლასი მოიცავს ერთწერტილოვანი ასახვების კლასსაც.

ვთქვათ, $A \subseteq X$, მაშინ $F(A) = \bigcup_{a \in A} F(a)$ სიმრავლეს ეწოდება A **სიმრავლის F-ით ანასახი.**

მრავალსახა $F : X \to Y$ ასახვის **გრაფიკს** ჩვეულებრივ უწოდებენ სიმრავლეს $G(F) = \{(x, y) \mid y \in F(x)\} \subset X \times Y$.

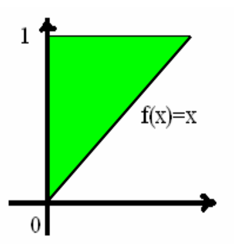
მაგალითი 2.2.1 განვიხილოთ შემდეგი ტიპის მრავალსახა ასახვები

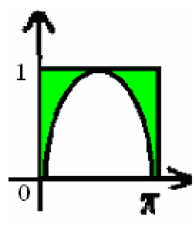
ა) $F_1 : [0;1] \to [0;1]$ ისეთია, რომ $F_1(x) = [x;1]$, $\forall x \in [0;1]$;

ბ) $F_2 : [0;\pi] \to \mathrm{P}(\mathbf{R})$ ისეთია, რომ $F_2(x) = [\sin x;1]$, $\forall x \in [0;\pi]$;

გ) $F_3 : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \to \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, სადაც $F_3(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \in \mathbf{N}$;

ქვემოთ წარმოდგენილია მრავალსახა F_1 და F_2-ასახვების გრაფიკ-ები





ა) ბ)

ნახ.2.2.1

მრავალსახა ასახვების სხვა ბევრი კონკრეტული მაგალითის აგება არის შესაძლებელი, როგორც ნამდვილ ან კომპლექსურ, ისე აბსტრაქტულ სიმრავლეებშიც.

სიმრავლეთა მცირე და სრული წინარე სახეები: ვთქვათ მოცემულია მრავალსახა $F: X \to \mathrm{P}(Y)$ ასახვა და $M \subset Y$ რაიმე სიმრავლეა. მრავალსახა ასახვების თეორიაში მნიშვნელოვანია სიმრავლეების შემდეგი ტიპები

$F_{\subset}^{-1}(M) = \{x \in X \mid F(x) \subset M\}$-ს ეწოდება M-ის **მცირე წინარე სახე** F-ასახვისას.

$F_{\cap}^{-1}(M) = \{x \in X \mid F(x) \cap M \neq \phi\}$-ს კი ეწოდება M-ის **სრული წინარე სახე** F-ასახვისას.

მოყვანილი განმარტებებიდან ცხადია, რომ სამართლიანია ჩართვა $F_{\subset}^{-1}(M) \subset F_{\cap}^{-1}(M)$.

თეორემა 2.2.1. თუ $F: X \to \mathrm{P}(Y)$ მრავალსახა ასახვაა, ხოლო $A \subset X$, $B \subset Y$ და $\{U_\alpha \mid U_\alpha \subset Y\}_{\alpha \in \Lambda}$ ნებისმიერად ფიქსირებული სიმრავლეებია, მაშინ

ა) $A \subset F_{\subset}^{-1}(F(A))$; გ) $X \setminus F_{\subset}^{-1}(B) = F_{\cap}^{-1}(Y \setminus B)$;

ბ) $F\left(F_{\subset}^{-1}(B)\right) \subset B$; დ) $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} F_{\subset}^{-1}(U_\alpha) \subset F_{\subset}^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right)$;

ე) $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_{\subset}^{-1}(U_\alpha) = F_{\subset}^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right)$.

დამტკიცება. ა)-ს დასამტკიცებლად ავიღოთ $\forall x \in A$ ელემენტი, მაშინ $F(x) \subset F(A) \equiv M$. ვინაიდან გვაქვს $F_{\subset}^{-1}(M) = \{\xi \in X \mid F(\xi) \subset M\} \Rightarrow$ $x \in F_{\subset}^{-1}(M) = F_{\subset}^{-1}(F(A))$, ამიტომ მივიღეთ დასამტკიცებელი ჩართვა.

ბ)-ჩართვის მისაღებად საჭიროა ჩვენ განვიხილოთ $\forall \eta \in F\left(F_{\subset}^{-1}(B)\right) \Leftrightarrow \eta \in \bigcup\limits_{\sigma \in F_{\subset}^{-1}(B)} F(\sigma) \Rightarrow \ \exists \sigma_0 \in F_{\subset}^{-1}(B)$ ისეთი, რომ $\eta \in F(\sigma_0)$.

ვინაიდან $\sigma_0 \in F_{\subset}^{-1}(B) \Leftrightarrow F(\sigma_0) \subset B$, და $\eta \in F(\sigma_0) \Rightarrow \eta \in B$.

გ)-ში დასარწმუნებლად ავიღოთ $\forall x \in X \setminus F_{\subset}^{-1}(B) \Leftrightarrow x \notin F_{\subset}^{-1}(B)$ $\Leftrightarrow F(x) \not\subset B \Leftrightarrow F(x) \cap (Y \setminus B) \neq \phi \Leftrightarrow x \in F_{\cap}^{-1}(Y \setminus B)$.

დ)-ს მისაღებად განვიხილოთ $\forall x \in \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} F_{\subset}^{-1}(U_\alpha) \Leftrightarrow \exists \alpha_0 \in \Lambda$ ისეთი, რომ $x \in F_{\subset}^{-1}(U_{\alpha_0}) \Leftrightarrow F(x) \subset U_{\alpha_0} \Rightarrow F(x) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \Leftrightarrow x \in F_{\subset}^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right)$.

ე)-ს საჩვენებლად ავიღოთ $\forall x \in F_{\subset}^{-1}\left(\bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha\right) \Leftrightarrow F(x) \subset \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F(x) \subset U_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$ -თვის $\Leftrightarrow x \in F_{\subset}^{-1}(U_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda$ -თვის $\Leftrightarrow$

$x \in \bigcap\limits_{\alpha \in \Lambda} F_{\subset}^{-1}(U_\alpha)$. ■

თეორემა 2.2.2 თუ $F : X \to \mathrm{P}(Y)$ მრავალსახა ასახვაა, ხოლო $A \subset X$, $B \subset Y$ და $\{U_\alpha \mid U_\alpha \subset Y\}_{\alpha \in \Lambda}$ რაიმე სიმრავლეებია, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

ა) $A \subset F_{\cap}^{-1}(F(A))$; ბ) $B \cap F(X) \subset F\left(F_{\cap}^{-1}(B)\right)$;

გ) $X \setminus F_{\cap}^{-1}(B) = F_{\subset}^{-1}(Y \setminus B)$; დ) $F_{\cap}^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} F_{\cap}^{-1}(U_\alpha)$;

ე) $F_{\cap}^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_{\cap}^{-1}(U_\alpha)$.

დამტკიცება. ა)-ჩართვის დასამტკიცებლად უნდა განვიხილოთ $\forall x \in A \Rightarrow F(x) \subset F(A) \Rightarrow F(x) \cap F(A) \neq \phi \Leftrightarrow x \in F_{\cap}^{-1}(F(A))$.

ბ)-ს საჩვენებლად ავიღოთ $\forall y \in B \cap F(X) \Leftrightarrow y \in F(X) \wedge y \in B$. რადგან $y \in F(X) \Leftrightarrow \exists x_0 \in X$ ისეთი, რომ $y \in F(x_0)$. მაშასადამე, $y \in (F(x_0) \cap B) \neq \phi$, ე.ი. $x_0 \in F_{\cap}^{-1}(B)$. აქედან ცხადია, რომ $y \in F(x_0) \subset F\left(F_{\cap}^{-1}(B)\right)$.

გ)-ტოლობაში დასარწმუნებლად საჭიროა განვიხილოთ $\forall x \in \left(X \setminus F_{\cap}^{-1}(B)\right) \Leftrightarrow x \notin F_{\cap}^{-1}(B) \Leftrightarrow F(x) \cap B = \phi \Leftrightarrow F(x) \subset Y \setminus B \Leftrightarrow x \in F_{\subset}^{-1}(Y \setminus B)$.

დ)-თვის უნდა ავიღოთ $\forall x \in F_{\cap}^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha\right) \Leftrightarrow F(x) \cap \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \neq \phi \Leftrightarrow$ $\exists \alpha_0 \in \Lambda$ ისეთი, რომ $F(x) \cap U_{\alpha_0} \neq \phi \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} F_{\cap}^{-1}(U_\alpha)$.

ე)-თვის განვიხილოთ $\forall x \in F_{\cap}^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha\right) \Leftrightarrow F(x) \cap \bigcap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \neq \phi \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) \cap U_\alpha \neq \phi$, $\forall \alpha \in \Lambda$ -თვის $\Leftrightarrow x \in F_{\cap}^{-1}(U_\alpha)$, $\forall \alpha \in \Lambda$ -თვის $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_{\cap}^{-1}(U_\alpha)$. ■

ვთქვათ მოცემულია მრავალსახა $F_1; F_2 : X \to \mathrm{P}(Y)$ ასახვები, მაშინ $(F_1 \cup F_2) : X \to \mathrm{P}(Y)$ მრავალსახა ასახვას განმარტებულს ტოლო-

ბით $(F_1 \cup F_2)(x) = F_1(x) \cup F_2(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, ეწოდება F_1 და F_2-ის **გაერთიანება**.

თუკი $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ შესაძლებელია განიმარტოს მრავალსახა $(F_1 \cap F_2): X \to \mathrm{P}(Y)$ ასახვაც, რომელსაც F_1 და F_2-ის **თანაკვეთას** უწოდებენ და $(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$.

თეორემა 2.2.3. თუ $F_1; F_2 : X \to \mathrm{P}(Y)$ ფიქსირებული მრავალსახა ასახვებია, ხოლო $B \subset Y$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\text{ა) } (F_1 \cup F_2)^{-1}_{\subset}(B) = F^{-1}_{1\subset}(B) \cap F^{-1}_{2\subset}(B);$$

$$\text{ბ) } F^{-1}_{1\subset}(B) \cap F^{-1}_{2\subset}(B) \subset (F_1 \cap F_2)^{-1}_{\subset}(B).$$

დამტკიცება. ა)-ტოლობის მისაღებად ჩვენ უნდა ავიღოთ $\forall x \in \left(F_1 \cup F_2\right)^{-1}_{\subset}(B) \Leftrightarrow \left(F_1 \cup F_2\right)(x) \subset B \Leftrightarrow (F_1(x) \subset B) \wedge (F_2(x) \subset B) \Leftrightarrow (x \in F^{-1}_{1\subset}(B)) \wedge$ $\wedge (x \in F^{-1}_{2\subset}(B)) \Leftrightarrow x \in \left(F^{-1}_{1\subset}(B) \cap F^{-1}_{2\subset}(B)\right)$.

ბ)-ჩართვის დასადგენად განვიხილოთ $\forall x \in \left(F^{-1}_{1\subset}(B) \cap F^{-1}_{2\subset}(B)\right) \Leftrightarrow$ $(x \in F^{-1}_{1\subset}(B)) \wedge (x \in F^{-1}_{2\subset}(B)) \Leftrightarrow (F_1(x) \subset B) \wedge (F_2(x) \subset B)$. იმის გამო, რომ $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \phi$, $\forall x \in X$ -თვის, ცხადია სამართლიანია ეკვივალენცია $F_1(x) \cap F_2(x) \subset B \Leftrightarrow x \in (F_1 \cap F_2)^{-1}_{\subset}(B)$. (აქვე შევნიშნოთ, რომ ჩართვიდან $F_1(x) \cap F_2(x) \subset B$ საზოგადოდ არ გამომდინარეობს $F_1(x) \subset B$ $\wedge$ $F_2(x) \subset B$). ■

თეორემა 2.2.4. თუ $F_1;F_2 : X \to \mathrm{P}(Y)$ ფიქსირებული მრავალსახა ასახვებია, ხოლო $B \subset Y$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ თანაფარდობებს:

$$\text{ა)}\ (F_1 \cup F_2)^{-1}_{\cap}(B) = F^{-1}_{1\cap}(B) \cup F^{-1}_{2\cap}(B)\,;$$

$$\text{ბ)}\ (F_1 \cap F_2)^{-1}_{\cap}(B) \subset F^{-1}_{1\cap}(B) \cap F^{-1}_{2\cap}(B)\,.$$

დამტკიცება. ა)-ტოლობის დასამტკიცებლად უნდა განვიხილოთ

$$\forall x \in (F_1 \cup F_2)^{-1}_{\cap}(B) \Leftrightarrow \big(F_1 \cup F_2\big)(x) \cap B \neq \phi \Leftrightarrow \phi \neq \big(F_1 \cup F_2\big)(x) \cap B =$$

$$= (F_1(x) \cap B) \cup (F_2(x) \cap B) \Leftrightarrow (F_1(x) \cap B \neq \phi) \vee (F_2(x) \cap B \neq \phi) \Leftrightarrow (x \in F^{-1}_{1\cap}(B)) \vee$$
$$\vee (x \in F^{-1}_{2\cap}(B)) \Leftrightarrow x \in (F^{-1}_{1\cap}(B) \cup F^{-1}_{2\cap}(B))\,.$$

ბ)-ჩართვის სამართლიანობის დასადგენად ჩვენ ავიღოთ

$$\forall x \in \big(F_1 \cap F_2\big)^{-1}_{\cap}(B) \Leftrightarrow \big(F_1 \cap F_2\big)(x) \cap B \neq \phi \Leftrightarrow \phi \neq \big(F_1(x) \cap F_2(x)\big) \cap B = (F_1(x) \cap B) \cap$$

$$\cap (F_2(x) \cap B) \Rightarrow (F_1(x) \cap B \neq \phi) \wedge (F_2(x) \cap B \neq \phi) \Leftrightarrow (x \in F^{-1}_{1\cap}(B)) \wedge (x \in F^{-1}_{2\cap}(B)) \Leftrightarrow$$

$$x \in (F^{-1}_{1\cap}(B) \cap F^{-1}_{2\cap}(B))\,. \blacksquare$$

ვთქვათ X, Y, Z ფიქსირებული სიმრავლეები, ხოლო $F_1 : X \to \mathrm{P}(Y)$ და $F_2 : Y \to \mathrm{P}(Z)$ რაიმე მრავალსახა ასახვებია. მრავალსახა ასახვას

$$F_2 \circ F_1 : X \to \mathrm{P}(Z)$$

განმარტებულს ტოლობით: $\big(F_2 \circ F_1\big)(x) = F_2\big(F_1(x)\big)$, $\forall x \in X$ -თვის, ეწოდება F_2 **-ის კომპოზიცია** F_1 **-ზე.**

მრავალსახა ასახვების კომპოზიციისათვის სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 2.2.5. ვთქვათ $F_1 : X \to \mathrm{P}(Y)$ და $F_2 : Y \to \mathrm{P}(K)$ მრავალსახა ასახვების რაიმე წყვილია, ხოლო $C \subset K$, მაშინ

$$\text{ა) } (F_2 \circ F_1)^{-1}_{\subset}(C) = F^{-1}_{1\subset}\left(F^{-1}_{2\subset}(C)\right);$$

$$\text{ბ) } (F_2 \circ F_1)^{-1}_{\cap}(C) = F^{-1}_{1\cap}\left(F^{-1}_{2\cap}(C)\right)$$

დამტკიცება. ა)-ტოლობის დასადგენად ჩვეულებრივ უნდა განვიხილოთ $\forall x \in (F_2 \circ F_1)^{-1}_{\subset}(C) \Leftrightarrow (F_2 \circ F_1)(x) \subset C \Leftrightarrow F_2(F_1(x)) \subset C$. ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგი სახის ეკვივალენციას: $F_2(F_1(x)) \subset C \Leftrightarrow F_1(x) \subset F^{-1}_{2\subset}(C)$. თავდაპირველად ვაჩვენოთ იმპლიკაცია: $F_2(F_1(x)) \subset C \Rightarrow F_1(x) \subset F^{-1}_{2\subset}(C)$. მართლაც, ავიღოთ $\forall \eta \in F_1(x) \Rightarrow F_2(\eta) \subset$ $\subset F_2(F_1(x)) \subset C \Rightarrow F_2(\eta) \subset C \Leftrightarrow \eta \in F^{-1}_{2\subset}(C)$.

შებრუნებული იმპლიკაციის: $F_1(x) \subset F^{-1}_{2\subset}(C) \Rightarrow F_2(F_1(x)) \subset C$ დასამტკიცებლად საჭიროა შევნიშნოთ, რომ $F_2(F_1(x)) \subset F_2\left(F^{-1}_{2\subset}(C)\right) =$ $= F_2(\{\xi \mid F_2(\xi) \subset C\}) = \bigcup\limits_{\xi \in F^{-1}_{2\subset}(C)} F_2(\xi) \subset C$. ამრიგად სასურველი ეკვივალენცია

$F_2(F_1(x)) \subset C \Leftrightarrow F_1(x) \subset F^{-1}_{2\subset}(C)$ დამტკიცებულია. დასასრულ ცხადია, რომ $F_1(x) \subset F^{-1}_{2\subset}(C) \Leftrightarrow x \in F^{-1}_{1\subset}\left(F^{-1}_{2\subset}(C)\right)$.

ბ)-ს დასამტკიცებლად უნდა ავიღოთ $\forall x \in (F_2 \circ F_1)^{-1}_{\cap}(C) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (F_2 \circ F_1)(x) \cap C \neq \phi \Leftrightarrow F_2(F_1(x)) \cap C \neq \phi$. თავიდან აუცილებელია ვაჩვენოთ, რომ ადგილი აქვს ეკვივალენციას: $\phi \neq F_2(F_1(x)) \cap C \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F_1(x) \cap F^{-1}_{2\cap}(C) \neq \phi$. დავამტკიცოთ $F_2(F_1(x)) \cap C \neq \phi \Rightarrow F_1(x) \cap F^{-1}_{2\cap}(C) \neq \phi$

იმპლიკაცია. განვიხილოთ $F_{2\cap}^{-1}(C)=\{\xi \mid F_2(\xi)\cap C\neq\phi\}$ სიმრავლე, მაშინ ცხადია, რომ ადგილი აქვს $F_1(x)\cap F_{2\cap}^{-1}(C)\neq\phi$.

მეორეს მხრივ, თუ $F_1(x)\cap F_{2\cap}^{-1}(C)\neq\phi \Rightarrow \exists\xi\in F_1(x)\wedge\xi\in F_{2\cap}^{-1}(C)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\xi\in F_1(x))\wedge\ (F_2(\xi)\cap C\neq\phi)$. შევნიშნოთ, რომ $\xi\in F_1(x)\Rightarrow F_2(\xi)\subset$ $\subset F_2\big(F_1(x)\big)$. ამრიგად, $\phi\neq F_2(\xi)\cap C\subset F_2\big(F_1(x)\big)\cap C\Rightarrow F_2\big(F_1(x)\big)\cap C\neq\phi$. მაშასადამე, მივედით $F_1(x)\cap F_{2\cap}^{-1}(C)\neq\phi\Leftrightarrow x\in F_{1\cap}^{-1}\Big(F_{2\cap}^{-1}(C)\Big)$ ეკვივალენციამდე. ■

ამ პარაგრაფის დასასრულ ჩვენ განვმარტავთ მრავალსახა ასახვების დეკარტულ ნამრავლს. თუ მოცემულია $F_1:X\to\mathrm{P}(K)$ და $F_2:Y\to\mathrm{P}(L)$ მრავალსახა ასახვები, მაშინ

$$F_1\times F_2:X\times Y\to\mathrm{P}(K\times L)$$

ასახვას განმარტებულს $(F_1\times F_2)(x,y)=F_1(x)\times F_2(y)$ ტოლობით, ეწოდება F_1 და F_2 **მრავალსახა ასახვების დეკარტული ნამრავლი.**

თეორემა 2.2.6. ვთქვათ $F_1:X\to\mathrm{P}(K)$ და $F_2:X\to\mathrm{P}(L)$ მრავალსახა ასახვების რაიმე წყვილია, ხოლო $U\subset K$ და $V\subset L$, მაშინ $F_1\times F_2:X\to\mathrm{P}(K\times L)$ მრავალსახა ასახვისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

ა) $\big(F_1\times F_2\big)_{\subset}^{-1}\big(U\times V\big)=F_{1\subset}^{-1}(U)\cap F_{2\subset}^{-1}(V)$;

ბ) $\big(F_1\times F_2\big)_{\cap}^{-1}\big(U\times V\big)=F_{1\cap}^{-1}(U)\cap F_{2\cap}^{-1}(V)$.

დამტკიცება. ა)-ტოლობის დასამტკიცებლად საჭიროა ავიღოთ $\forall x \in \left(F_1 \times F_2\right)_{\subset}^{-1}\left(U \times V\right) \Leftrightarrow \left(F_1(x) \times F_2(x)\right) \subset U \times V \Leftrightarrow (F_1(x) \subset U) \wedge (F_2(x) \subset V) \Leftrightarrow$

$x \in F_{1\subset}^{-1}(U) \wedge x \in F_{2\subset}^{-1}(V) \Leftrightarrow x \in F_{1\subset}^{-1}(U) \cap F_{2\subset}^{-1}(V)$.

ბ): განვიხილოთ $\forall x \in \left(F_1 \times F_2\right)_{\cap}^{-1}\left(U \times V\right) \Leftrightarrow \phi \neq \left(F_1(x) \times F_2(x)\right) \cap (U \times V) =$

$= \left(F_1(x) \cap U\right) \times \left(F_2(x) \cap V\right) \Leftrightarrow (\phi \neq F_1(x) \cap U) \wedge (\phi \neq F_2(x) \cap V) \Leftrightarrow$

$x \in \left(F_{1\cap}^{-1}(U) \cap F_{2\cap}^{-1}(V)\right)$, ე.ი. რეზულტატის სამართლიანობა დამტკიცებულია. ■

სავარჯიშოები

II.2.1. ვთქვათ მრავალსახა ასახვა $F:\mathbf{R} \to \mathrm{P}\,(\mathbf{R})$ განმარტებულია $F(x) = [(x-1);(x+1)]$ -ით. იპოვეთ $\Phi(x) = \dfrac{F(5) - F(3) \cdot F(2x+9)}{F(6)}$ -მრავალსახა ასახვისას $A = \{-3; 4; 8\}$ -ს ანასახი.

II.2.2. იპოვეთ x-ის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელიც აკმაყოფილებს ჩართვას $f(x) \in F(x)$, სადაც $f(x) = 8x$ -წერტილოვანი, ხოლო $F(x) = [4x+5; 7x+9]$ -მრავალსახა ასახვაა, $x \in [2;+\infty[$ -ზე.

II.2.3. თუ მოცემული გვაქვს მრავალსახა ასახვების წყვილი $F_1(n) = \{0;1;2\} \setminus \{n\}$, სადაც $n = \overline{0;2}$, ხოლო $F_2(y) = [3y-1; 7y+8]$, იპოვეთ $\dfrac{(F_2 \circ F_1)(2) - (F_2 \circ F_1)(1)}{(F_2 \circ F_1)(0)}$ -ს მნიშვნელობა?

II.2.4. ვთქვათ $X = \{m; n; p; q; r; s\}$ და $Y = \{a; b; c; d; e; f; g; h; i\}$. თუ მრავალსახა $F: X \to Y$ ასახვას განვმარტავთ: $F(m) = \{c; d\}$, $F(n) = \{a; c\}$,

$F(p)=\{a;c;d\}$, $F(q)=\{e;g;h\}$, $F(r)=\{h;i\}$, $F(s)=\{d;h\}$ -პირობებით, მაშ-ინ $M=\{a;b;c\}$-თვის რას უდრის $F_{\subset}^{-1}(M)$ და $F_{\cap}^{-1}(M)$ სიმრავლეები?

II.2.5. ცნობილია, რომ მრავალსახა ასახვა $F:\mathbf{N}\to \mathrm{P}\,(\mathbf{R}^2)$ აკმაყოფი-ლებს ქვემოთ მოყვანილ პირობებს:

$$F(1)=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}\cup\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1; 2\le y\le 3\};$$

$$F(2)=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2; 1\le y\le 2\};$$

$$F(3)=\{(x,y)\,|\,2\le x\le 3; 0\le y\le 1\}\cup\{(x,y)\,|\,2\le x\le 3; 2\le y\le 3\};$$

....

მათემატიკური ინდუქციის საფუძველზე ჩაწერეთ $F(n)$-ის ზოგადი ფორმულა, სადაც $n\in\mathbf{N}$.

II.2.6. $\mathbf{R}^n$-ის რაიმე $A=\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ და $B=\{b_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ ქვესიმრავლეების მინკოვსკის ჯამი ეწოდება $C=\{c\,|\,c=a_\alpha+b_\beta\}_{\substack{\alpha\in\Lambda\\ \beta\in\mathrm{B}}}$ სიმრავლეს. ვთქვათ მრავალსახა ასახვა $F:\{a;b;c\}\to \mathrm{P}(\mathrm{Z}_4)$ განმარტებულია $F(a)=\{0;1\}$, $F(b)=\{2\}$ და $F(c)=\{1;2\}$ პირობებით. გამოთვალეთ მინკოვსკის ჯამი $F(a)+F(b)-F(c)$.

II.2.7. განვიხილოთ მრავალსახა ასახვა $F(n)=\{x\,|\,\sin nx=0\}$, სადაც $n\in\mathbf{N}$. რას უდრის $card\big(F(4)\cap[-100;200]\big)$.

II.2.8. თუ მრავალსახა $F:\mathbf{N}\to \mathrm{P}\,(\mathbf{R}^2)$ ასახვას განვმარტავთ შემდე-გი პირობით: $F(n)=\left\{(x,y)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le n\right\}$, მაშინ აჩვენეთ, რომ $\forall n_1<n_2$ -თვის ადგილი აქვს ჩართვას: $F_{\subset}^{-1}\big(F(n_1)\big)\subset F_{\subset}^{-1}\big(F(n_2)\big)$.

II.2.9. თუ $A=[-8;3]$, ხოლო მრავალსახა ასახვა $F(x)=[-x^2+3x-6;x]$ მაშინ რას უდრის $F_{\subset}^{-1}(A)$ და $F_{\cap}^{-1}(A)$.

II.2.10. ვთქვათ $F(n)=[4n;4n^2+2n]$-მრავალსახა ასახვაა, სადაც $n\in\mathbf{N}$. გამოთვალეთ ალბათობა $U=F(1)\cup F(2)$-ხდომილობისა, თუ ცნობილია, რომ ალბათობა $P(F(n))=\dfrac{1}{2n(2n-1)}$, $\forall n\in\mathbf{N}$-თვის.

§2.3. არამკაფიო ლოგიკის ფორმირება. არამკაფიო სიმრავლეები და მათი ასახვები

ბუნებაში მრავალი ფიზიკური პროცესის ადეკვატური მათემატიკური ფორმულირება მკაცრად განსაზღვრული პარამეტრებით შეუძლებელია. რის გამოც, ძალზედ ეფექტურია ე.წ. არამკაფიო მათემატიკური მოდელების გამოყენება. სხვადასხვა სახის არამკაფიო მონაცემთა დამუშავებისას და ბაზების შექმნისას მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს არამკაფიო სიმრავლის ცნებას [9; 11; 18; 19; 26; 28; 29].

არამკაფიო მათემატიკა თანამედროვე კომპიუტერულ და საინჟინრო მეცნიერებებში ეფექტურად გამოყენებად და სწრაფად განვითარებად მიმართულებას წარმოადგენს, რომლის ფუძემდებლად საყოველთაოდ აღიარებულია ლ. ზადე [28; 29]. არამკაფიო ანალიზის აღმოცენება ეფუძნება იმ ამოცანების შესწავლას, რომლებშიც შეუძლებელია მოცემულობის მკაფიოდ (მკაცრად) ჩაწერა პარამეტრების (რიცხვითი ან არარიცხვითი) მნიშვნელობების მეშვეობით. ასეთი ტიპის ამოცანები შეიძლება შევადაროთ შემდეგი ხასიათის მოქმედებას: თუ დავაკვირდებით სილამაზის კონკურსზე ჟიურის მუშაობას შევნიშნავთ, რომ ცალკეული კონკურსანტის შეფასება (ას-

ახული ქულებით) არის ჟიურის ცალკეული წევრის მიერ სუბიექ-ტური შეხედულებებით განპირობებული. მაშასადამე, არამკაფიოა ჟიურის ცალკეული წევრის მიერ კონკრეტული კონკურსანტისა-თვის დაწერილი ქულა (რომელიც საზოგადოდ არაა შემთხვევითი ხასიათის). თუ აღნიშნულ კონკურსს შევადარებთ ტესტურ გამო-ცდას, სადაც ყოველი სწორად ამოხსნილი ამოცანა ფასდება 1-ქულით, ხოლო მცდარი პასუხი-0-ით, მაშინ ნათელია სილამაზის კონკურსისაგან განსხვავება. კერძოდ, სტუდენტის შეფასება არაა დამოკიდებული ლექტორზე (მაშინაც კი თუკი სტუდენტმა რომელ-იმე ამოცანის პასუხი შემთხვევით დააფიქსირა).

ვთქვათ X ნებისმიერი არაცარიელი სიმრავლეა. X-ის **არამკა-ფიო ქვესიმრავლე** ეწოდება წყვილების სიმრავლეს $\tilde{A}=\{\langle \mu_A(x)/x \rangle\}$, სადაც $x \in X$, $\mu_A(x) \in [0;1]$. აღსანიშნავია, რომ ფუნქცია $\mu_A : X \to [0;1]$ იწოდება $\tilde{A}$ არამკაფიო სიმრავლის **მიკუთვნების ფუნქციად**, ხოლო X-ს ეწოდება **უნივერსალური სიმრავლე**. არამკაფიო სიმრავლეებს თავზე ტალღიანი დიდი ლათინური ასოებით აღვნიშნავთ. ყოველი $x \in X$-თვის $\mu_A(x)$-რიცხვს ეწოდება x **-ის** $\tilde{A}$ **-თან მიკუთვნების მაჩვ-ენებელი სიდიდე.** შევთანხმდეთ, რომ $\langle \mu_A(x)/x \rangle$ ელემენტები, რომე-ლთათვისაც $\mu_A(x)=0$ არ მიეკუთვნებიან $\tilde{A}$-ს. $\tilde{A}$ არამკაფიო სიმრ-ავლის **საყრდენი** ეწოდება X-ის იმ ქვესიმრავლეს $A=\{x \mid \mu_A(x)>0\}$.

არამკაფიო ერთწერტლოვნება (წერტილი) ეწოდება ყოველგვარ

არამკაფიო სიმრავლეს, რომლის საყრდენის სიმძლავრე 1-ის ტოლ-ია.

ზემოაღნიშნულის გასააზრებლად განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 2.3.1 1) ნატურალურ რიცხვთა **N** სიმრავლის "*ძალიან მცირე*" რიცხვების არამკაფიო ქვესიმრავლე შეიძლება იყოს შემდეგი სახის: $\tilde{A} = \{\langle 1/1\rangle, \langle 0{,}8/2\rangle, \langle 0{,}7/3\rangle, \langle 0{,}6/4\rangle, \langle 0{,}5/5\rangle, \langle 0{,}3/6\rangle\}$, ამასთან $\tilde{A}$-ს საყრდენი არის მკაფიო (ჩვეულებრივი) $A = \{1;2;3;4;5;6\}$ სიმრავლე.

2) დავუშვათ, რომ $X =$ {წიგნი, ბურთი, ტელევიზორი, ველოსიპედი}, მაშინ არამკაფიო სიმრავლე $\tilde{A}$-„*გიორგის მოსაწონი ნივთი*" შეიძლება იყოს $\tilde{A}$={<1/წიგნი>, <0,8/ველოსიპედი>, <0,4/ტელევიზორი>, <0,3/ბურთი>}.

ცხადია, რომ მიკუთვნების ფუნქცია, საზოგადოდ, ყოველი არამკაფიო სიმრავლისათვის განისაზღვრება სუბიექტურად. ზემოთ აღწერილ „*გიორგის მოსაწონი ნივთის*" მაგალითში მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობები ასახავს ვინმე გიორგის პირად შეხედულებას, რომელსაც შეიძლება სხვა ადამიანი არ დაეთანხმოს და მან იმავე ნივთებისათვის სხვა სახის არამკაფიო სიმრავლე შეადგინოს.

არამკაფიო გამონათქვამი ეწოდება წინადადებას, რომლის მიმართაც შეიძლება ვიმსჯელოთ მისი **ჭეშმარიტების ან სიყალბის დოზის** შესახებ მოცემულ მომენტში (ე.ი. შევაფასოთ რამდენად ახლოსაა აბსოლუტურ ჭეშმარიტებასთან ან სიცრუესთან ეს წინა-

დადება). ყოველი არამკაფიო გამონათქვამის ჭეშმარიტების ან სიცრუის დოზის მნიშვნელობა მოთავსებულია [0; 1] სეგმენტში, ამასთან 0 და 1 წარმოადგენს ზღვრულ მნიშვნელობებს და ემთხვევა §1.1-ში განმარტებული („მკაფიო”) გამონათქვამების მნიშვნელობებს. არამკაფიო გამონათქვამებს, რომელთა ჭეშმარიტების და სიცრუის დოზები ერთმანეთის ტოლია (ანუ უდრის 0,5), ეწოდებათ **ინდიფერენტული გამონათქვამები** (ისინი იმდენადვე არიან ჭეშმარიტი რამდენადაც მცდარი).

მაგალითი 2.3.2 არამკაფიო გამონათქვამებია „*მხხალი სასარგებლო ხილია*”, „*გიორგი კარგად სწავლობს*” და სხვ.

არამკაფიო გამონათქვამის ჭეშმარიტება საზოგადოდ წარმოადგენს სუბიექტურ მახასიათებელს და დამოკიდებულია მრავალ ფაქტორზე. პირველი არამკაფიო გამონათქვამის ჭეშმარიტების დოზის მნიშვნელობა დავუშვათ 0,3-ის ტოლად, მეორე გამონათქვამის ჭეშმარიტების დოზა განისაზღვრება გიორგის ცოდნით და გამოცდებზე მიღებული ნიშნებით, რომელიც მისი მეგობრების შეფასებით 0,9-ის ტოლია. ამრიგად ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ [*მხხალი სასარგებლო ხილია*]=0,3 და [*გიორგი კარგად სწავლობს*]=0,9.

არამკაფიო გამონათქვამებს ისევე, როგორც არამკაფიო სიმრავლეებს აღვნიშნავთ $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ და ა.შ. სიმბოლოებით. აღსანიშნავია ისიც, რომ იმ არამკაფიო გამონათქვამებს, რომლებიც მარტივი არამკაფიო გამონათქვამებიდან მიიღება ლოგიკური ოპერაციების (იხ. §1.1-ში განმარტებული უარყოფის, კონიუნქციის, დიზიუნქციის, იმ-

პლიკაციის ან ეკვივალენციის) სასრული კომბინაციებით, **შედგენი-ლს** უწოდებენ.

$\tilde{A}$ **არამკაფიო გამონათქვამის უარყოფა** აღინიშნება $\neg\tilde{A}$-ით, რომლის ჭეშმარიტების დონე განისაზღვრება ტოლობით: $[\neg\tilde{A}]=1-[\tilde{A}]$. აქედან ცხადია, რომ არამკაფიო $\neg\tilde{A}$ გამონათქვამის სიც-რუის დონე ემთხვევა $\tilde{A}$-ის ჭეშმარიტების დონეს.

აღნიშნულის გასააზრებლად განვიხილოთ

მაგალითი 2.3.3 არამკაფიო გამონათქვამის $\tilde{A}$=„2° C *დაბალი ტემპერატურაა*" ჭეშმარიტების დონად მივიღოთ $[\tilde{A}]=0{,}89$, მაშინ არამკაფიო გამონათქვამის $\neg\tilde{A}$=„2° C *დაბალი ტემპერატურა არაა*" ჭეშმარიტების დონე ტოლი იქნება $[\neg\tilde{A}]=1-[\tilde{A}]=1-0{,}89=0{,}11$.

$\tilde{A}$ **და** $\tilde{B}$ **არამკაფიო გამონათქვამების კონიუნქცია** აღინიშნება $\tilde{A}\wedge\tilde{B}$-ით და მისი ჭეშმარიტების დონეა $[\tilde{A}\wedge\tilde{B}]=\min([\tilde{A}];[\tilde{B}])$.

$\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ **არამკაფიო გამონათქვამების დიზიუნქცია** აღინიშნება $\tilde{A}\vee\tilde{B}$-ით, რომლის ჭეშმარიტების დონეა: $[\tilde{A}\vee\tilde{B}]=\max([\tilde{A}];[\tilde{B}])$.

არამკაფიო იმპლიკაცია აღინიშნება $\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}$-ით, ამასთან მისი ჭეშმარიტების დონე ტოლია: $[\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}]=\max(1-[\tilde{A}];[\tilde{B}])$.

არამკაფიო გამონათქვამების ეკვივალენცია აღინიშნება $\tilde{A}\Leftrightarrow\tilde{B}$, ჭეშმარიტების დონით $[\tilde{A}\Leftrightarrow\tilde{B}]=\min(\max(1-[\tilde{A}];[\tilde{B}]);\max([\tilde{A}];1-[\tilde{B}]))$.

ზემოთ მოცემული განმარტებებიდან, ცხადია, რომ თუ $\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ გამონათქვამების ჭეშმარიტების დონე იღებს მნიშვნელობას 0 ან 1, მაშინ ჩვენ საქმე გვაქვს მკაფიო გამონათქვამებთან (სწორედ

ამ მიზეზით ფიგურირებს I-თავის სათაურში სიტყვა "ორმნიშვნელობიანი").

$\tilde{A}$ **და** $\tilde{B}$ **არამკაფიო გამონათქვამებს ეწოდება არამკაფიოდ ურთიერთმახლობელი,** თუ $[\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{B}] > 0{,}5$. იმ შემთხვევაში, როცა $[\tilde{A} \Leftrightarrow \tilde{B}] = 0{,}5$ ამბობენ, რომ $\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არიან არამკაფიოდ ურთიერთინდიფერენტულები.

შედგენილ არამკაფიო გამონათქვამებში ლოგიკური ოპერაციების შესრულების მიმდევრობა განისაზღვრება ფრჩხილების მდებარეობით, ხოლო მათი არ არსებობის შემთხვევაში თავდაპირველად სრულდება უარყოფის ოპერაცია, შემდეგ კონიუნქცია, დიზიუნქცია და დასარულ იმპლიკაცია და ეკვივალენცია.

მაგალითი 2.3.4 ვიპოვოთ ჭეშმარიტების დოზა შემდეგი არამკაფიო გამონათქვამისა: $\tilde{E} = \left(\tilde{A} \wedge \neg\tilde{B} \vee \neg\tilde{C} \wedge \tilde{B}\right) \Rightarrow \neg\left(\tilde{A} \wedge \tilde{D}\right)$, თუ ცნობილია, რომ $[\tilde{A}] = 0{,}6$; $[\tilde{B}] = 0{,}2$; $[\tilde{C}] = 0{,}9$ და $[\tilde{D}] = 0{,}4$. ზემოაღნიშ-ნულის საფუძველზე $[\tilde{E}] = \max\left(1 - [\tilde{A} \wedge \neg\tilde{B} \vee \neg\tilde{C} \vee \tilde{B}]; [\neg(\tilde{A} \wedge \tilde{D})]\right) =$

$$= \max\left(1 - \max\left\{[\tilde{A} \wedge \neg\tilde{B}]; [\neg\tilde{C} \vee \tilde{B}]\right\}; \ 1\text{-}[(\tilde{A} \wedge \tilde{D})]\right) = \max\left(1 - \max\left\{\min([\tilde{A}];\right.\right.$$
$$\left.\left. 1 - [\tilde{B}]); \ \max(1 - [\tilde{C}]; [\tilde{B}])\right\}; \ \left\{1 - \min([\tilde{A}]; [\tilde{D}])\right\}\right) = \max\left(1 - \max\left\{\min(0{,}6; 0{,}8);\right.\right.$$
$$\left.\left.\max(0{,}1; \ 0{,}2)\right\}; \ \left\{1 - \min(0{,}6; \ 0{,}4)\right\}\right) = 0{,}6 \ .$$

ოპერაციები არამკაფიო სიმრავლეებზე. ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაიმე ფიქსირებული უნივერსალური X სიმრავლის არამკაფიო $\tilde{A} = \{< \mu_A(x)/x > | \, x \in X\}$ და $\tilde{B} = \{< \mu_B(x)/x > | \, x \in X\}$ სიმრავლეების წყვილი, მაშინ ბუნებრივია, რომ ვუწოდოთ $\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არამკაფიო სიმრავლეებს **ტოლი,** თუკი $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall x \in X$ -თვის და დავწერთ

$\tilde{A} = \tilde{B}$. ამას გარდა, არამკაფიო $\tilde{A}$ სიმრავლეს ეწოდება არამკაფიო $\tilde{B}$-ის **ქვესიმრავლე** და დავწერთ $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, როდესაც $\mu_A(x) < \mu_B(x)$, $\forall x \in X$ -თვის.

$\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არამკაფიო სიმრავლეების **გაერთიანება** ეწოდება $\tilde{U} \equiv \tilde{A} \cup \tilde{B} = \{< \mu_U(x)/x >| x \in X\}$ არამკაფიო სიმრავლეს, რომლის მიკუთვნების ფუნქციაა $\mu_U(x) = \max\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$;

$\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არამკაფიო სიმრავლეების **თანაკვეთა** ეწოდება $\tilde{I} \equiv \tilde{A} \cap \tilde{B} = \{< \mu_I(x)/x >| x \in X\}$ არამკაფიო სიმრავლეს, მიკუთვნების ფუნქციით $\mu_I(x) = \min\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}$;

$\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არამკაფიო სიმრავლეების **სხვაობა** ეწოდება $\tilde{D} \equiv \tilde{A} \setminus \tilde{B} = \{< \mu_D(x)/x >| x \in X\}$ არამკაფიო სიმრავლეს, სადაც $\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x);\ 1 - \mu_B(x)\}$; საგულისხმოა, რომ $\tilde{A}$-ის **დამატებას** წარმოადგენს არამკაფიო სიმრავლე $\tilde{A}' = \left\{< \mu_{A'}(x)/x >| x \in X\right\}$, სადაც $\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

$\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არამკაფიო სიმრავლეების **სიმეტრიული სხვაობა** ეწოდება არამკაფიო სიმრავლეს $\tilde{D}_S \equiv \tilde{A} \Delta \tilde{B} = \left\{< \mu_{D_S}(x)/x >| x \in X\right\}$, რომლის მიკუთვნების ფუნქცია განისაზღვრება ფორმულით:

$\mu_{D_S}(x) = \max\{\min\{\mu_A(x);\ 1 - \mu_B(x)\};\ \min\{\mu_B(x);\ 1 - \mu_A(x)\}\}$.

მაგალითი 2.3.5 განვიხილოთ ხუთელემენტიანი უნივერსალური სიმრავლე $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ და მისი არამკაფიო ქვესიმრავლეები:

$\tilde{A} = \{< 0{,}2/x_1 >; < 0{,}3/x_4 >; < 0{,}6/x_5 >\}$; $\tilde{B} = \{< 0{,}1/x_2 >; < 0{,}37/x_3 >; < 0{,}8/x_5 >\}$.

ზემოთ მოყვანილი განმარტებების თანახმად გვექნება:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{< 0{,}2/x_1 >; < 0{,}1/x_2 >; < 0{,}37/x_3 >; < 0{,}3/x_4 >; < 0{,}8/x_5 >\};$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{ < 0{,}6/x_5 >\}; \tilde{A}' = \{< 0{,}8/x_1 >; < 1/x_2 >; < 1/x_3 >; < 0{,}7/x_4 >; < 0{,}4/x_5 >\};$$

$$\tilde{B}' = \{< 1/x_1 >; < 0{,}9/x_2 >; < 0{,}63/x_3 >; < 1/x_4 >; < 0{,}2/x_5 >\}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუ $\tilde{C} = \{< 0{,}25/x_1 >; < 0{,}5/x_4 >; < 0{,}86/x_5 >\}$ და $\tilde{E} = \{< 1/x_1 >; < 0{,}3/x_2 >; < 0{,}5/x_3 >; < 0{,}4/x_4 >; < 0{,}82/x_5 >\}$, მაშინ $\tilde{A} \subset \tilde{C}$ და $\tilde{B} \subset \tilde{E}$. ამასთანავე ცხადია, რომ

$\tilde{A} \Delta \tilde{B} = \{< 0{,}2/x_1 >; < 0{,}1/x_2 >; < 0{,}37/x_3 >; < 0{,}3/x_4 >; < 0{,}4/x_5 >\}$.

არამკაფიო სიმრავლეების ზემოთ მოყვანილ ოპერაციებზე დაყრდნობით იოლია შევნიშნოთ, რომ როცა $\tilde{A} \subset \tilde{B}$, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობებს $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B}$ და $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{A}$. $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\tilde{B}' \subset \tilde{A}'$. $\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \tilde{A} \cap \tilde{B}'$.

ალსანიშნავია, რომ არამკაფიო სიმრავლეების $\{\tilde{A}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ რაიმე ოჯახისათვის $\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \tilde{A}_\alpha$ წარმოადგენს არამკაფიო სიმრავლეს, რომლის მიკუთვნების ფუნქციაა $\bigvee\limits_{\alpha \in \Omega} \mu_\alpha \equiv \sup\{\mu_\alpha(x) \mid \alpha \in \Omega\}$, ხოლო $\bigcap\limits_{\alpha \in \Omega} \tilde{A}_\alpha$ -თვის მიკუთვნების ფუნქცია ტოლია $\bigwedge\limits_{\alpha \in \Omega} \mu_\alpha \equiv \inf\{\mu_\alpha(x) \mid \alpha \in \Omega\}$.

თეორემა 2.3.1. უნივერსალურ X სიმრავლეში არამკაფიო სიმრავლეებისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს:

ა) $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$;

ბ) $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$;

გ) $(\tilde{A} \cup \tilde{B})' = \tilde{A}' \cap \tilde{B}'$; დ) $(\tilde{A} \cap \tilde{B})' = \tilde{A}' \cup \tilde{B}'$.

დამტკიცება. თითოეული ტოლობის შემოწმება ანალოგიურია ქვემოთ ა)-თვის მოყვანილი მსჯელობებისა, რის გამოც ჩვენ მათ შემოწმებას ვანდობთ მკითხველს.

განვიხილოთ არამკაფიო სიმრავლეები $\tilde{D} = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C})$ და $\tilde{K} = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$. ვაჩვენოთ, რომ $\mu_D(x) = \mu_K(x)$, $\forall x \in X$ -თვის თუკი $\mu_D(x) = \min\{\mu_A(x); \max\{\mu_B(x); \mu_C(x)\}\}$, $\forall x \in X$ -თვის და $\mu_K(x) = \max\{\min\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}; \min\{\mu_A(x); \mu_C(x)\}\}$, $\forall x \in X$. ამ მიზნით ჩვენ სულ გვექნება განსახილველი მიკუთვნების ფუნქციათა 6-ვარიანტი:

1) თუ $\mu_A(x) \le \mu_B(x) \le \mu_C(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu_D(x) = \mu_A(x)$ და $\mu_K(x) = \mu_A(x)$. ამრიგად ამ შემთხვევაში ა)-სამართლიანია;

2) თუ $\mu_B(x) \le \mu_A(x) \le \mu_C(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu_D(x) = \mu_A(x)$ და $\mu_K(x) = \mu_A(x)$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ა)-სამართლიანია;

3) თუ $\mu_C(x) \le \mu_A(x) \le \mu_B(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu_D(x) = \mu_A(x)$ და $\mu_K(x) = \mu_A(x)$. ამრიგად ამ შემთხვევაში ა)-სამართლიანია;

4) თუ $\mu_C(x) \le \mu_B(x) \le \mu_A(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu_D(x) = \mu_B(x)$ და $\mu_K(x) = \mu_B(x)$. ამრიგად ამ შემთხვევაში ა)-სამართლიანია;

5) თუ $\mu_A(x) \le \mu_C(x) \le \mu_B(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu_D(x) = \mu_A(x)$ და $\mu_K(x) = \mu_A(x)$. ამრიგად, ამ შემთხვევაში ა)-სამართლიანია;

6) თუ $\mu_B(x) \le \mu_C(x) \le \mu_A(x)$, $\forall x \in X$ -თვის, მაშინ ცხადია, რომ $\mu_D(x) = \mu_C(x)$ და $\mu_K(x) = \mu_C(x)$. ამრიგად ამ შემთხვევაში ა)-სამართლიანია.

ზემოთ განხილული შემთხვევების გაერთიანების საფუძველზე ჩვენ დავასკვნით ა)-ს სამართლიანობას. ■

$\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ **არამკაფიო სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი** ეწოდება არამკაფიო სიმრავლეს $\tilde{A} \times \tilde{B} = \{< \mu_{A\times B}(z)/z >| \, z = (x, y) \in A \times B\}$, სადაც $\mu_{A\times B}(z) = \min\{\mu_A(x); \mu_B(y)\}$.

მაგალითი 2.3.6. ვთქვათ მოცემულია არამკაფიო სიმრავლეების წყვილი $\tilde{A} = \{< 0{,}2/a >; < 0{,}4/b >; < 0{,}9/c >\}$ და $\tilde{B} = \{< 0{,}3/m >; < 0{,}1/n >\}$, მაშინ არამკაფიო სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლის განმარტების საფუძველზე ჩვენ იოლად შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$\tilde{A} \times \tilde{B} = \{< 0{,}2/(a, m) >; < 0{,}1/(a, n) >; \; < 0{,}3/(b, m) >; < 0{,}1/(b, n) >;$

$< 0{,}3/(c, m) >; \; < 0{,}1/(c, n) >\}$.

შევნიშნოთ, რომ თუ $\tilde{A} = \{< \mu_A(x)/x >| \, x \in X\}$ რაიმე არამკაფიო სიმრავლეა, მაშინ არამკაფიო დეკარტული ნამრავლისათვის გვექნება $\tilde{A} \times X = X \times \tilde{A} = \tilde{A}$.

თეორემა 2.3.2. ვთქვათ მოცემულია $\tilde{A}=\{<\mu_A(x)/x>| x\in X\}$ და $\tilde{B}=\{<\mu_B(y)/y>| y\in Y\}$ არამკაფიო სიმრავლეების რაიმე წყვილი, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\left(\tilde{A}\times\tilde{B}\right)'=(\tilde{A}\times X)\bigcup(Y\times\tilde{B}) .$$

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, რომ

$\tilde{C}\equiv\left(\tilde{A}\times\tilde{B}\right)'=\{<\iota_C(x,y)/(x,y)>|(x,y)\in X\times Y\}$, სადაც

$\iota_C(x,y)=1-\min\{\mu_A(x);\ \mu_B(y)\}$, $\forall(x,y)\in X\times Y$ -თვის. ვინაიდან ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ

$\iota_C(x,y)=1-\min\{\mu_A(x);\ \mu_B(y)\}=\max\{[1-\mu_A(x)];\ [1-\mu_B(y)]\}=$

$=\max\{\min([1-\mu_A(x)];1);\ \min(1;\ [1-\mu_B(y)])\}$, ამიტომ მივიღეთ დასამტკიცებელი ტოლობის მარჯვენა მხარის მიკუთვნების ფუნქციის მნიშვნელობა. ■

არამკაფიო სიმრავლეების დინამიკური ყოფაქცევა: ვთქვათ $f: X\to Y$ წერტილოვანი ასახვაა, ხოლო $\tilde{A}=\{<\mu_A(x)/x>| x\in X\}$ წარმოადგენს ნებისმიერ არამკაფიო სიმრავლეს, მაშინ $f(\tilde{A})=\tilde{B}=\{<\lambda_B(y)/y>| y\in Y\}$ სიმრავლეს, სადაც $\lambda_B(y)=\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_A(x)\}$, ეწოდება $\tilde{A}$ **-ის** f **-ით ანასახი**.

აღსანიშნავია აგრეთვე, რომ თუ მოცემულია $f: X\to Y$ ასახვა და არამკაფიო $\tilde{U}=\{<\nu_U(y)>| y\in Y\}$ სიმრავლე, მაშინ $\tilde{U}$ **-ის წინარე სახე** f **-ასახვისას** ეწოდება $f^{-1}(\tilde{U})=\tilde{V}=\{<\eta_V(x)/x>| x\in X\}$-არამკა-

ფიო სიმრავლეს, მიკუთვნების ფუნქციით: $\eta_V(x) = \nu_U(f(x))$, $\forall x \in X$ -თვის.

მაგალითი 2.3.7. თუ $f : X \to Y$ ასახვა განმარტებულია $X = \{a; b; c; d\}$-სიმრავლეზე და მნიშვნელობებს იღებს $Y = \{m; n; p\}$-ში, ისეთნაირად, რომ $f(a) = f(d) = m$ და $f(b) = f(c) = n$, მაშინ არამკაფიო $\tilde{A} = \{< 0{,}1/a >; < 0{,}2/b >; < 0{,}3/c >; < 0{,}7/d >\}$ სიმრავლის ანასახი იქნება $f(\tilde{A}) = \{< 0{,}7/m >; < 0{,}3/n >\}$, ხოლო $\tilde{U} = \{< 0{,}1/m >; < 0{,}8/p >\}$ არამკაფიო სიმრავლის წინარე სახე კი $f^{-1}(\tilde{U}) = \{< 0{,}1/a >; < 0{,}1/d >\}$.

თეორემა 2.3.3. ვთქვათ $f : X \to Y$ წერტილოვანი ასახვაა, ხოლო $\tilde{A}, \tilde{B}$ წარმოადგენს Y-უნივერსალური სიმრავლის არამკაფიო ქვესიმრავლეების ნებისმიერ წყვილს, მაშინ

$$f^{-1}(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{A}) \cup f^{-1}(\tilde{B}) \quad \text{და} \quad f^{-1}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = f^{-1}(\tilde{A}) \cap f^{-1}(\tilde{B}).$$

დამტკიცება. თავდაპირველად მოვახდინოთ $\tilde{A}, \tilde{B}$ სიმრავლეების ფორმალიზება, ანუ ვიგულისხმოთ, რომ $\tilde{A} = \{< \mu_A(y)/y >| y \in Y\}$ და $\tilde{B} = \{< \mu_B(y)/y >| y \in Y\}$. შესაბამისი განმარტების საფუძველზე ცხადია, რომ $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{< \max\{\mu_A(y); \mu_B(y)\}/y >| y \in Y\}$, ამიტომ არამკაფიო სიმრავლის წინარე სახის ზემოთ მოყვანილი განმარტების საფუძველზე მივიღებთ: $f^{-1}(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \{< \max\{\mu_A(y); \mu_B(y)\}/x >| x \in X,\ y = f(x)\} =$

$$= \{< \mu_A(y)/x >| x \in X,\ y = f(x)\} \cup \{< \mu_B(y)/x >| x \in X,\ y = f(x)\} = f^{-1}(\tilde{A}) \cup f^{-1}(\tilde{B}).$$

მეორე ტოლობის დასამტკიცებლად საჭიროა ჩავწეროთ $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{< \min\{\mu_A(y); \mu_B(y)\}/y >| y \in Y\} \Rightarrow f^{-1}(\tilde{A} \cap \tilde{B}) =$

$=\{< \min\{\mu_A(y);\mu_B(y)\}/x>|\, x\in X,\ y=f(x)\}=\{<\mu_A(y)/x>|\, x\in X,\ y=f(x)\}\cap$
$\cap\{<\mu_B(y)/x>|\, x\in X,\ y=f(x)\}=\ f^{-1}(\tilde{A})\cap f^{-1}(\tilde{B})$. ■

შენიშვნა 2.3.1. თეორემა 2.3.2 შესაძლებელია განზოგადდეს ქვ-ემოთ მოყვანილი ფორმით

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\tilde{A}_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(\tilde{A}_\alpha)\ \text{ და }\ f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\tilde{A}_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(\tilde{A}_\alpha),$$ სადაც Λ - ინდექსთა რაიმე სიმრავლეა.

თეორემა 2.3.4. ვთქვათ $f_1:X_1\to Y_1$ და $f_2:X_2\to Y_2$ წერტი-ლოვან ასახვათა რაიმე წყვილია, ხოლო $\tilde{B}_1=\{<\mu_{B_1}(y)/y>|\, y\in Y_1\}$ და $\tilde{B}_2=\{<\mu_{B_2}(u)/u>|\, u\in Y_2\}$, მაშინ $(f_1\times f_2)^{-1}(\tilde{B}_1\times\tilde{B}_2)=f_1^{-1}(\tilde{B}_1)\times f_2^{-1}(\tilde{B}_2)$.

დამტკიცება. თავდაპირველად აღვნიშნოთ $\tilde{K}\equiv(f_1\times f_2)^{-1}(\tilde{B}_1\times\tilde{B}_2)=$ $=\{<\mu_K(x_1,x_2)/(x_1,x_2)>|\,(x_1,x_2)\in X_1\times X_2\}$, სადაც მიკუთვნების ფუნქცია განიმარტება $\mu_K(x_1,x_2)=\min\{\mu_{B_1}(f_1(x_1));\ \mu_{B_2}(f_2(x_2))\}$-ით. შევნიშნ-ოთ, რომ რადგან განმარტებით $f_1^{-1}(\tilde{B}_1)=\{<\mu_{B_1}(f_1(x_1))/x_1>|\, x_1\in X_1\}$ და $f_2^{-1}(\tilde{B}_2)=\{<\mu_{B_2}(f_2(x_2))/x_2>|\, x_2\in X_2\}$, ამიტომ ფუნქცია განმარტებული $\mu_K(x_1,x_2)=\min\{\mu_{B_1}(f_1(x_1));\ \mu_{B_2}(f_2(x_2))\}$-ტოლობით წარმოადგენს არამკ-აფიო $f_1^{-1}(\tilde{B}_1)\times f_2^{-1}(\tilde{B}_2)$-სიმრავლის მიკუთვნების ფუნქციას. ■

სავარჯიშოები

II.3.1. ცნობილია, რომ $\tilde{A}$ და $\tilde{B}$ არამკაფიო გამონათქვამების ჭეშმარიტების დოზები აკმაყოფილებენ პირობებს: $[\tilde{A}\wedge\tilde{B}]=0{,}7$ და $[\tilde{A}]=[\tilde{B}]^2$. გამოთვალეთ $[\tilde{A}\vee\tilde{B}]$.

II.3.2. თქვენი შეხედულებისამებრ ჩაწერეთ არამკაფიო სიმრავლე, რომელიც გამოსახავს არამკაფიო გამონათქვამს: „თბილი ოთახი" (ტემპერატურული შკალის მიხედვით).

II.3.3. იპოვეთ $[\tilde{A}]$, თუ $[\tilde{A}\Rightarrow\tilde{B}]=0{,}8$, $[\tilde{B}]=0{,}9-\sqrt{[\tilde{A}]}$.

II.3.4. გამოთვალეთ $[\tilde{A}\wedge\neg\tilde{B}\vee\tilde{C}\Leftrightarrow\neg\tilde{C}]$, თუ ცნობილია, რომ $[\tilde{A}]=0{,}2$ $[\tilde{B}]=0{,}9$ და $[\tilde{C}]=0{,}6$.

II.3.5. არამკაფიო სიმრავლეებისათვის სამართლიანია თუ არა ტოლობები: ა) $\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)\cap\tilde{C}=\left(\tilde{A}\cap\tilde{C}\right)\setminus\left(\tilde{B}\cap\tilde{C}\right)$, ბ) $\tilde{A}=\left(\tilde{A}\cap\tilde{B}\right)\cup\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)$,
გ) $\left(\tilde{A}\setminus\tilde{B}\right)\times\tilde{C}=(\tilde{A}\times\tilde{C})\setminus(\tilde{B}\times\tilde{C})$, დ) $\left(\tilde{A}\cup\tilde{B}\right)\times\tilde{C}=(\tilde{A}\times\tilde{C})\cup(\tilde{B}\times\tilde{C})$,
ე) $\left(\tilde{A}\cap\tilde{B}\right)\times\tilde{C}=(\tilde{A}\times\tilde{C})\cap(\tilde{B}\times\tilde{C})$.

II.3.6. როგორ სიმრავლურ მიმართებაში არიან შემდეგი არამკაფიო სიმრავლეები: $\tilde{A}=\left\{<\frac{1}{x}/x>|\,x\in[1;+\infty[\cap Z\right\}$ და $\tilde{B}=\left\{<\frac{1}{x^2}/x>|\,x\in[1;+\infty[\cap Z\right\}$.

II.3.7. იპოვეთ არამკაფიო $\tilde{A}=\left\{<\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot x\right)/x>|\,x\in[0;\ 2\pi]\cap Z\right\}$ და $\tilde{B}=\left\{<e^{-x}/x>|\,x\in[0;\ 2\pi]\cap Z\right\}$ სიმრავლეებისათვის $\tilde{A}\cap\tilde{B}$, $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ და $\tilde{A}\setminus\tilde{B}$.

II.3.8. განვიხილოთ $\tilde{A}_k = \{< \mu_{A_k}(x)/x >| x \in [0;+\infty[\}$, $k = \overline{1;2}$ არამკაფიო სიმრავლეები, $\mu_{A_1}(x) = \begin{cases} 0{,}2x, & \text{თუ } x \le 5 \\ 1, & \text{თუ } x > 5 \end{cases}$ და $\mu_{A_2}(x) = \begin{cases} 1 - 0{,}4x, & \text{თუ } x \le 2{,}5 \\ 0{,}5 \cdot e^{-x}, & \text{თუ } x \ge 3 \end{cases}$.

იპოვეთ $\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2$, $\tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2$ და $\tilde{A}_1 \setminus \tilde{A}_2$ სიმრავლეები და გამოსახეთ მათი მიკუთვნების ფუნქციები გრაფიკულად.

II.3.9. ვთქვათ $f : X \to Y$ წერტილოვანი ასახვაა, ხოლო წერტილოვანი $g : X \to X \times Y$ ასახვა განმარტებულია $g(x) = (x, f(x))$-ით, $\forall x \in X$-თვის. თუ $\tilde{A}$ არის X-ის, ხოლო $\tilde{B}$ არის Y-ის არამკაფიო ქვესიმრავლე, მაშინ დაამტკიცეთ, რომ $g^{-1}(\tilde{A} \times \tilde{B}) = \tilde{A} \cap f^{-1}(\tilde{A})$.

II.3.10. ვთქვათ $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ და $Y = \{u, v, z, p\}$, ხოლო მრავალსახა ასახვა $F : X \to Y$, განმარტებულია შემდეგნაირად: $F(x_1) = \{u, v\}$, $F(x_2) = \{u, z, p\}$, $F(x_3) = \{v, p\}$. რას წარმოადგენს $\tilde{F}_{\cap}^{-1}(\{v\})$-არამკაფიო სიმრავლე, თუ მისი ელემენტების მიკუთვნების ფუნქცია განიმარტება ტოლობებიდან $\mu(x_1) = 0{,}2$, $\mu(x_2) = 0{,}3$ და $\mu(x_3) = 0{,}6$.

თავი III. მონაცემთა სიახლოვის ტოპოლოგიური და მეტრიკული ანალიზი

§3.1. ტოპოლოგიური სივრცეები, ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები. ინტერიერის და ჩაკეტვის ოპერატორები და მათი ძირითადი თვისებები

თუ მონაცემთა სიმრავლეებში ვერ ხერხდება ალგებრული ოპერაციებით რიცხვითი გამოთვლების ჩატარება, მაშინ მონაცემთა დამუშავების მიზნით მიმართავენ ტოპოლოგიის კლასიკურ მეთოდებს [2; 5; 16; 23; 24; 27]. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ტოპოლოგიურ სივრცეებში სიმრავლეთა ინტერიერის და ჩაკეტვის გამოთვლის წესებს, რაც აუცილებელია §3.3-ში განხილული საკითხებისათვის.

ნებისმიერად ფიქსირებულ X სიმრავლეს და მისი ქვესიმრავლეების τ-კლასს, ფორმალურად ჩაწერილს (X,τ) წყვილის სახით, ეწოდება ტოპოლოგიური სივრცე, თუკი ის აკმაყოფილებს ქვემოთ ჩამოთვლილ აქსიომათა სისტემას:

A1) $\phi, X \in \tau$;

A2) $\forall O_1, O_2 \in \tau \Rightarrow (O_1 \cap O_2) \in \tau$;

A3) $\forall \{O_\alpha \in \tau\}_{\alpha\in\Lambda} \Rightarrow \left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} O_\alpha \right) \in \tau$.

τ-ს ელემენტებს ჩვეულებრივ, **ღია** სიმრავლეებს უწოდებენ, ამასთან თუ $O \in \tau$, მაშინ $X \setminus O$-სიმრავლეს **ჩაკეტილ** სიმრავლეს უწოდებენ [2]. (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ყველა ჩაკეტილი ქვესიმრავლეების ერთობლიობას $co\tau$-ით აღვნიშნავთ. ცხადია, რომ ϕ, X - ერთდროულად ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეებია.

მაგალითი 3.1.1 ვთქვათ, რომ $X=\{a,b,c,d,e\}$ ფიქსირებული სიმრავლეა, ხოლო $\tau_1=\{\phi,X\}\cup\{O_1,O_2,O_3\}$, სადაც $O_1=\{a,b\}$; $O_2=\{c,d\}$ და $O_3=\{a,b,c,d\}$, მაშინ A1)-A3) აქსიომების უშუალო შემოწმებით იოლად ვრწმუნდებით, რომ (X,τ_1) ტოპოლოგიური სივრცეა. სირთულეს არ წარმოადგენს ამ ტოპოლოგიაში ჩამოვთვალოთ ჩაკეტილი სიმრავლეები: $co\tau_1=\{\phi,X\}\cup\{F_1,F_2,F_3\}$, სადაც $F_1=\{c,d,e\}$; $F_2=\{a,b,e\}$; $F_3=\{e\}$. ანალოგიური მსჯელობით ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ სხვა ტოპოლოგიაც იმავე X სიმრავლეზე: $\tau_2=\{\phi,X\}\cup\{O_1,O_2,O_3,O_4\}$, სადაც ღიებად მივიჩნევთ $O_1=\{a,b,c\}$; $O_2=\{a,b,c,d\}$; $O_3=\{a,b,c,e\}$; $O_4=\{e\}$ სიმრავლეებს. ამრიგად, ჩვენ ავაგეთ (X,τ_2) ტოპოლოგიური სივრცე.

ამბობენ, რომ $(X,\tau_{\text{ად.}})$ **ანტიდისკრეტული** ტოპოლოგიური სივრცეა, თუ $\tau_{\text{ად.}}=\{\phi,X\}$. **დისკრეტულ** ტოპოლოგიურ სივრცეს ჩვენ ვუწოდებთ ისეთ $(X,\tau_{\text{დ.}})$-წყვილს, რომ $\tau_{\text{დ.}}=\mathrm{B}(X)$. ცხადია, რომ დისკრეტულ ტოპოლოგიაში X-ის ყოველი ქვესიმრავლე არის ღია და ამიტომ ჩაკეტილიც. იოლი შესამჩნევია, რომ ანტიდისკრეტული ტოპოლოგია ,,უღარიბესია'', ხოლო დისკრეტული ტოპოლოგია ,,უმდიდრესია'' მოცემულ სიმრავლეზე განსახილველ ტოპოლოგიებს შორის (ელემენტების რაოდენობის თვალსაზრისით).

საგულისხმოა, რომ თუ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში ფიქსირებულია რაიმე $A\subset X$ სიმრავლე, მაშინ შესაძლებელია მასზე გა-

ნიმარტოს τ-ს მეშვეობით ტოპოლოგია—τ_A^*, ე.ი. ავაგოთ A-ზე ე.წ. **ინდუცირებული ტოპოლოგია.** τ_A^*-ინდუცირებული ტოპოლოგიაში ღიად საჭიროა გამოცხადდეს ყველა ის $G \subset A$ სიმრავლე, რომლისთვისაც $\exists O \in \tau$, ისეთი, რომ $G = A \cap O$.

სიმრავლეზე ტოპოლოგიური სტრუქტურის აღსაწერად ან ახალი ტოპოლოგიების ასაგებად, ხშირად სასარგებლოა სივრცის ბაზის გამოყენება. ვიტყვით, რომ სიმრავლეთა $\mathbf{B}$ ოჯახი წარმოადგენს (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის **ღია ბაზას,** თუ $\forall O \in \tau$-თვის $\exists A \in \mathbf{B}$, ისეთი, რომ $A \subset O$. საგულისხმოა, რომ $\mathbf{B}$ ოჯახი (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ბაზაა $\Leftrightarrow$ $\forall O \in \tau$ სიმრავლე შეიძლება ჩაიწეროს $\mathbf{B}$-ს ელემენტების გაერთიანების (სასრული ან უსასრულო) სახით. აღნიშნულის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე მასზე ბუნებრივი (ინტერვალური) ტოპოლოგიით: **R**-ზე სიმრავლეთა $\mathbf{B} = \{]m,n[\mid m < n\}$ ოჯახი წარმოადგენს $\tau_{\text{ჩვ.}}$-ტოპოლოგიის ბაზას.

მაგალითი 3.1.2. განვიხილოთ $X = \{a;b;c;d;e\}$ სიმრავლე, მასზე შემდეგნაირად განსაზღვრული $\tau = \{\phi; X\} \cup \{\{a,b\};\{c\};\{a,b,c\}\}$-ტოპოლოგიით. თუ ჩვენ განვიხილავთ $A = \{a,c,d,e\}$ ქვესიმრავლეს (X,τ)-ში, მაშინ მასზე ინდუცირებული ტოპოლოგიაა $\tau_A^* = \{\phi; A\} \cup \{\{a\};\{c\};\{a,c\}\}$, რადგან $\{a\} = A \cap \{a,b\}$, $\{c\} = A \cap \{c\}$ და $\{a,c\} = A \cap \{a,b,c\}$. ცხადია, რომ (X,τ) სივრცის ბაზაა $\mathbf{B} = \{\phi; X\} \cup \{\{a,b\};\{c\}\}$-ოჯახობა, ხოლო $\left(A,\tau_A^*\right)$ ქვესივრცისათვის კი— $\mathbf{B}_A = \{\phi; A\} \cup \{\{a\};\{c\}\}$.

კომპიუტერულ გრაფიკაში მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ე. ხალიმსკის ტოპოლოგია, რომელიც **Z**-სიმრავლეზე განიმარტება შემდეგი სახის ღია ბაზით $\mathbf{B}=\{\phi;Z\}\cup\{\{2k+1\};\ \{(2k-1);2k;(2k+1)\}\mid k\in Z\}$.

ორი ფიქსირებული ტოპოლოგიური სივრცის მიხედვით შესაძლებელია ახალი სივრცის აგება მათი ე.წ. **დეკარტული ნამრავლის** მეშვეობით: ვთქვათ (X,τ) და (Y,γ) ტოპოლოგიური სივრცეების რაიმე წყვილია, მაშინ $(X\times Y,\tau\times\gamma)$-ით ჩვენ აღვნიშნავთ ტოპოლოგიურ სივრცეს, ღია ბაზით $\mathbf{B}=\{\phi;X\times Y\}\cup\{U\times V\mid U\in\tau,\ V\in\gamma\}$.

ინტერიერის და ჩაკეტვის ოპერატორები და მათი ძირითადი თვისებები: თუ (X,τ) რაიმე ტოპოლოგიური სივრცეა და $A\subset X$, მაშინ ამბობენ, რომ $x_0\in X$ არის A-სიმრავლის **ინტერიერის წერტილი**, თუკი $\exists O(x_0)\in\tau\setminus\{\phi\}$, ისეთი, რომ $x_0\in O(x_0)$ და $O(x_0)\subset A$. ამ შემთხვევაში წერენ, რომ $x_0\in\operatorname{int}A$. $x_0\in X$ წერტილს ეწოდება A-ს **შეხების წერტილი,** თუ $\forall U(x_0)\in\tau\setminus\{\phi\}$-თვის, ისეთი, რომ $x_0\in U(x_0)$ ადგილი აქვს $U(x_0)\cap A\neq\phi$ დამოკიდებულებას. იმის აღსანიშნად, რომ x_0 არის A-ს შეხების წერტილი გამოიყენება აღნიშვნა $x_0\in clA$. ჩვეულებრივ, წერტილის მომცველ ღია (ან ჩაკეტილ) სიმრავლეს მის ღია (ან ჩაკეტილ) მიდამოს უწოდებენ. ვინაიდან, ნებისმიერ სიმრავლეს შესაძლებელია შევუსაბამოთ ამ სიმრავლის ინტერიერი და ჩაკეტვა, ამიტომ აზრი აქვს ტერმინის ინტერიერის და ჩაკეტვის ოპერატორების გამოყენებას. (X,τ) ტოპოლოგიურ სი-

ვრცეში $x_0 \in X$ წერტილის მომცველი ღია მიდამოების კლასს $\sum_\tau^X(x_0)$-ით აღვნიშნავთ.

თეორემა 3.1.1 ნებისმიერად ფიქსირებულ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში ინტერიერის ოპერატორს გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისებები:

i1) $\operatorname{int}\phi = \phi, \ \operatorname{int} X = X$;

i2) $\operatorname{int} A \subseteq A$, $\forall A \subset X$ -თვის;

i3) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, $\forall A; B \subset X$ -თვის;

i4) $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$, $\forall A; B \subset X$ -თვის;

i5) თუ $A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$, $\forall A; B \subset X$ -თვის.

დამტკიცება. i1)-i2) თვისებების სამართლიანობა არის პირდაპირი შედეგი ინტერიერის ოპერატორის განმარტებისა.

i3)-ის დასამტკიცებლად განვიხილოთ, $\forall x \in \operatorname{int}(A \cap B) \Leftrightarrow \exists O(x) \in \in \sum_\tau^X(x)$ ისეთი, რომ $O(x) \subset (A \cap B)$. აქედან ცხადია, რომ $O(x) \subset A \wedge O(x) \subset B$, მაშასადამე ჩვენ გვაქვს $x \in \operatorname{int} A \wedge x \in \operatorname{int} B \Leftrightarrow x \in (\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B)$. ამრიგად $\operatorname{int}(A \cap B) \subset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

შებრუნებული ჩართვის საჩვენებლად, საჭიროა ავიღოთ $\forall x \in (\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B) \Leftrightarrow x \in \operatorname{int} A \wedge x \in \operatorname{int} B \Leftrightarrow \exists U(x), V(x) \in \sum_\tau^X(x)$ ისეთები, რომ $U(x) \subset A \wedge V(x) \subset B \Rightarrow (U(x) \cap V(x)) \subset A \cap B$. ცხადია, რომ $U(x) \cap V(x) \in \in \sum_\tau^X(x) \Rightarrow x \in \operatorname{int}(A \cap B)$, ე.ი. $\operatorname{int}(A \cap B) \supset \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$. ამრიგად, საბოლოოდ ჩვენ დავამტკიცეთ i3)-ტოლობის სამართლიანობა.

i4)-ის დასამტკიცებლად ავიღოთ $\forall x \in \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \Leftrightarrow x \in \operatorname{int} A \vee$ $\vee x \in \operatorname{int} B \Leftrightarrow \exists U(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x) \vee \exists V(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x)$ ისეთი, რომ $U(x) \subset A \vee V(x) \subset B$. აქედან ცხადია, რომ $U(x) \cup V(x) \subset A \cup B$, მაგრამ რადგან $U(x) \cup V(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x) \Rightarrow x \in \operatorname{int}(A \cup B)$. მაშასადამე, დამტკიცდა i4)-ჩართვის სამართლიანობა.

i5)-ის საჩვენებლად განვიხილოთ $\forall x \in \operatorname{int} A \Rightarrow \operatorname{int} A \in \sum_{\tau}^{X}(x)$. i2)-ის გათვალისწინებით $x \in \operatorname{int} A \subseteq A \subset B$, ე.ი. $x \in \operatorname{int} B$. მაშასადამე, i5)-ჩართვის სამართლიანობა დამტკიცებულია. ■

თეორემა 3.1.2 ყოველ (X, τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში ჩაკეტვის ოპერატორს გააჩნია შემდეგი ძირითადი თვისებები:

c1) $cl\phi = \phi,\ clX = X$;

c2) $A \subseteq clA$, $\forall A \subset X$ -თვის;

c3) $cl(A \cup B) = clA \cup clB$, $\forall A; B \subset X$ -თვის;

c4) $cl(A \cap B) \subset clA \cap clB$, $\forall A; B \subset X$ -თვის;

c5) თუ $A \subset B \Rightarrow clA \subset clB$, $\forall A; B \subset X$ -თვის.

დამტკიცება. c1)-c2) თვისებების სამართლიანობა ტრივიალურად გამოდინარეობს ჩაკეტვის ოპერატორის განმარტებიდან.

c3)-თვისების მისაღებად ავიღოთ $\forall x \in cl(A \cup B) \Leftrightarrow \forall U(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x)$-თვის $\phi \neq U(x) \cap (A \cup B) = (U(x) \cap A) \cup (U(x) \cap B)$, ე.ი. $U(x) \cap A \neq \phi \vee U(x) \cap B \neq \phi$, ანუ $x \in clA \vee x \in clB$. მაშასადამე, $x \in clA \cup clB$, რაც ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს ჩართვას $cl(A \cup B) \subset clA \cup clB$.

პირიქით, $\forall x\in clA\cup clB \Leftrightarrow x\in clA\vee x\in clB \Leftrightarrow \forall U(x)\in\sum_{\tau}^{X}(x)$ -თვის $U(x)\cap A\neq\phi\vee$ $\forall V(x)\in\sum_{\tau}^{X}(x)$ -თვის $V(x)\cap B\neq\phi$. მაშასადამე $U(x)\cap(A\cup B)\neq\phi\vee V(x)\cap(A\cup B)\neq\phi$. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ ადგილი აქვს c3)-ტოლობას.

c4)-ის დასამტკიცებლად განვიხილოთ $\forall x\in cl(A\cap B)\Leftrightarrow\forall U(x)\in$ $\in\sum_{\tau}^{X}(x)$ -თვის $\phi\neq U(x)\cap(A\cap B)\Rightarrow U(x)\cap A\neq\phi\wedge U(x)\cap B\neq\phi$. ამ უკანასკნელიდან ცხადია, რომ $x\in clA\cap clB$, ე.ი. მივიღეთ რეზულტატის სამართლიანობა.

c5)-ის დასამტკიცებლად ავიღოთ ელემენტი $\forall x\in clA\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\forall U(x)\in\sum_{\tau}^{X}(x)$ -თვის $\phi\neq U(x)\cap A$. ვინაიდან $\phi\neq U(x)\cap A\subset U(x)\cap B\Rightarrow$ $\Rightarrow x\in clB$, ამიტომ დასამტკიცებელი ჩართვა სამართლიანია. ■

თეორემა 3.1.3 ნებისმიერად ფიქსირებულ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში $\operatorname{int}A=\bigcup\limits_{O\subset A}O$, ხოლო $clA=\bigcap\limits_{A\subset F}F$, სადაც $O\in\tau$ და $F\in co\tau$.

დამტკიცება. მართლაც, თუ $\forall\xi\in\operatorname{int}A\Leftrightarrow\exists O(\xi)\in\sum_{\tau}^{X}(\xi)$ ისეთი, რომ $O(\xi)\subset A$. აქედან ცხადია, რომ $O(\xi)\subset\bigcup\limits_{O\subset A}O$, ამიტომ $\xi\in\bigcup\limits_{O\subset A}O$. ამრიგად ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ სამართლიანია ჩართვა: $\operatorname{int}A\subset\bigcup\limits_{O\subset A}O$.

პირიქით, ვთქვათ $\forall x\in\bigcup\limits_{O\subset A}O\Leftrightarrow\exists\hat{O}\subset A: x\in\hat{O}$, ისეთი, რომ $\hat{O}\in\tau$. ამ უკანასკნელიდან გამომდინარეობს, რომ $\hat{O}\in\sum_{\tau}^{X}(x)$ და ამიტომ

$x \in \operatorname{int} A$. მაშასადამე ჩვენ ვაჩვენეთ $\operatorname{int} A \supset \bigcup_{O \subset A} O$ ჩართვის სამართლიანობა, ე.ი. პირველი ტოლობა დამტკიცებულია.

მეორე ტოლობის დასამტკიცებლად საჭიროა განვიხილოთ $\forall a \in clA \Rightarrow a \in clF$, $\forall F \in co\tau$-თვის ისეთი, რომ $A \subset F$. დავუშვათ, რომ $a \notin F \Leftrightarrow a \in (X \setminus F)$, მაგრამ იმის გამო, რომ $F \in co\tau$ გვექნება $(X \setminus F) \in \sum_{\tau}^{X}(a)$. ვინაიდან $a \in clA \Rightarrow (X \setminus F) \cap A \neq \phi$. მეორე მხრივ, გვექნება $(X \setminus F) \cap A \subset (X \setminus F) \cap F = \phi$, ანუ $(X \setminus F) \cap A = \phi$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ე.ი. სამართლიანია ჩართვა $clA \subset \bigcap_{A \subset F} F$.

შებრუნებული ჩართვის დასამტკიცებლად, უნდა ავიღოთ $\forall \xi \in \bigcap_{A \subset F} F \Leftrightarrow \xi \in F$, სადაც F არის A-ს მომცველი ნებისმიერი ჩაკეტილი სიმრავლე. თუ ვიგულისხმებთ $\xi \notin clA$, მაშინ $\exists\, O(\xi) \in \sum_{\tau}^{X}(\xi)$ ისეთი, რომ $O(\xi) \cap A = \phi \Leftrightarrow (X \setminus O(\xi)) \supset A$, აქედან კი თავის მხრივ გვექნება $\xi \notin (X \setminus O(\xi)) \in co\tau$. $\xi \in \bigcap_{A \subset F} F \subset (X \setminus O(\xi)) \Rightarrow \xi \in (X \setminus O(\xi))$, მივედით წინააღმდეგობამდე. ამრიგად, სამართლიანია ჩართვა: $clA \supset \bigcap_{A \subset F} F$, ე.ი. ჩვენ დავამტკიცეთ მეორე ტოლობის სამართლიანობა.■

შენიშვნა 3.1.1 ნებისმიერ ტოპოლოგიურ სივრცეში სიმრავლის ინტერიერი წარმოადგენს მის უდიდეს ღია ქვესიმრავლეს, ხოლო ჩაკეტვა—ამ სიმრავლის მომცველ უმცირეს ჩაკეტილ სიმრავლეს.

თეორემა 3.1.4 ყოველ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში ინტ-ერიერის და ჩაკეტვის ოპერატორებს შორის არსებობს შემდეგი სახის კავშირი:

$$\begin{gathered}\operatorname{int} A = X \setminus cl(X \setminus A);\\ clA = X \setminus \operatorname{int}(X \setminus A)\end{gathered}$$

დამტკიცება. ავიღოთ $\forall \xi \in \operatorname{int} A \Leftrightarrow \exists U(\xi) \in \sum_{\tau}^{X}(\xi)$ ისეთი, რომ $U(\xi) \subset A$. მაშასადამე $U(\xi) \cap (X \setminus A) = \phi \Leftrightarrow \xi \notin cl(X \setminus A) \Leftrightarrow \xi \in X \setminus cl(X \setminus A)$. ამრიგად ჩვენ მივიღეთ, რომ ადგილი აქვს $\operatorname{int} A \subset X \setminus cl(X \setminus A)$ ჩართვას.

პირიქით, $\forall \xi \in X \setminus cl(X \setminus A) \Leftrightarrow \xi \notin cl(X \setminus A)$, მაშინ ცხადია $\exists V(\xi) \in \in \sum_{\tau}^{X}(\xi)$, ისეთი რომ $V(\xi) \cap (X \setminus A) = \phi \Leftrightarrow V(\xi) \subset A$. ამრიგად, $\xi \in \operatorname{int} A$. მაშასადამე, პირველი ტოლობა სამართლიანია.

მეორე ტოლობა ანალოგიურად მოწმდება, რის გამოც მას ჩვენ სავარჯიშოს სახით ვანდობთ მკითხველს დასამტკიცებლად. ■

თეორემა 3.1.5 აღსანიშნავია, რომ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში ადგილი აქვს ეკვივალენციებს:

$$\begin{gathered}O \in \tau \Leftrightarrow O = \operatorname{int} O;\\ F \in co\tau \Leftrightarrow F = clF\end{gathered}$$

დამტკიცება. როცა $O = \operatorname{int} O$, მაშინ ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის საფუძველზე: $\operatorname{int} O \in \tau$ დავასკვნით, რომ $O \in \tau$.

ვინაიდან $\operatorname{int} O \subset O$, ამიტომ საჩვენებელია მხოლოდ $O \subset \operatorname{int} O$ ჩართვა. როდესაც $O \in \tau$, ავიღოთ $\forall \xi \in O \Rightarrow O \in \sum_{\tau}^{X}(\xi)$, მაშინ ცხადია,

რომ $\xi \in \operatorname{int} O$, ე.ი. სამართლიანია ჩართვა $O \subset \operatorname{int} O$. ამრიგად პირველი ეკვივალენცია დამტკიცებულია.

თუკი $F = clF$, მაშინ ცხადია, რომ $clF \in co\tau$. მაშასადამე, ამ შემთხვევაში $F \in co\tau$.

პირიქით, დავუშვათ $F \in co\tau \Leftrightarrow (X \setminus F) \in \tau \Leftrightarrow X \setminus F = \operatorname{int}(X \setminus F)$ (პირველი ეკვივალენციის თანახმად). ვინაიდან $\operatorname{int}(X \setminus F) = X \setminus cl(X \setminus (X \setminus F)) = X \setminus clF$, ამიტომ გვექნება, რომ $X \setminus F = X \setminus clF \Leftrightarrow F = clF$. ■

შენიშვნა 3.1.2 ზემოთ დამტკიცებული ეკვივალენციების გათვალისწინებით ჩვენ ინტერიერის და ჩაკეტვის ოპერატორებისათვის დამატებით დავასკვნით, რომ (X, τ) სივრცეში $\forall A \subset X$ -თვის სრულდება ტოლობები:

i6) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$;

c6) $cl(clA) = clA$.

დამტკიცება. i6)-ის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ სამართლიანობა $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) \supset \operatorname{int} A$ ჩართვისა. ამ მიზნით განვიხილოთ $\forall \xi \in \operatorname{int} A \Leftrightarrow \exists U(\xi) \in \sum_{\tau}^{X}(\xi)$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა $U(\xi) \subset A$. წინა ეკვივალენციების და i5)-ის გამო ჩვენ გვექნება: $U(\xi) = \operatorname{int} U(\xi) \subset \operatorname{int} A$, ანუ $\xi \in \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$. მაშასადამე, სასურველი ჩართვის სამართლიანობა დამტკიცებულია, ამიტომ ადგილი აქვს i6)-ტოლობას.

c6)-ის დასამტკიცებლად გამოვიყენოთ i6) და ზემოდან ცნობილი დამოკიდებულება ინტერიერის და ჩაკეტვის ოპერატორებს შო-

რის. ცხადია, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $cl(clA) = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus clA) =$
$= X \setminus \mathrm{int}\left[X \setminus \left(X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)\right)\right] = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A) = clA$. ■

ამ პარაგრაფის ბოლოს განვიხილოთ სიმრავლის ინტერიერის და ჩაკეტვის გამოთვლის ერთი მაგალითი.

მაგალითი 3.1.2 განვიხილოთ მაგ. 3.1.1-ში აგებული (X, τ_1) ტოპოლოგიური სივრცე, ანუ სიმრავლე $X = \{a, b, c, d, e\}$, მასზე ისეთი ტოპოლოგიით, რომ ღია სიმრავლეებად გამოვაცხადოთ $O_1 = \{a, b\}$; $O_2 = \{c, d\}$ და $O_3 = \{a, b, c, d\}$. დავადგინოთ, თუ რას წარმოადგენს $A = \{a, b, e\}$; $B = \{a, c, d\}$ სიმრავლეების ინტერიერი და ჩაკეტვა. შენიშვნა 3.1.1-ის გათვალისწინებით: ინტერიერი არის სიმრავლის უდიდესი ღია ქვესიმრავლე, ხოლო ჩაკეტვა ამ სიმრავლის მომცველი უმცირესი ჩაკეტილი სიმრავლე. აღნიშნულის გამო ცხადია, რომ უდიდესი ღია ქვესიმრავლე A და B-თვის შესაბამისად იქნება $\mathrm{int}\, A = \{a, b\}$ და $\mathrm{int}\, B = \{c, d\}$. ჩაკეტვების განსასაზღვრად საჭიროა ვისარგებლოთ მაგ. 3.1.1-ში მითითებული ჩაკეტილი სიმრავლეების პირველი კლასით, მაშინ უმცირესი ჩაკეტილი სიმრავლეები რომლებიც A და B-ს მოიცავენ შესაბამისად იქნებიან $clA = \{a, b, e\}$ და $clB = X$ სიმრავლეები.

სავარჯიშოები

III.1.1 ვთქვათ $X=\{a;b;c;d\}$ და $\tau=\{\phi,X\}\cup\{\{a\};\{a,b,c\};\{a,b,d\}\}$, რა სიმრავლე უნდა დაემატოს τ-კლასს, რომ ის გადაიქცეს ტოპოლოგიად?

III.1.2. ვთქვათ $X=\{2;3;5;8\}$, $\tau=\{\phi,X\}\cup\{\{2\};\{2;5\};\{2;8\};\{2;5;8\}\}$. იპოვეთ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის მინიმალური ღია ბაზა.

III.1.3. $I=[0;\ 1]$ სეგმენტზე არის თუ არა ტოპოლოგია ერთობლიობა $\tau=\{\phi;I\}\cup\{O_\alpha\}_{\alpha\in(0;1]}$, სადაც $O_\alpha\equiv[0;\alpha[$.

III.1.4. თუ X უსასრულო სიმრავლეა და განვიხილავთ ერთობლიობას: $\tau=\{\phi;X\}\cup\{O\subset X\,|\,card(X\setminus O)<\aleph_0\}$, მაშინ დაადგინეთ არის თუ არა (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე.

III.1.5. $X=\{m;n;p;q\}$, $\tau=\{\phi;X\}\cup\{\{m\};\{n\};\{m,n\};\{m,p\};\{m,n,p\}\}$. იპოვეთ (X,τ)-ტოპოლოგიურ სივრცეში $A=\{m,n,q\}$-სიმრავლისთვის $\operatorname{int}A$ და clA.

III.1.6. დარწმუნდით, რომ ე.წ. სერპინსკის ტოპოლოგია შესაძლებელია განიმარტოს „ჭეშმარიტი" და „მცდარი" გამონათქვამების სიმრავლეზე $\tau_S=\{\phi;\ \{1\};\ \{0;1\}\}$ ოჯახით.

III.1.7. თუ X სასრული სიმრავლეა, მასზე რაიმე τ-ტოპოლოგიით, მაშინ არის თუ არა X-ზე ტოპოლოგია $\omega=\{X\setminus A\,|\,A\in\tau\}$ კლასი?

III.1.8. დაამტკიცეთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ყოველ $A\subset X$ ქვესიმრავლეზე ინდუცირებულ τ_A^*-ტოპოლოგიაში $\forall M\subset A$-

თვის ადგილი აქვს ტოლობას: $\tau_A^* clM = A \cap \tau clM$ (მიაქციეთ ყურადღება, რომ ანალოგიურ დამოკიდებულებას ინტერიერისთვის ადგილი არ აქვს!).

III.1.9. დაამტკიცეთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში $\forall O \in \tau$ და $\forall A \subset X$ -თვის სამართლიანია ჩართვა: $O \cap clA \subset cl(O \cap A)$ (რ. სიკორსკის ლემა).

III.1.10. დაამტკიცეთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეში ადგილი აქვს ჩართვას: $cl(A \cap B) \subset clA \cap clB \quad \forall A; B \subset X$ -თვის.

§3.2. ტოპოლოგიური სივრცეების კლასიფიკაცია განცალების აქსიომებით. უწყვეტი ასახვები და ჰომეომორფიზმები

მონაცემთა ტოპოლოგიური სტრუქტურების ფორმირებისას მნიშვნელოვანია სივრცეების კლასიფიკაცია მოვახდინოთ განცალებადობის და სივრცეთა ჰომეომორფულობის მიხედვით.

ვინაიდან ტოპოლოგიური სივრცის განმარტება არის ერთობ ზოგადი, ამიტომ ხელსაყრელია სივრცეების კლასიფიკაცია ე.წ. განცალების აქსიომების მეშვეობით (ანუ, იმის მიხედვით თუ როგორ განცალკევდებიან წერტილები და ჩაკეტილი სიმრავლეები). ტოპოლოგიაში ცნობილია მრავალი განსხვავებული არსის განცალების აქსიომა, მაგრამ ჩვენ კლასიკურ ლიტერატურაში [2] გავრცელებულ მხოლოდ პირველ ხუთეულზე შევჩერდებით (დაბალი განცალების აქსიომები).

ამბობენ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს განცალების:

T_0-აქსიომას, თუ $\forall x_1 \neq x_2$ წერტილებისათვის $x_1, x_2 \in X$ -დან, $\exists U(x_1) \in \sum_{\tau}^{X}(x_1) \vee V(x_2) \in \sum_{\tau}^{X}(x_2)$, ისეთი, რომ $x_1 \notin V(x_2) \vee x_2 \notin U(x_1)$ (ა. კოლმოგოროვის აქსიომა).

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი ანტიდისკრეტული ტოპოლოგიური სივრცე არ აკმაყოფილებს T_0-აქსიომას.

T_1-აქსიომას, თუ $\forall x_1 \neq x_2$ წერტილებისათვის $x_1, x_2 \in X$ -დან, $\exists U(x_1) \in \sum_{\tau}^{X}(x_1) \wedge V(x_2) \in \sum_{\tau}^{X}(x_2)$, ისეთი, რომ $x_1 \notin V(x_2) \wedge x_2 \notin U(x_1)$ (ფ. რისის აქსიომა).

მაგალითი 3.2.1. ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც არის T_0-ტიპის მაგრამ არაა T_1-ტიპის: თუ $X = \{a;b\}$, ხოლო $\tau = \{\phi; X\} \cup \{\{b\}\}$, მაშინ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე სწორედ ასეთია.

T_2-აქსიომას, თუ $\forall x_1 \neq x_2$ წერტილებისათვის $x_1,\ x_2 \in X$ -დან $\Rightarrow \exists U(x_1) \in \sum_{\tau}^{X}(x_1) \wedge V(x_2) \in \sum_{\tau}^{X}(x_2)$, ისეთი, რომ $U(x_1) \cap V(x_2) = \phi$. (ფ. ჰაუსდორფის აქსიომა)

T_3-აქსიომას, თუ $\forall x \in X$ და $F \in co\tau$ სიმრავლისათვის $x \notin F \Rightarrow$ $\exists O(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x)$ და $F \subset U(F) \in \tau$ ისეთი, რომ $O(x) \cap U(F) = \phi$ და სივრცე T_1-ტიპისაა (რეგულარობის აქსიომა).

T_4-აქსიომას, თუ $\forall F_1, F_2 \in co\tau$ -თვის ისეთი, რომ $F_1 \cap F_2 = \phi \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists O(F_1) \supset F_1$ და $V(F_2) \supset F_2$ ღია სიმრავლეები, რომლებიც აკმაყო-

ფილებენ $O(F_1)\cap V(F_2)=\phi$ და სივრცე T_1-ტიპისაა (ნორმალურობის აქსიომა).

აღსანიშნავია, რომ ზემოთ განმარტებული განცალების აქსიომებისთვის სამართლიანია იმპლიკაციების შემდეგი ჯაჭვი

$$\mathbf{T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.}$$

ზოგჯერ მოსახერხებელია T_1-აქსიომის ექვივალენტური ფორმით სარგებლობა:

თეორემა 3.2.1 (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე T_1-ტიპისაა $\Leftrightarrow$ $\forall x\in X$ -თვის $\{x\}\in co\tau$.

დამტკიცება. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს T_1-აქსიომას. ამ შემთხვევაში ცხადია, რომ საჩვენებელია მხოლოდ $cl\{x\}\subset\{x\}$ ჩართვა. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. ვიგულისხმოთ, რომ $cl\{x\}\not\subset\{x\}$. მაშასადამე, თუ $\exists y\in cl\{x\}$ და $y\neq x$, მაშინ $\forall V(y)\in \sum_{\tau}^{X}(y)$ -თვის $V(y)\cap\{x\}\neq\phi$. ამრიგად, ჩვენ გვექნება, რომ $x\in V(y)$, $\forall V(y)\in \sum_{\tau}^{X}(y)$ -თვის, სადაც $y\neq x$. ეს უკანასკნელი კი შეუძლებელია იმის გამო, რომ (X,τ) არის T_1-ტიპის. მიღებული წინააღმდეგობა ასრულებს ამ ნაწილის დამტკიცებას.

პირიქით, ვთქვათ, რომ $\{x\}\in co\tau$, $\forall x\in X$ -თვის. ავიღოთ ისეთი $y\in X$ წერტილი, რომ $x\neq y$. აქედან ცხადია $y\in\left(X\setminus\{x\}\right)\in\tau$. ამრიგად, $\left(X\setminus\{x\}\right)\in \sum_{\tau}^{X}(y)$ და რადგან $\{y\}\in co\tau$, ამიტომ $\left(X\setminus\{y\}\right)\in \sum_{\tau}^{X}(x)$. მაშასადამე (X,τ) აკმაყოფილებს განცალების T_1-აქსიომას. ■

უწყვეტი ასახვები და ჰომეომორფიზმები: უწყვეტი ასახვების შესწავლას მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია მათემატიკურ ანალიზში, სადაც მიმდევრობების ზღვრების ტერმინებში (“$\varepsilon-\delta$-ენაზე”) ხორციელდება უწყვეტობის განსაზღვრა. ამ კლასის ფუნქციების შესწავლამ შესაძლებელი გახადა ექვივალენტური გზით ასახვის უწყვეტობის ტოპოლოგიური განმარტების შემოტანა. საზოგადოდ ამბობენ, რომ ასახვა $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ **უწყვეტია** $x_0\in X$ **წერტილში,** როდესაც $y_0=f(x_0)$ წერტილის $\forall U(y_0)\in\sum_{\gamma}^{Y}(y_0)$-თვის $\exists V(x_0)\in\in\sum_{\tau}^{X}(x_0)$ ისეთი, რომ $f(V(x_0))\subset U(y_0)$. f**-ასახვას ეწოდება უწყვეტი,** თუკი ის არის უწყვეტი $\forall x_0\in X$ წერტილში.

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3.2.2. $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ ასახვა უწყვეტია $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(O)\in\tau$, $\forall O\in\gamma$-თვის.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვიგულისხმოთ, რომ f-ასახვა უწყვეტია, მაშინ $\forall\xi\in f^{-1}(O)$-თვის ცხადია, რომ ადგილი აქვს შემდეგი სახის ეკვივალენციას $f(\xi)\in O\Leftrightarrow\exists W(f(\xi))\in\sum_{\gamma}^{Y}(f(\xi))$ მიდამო ისეთი, რომ $W(f(\xi))\subset O$ (რადგან $f(\xi)$-ინტერიერის წერტილია O-ის). f-ის ξ წერტილში უწყვეტობის გამო $\exists G(\xi)\in\sum_{\gamma}^{Y}(\xi)$ ისეთი, რომ $f(G(\xi))\subset W(f(\xi))$. აქედან გვექნება, რომ სამართლიანია ჩართვა $f(G(\xi))\subset O$, ამიტომ ცხადია $G(\xi)\subseteq f^{-1}(O)$. მაშასადამე, გვაქვს $\forall\xi\in\operatorname{int}f^{-1}(O)$. ამრიგად, $f^{-1}(O)\in\tau$.

პირიქით, დავუშვათ, რომ $f^{-1}(O)\in\tau$, $\forall O\in\gamma$ -თვის. განვიხილოთ $\forall\xi\in X$ და $\eta=f(\xi)\in Y$ წერტილები, მაშინ ჩვენი დაშვების საფუძველზე $\forall U(\eta)\in\sum_{\gamma}^{Y}(\eta)$ -თვის გვექნება: $f^{-1}(U(\eta))\in\sum_{\tau}^{X}(\xi)$. ამ უკანასკნელიდან ცხადია, რომ $\xi\in\operatorname{int}f^{-1}(U(\eta))$, მაშასადამე $\exists V(\xi)\in\sum_{\tau}^{X}(\xi)$ ისეთი, რომ $V(\xi)\subset f^{-1}(U(\eta))$. ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ, რომ $f(V(\xi))\subset U(\eta)$. ■

ზემოაღნიშნულიდან იოლია შევნიშნოთ, რომ $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ ასახვა უწყვეტია $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)\in co\tau$, $\forall F\in co\gamma$ -თვის.

ტოპოლოგიური სივრცეების უწყვეტი ასახვების დასახასიათებლად სასარგებლოა, აგრეთვე შემდეგი კრიტერიუმი

თეორემა 3.2.3 $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ ასახვა უწყვეტია $\Leftrightarrow$ $f(clA)\subset clf(A)$, $\forall A\subset X$ -თვის.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვიგულისხმოთ, რომ f -უწყვეტია. განვიხილოთ $\forall\xi\in f(clA)$, ამიტომ $\exists x_0\in clA$, რომ $\xi=f(x_0)$. ავიღოთ $\forall U(\xi)\in\sum_{\gamma}^{Y}(\xi)$ და უწყვეტობის გამო შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია $f^{-1}(U(\xi))\in\sum_{\tau}^{X}(x_0)$. ამრიგად $f^{-1}(U(\xi))\cap A\neq\phi$ და ამიტომ $\phi\neq f\left(f^{-1}(U(\xi))\cap A\right)\subset U(\xi)\cap f(A)$. მაშასადამე, $\xi\in clf(A)$, ანუ ადგილი აქვს ჩართვას $f(clA)\subset clf(A)$.

პირიქით, ვიგულისხმოთ, რომ $\forall A\subset X$ ქვესიმრავლისათვის ადგილი აქვს ჩართვას $f(clA)\subset clf(A)$. ვაჩვენოთ $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ ასახვის უწყვეტობა. ამ მიზნით ნებისმიერი $F\in co\gamma$ -თვის განვიხილოთ

$f^{-1}(F)$ სიმრავლე. საკმარისობის პირობიდან გვექნება, შემდეგი ჩართვა: $f\left(clf^{-1}(F)\right) \subset clf\left(f^{-1}(F)\right)$. ვინაიდან $f\left(f^{-1}(F)\right) \subset F$, ამიტომ $f\left(clf^{-1}(F)\right) \subset F$. ამრიგად, მივიღებთ, რომ $clf^{-1}(F) \subset f^{-1}(F)$. მეორეს მხრივ ცხადია $f^{-1}(F) \subset clf^{-1}(F)$, ანუ ადგილი აქვს ტოლობას $clf^{-1}(F) = f^{-1}(F)$. მაშასადამე, $f^{-1}(F) \in co\gamma$ და f-უწყვეტია. ■

უწყვეტ ბიექციას $f:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ ეწოდება **ჰომეომორფიზმი** თუკი უწყვეტია შებრუნებული $f^{inv}:(Y,\gamma) \to (X,\tau)$ ასახვაც.

მაგალითი 3.2.1. ჰომეომორფიზმის მაგალითებია $f(x) = x^{2k+1}$ სახის (კენტი ხარისხის ხარისხოვანი) ფუნქციები, სადაც $k \in \mathbf{N}$ და $f:\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

მაგალითი 3.2.2. თუ $X = \{a,b,c,d\}$-ზე განმარტებულია ტოპოლოგია $\tau = \{\phi, X\} \cup \{\{a,b\};\{c\};\{a,b,c\};\{a,b,d\}\}$, ხოლო $Y = \{m,n,p,q\}$ სიმრავლე, აღჭურვილია ტოპოლოგიით $\gamma = \{\phi, Y\} \cup \{\{m,n\};\{p\};\{m,n,p\};\{m,n,q\}\}$, მაშინ $f:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ ასახვა, სადაც $f(a) = n;\ f(b) = m;\ f(c) = p; f(d) = q$, წარმოადგენს ჰომეომორფიზმს.

სავარჯიშოები

III.2.1. დაამტკიცეთ, რომ (X,τ) სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_2 -აქსიომას $\Leftrightarrow$ $(X \times X, \tau \times \tau)$-ში $\Delta(X) = \{(x;y) \in X \times X \mid x = y\} \in co(\tau \times \tau)$.

III.2.2. დაამტკიცეთ, რომ T_1-ტიპის (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე T_3-ტიპისაა $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ -თვის და $\forall U(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x)$ -თვის $\exists V(x) \in \sum_{\tau}^{X}(x)$ მიდამო ისეთი, რომ $clV(x) \subset U(x)$.

III.2.3. დაამტკიცეთ, რომ T_1-ტიპის (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე T_4-ტიპისაა $\Leftrightarrow$ $\forall F \in co\tau$ -თვის და $F \subset U(F) \in \tau$ -თვის $\exists V(F) \in \tau$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს ჩართვას $F \subset V(F) \subset clV(F) \subset U(F)$.

III.2.4. დაამტკიცეთ, რომ თუ $cardX = n$, მაშინ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე T_1-ტიპისაა $\Leftrightarrow$ τ -დისკრეტული ტოპოლოგიაა.

III.2.5. ვთქვათ $X = \{a;b;c;d\}$ და $Y = \{u;v;w\}$, ამასთან $f: X \to Y$ ასახვა ისეთია, რომ $f(a) = u; f(b) = f(c) = v; f(d) = w$. როგორი უნდა იყოს τ -ტოპოლოგია X -ზე, რომ $f:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ იყოს უწყვეტი ასახვა, როცა $\gamma = \{\phi;Y\} \cup \{\{w\};\{u,w\};\{v,w\}\}$

III.2.6. $I = [0;1]$ სეგმენტზე განვიხილოთ $\tau_1 = \{\phi;I\} \cup \{O_\alpha\}_{\alpha \in (0;1]}$ ტოპოლოგია, სადაც $O_\alpha \equiv [0;\alpha[$. თუ განვიხილავთ **R**-ის ჩვეულებრივი ტოპოლოგიიდან I -ზე ინდუცირებულ τ_2 -ტოპოლოგიას, მაშინ როგორ უნდა შეირჩეს $k, j \in \{1;2\}$ -ინდექსები, რომ ფუნქცია $f:(I,\tau_k) \to (I,\tau_j)$ განმარტებული ტოლობით $f(x) = x$, იყოს უწყვეტი. დარწმუნდით, რომ f -არაა ჰომეომორფიზმი.

III.2.7. ვთქვათ $X = \{a;b;c;d\}$ და $\tau = \{\phi;X\} \cup \{\{a,b,c\};\{c,d\};\{c\}\}$, ხოლო $Y = \{m;n;p;q\}$. თუ $f: X \to Y$ ასახვა ისეთია, რომ $f(a) = n; f(b) = m;$ $f(c) = p; f(d) = q$, მაშინ როგორი უნდა ავიღოთ γ -ტოპოლოგია Y -ზე, რომ $f:(X,\tau) \to (Y,\gamma)$ ასახვა იყოს ჰომეომორფიზმი.

III.2.8. დაამტკიცეთ, რომ პროექციები $P_X:(X\times Y,\tau\times\gamma)\to(X,\tau)$ და $P_Y:(X\times Y,\tau\times\gamma)\to(Y,\gamma)$ არიან უწყვეტი ასახვები.

III.2.9. ჩაწერეთ ერთი მაინც უწყვეტი ფუნქცია $f:[2;\,8]\to\mathbf{R}$ ისეთი, რომ $f(2)=-3$, $f(4)=5$, $f(6)=7$ და $f(8)=1$.

III.2.10. განვიხილოთ $X=\{a;b;c;d\}$-ზე $\tau=\{\phi;X\}\cup\{\{a,b\};\{c\};\{a,b,c\}\}$-ტოპოლოგია. როგორი უნდა იყოს γ-ტოპოლოგია X-სიმრავლეზე, რომ $f:(X,\tau)\to(X,\gamma)$ ასახვა განმარტებული პირობებით $f(a)=c$; $f(b)=a$; $f(c)=b$ და $f(d)=d$ იყოს ჰომეომორფიზმი.

§3.3. კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები და მონაცემთა სიმრავლეების ტოპოლოგიური სიახლოვე

სასრული სიმრავლეების თვისებების ანალოგიების ძიებამ უსასრულო სიმძლავრის ტოპოლოგიურ სივრცეებში, წარმოშვა მათემატიკისათვის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ცნება-კომპაქტურობა. თანამედროვე ეტაპზე კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეები მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ კომპიუტერული მეცნიერების რიგ მიმართულებებშიც [5; 10; 23; 24]. მონაცემთა სიმრავლეების ურთიერთსიახლოვის დასადგენად მეტად ეფექტურია ე.წ. მახლოობის ტოპოლოგიური მეთოდების გამოყენება [18]. ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ნორმალურ ტოპოლოგიურ სივრცეებში სიმრავლეთა სიახლოვის განსასაზღვრად საჭირო ერთ კონკრეტულ მეთოდს, რომელიც კომპაქტურ ჰაუსდორფის სივრცეებშიც არის სამართლიანი.

(X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლეთა ოჯახს $\mathcal{G}=\{O_\alpha\subset X\}_{\alpha\in\Lambda}$ ეწოდება X-ის **დაფარვა**, თუ $X=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha$. იმ შემთხვევაში, როცა $\mathcal{G}$-დაფარვა შედგენილია (X,τ) ტოპოლოგიური სი-

ვრცის ღია ქვესიმრავლეებისაგან, მაშინ G-ს X-ის **ღია დაფარვა** ეწოდება.

(X,τ) ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება **კომპაქტური**, თუ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან შეიძლება ამოირჩეს სასრული რაოდ-ენობა დამფარავი სიმრავლეებისა. ამრიგად, (X,τ) სივრცის კომპაქ-ტურობა ლოგიკური სიმბოლოების გამოყენებით ექვივალენტური გზით შემდეგნაირად ჩაიწერება: $\forall G=\{O_\alpha\in\tau\}_{\alpha\in\Lambda}$-თვის ისეთი, რომ $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha$, $\exists\{O_{\alpha 1}\in G;\ O_{\alpha 2}\in G;\ldots;\ O_{\alpha n}\in G\}$, რომელსაც გააჩნია თვისება $X=\bigcup_{k=1}^{n}O_{\alpha k}$.

ზოგჯერ ხელსაყრელია რაიმე ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმ-რავლის კომპაქტურობაზე საუბარი, რაც თავსითავად გულისხმობს, რომ ამ სიმრავლეზე ინდუცირებული ტოპოლოგია არის კომპაქ-ტური. ამრიგად, (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტური ქვე-სიმრავლის ცნება შემდეგნაირად ფორმულირდება: $K\subset X$ სიმრავლ-ეს ეწოდება კომპაქტური თუკი ნებისმიერი $\Im=\{O_\alpha\in\tau\}_{\alpha\in\Lambda}$ ოჯახი ისეთი, რომ $K\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}O_\alpha$, შეიცავს სასრულ ქვეოჯახს $\{O_{\alpha_k}\in\Im\}_{k=\overline{1;n}}$, რომელსაც გააჩნია თვისება $K\subset\bigcup_{k=1}^{n}O_{\alpha_k}$.

კომპაქტურობის განმარტებიდან ტრივიალურად დავსაკვნით: თუ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე ისეთია, რომ $cardX<\aleph_0$, მაშინ ის კომპაქტური სივრცეა. აღსანიშნავია, რომ ნამდვილ რიცხვთა ღერ-

ძზე (ბუნებრივი ტოპოლოგიით) ჩაკეტილი სეგმენტი წარმოადგენს კომპაქტური სიმრავლის მაგალითს [2].

განვიხილოთ ნებისმიერი $[a;b]$-სეგმენტისათვის ისეთი ოჯახი $\Im = \{U_\alpha \in \tau_{\text{ჩვ.}}\}$, რომ $[a;b] \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$. დავუშვათ, რომ $[a;b]$-არაა კომპაქტური ქვესიმრავლე $(\mathbf{R}, \tau_{\text{ჩვ.}})$-ში. გავყოთ $c_1 = \frac{b+a}{2}$-წერტილით $[a;b]$-სეგმენტი შუაზე და განვიხილოთ $[a;c_1]$ და $[c_1;b]$ სეგმენტებისათვის $\Im$-ს ის ელემენტები, რომლებიც ფარავენ მათ. თუკი არსებობს ასეთ სიმრავლეები $\Im$-ში სასრული რაოდენობით (ერთდროულად ორივე სეგმენტისათვის), მაშინ ცხადია მათი გაერთიანება დაფარავს მთელს $[a;b]$-სეგმენტსაც და ამიტომ კომპაქტურობა დამტკიცებული იქნება.

დავუშვათ, რომ ერთ-ერთი სიმრავლე $[a;c_1]$ და $[c_1;b]$ შორის არ იფარება $\Im$-ს შემადგენელი ელემენტების სასრული რაოდენობით. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ ასეთია $[a;c_1]$-სეგმენტი. აღვნიშნოთ $I_1 \equiv [a;c_1]$. გავყოთ კვლავ I_1-სეგმენტი $c_2 = \frac{c_1+a}{2}$-წერტილით შუაზე, ანუ $c_2 = \frac{b+3a}{2^2}$. ჩატარებულის ანალოგიურად, პროცესის გაგრძელებით, ჩვენ მივალთ I_1-თვის $I_2 \subset I_1$ სეგმენტის განხილვის აუცილებლობამდე, და მსგავსი მსჯელობებით კი საბოლოოდ მივიღებთ მიმდევრობას ერთმანეთში ჩალაგებული სეგმენტებისა: $[a;b] \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$. ამასთან I_n-ის სიგრძე

ტოლი იქნება $\frac{b-a}{2^n}$. ამასთან $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{2^n}\right)=0$. ახლა თუ გათვალისწინებთ ცნობილ თეორემას ერთმანეთში ჩალაგებული ჩაკეტილი სეგმენტების შესახებ (თუ $\{I_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ ჩაკეტილი სეგმენტების მიმდევრობა ისეთია, რომ $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$, მაშინ $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ წერტილი, იხ. [2; 13]) ჩვენ დავასკვნით, რომ $\exists c_0$-წერტილი თვისებით: $[a;b] \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c_0\}$. მაშასადამე, $\exists U_{\alpha_0} \in \Im$ ელემენტი ისეთი, რომ $c_0 \in U_{\alpha_0}$. ვინაიდან U_{α_0} ღია სიმრავლეა, ამიტომ $\exists \delta_{c_0} > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $](c_0-\delta_{c_0});\ (c_0+\delta_{c_0})[\ \subset U_{\alpha_0}$. ცხადია, რომ როდესაც $I_n \subset\ ](c_0-\delta_{c_0});\ (c_0+\delta_{c_0})[$, მაშინ $\frac{b-a}{2^n} < 2\cdot\delta_{c_0}$ და ამიტომ ყველა ის I_n-სეგმენტი, რომლის ინდექსი (ნომერი) აკმაყოფილებს პირობას $n \in \left]\log_2\left(\frac{b-a}{2\cdot\delta_{c_0}}\right);\ +\infty\right[\cap \mathbf{N}$, არის ქვესიმრავლე $](c_0-\delta_{c_0});\ (c_0+\delta_{c_0})[$ -ის.

შევნიშნოთ, რომ როცა $n \in \left]\log_2\left(\frac{b-a}{2\cdot\delta_{c_0}}\right);\ +\infty\right[\cap \mathbf{N}$, მაშინ ყოველი $I_n \subset U_{\alpha_0} \in \Im$. ამრიგად ჩვენ დავსკვნით, რომ ყოველი I_n-სეგმენტი, რომლის ნომერი $n \in \left]\log_2\left(\frac{b-a}{2\cdot\delta_{c_0}}\right);\ +\infty\right[\cap \mathrm{N}$, იფარება ერთადერთი U_{α_0}-ით. მიღებული დასკვნა კი ეწინააღმდეგება დაშვებას: I_n-თვის $\Im$-ს ელემენტებით სასრული დაფარვის არ არსებობის შესახებ.

თეორემა 3.3.1. თუ (X,τ) კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $F \in co\tau$, მაშინ F კომპაქტური ქვესიმრავლეა X-ში.

დამტკიცება. განვიხილოთ F-ის ნებისმიერი $\mathrm{T} = \{O_\alpha \in \tau\}_{\alpha \in \Lambda}$ დაფარვა, მაშინ ცხადია, რომ $\mathrm{H} = \{O_\alpha \in \tau,\ O \equiv (X \setminus F) \in \tau\}_{\alpha \in \Lambda}$ სიმრავლეთა ოჯახიც X-ის დაფარვაა. (X,τ)-ს კომპაქტურობიდან გამომდინარეობს, რომ H-დან შესაძლებელია ამოირჩეს სასრული რაოდენობა X-ის დამფარავი ელემენტებისა. ამ უკანასკნელიდან კი იოლად დავასკვნით არსებობას სასრული რაოდენობა ღია სიმრავლეებისა T-დაფარვაში, რომლებიც თავის მხრივ ფარავენ F-ს. ■

მომდევნო პარაგრაფში გადმოცემული მასალის აღსაქმელად მნიშვნელოვანია შემდეგი რეზულტატის ცოდნა

თეორემა 3.3.2. თუ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე აკამაყოფილებს განცალების T_2-აქსიომას, ხოლო $K \subset X$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა, მაშინ $K \in co\tau$.

დამტკიცება. ცხადია, თუ ჩვენ ვაჩვენებთ $(X \setminus K) \in \tau$, ანუ, რომ $\forall \xi \in (X \setminus K) \Rightarrow \xi \in \operatorname{int}(X \setminus K)$, მაშინ რეზულტატი დამტკიცებული იქნება. ამისათვის ავიღოთ $\forall a \in K$ წერტილი და შევნიშნოთ, რომ (X,τ)-ს ჰაუსდორფობიდან გარანტირებულია არსებობა ისეთი $U_a(\xi) \in \sum_\tau^X(\xi)$ და $V_\xi(a) \in \sum_\tau^X(a)$, რომ $U_a(\xi) \cap V_\xi(a) = \phi$. აქედან ცხადია, რომ $V_\xi(a) \subset X \setminus U_a(\xi)$. ვინაიდან $\{V_\xi(a)\}_{a \in K}$ ოჯახი არის K-ის ღია დაფარვა, ხოლო K-კომპქატურია, ამიტომ

$\exists\{V_\xi(a_1);V_\xi(a_2);...;V_\xi(a_n)\}\subset\{V_\xi(a)\}_{a\in K}$ ისეთი, რომ $K\subset\bigcup_{t=1}^{n}V_\xi(a_t)$. ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის გამო, ცხადია, რომ $K\subset\bigcup_{t=1}^{n}V_\xi(a_t)\subset$ $\subset\bigcup_{t=1}^{n}\left(X\setminus U_{a_t}(\xi)\right)=X\setminus\left(\bigcap_{t=1}^{n}U_{a_t}(\xi)\right)$. განვიხილოთ ახლა სიმრავლე $U(\xi)\equiv\bigcap_{t=1}^{n}U_{a_t}(\xi)\in\sum_\tau^X(\xi)$ და უკანასკნელი ჩართვის საფუძველზე შე- ვნიშნოთ, რომ $U(\xi)\subset(X\setminus K)$, ე.ი. $\xi\in\mathrm{int}(X\setminus K)$.■

თეორემა 3.3.3. ყოველი კომპაქტური ჰაუსდორფის (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე არის ნორმალური.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\forall F_1,F_2\in co\tau$ სიმრავლეების ისეთი წყვილი, რომ $F_1\cap F_2=\phi$. ვთქვათ $x\in F_2$ ნებისმიერად ფიქსირებული წერტილია, ხოლო $\xi\in F_1$, მაშინ (X,τ)-ს ჰაუსდორფობიდან$\Rightarrow$ $\Rightarrow\exists U_x(\xi)\in\sum_\tau^X(\xi)$ და $G_\xi(x)\in\sum_\tau^X(x)$ ისეთი, რომ $U_x(\xi)\cap G_\xi(x)=\phi$. ცხადია, რომ $\{U_x(\xi)\in\tau\setminus\{\phi\}\}_{\xi\in F_1}$-ოჯახი წარმოადგენს F_1-კომპქატური სიმრავლის დაფარვას, ამიტომ $\exists\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}\subset F_1$ ისეთი, რომ $F_1\subset\bigcup_{k=1}^{n}U_x(\xi_k)$. აღვნიშნოთ $U\equiv\bigcup_{k=1}^{n}U_x(\xi_k)\in\sum_\tau^X(F_1)$ და $G\equiv\bigcap_{k=1}^{n}G_{\xi_k}(x)\in$ $\in\sum_\tau^X(x)$, მაშინ ცხადია, რომ ადგილი აქვს თანაფარდობას:

$$U\cap G=\bigcup_{k=1}^{n}U_x(\xi_k)\cap\bigcap_{k=1}^{n}G_{\xi_k}(x)=\bigcup_{k=1}^{n}\left(U_x(\xi_k)\cap\bigcap_{k=1}^{n}G_{\xi_k}(x)\right)=$$

$=\bigcup_{k=1}^{n}\bigcap_{k=1}^{n}\left(U_x(\xi_k)\cap G_{\xi_k}(x)\right)=\phi$. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე რეგულარულია, მაგრამ დასამტკიცებელია სივრცის ნორმალურობა.

შევნიშნოთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის რეგულარობის გამო და $F_1, F_2 \in co\tau$ სიმრავლეების თანაუკვეთობიდან $\Rightarrow$ $\forall x\in F_2$ -თვის $\exists V(x)\in \sum_\tau^X(x)$ და $U_x(F_1)\in \sum_\tau^X(F_1)$ ისეთი, რომ $V(x)\cap U_x(F_1)=\phi$. ვინაიდან F_2 -კომპაქტურია, ამიტომ $\exists\{x_1,\, x_2,\dots,\, x_n\}\subset F_2$ ისეთი, რომ $F_2\subset \bigcup_{k=1}^{n}V(x_k)$. აღვნიშნოთ $V\equiv \bigcup_{k=1}^{n}V(x_k)$ და $U\equiv \bigcap_{k=1}^{n}U_{x_k}(F_1)\supset F_1$, მაშინ ცხადია, რომ $U\cap V=\phi$, ე.ი. (X,τ) არის ნორმალური. ■

თეორემა 3.3.4. ვთქვათ, რომ (X,τ) კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ უწყვეტი სურექციული ასახვაა, მაშინ (Y,γ) -კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა.

დამტკიცება. განვიხილოთ (Y,γ) -ს რაიმე $\mathrm{H}=\{U_\alpha\in\gamma\}_{\alpha\in\Lambda}$ დაფარვა, ე.ი. $Y=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$. f -ის უწყვეტობის გამო ცხადია, რომ $f^{-1}(U_\alpha)\in\tau$, $\forall\alpha\in\Lambda$ -თვის. შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს $X=f^{-1}(Y)=f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(U_\alpha)$ ტოლობას, ანუ სიმრავლეთა ოჯახი $\{f^{-1}(U_\alpha)\in\tau\}_{\alpha\in\Lambda}$ წარმოადგენს X -ის ერთ-ერთ შესაძლო ღია დაფარვას. მაშასადამე, (X,τ) -ს კომპაქტურობის გამო, არსე-

ბობს სასრული რაოდენობა სიმრავლეებისა $\left\{f^{-1}(U_{\alpha k})\right\}_{k=\overline{1;n}}$, ისეთი, რომ $X=\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha k})$. f-ის სურექციულობის გამო ჩვენ გვაქვს:

$Y=f(X)=f\left(\bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha k})\right)=\bigcup_{k=1}^{n} f\left(f^{-1}(U_{\alpha k})\right)=\bigcup_{k=1}^{n} U_{\alpha k}$, ე.ი. (Y,γ)-კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა.■

ამბობენ, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია **მახლოობის** მიმართება δ თუ:

P1. $\phi\bar{\delta}X$;

P2. $A\delta B \Leftrightarrow B\delta A$;

P3. $\{x\}\delta\{y\} \Leftrightarrow x=y$;

P4. $A\delta(B\cup C) \Leftrightarrow A\delta B \vee A\delta C$;

P5. $A\bar{\delta}B \Rightarrow \exists C,D\subset X$ ისეთები, რომ $C\cap D=\phi$, $X=C\cup D$ და $A\bar{\delta}C \wedge B\bar{\delta}D$.

შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ მნიშვნელოვან რეზულტატს

თეორემა 3.3.5. თუ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე ნორმალურია (ანუ **T**$_4$-ტიპისაა), მაშინ სიმრავლეებს შორის მახლოობის მიმართება შესაძლებელია განიმარტოს $A\delta_\tau B \Leftrightarrow clA\cap clB\neq\phi$ ეკვივალენციით.

დამტკიცება. $A\delta_\tau B \Leftrightarrow clA\cap clB\neq\phi$ ეკვივალენტობიდან პირდაპირ დავასკვნით, რომ P1 და P2-აქსიომები დაკმაყოფილებულია. P3-

აქსიომასთან თავსებადობა არის შედეგი (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ნორმალურობისა (რამეთუ იგი არის განმარტებით $\mathbf{T}_1$-ტიპის სივრცეც და ამიტომ, მასში ყოველი ერთწერტილოვანი სიმრავლე ჩაკეტილია). P4-თან თავსებადობის შესამოწმებლად საჭიროა განვიხილოთ $A\delta_\tau(B\cup C)\Leftrightarrow\phi\neq clA\cap cl(B\cup C)=(clA\cap clB)\cup(clA\cap clC)\Leftrightarrow$

$\phi\neq(clA\cap clB)\vee(clA\cap clC)\neq\phi\Leftrightarrow(A\delta_\tau B)\vee(A\delta_\tau C)$. დასასრულ შევნიშნოთ, რომ P5-აქსიომასთან თავსებადობა გამომდინარეობს (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის ნორმალურობის მოთხოვნიდან. მართლაც, თუკი $A\overline{\delta_\tau}B\Leftrightarrow clA\cap clB=\phi\Rightarrow\exists\ O_1\in\sum_\tau^X(clA)$ და $O_2\in\ \in\sum_\tau^X(clB)$, ისეთი, რომ $O_1\cap O_2=\phi$. თანახმად სავარჯიშო III.2.3-სა ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $D\in\sum_\tau^X(clA)$, რომ $clD\subset O_1$. აქედან ცხადია $clD\cap clB=\phi$, ანუ $B\overline{\delta_\tau}D$. მეორე მხრივ, თუ განვიხილავთ $C=(X\setminus D)\in co\tau$, მაშინ $C=clC$ და $C\cap clA=clC\cap clA=\phi$, ე.ი. $A\overline{\delta}_\tau C$. ■

თეორემა 3.3.6. თუ (X,τ) და (Y,γ) ნორმალური ტოპოლოგიური სივრცეებია, ხოლო $f:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ უწყვეტი, მაშინ $A\delta_\tau B\Rightarrow$ $\Rightarrow f(A)\delta_\gamma f(B)$, $\forall A,B\subset X$ -თვის.

დამტკიცება. თეორემა 3.3.5-ის საფუძველზე ცხადია, რომ შესაძლებელია δ_τ და δ_γ-ტიპის მახლოობის სტრუქტურების განსაზღვრა (X,τ) და (Y,γ) ტოპოლოგიურ სივრცეებზე, შესაბამისად. თეორემა 1.4.1 და თეორემა 3.2.3-ის ძალით გვექნება $\phi\neq f(clA\cap clB)\subset$ $\subset f(clA)\cap f(clB)\subset clf(A)\cap clf(B)$, ანუ $A\delta_\tau B\Rightarrow f(A)\delta_\gamma f(B)$. ■

დასასრულ შევნიშნოთ, რომ ყოველ კომპაქტურ ჰაუსდორფის სივრცეში შეიძლება ზემოაღნიშნული გზით განიმარტოს მახლოობის მიმართება, რამეთუ იგი თეორემა 3.3.3-ის გამო არის ნორმალური სივრცე.

სავარჯიშოები

III.3.1. სიმრავლეთა $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ოჯახს ეწოდება **ცენტრირებული**, თუკი მის ყოველ სასრულ ქვეოჯახს გააჩნია თვისება: $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_{\alpha_k} \neq \phi$. დაამტკიცეთ, რომ (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცე კომპაქტურია $\Leftrightarrow$ ჩაკეტილი სიმრავლეების ყოველ ცენტრირებულ $\{F_\alpha \in co\,\tau\}_{\alpha\in\Lambda}$ ოჯახობას გააჩნია თვისება: $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \phi$.

III.3.2. კომპაქტურაია თუ არა $(\mathbf{N}^*, \tau)$ ტოპოლოგიური სივრცე, სადაც $\mathbf{N}^* = \mathrm{N}\cup\{\infty\}$ და $\tau = \{\phi; \mathrm{N}^*\}\cup\{O \mid O_n =]n;\ \infty]\cap \mathrm{N},\ n\in \mathrm{N}\}$.

III.3.3. თუ K_1 და K_2 არიან (X,τ) ტოპოლოგიური სივრცის კომპაქტური ქვესიმრავლეები, მაშინ კომპაქტურია თუ არა $K_1\cup K_2$ და $K_1\cap K_2$ სიმრავლეები?

III.3.4. კომპაქტურია თუ არა $A =]-\infty;\ \alpha]\cup[\beta;\ +\infty[$ სიმრავლე $\mathbf{R}$-ზე განმარტებულ ბუნებრივ ტოპოლოგიაში?

III.3.5. წრეწირი არის თუ არა სიბრტყის კომპაქტური ქვესიმრავლე?

III.3.6. დაადგინეთ ურთიერთმახლობელია თუ არა $A=\{3;4\}\cup]6;\ 10[$ და $B=]-2;\ 5[$ სიმრავლეები **R**-ზე განმარტებულ ბუნებრივ ტოპოლოგიაში.

III.3.7. განვიხილოთ $\mathbf{R}^2$ მასზე განმარტებული ნამრავლის ბუნებრივი ტოპოლოგით. თუ $A=[1;4]\times[0;4]$-ზე შემოვტანთ ინდუცირებულ ტოპოლოგიას, მაშინ დაადგინეთ მახლობელია თუ არა სიმრავლეები $B=[3;4]\times[0;2[$ და $C=[1;3]\times]2;4]$?

III.3.8. ვთქვათ (Y,γ) ნორმალური სივრცეა. $f;g:(X,\tau)\to(Y,\gamma)$ ასახვებს ვუწოდოთ მახლობელი თუკი $G(f)\delta G(g)$. მახლობელია თუ არა $f(x)=\begin{cases}3x, & \text{თუ } 0\le x<1\\ 5, & \text{თუ } 1\le x<2\end{cases}$ და $g(x)=\left(8+2\sqrt{15}\right)x^2-\left(22+6\sqrt{15}\right)x+17+4\sqrt{15}$ ფუნქციები?

III.3.9. მრავალსახა ასახვა $F:\mathbf{N}\to \mathrm{P}(\mathbf{R}^2)$ მოცემულია შემდეგი ფორმულით: $F(n)=\left\{(x,y)\mid\sqrt{(x-n)^2+y^2}=\frac{1}{2}\right\}\setminus\left\{\left(\frac{2n+1}{2};\ 0\right)\right\}$. აჩვენეთ, რომ $F(k)\delta F(l)\Leftrightarrow l=k+1$, სადაც $k,l\in\mathbf{N}$.

III.3.10. თუ (X,τ) ნორმალური სივრცეა, ხოლო $A\delta B$ და $A\delta C$, მაშინ ამბობენ, რომ B-სიმრავლე არის A-თან მეტად მახლობელი, ვიდრე C-სიმრავლე, თუ $card(clA\cap clB)>card(clA\cap clC)$. განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლეების წყვილი $B=\left\{(x,y)\mid(x-3)^2+y^2=1\right\}\setminus\{(2;\ 0)\}$ და

$C=\left\{(x,y)\mid (x-3)^2+y^2=4\right\}\setminus\left\{\left(1{,}5;\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right);\ \left((1{,}5;\ -\frac{\sqrt{7}}{2})\right)\right\}$. განსაზღვრეთ რომელ-

ია მეტად მახლობელი $A=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\right\}\setminus\left\{(1{,}5;\ -\frac{\sqrt{7}}{2})\right\}$-თან.

§3.4. მონაცემთა სიახლოვის მეტრიკული ანალიზი

რიცხვით მონაცემებიან ბაზებში ძებნის, სახეთა კომპიუტერული ანალიზის და მრავალი სხვა პრაქტიკული ამოცანებისათვის ოპტიმალური ალგორითმების და მათ საფუძველზე პროგრამების ჩასაწერად მეტად მნიშვნელოვანია მეტრიკული საოპტიმიზაციო ფუნქციების განხილვა [24; 25]. ამ ტიპის ფუნქციების ჩაწერას ახორციელებენ ნებისმიერ მონაცემთა სიმრავლეებს შორის მანძილების განმსაზღვრელი გამოსახულებების შედგენით.

ამბობენ, რომ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია **მეტრიკა** (ანუ, შემოტანილია **მანძილის** სტრუქტურა), თუკი მოცემულია

$$d: X\times X\to [0;+\infty[$$

ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს აქსიომათა შემდეგ სისტემას:

M1) $d(x;y)\ge 0$, ამასთან $d(x;y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

M2) $d(x;y)=d(y;x)$, $\forall x;y\in X$ -თვის;

M3) $d(x;y)\le d(x;z)+d(z;y)$, $\forall x;y;z\in X$ -თვის.

ჩვეულებრივ, (X,d) წყვილს **მეტრიკულ სივრცეს** უწოდებენ.

შევნიშნოთ, რომ ყოველ არაცარიელ X სიმრავლეზე შესაძლებელია განიმარტოს ტრივიალური მეტრიკა: $t(x,y)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x=y\\ 1, & \text{თუ } x\ne y\end{cases}$. მეტრიკული სივრცეების უმნიშვნელოვანესი მაგალითებია: $(\mathbf{R},d_1)$, სადაც მეტრიკა განისაზღვრება ტოლობით $d_1(x,y)=|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$-

თვის; $(\mathbf{R^2}, d_2)$-ნამდვილი სიბრტყე ე.წ. 2-განზომილებიანი ევკლიდური მეტრიკით $d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $\forall x=(x_1;x_2)$, $y=(y_1;y_2)\in$ $\in \mathbf{R^2}$-თვის.

მეტრიკული ფუნქციების სხვა სპეციალური მაგალითების განხილვამდე მიზანშეწონილია წრფივი ალგებრის კურსიდან გავიხსენოთ ზოგიერთი მნიშვნელოვანი განმარტება.

ამბობენ, რომ მოცემულია ნამდვილი L-წრფივი (აფინური) სივრცე, თუ L-სიმრავლეში განსაზღვრულია მისი ელემენტების შეკრების და ნამდვილ რიცხვზე გამრავლების ოპერაციები, რომლებიც ქვემოთ ჩამოთვლილ აქსიომებს აკმაყოფილებენ:

L1) $x+y=y+x$, $\forall x,y\in L$ -თვის;

L2) $(x+y)+z=x+(y+z)$, $\forall x,y,z\in L$ -თვის;

L3) $\exists o\in L$ -ნულოვანი ელემენტი ისეთი, რომ $o+x=x$, $\forall x\in L$ -თვის;

L4) $\forall x\in L$ -თვის $\exists(-x)\in L$ (მოპირდაპირე ელემენტი) ისეთი, რომ $x+(-x)=o$;

L5) $1\cdot x=x$, $\forall x\in L$ -თვის (აქ $1\in\mathbf{R}$);

L6) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=\alpha\beta\cdot x$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbf{R}$ და $\forall x\in L$ -თვის;

L7) $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$, $\forall \alpha,\beta\in\mathbf{R}$ და $\forall x\in L$ -თვის;

L8) $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$, $\forall \alpha\in\mathbf{R}$ და $\forall x,y\in L$ -თვის.

ვთქვათ, დაფიქსირებულია რაიმე L-წრფივი სივრცე. ვიტყვით, რომ L-ში განსაზღვრულია სკალარული ნამრავლის ოპერაცია $<.,.>: L\times L \to \mathbf{R}$ თუ შესრულებულია შემდეგი აქსიომები:

S1) $<x,y> = <y,x>$, $\forall x,y\in L$-თვის;

S2) $<\lambda\cdot x,y> = \lambda\cdot <x,y>$, $\forall x,y\in L$-თვის და $\forall\lambda\in\mathbf{R}$-თვის;

S3) $<x+y,z> = <x,z> + <y,z>$, $\forall x,y,z\in L$-თვის.

აქვე შევნიშნოთ, რომ $\sqrt{<x,x>}$-სიდიდეს ეწოდება x-ვექტორის მოდული (სიგრძე) და მას ჩვეულებრივ, $|x|$-ით აღნიშნავენ.

წრფივ სივრცეს, რომელშიაც განმარტებულია დამატებით სკალარული ნამრავლის ოპერაცია ეწოდება **ევკლიდური სივრცე**. ამ უკანასკნელიდან ცხადია, რომ $\mathbf{R}^n$-ში ნებისმიერი ორი $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ და $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი შესაძლებელია ვუწოდოთ სიდიდეს, რომელიც გამოითვლება ანალიზური გეომეტრიის კურსიდან ცნობილი ფორმულით $<x,y> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. ამრიგად $\mathbf{R}^n$-ევკლიდური სივრცეა.

აღსანიშნავია ლ. შვარცის შემდეგი

ლემა 3.4.1 ნებისმიერ ევკლიდურ სივრცეში ადგილი აქვს უტოლობას:

$$(<x,y>)^2 \le\ <x,x>\cdot<y,y>$$

დამტკიცება. ვინაიდან $\forall\lambda,\mu\in\mathbf{R}$-თვის სკალარული ნამრავლი $<(\lambda\cdot x+\mu\cdot y),(\lambda\cdot x+\mu\cdot y)> \ \ge 0$, ამიტომ $\lambda^2\cdot|x|^2 + 2\lambda\mu\cdot<x,y> + \mu^2\cdot|y|^2 \ge 0$.

თუ კერძოდ განვიხილავთ მნიშვნელობებს $\lambda=|y|^2$ და $\mu=-<x,y>$, მაშინ ჩვენ პირდაპირი ჩასმით მივიღებთ:

$|y|^4|x|^2-2|y|^2\cdot(<x,y>)^2+(<x,y>)^2|y|^2\geq 0$, ე.ი. $\left(|x|^2|y|^2-(<x,y>)^2\right)|y|^2\geq 0$.

მაშასადამე, თუ $y\neq o$ ცხადია $|y|>0$, ე.ი. $|x|^2|y|^2-(<x,y>)^2\geq 0$. დასამტკიცებელი უტოლობა ტრივიალურად სამართლიანია მაშინაც, როცა $y=o$ (ნულოვანი ვექტორია). ■

n-განზომილებიან ნამდვილ სივრცეში $\mathbf{R}^n$ ევკლიდური მეტრიკა განიმარტება $d_n(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ ტოლობით, სადაც $n\geq 2$ და $\forall x=(x_1;x_2;...;x_n)$, $y=(y_1;y_2;...;y_n)\in\mathbf{R}^n$. მართლაც, ის რომ ფუნქცია d_n აკმაყოფილებს ***M1)-M2)*** აქსიომებს არის ცხადი. ***M3)*** აქსიომასთან თავსებადობა კი მოწმდება შემდეგნაირად: საჭიროა ვაჩვენოთ უტოლობა $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2}$, სადაც $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, $y=(y_1;y_2;...;y_n)$, $z=(z_1;z_2;...;z_n)\in\mathbf{R}^n$ ვექტორთა ნებისმიერი სამეულია. აღვნიშნოთ $m_k\equiv x_k-z_k$ და $p_k\equiv z_k-y_k$, მაშინ დასამტკიცებელი უტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად: $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(m_k+p_k)^2}\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{n}m_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}p_k^2}$. ლემა 3.4.1-ის საფუძველზე გვექნება $\left(\sum_{k=1}^{n}(m_kp_k)\right)^2\leq\sum_{k=1}^{n}m_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}p_k^2$. ახლა განვიხილოთ

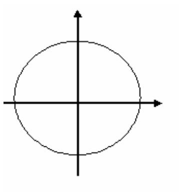
$$\sum_{k=1}^{n}(m_k+p_k)^2=\sum_{k=1}^{n}{m_k}^2+2\cdot\sum_{k=1}^{n}m_k p_k+\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\le\sum_{k=1}^{n}{m_k}^2+2\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{m_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2}\ +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{m_k}^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2}\right)^2$$, ე.ი. მივიღეთ დასამტკიცებელი უტოლობის სამართლიანობა.

კომპიუტერულ გრაფიკაში სახეთა ანალიზისას ხშირად გამოიყენება $\mathbf{R}^n$-თვის ცნობილი შემდეგი ორი მეტრიკა, ე.წ. **მანჰეტენის** $d_{M,n}(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$ და **შახმატის დაფის** $d_{Ch,n}(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,$ $|x_2-y_2|,\ \ldots,|x_n-y_n|\}$, $\forall x=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$, $y=(y_1;y_2;\ldots;y_n)\in\mathbf{R}^n$.

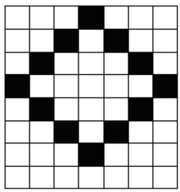
ცნობილია, რომ კომპიუტერის მონიტორი (დისპლეი) დაყოფილია მცირე ზომის (მილიონობით რაოდენობის) კვადრატულ უჯრედებად, რაც ერთიანობაში წარმოადგენს ერთგვარ სასრულ-უჯრედებიან ბადეს. თითოეულ უჯრედს ტექნიკურ ენაზე **პიქსელი** ეწოდება და იგი არის მონიტორის სიბრტყის უმცირესი ნაწილი. შედარებისათვის შევნიშნოთ, რომ თუ ნამდვილ სიბრტყეზე ($\mathbf{R}^2$-ში) წერტილი წარმოადგენს უმცირესი ზომის ობიექტს, ასევე პიქსელი არის წერტილის ანალოგი მონიტორზე. ამრიგად, მონიტორის სიბრტყეზე ყოველი პიქსელის მდებარეობა შეიძლება დახასიათდეს მხოლოდ მთელრიცხვა კოორდინატებით. მაშასადამე, ჩვენ საქმე გვაქვს 2-განზმილებიან (სასრულ) მთელრიცხვა სიბრტყესთან, ანუ როგორც მათემატიკურად ჩაწერენ ხოლმე $\mathbf{Z}^2=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$-ის სასრულ ნა-

წილთან. ცხადია, რომ $d_{M,2}$ და $d_{Ch,2}$ მეტრიკები იძლევა შესაძლებლობას პიქსელებს შორის მთელრიცხვა მანძილების გამოთვლისა და მრავალი გეომეტრიული ფიგურის ციფრული გამოსახვისა. ნახ.3.4.1, 3.4.2., 3.4.3-ზე თვალსაჩინოების მიზნით წარმოდგენილია 3-რადიუსის მქონე წრეწირის გამოსახულებები შესაბამის მეტრიკებში



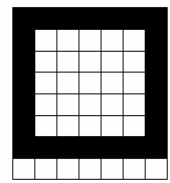
ნახ.3.4.1

წრეწირი ევკლიდურ მეტრიკაში



ნახ.3.4.2

წრეწირი $d_{M,2}$-მეტრიკაში



ნახ.3.4.3

წრეწირი $d_{Ch,2}$-მეტრიკაში

აღსანიშნავია, რომ $[a;b]$-სეგმენტზე განსაზღვრული **უწყვეტი ფუნქციების** $C[a;b]$-სიმრავლეზე მეტრიკა (მანძილი ორ უწყვეტ ფუნქციას შორის) შესაძლებელია განისაზღვროს შემდეგი ფორმულით:

$$d(f,g)=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,dx}$$

$\forall f,g:[a;b]\to \mathbf{R}$ უწყვეტი ფუნქციებისათვის. ცხადია, რომ როცა $f(x)=g(x)$, $\forall x\in[a;b]$-თვის, მაშინ $d(f,g)=0$. ***M2)***-აქსიომასთან თავსებადობა ტრივიალურია.

$d(f,g)$-ფუნქცია აკმაყოფილებს ***M1)***-აქსიომის იმ ნაწილსაც, სადაც საუბარია, რომ ნულოვანი მანძილით დაშორებული წერტილები ერთმანეთს ემთხვევიან. ამრიგად უნდა შევამოწმოთ პირობა $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}=0 \Rightarrow f(x)=g(x)$, $\forall x\in[a;b]$-თვის. ეს კი თავის მხრივ ეყრდნობა განსაზღვრული ინტეგრალის შესახებ ცნობილ რეზულტატს [იხ. 13, გვ. 360]: **თუ ნამდვილი ცვლადის ნამდვილ მნიშვნელობებიანი ფუნქცია** $f(x)\geq 0$**,** $\forall x\in[a;b]$**-თვის და** $f(x)$**-უწყვეტია, ამასთან** $\exists x_0\in[a;b]$ **ისეთი, რომ** $f(x_0)>0$**, მაშინ** $\int_a^b f(x)dx>0$.

ვიგულისხმოთ, რომ $f(x)\neq g(x)$, $\forall x\in[a;b]$-თვის, ე.ი. დავუშვათ, რომ $\exists \xi\in[a;b]$ ისეთი, რომ $f(\xi)\neq g(\xi)$. მაშასადამე, $(f(\xi)-g(\xi))^2>0$. ვინაიდან $(f(x)-g(x))^2\geq 0$, $\forall x\in[a;b]$-თვის და $(f(x)-g(x))^2$-უწყვეტია, ამიტომ განსაზღვრული ინტეგრალის დადებითობის ზემოაღნიშნული თვისების გამო ჩვენ გვექნება $\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx>0$, მაგრამ $d(f,g)=\sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}=0$. მიღებული წინააღმდეგობა ადასტურებს d-თვის ***M1)***-აქსიომის სამართლიანობას. d-თვის ***M3)***-აქსიომის შესამოწმებლად საჭიროდ მიგვაჩნია შემდეგი განმარტებების გაკეთება:

თუ განვიხილავთ ფიქსირებულ $[a;b]$-სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქციების სიმრავლეს $C[a;b]$, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია შევნიშნოთ, რომ თუ $\forall f,g\in C[a;b]$-თვის $(f+g)(t)=f(t)+g(t)\in C[a;b]$ და $(\lambda\cdot f)(t)=\lambda\cdot f(t)$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $t\in[a;b]$-თვის, მაშინ ასეთი ოპერაციებით $C[a;b]$ სიმრავლე გადაიქცევა წრფივ სივრცედ (რაც ნიშნავს, რომ ასეთი სტრუქტურა აკმაყოფილებს L1)-L8) აქსიომებს). მეტიც, თუ $\forall f,g\in C[a;b]$-ფუნქციებისათვის სკალარულ ნამრავლს განვმარტავთ შემდეგნაირად: $<f,g>=\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt$, მაშინ $C[a;b]$ გადაიქცევა ევკლიდურ სივრცედ (ასე განმარტებული სკალარული ნამრავლი აკმაყოფილებს S1)-S3) აქსიომებს). ვინაიდან ჩვენ ზემოთ ვაჩვენეთ ლ.შვარცის უტოლობის სამართლიანობა ნებისმიერ ევკლიდურ სივრცეში, ცხადია ამ კერძო შემთხვევაშიც ($C[a;b]$-თვის) ადგილი ექნება უტოლობას:

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt\le\sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\cdot\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}\ .$$

M3-აქსიომა (სამკუთხედის) გამომდინარეობს ლ. შვარცის უტოლობიდან, $\forall u(x),v(x),w(x)\in C[a;b]$ ფუნქციებისათვის გვექნება:

$$d(u,v)=\sqrt{\int_a^b[u(x)-v(x)]^2dx}=\sqrt{\int_a^b[u(x)-w(x)+w(x)-v(x)]^2dx}=$$

$$=\sqrt{\int_a^b[u(x)-w(x)]^2dx+2\int_a^b[u(x)-w(x)][w(x)-v(x)]dx+\int_a^b[w(x)-v(x)]^2dx}\le$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b [u(x)-w(x)]^2\,dx + 2\sqrt{\int_a^b [u(x)-w(x)]^2 dx}\cdot\sqrt{\int_a^b [w(x)-v(x)]^2 dx} + \int_a^b [w(x)-v(x)]^2\,dx} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{\int_a^b [u(x)-w(x)]^2 dx} + \sqrt{\int_a^b [w(x)-v(x)]^2 dx}\right)^2} = \sqrt{\int_a^b [u(x)-w(x)]^2 dx} + \sqrt{\int_a^b [w(x)-v(x)]^2 dx} =$$

$$= d(u,w) + d(w,v).$$

(X,d) მეტრიკულ სივრცეებში მნიშვნელოვანია შემდეგი სიმრავ-ლეები:

r რადიუსიანი **სფერო** ცენტრით $a \in X$ წერტილში ეწოდება სიმრავლეს $S_{a,r} = \{x \in X \mid d(x,a) = r\}$;

r-რადიუსიანი **ღია ბირთვი** ცენტრით $a \in X$ წერტილში ეწო-დება სიმრავლეს $B^{\circ}{}_{a,r} = \{x \in X \mid d(x,a) < r\}$;

r-რადიუსიანი **ჩაკეტილი ბირთვი** ცენტრით $a \in X$ წერტილში ეწოდება სიმრავლეს $B^{\bullet}{}_{a,r} = \{x \in X \mid d(x,a) \leq r\}$.

ზემოთ მოყვანილი განმარტებებიდან ცხადია $B^{\bullet}{}_{a,r} \setminus S_{a,r} = B^{\circ}{}_{a,r}$. საგულისხმოა, რომ ყოველი (X,d) მეტრიკული სივრცე წარმო-შობს ტოპოლოგიურ სივრცეს $(X,\tau(d))$, ამასთან $\tau(d)$-ტოპოლოგია-ში ღია სიმრავლეებად მოიაზრება ყველა ის $U \subset X$ სიმრავლე, რო-მლის $\forall a \in U$ წერტილისათვის $\exists \varepsilon > 0$, ისეთი, რომ $B^{\circ}_{a,\varepsilon} \subset U$.

(X,d) მეტრიკულ სივრცეში მის ქვესიმრავლეებს შორის მან-ძილის განსასაზღვრად სარგებლობენ გამოსახულებით:

$$\Theta(A,B) = \begin{cases} \inf\{d(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}, \text{ თუ } A \neq \phi \neq B \\ 1, \text{ თუ } A = \phi \vee B = \phi. \end{cases}$$

აღსანიშნავია, რომ Θ-არ წარმოადგენს მეტრიკას, მიუხედავად იმისა, რომ ის „ახლოსაა'' მასთან. მართლაც, ტრივიალურია ის ფაქტი, რომ ფუნქცია Θ აკმაყოფილებს ***M2)***-აქსიომას. არაცარიელი სიმრავლეების შემთხვევაში ჩვეულებრივ $\forall a \in A, b \in B, c \in C$-თვის ძალაშია სამკუთხედის უტოლობა $d(a,b) \le d(a,c) + d(c,b)$, საიდანაც ინფიმუმზე გადასვლით პირდაპირ მივიღებთ უტოლობას:

$$\inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\} \le \inf\{d(a,c) + d(c,b) \mid a \in A, b \in B, c \in C\} =$$

$$= \inf\{d(a,c) \mid a \in A, c \in C\} + \inf\{d(c,b) \mid c \in C, b \in B\}.$$

ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ $\Theta(A,B) \le \Theta(A,C) + \Theta(C,B)$. თუკი $A = \phi$, მაშინაც ადგილი აქვს $\Theta(\phi, B) = 1 \le 1 = \Theta(\phi, C) + \Theta(C,B)$. Θ-ს ***M1)***-აქსიომასთან თავსებადობის შემოწმებისას ჩვენ დავასკვნით, რომ $\Theta(A,B) = 0$ პირობიდან არ გამომდინარეობს $A = B$ ტოლობა. სწორედ ამ უკანასკნელის გამო ჩვენ ვერ მოვიხსენიებთ Θ-ს მეტრიკად.

საგულისხმოა, რომ (X,d) მეტრიკულ სივრცეში რაიმე a წერტილიდან $B \ne \phi$ სიმრავლემდე მანძილის გამოსათვლელად სარგებლობენ $\Theta(\{a\}, B) = \Theta(a,B) = \inf\{d(a,b) \mid b \in B\}$-ით. ამასთან, ცხადია რომ თუ $a \in B$, მაშინ $\Theta(a,B) = 0$.

ვაჩვენოთ, რომ თუ $cardA_k < \aleph_0$, სადაც $k \in \{1;2\}$, მაშინ მანძილი A_1 და A_2 სიმრავლეებს შორის განიმარტება შემდეგი ფუნქციით: $\hat{d}(A_1, A_2) = card(A_1 \setminus A_2) + card(A_2 \setminus A_1)$.

მართლაც, ცხადია $\hat{d}(A_1, A_2) \geq 0$, ამასთან თუ $A_1 = A_2$, მაშინ ადგილი აქვს $\hat{d}(A_1, A_2) = 0$. თუკი $\hat{d}(A_1, A_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} card(A_1 \setminus A_2) = 0 \\ card(A_2 \setminus A_1) = 0 \end{cases}$, ე.ი. $(A_1 \subseteq A_2) \wedge (A_2 \subseteq A_1)$. მაშასადამე, $A_1 = A_2$ და $\hat{d}$-ფუნქცია აკმაყოფილებს ***M1)***-აქსიომას. უშუალოდ ვხედავთ, რომ $\hat{d}$ აკმაყოფილებს ***M2)***-აქსიომასაც. რაც შეეხება ***M3)***-აქსიომას, საჭიროა გამოვიყენოთ $A \setminus B = (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$ და $B \setminus A = (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$ წარმოდგენები. ვინაიდან კარდინალური რიცხვებისათვის ჩვენ შეგვიძლია ჩავწეროთ ტოლობები:

$$\begin{aligned}
&\hat{d}(A,B) = card(A \setminus B) + card(B \setminus A) = card(A \setminus C) + card(C \setminus B) - \\
&- card\big((A \setminus C) \cap (C \setminus B)\big) + card(B \setminus C) + card(C \setminus A) - \\
&- card\big((B \setminus C) \cap (C \setminus A)\big) \leq card(A \setminus C) + card(C \setminus A) + card(C \setminus B) + \\
&+ card(B \setminus C) = \hat{d}(A,C) + \hat{d}(C,B),
\end{aligned}$$

ამიტომ დავასკვნით, რომ $\hat{d}$-ფუნქცია აკმაყოფილებს ***M3)***-აქსიომას.

უმაღლესი მათემატიკის ტრადიციულ კურსებში დიდ ადგილი უკავია რიცხვითი მიმდევრობების კრებადობის საკითხების შესწავლას. ზღვრების გამოთვლის რიცხვითი მეთოდების ფლობა შესაძლებლობას იძლევა განვიხილოთ სხვადასხვა ტიპის მეტრიკულ სივრცეებში მიმდევრობების განზოგადებული კრებადობის საკითხები. ამბობენ, რომ (X,d) მეტრიკულ სივრცეში წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n \in X\}_{n \in \mathrm{N}}$ არის კრებადი $x_0 \in X$ წერტილისაკენ, თუკი $\forall \varepsilon > 0$-თვის $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, რომ როცა $n \geq n_0$, შესრულდება უტოლობა $d(x_n; x_0) \leq \varepsilon$.

ამ უკანასკნელისთვის გამოიყენება $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}} \xrightarrow{d} x_0$ ჩანაწერი. კოშის (ანუ ე.წ. ფუნდამენტური) მიმდევრობის ცნება მეტრიკული სივრცეების შემთხვევაში შემდეგნაირად მოდიფიცირდება: (X,d) მეტრიკულ სივრცეში წერტილთა $\{x_n \in X\}_{n\in\mathrm{N}}$ მიმდევრობას ეწოდება კოშის (ანუ ფუნდამენტური), თუ $\forall\varepsilon > 0$ -თვის $\exists n_0 \in \mathbf{N}$, რომ როცა $p \ge n_0$ და $q \ge n_0$, შესრულდება $d(x_p;x_q) \le \varepsilon$.

(X,d) მეტრიკულ სივრცეში $x_0 \in X$ წერტილს ეწოდება $A \subset X$ სიმრავლის **ზღვარითი წერტილი**, თუ არსებობს ისეთი $\{x_n \in A\}_{n\in\mathrm{N}}$ - მიმდევრობა, რომ $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}} \xrightarrow{d} x_0$. ამასთან, $\xi \in X$ წერტილს ეწოდება $A \subset X$ სიმრავლის **იზოლირებული წერტილი**, თუკი $\exists\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $B^{\circ}{}_{\xi,\varepsilon} \cap A = \{\xi\}$.

შეხების წერტილის და ჩაკეტილი სიმრავლის განმარტებების საფუძველზე იოლი შესამოწმებელია, რომ (X,d) მეტრიკულ სივრცეში $F \in co\tau(d) \Leftrightarrow$ ნებისმიერი $\xi \in F$ წერტილი არის მისი ზღვარითი ან იზოლირებული წერტილი. ამრიგად, ჩვენ დავასკვნით, რომ თუ $\eta \notin F$, მაშინ $\Theta(\eta,F) = \inf\{d(\eta,\upsilon) \mid \upsilon \in F\} > 0$.

თეორემა 3.4.1. ყოველი (X,d) მეტრიკული სივრცე X -ზე ინდუცირებს ნორმალურ $\tau(d)$ ტოპოლოგიას.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\forall K, M \in co\tau(d) \setminus \{\phi\}$ თანაუკვეთი სიმრავლეები, მაშინ ყოველი $p \in X$ -თვის მანძილი p -დან K -სიმრავლემდე განისაზღვრება $\Theta(p,K) = \inf\{d(p,a) \mid a \in K\}$ -ით. განვიხილოთ სიმრა-

ვლეები: $G=\{x \mid \Theta(x,K)<\Theta(x,M)\}$ და $H=\{x \mid \Theta(x,K)>\Theta(x,M)\}$. ცხადია, რომ სამართლიანია $G \cap H=\phi$.

ვაჩვენოთ, რომ $G,H \in \tau(d)\setminus\{\phi\}$. ამ მიზნით ავიღოთ $\forall x \in G$ წერტილი და განვიხილოთ $\varepsilon=\frac{1}{2}\{\Theta(x,M)-\Theta(x,K)\}$ რიცხვი. დავამტკიცოთ, რომ $B^{\circ}{x,\varepsilon} \subseteq G$, ანუ $\forall \xi \in B^{\circ}{x,\varepsilon}$-თვის ვაჩვენოთ, რომ $\xi \in G$ (ე.ი. $\Theta(\xi,K)<\Theta(\xi,M)$). ვინაიდან $\xi \in B^{\circ}{x,\varepsilon} \Rightarrow d(x,\xi)<\varepsilon=\frac{1}{2}\{\Theta(x,M)-\Theta(x,K)\}$. გადავწეროთ უკანასკნელი უტოლობა $d(x,\xi)+\frac{1}{2}\Theta(x,K)<\frac{1}{2}\Theta(x,M)$-სახეში. სამკუთხედის აქსიომის გათვალისწინებით ჩვენ გვექნება: $\frac{1}{2}d(x,\xi)+\frac{1}{2}\Theta(\xi,K)\le\frac{1}{2}d(x,\xi)+\frac{1}{2}\left(d(x,\xi)+\Theta(x,K)\right)<\frac{1}{2}\Theta(x,M)$, ანუ $\frac{1}{2}d(x,\xi)+$ $+\frac{1}{2}\Theta(\xi,K)<\frac{1}{2}\Theta(x,M)$, აქ სამკუთხედის აქსიომის კიდევ ერთხელ გამოყენებით $\frac{1}{2}d(x,\xi)+\frac{1}{2}\Theta(\xi,K)<\frac{1}{2}\Theta(x,M)\le\frac{1}{2}\left(d(x,\xi)+\Theta(\xi,M)\right)$, ე.ი. მივიღეთ $\Theta(\xi,K)<\Theta(\xi,M)$. ამრიგად, ჩვენ დავამტკიცეთ $G \in \tau\setminus\{\phi\}$. ანალოგიური მსჯელობით მტკიცდება, რომ $H \in \tau\setminus\{\phi\}$.

ვაჩვენოთ, რომ $K \subset G$. ამისათვის, ავიღოთ $\forall a \in K$ წერტილი, მაშინ ცხადია $\Theta(a,K)=0$. რადგან $a \notin M$, ამიტომ ის არაა M-ის ზღვარითი წერტილი. მაშასადამე, $\Theta(a,M)>0$, და ამიტომ $\Theta(a,K)=0<\Theta(a,M) \Leftrightarrow a \in G$, ანუ $K \subset G$. ანალოგიურად მოწმდება $M \subset H$ ჩართვის სამართლიანობაც.

იოლია დარწმუნება იმაშიაც, რომ $(X,\tau(d))$ აკმაყოფილებს გან-ცალების T_1-აქსიომას, რის გამოც ჩვენ საბოლოოდ დავსაკვნით $(X,\tau(d))$-ს ნორმალურობას.■

თეორემა 3.4.1-ის საფუძველზე ცხადია, რომ თუ (X,d) მეტრი-კული სივრცეა, მაშინ სიმრავლეთა მახლოობის სტრუქტურა შეიძ-ლება განიმარტოს შემდეგი ეკვივალენციით: $A\delta_d B \Leftrightarrow \Theta(A,B)=0$, სად-აც $A,B\in \mathrm{B}(X)$.

(X,d) მეტრიკული სივრცის $A\subset X$ სიმრავლეს ეწოდება **შემოს-აზღვრული**, თუკი მოიძებნება ისეთი ღია ბირთვი, რომელიც მოი-ცავს A-ს. (X,d)-ს ყველა შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეების ოჯა-ხს აღნიშნავენ $\mathrm{Bd}(X)$-ით.

მეტრიკულ სივრცეებში კომპაქტურობის დასახასიათებლად სა-სარგებლოა

თეორემა 3.4.2. თუ (X,d) მეტრიკული სივრცეა, ხოლო $K\subset X$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა, მაშინ $K\in co\tau(d)\cap \mathrm{Bd}(X)$.

დამტკიცება. თავდაპირველად ვაჩვენოთ K-ს შემოსაზღვრულო-ბა. ამ მიზნით განვიხილოთ $\forall k\in K$ წერტილი და K-ს შემდეგი ტიპის ღია ბირთვებისაგან შედგენილი დაფარვა $\{B^{\circ}_{k,n}\}_{n\in \mathrm{N}}$, მაშინ ცხადია, რომ $\exists\{B^{\circ}_{k,n_1};\, B^{\circ}_{k,n_2};\dots;B^{\circ}_{k,n_m}\}$ სასრული ერთობლიობა, სადაც $n_1<n_2<\dots<n_m$, ისეთი, რომ $K\subset \bigcup_{p=1}^{m} B^{\circ}_{k,n_p}$. ვინაიდან ადგილი აქვს

$B^{\circ}_{k,n_1} \subset B^{\circ}_{k,n_2} \subset \ldots \subset B^{\circ}_{k,n_m}$, ამიტომ $K \subset \bigcup\limits_{p=1}^{m} B^{\circ}_{k,n_p} = B^{\circ}_{k,n_m}$ და მაშასადამე $K \in \mathrm{Bd}(X)$.

ვაჩვენოთ, რომ $K \in co\tau(d)$. ვთქვათ, რომ $x \in \tau(d)-clK$ და $x \notin K$, მაშინ $\forall \xi \in K$-თვის ცხადია $r(\xi)=\dfrac{d(x,\xi)}{2}>0$. განვიხილოთ $\{B^{\circ}_{\xi,r(\xi)}\}_{\xi\in K}$ ოჯახი და შევნიშნოთ, რომ იგი არის K-ს ღია დაფარვა. K-ს კომპაქტურობიდან ჩვენ დავასკვნით, რომ $\exists\{B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)} \mid \xi_i \in K\}_{i=\overline{1;n}}$ ერთობლიობა $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)}$-თვისებით. შევნიშნოთ, რომ სიმრავლეებს $B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \in \sum\nolimits_{\tau(d)}^{X}(x)$, სადაც $i=\overline{1;n}$ გააჩნიათ თვისება: $B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap K \neq \phi$. ამ უკანასკნელზე დაყრდნობით დავასკვნით, რომ $\phi \neq B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap K \subset B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)}\right)$, ანუ $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)}\right) \neq \phi$. მეორეს მხრივ, რადგან ადგილი აქვს $B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)} = \phi$, ცხადია $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(B^{\circ}_{x,r(\xi_i)} \cap B^{\circ}_{\xi_i,r(\xi_i)}\right) = \phi$. მიღებული წინააღმდეგობიდან გამომდინარეობს, რომ $x \in K$, ამიტომ $K \in co\tau(d)$. ■

თეორემა 3.4.3. თუ (X,τ) კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, ხოლო $f:(X,\tau) \to (\mathbf{R}, \tau_{ჩვ.})$ უწყვეტია, მაშინ $\exists x_1, x_2 \in X$ წერტილები, ისეთი, რომ $f(x_1)=\min\{f(x) \mid x \in X\}$ და $f(x_2)=\max\{f(x) \mid x \in X\}$.

დამტკიცება. თეორემა 3.3.4-ის ძალით $f(X)\subset\mathbf{R}$ კომპაქტური ქვესიმრავლეა, ამიტომ თეორემა 3.4.2-ის გამო $f(X)$-ჩაკეტილი და შემოსაზღვრულია R-ში. მაშასადამე, $\exists y_1<y_2$ წერტილები $f(X)$-ში ისეთი, რომ $y_1\le y\le y_2$, $\forall y\in f(X)$-თვის. ეს უკანასკნელი კი ნიშნავს, რომ $\exists x_1,x_2\in X$ წერტილები, რომ $f(x_1)=y_1$ და $f(x_2)=y_2$. ■

აღსანიშნავია, რომ თეორემა 3.4.3-დან ტრივიალურად გამომდინარეობს შედეგი: თუ f არის $[a;b]$-სეგმენტზე უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ არსებობს $x_1;x_2\in[a;b]$ წერტილები, რომ $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\max\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$. ეს უკანასკნელი შესაძლებელს ხდის $C[a;b]$-ში მეტრიკა განიმარტოს ტოლობით $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|$. ცხადია, რომ თუ $f(x)=g(x)$, $\forall x\in[a;b]$-თვის, მაშინ $\rho(f,g)=0$. პირიქით, თუკი $\max\limits_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|=0$, მაშინ მაქსიმუმის და მოდულის განმარტების საფუძველზე $0\le|f(x)-g(x)|\le 0,\ \forall x\in[a;b]$-თვის $\Leftrightarrow |f(x)-g(x)|=0$, $\forall x\in[a;b]$-თვის, ანუ $f(x)=g(x)$, $\forall x\in[a;b]$-თვის. ამრიგად, ***M1)***-აქსიომის სამართლიანობა შემოწმებულია. ***M2)***-აქსიომის ჭეშმარიტება $\rho(f,g)=\rho(g,f)$ ტრივიალურად ცხადია. სამკუთხედის ***M3)***-აქსიომის შესამოწმებლად საჭიროა განვიხილოთ შემდეგი უტოლობა $|f(x)-g(x)|=|f(x)-p(x)+p(x)-g(x)|\le|f(x)-p(x)|+|p(x)-g(x)|$, რომლის საფუძველზეც ჩვენ ადვილად დავასკვნით, რომ ადგილი აქვს

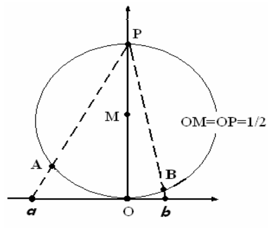
$$\rho(f,g)=\max_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|\le \max_{x\in[a;b]}\left(|f(x)-p(x)|+|p(x)-g(x)|\right)\le$$

$$\le \max_{x\in[a;b]}|f(x)-p(x)|+\max_{x\in[a;b]}|p(x)-g(x)|=\rho(f,p)+\rho(p,g)\,.$$

ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ, რომ $\rho(f,g)=\max_{x\in[a;b]}|f(x)-g(x)|$ -მეტრიკაა $C[a;b]$ -ში.

რომელი წინადადებაა ჭეშმარიტი ქვემოთ მოყვანილთაგან:

1. **R**-ზე მეტრიკა შეიძლება განიმარტოს შემდეგნაირად $S(a,b)=\arcsin\dfrac{|a-b|}{\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}}$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$-თვის? $S(a,b)$ -წარმოადგენს უმცირესი სიგრძის AB რკალს ნახ.3.4.1-ზე.



ნახ. 3.4.1

2. $\forall p\ge 1$-თვის $\mathbf{R}^n$-ში განიმარტება $d_n(x,y)$ მეტრიკის განზოგადება

$$d_{n,p}(x,y)=\sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p}\ ,\ \text{სადაც}\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\dots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$$

3. $\forall p\ge 1$-თვის $C[a;b]$ -ში შეიძლება განიმარტოს განზოგადებული მეტრიკა

$$d_p(f,g)=\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)-g(t)|^p\,dt}\;,\quad \forall f,g\in C[a;b]\text{-თვის?}$$

4. ჰაუსდორფის მეტრიკა განიმარტება (X,d) მეტრიკული სივრცის ყველა ჩაკეტილი, შემოსაზღვრული ქვესიმრავლეების კლასზე

$$D_H(A;B)=\max\left\{\sup_{a\in A} d(a;B);\ \sup_{b\in B} d(b;A);\right\}.$$

სავარჯიშოები

III.4.1. გამოთვალეთ $d(f,g)$ მანძილი $f(x)=\sin 2x$ და $g(x)=\sin 6x$ ფუნქციებს შორის, სადაც $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

III.4.2. თუ (X,σ) და (Y,ω) რაიმე მეტრიკული სივრცეებია, დაადგინეთ არის თუ არა $X\times Y$ დეკარტულ ნამრავლზე შემდეგი ფუნქცია $\vartheta((x_1,y_1);(x_2,y_2))=\sqrt{\sigma^2(x_1,x_2)+\omega^2(y_1,y_2)}$ -მეტრიკა.

III.4.3. შეადარეთ $\rho(f,g)$ და $d(f,g)$, თუ ცნობილია, რომ $f(x)=x^2$ და $g(x)=5x-6$ ფუნქციები ერთიდაიმავე სიმრავლეზეა განსაზღვრული: ა) $[-4;5]$; ბ) $[2{,}7;5]$.

III.4.4. გამოთვალეთ $\Theta(p;A)$ მანძილი $p\in X$ წერტილსა და $A\subset X$ სიმრავლეს შორის ფიქსირებულ (X,d) მეტრიკულ სივრცეში, თუ ცნობილია, რომ $A=\{a_1;a_2;a_3;...;a_n;...\}_{n\in\mathrm{N}}$ და $d(p;a_n)=\frac{2n+1}{n}$, $\forall n\in\mathbf{N}$-თვის.

III.4.5. ცნობილია, რომ (X,s_1) და (X,s_2) მეტრიკული სივრცეებია. არის თუ არა მეტრიკა $s(a,b)=s_1(a,b)+s_2(a,b)$, სადაც $\forall a;b\in X$.

III.4.6. დაამტკიცეთ, რომ თუ მოცემულია $\{(X,\theta_n)\}_{n=\overline{1;\infty}}$ მეტრიკულ სივრცეთა ოჯახი, მაშინ $\theta(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\theta_n(x,y)$ -მეტრიკაა დეკარტულ ნამრავლზე $\prod_{n=1}^{\infty}X_n$.

III.4.7. დაამტკიცეთ, რომ $m_c(f,g)=\left(\int_a^b[f(t)-g(t)]\cdot[\overline{f(t)}-\overline{g(t)}]dt\right)^{1/2}$ ტოლობა გამოსახავს $[a;b]\subset\mathbf{R}$ სეგმენტზე განსაზღვრული უწყვეტი, კომპლექსური (**C**-ში მნიშვნელობებიანი) f,g ფუნქციებს შორის მანძილს. ვთქვათ ფუნქციები $f(t)=t^2+i\sin t$ და $g(t)=e^t+i\cos t$ განსაზღვრულია სეგმენტზე $t\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, მაშინ რას უდრის $m_c(f,g)$?

III.4.8. აჩვენეთ, რომ მეტრიკა $m\times n$-ზომის მატრიცების $\mathrm{M}(m\times n;\mathbf{R})$ სიმრავლეში შესაძლებელია განისაზღვროს შემდეგი სახის ფუნქციით $\chi(X;Y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[x_{ij}-y_{ij}]^2}$, $\forall\ X=[x_{ij}]$; $Y=[y_{ij}]\in\mathrm{M}(m\times n;\mathbf{R})$.

III.4.9. დაამტკიცეთ, რომ თუ (X,d) მეტრიკული სივრცეა, მაშინ ფუნქცია $w(a,b)=\frac{d(a,b)}{1+d(a,b)}$ წარმოადგენს მეტრიკას X-ზე.

III.4.10. იპოვეთ $\hat{d}(A,B)$ მანძილი $A=\{m,n,p,q,r\}$ და $B=\{m,n,o,r,u,v\}$ სიმრავლეებს შორის.

§3.5. ზოგიერთი ტიპის არაკლასიკური ტოპოლოგიური სტრუქტურები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ სამი კონკრეტული ტიპის მოდიფიცირებულ ტოპოლოგიურ სტრუქტურებს, რომლებიც მნიშვნელოვანია მონაცემთა ანალიზისას. ასიმეტრიული ბუნების ობიექტების ტოპოლოგიური შესწავლა მოითხოვს ბიტოპოლოგიური სივრცეების თეორიის მეთოდების გამოყენებას [12; 31-35]. არამკაფიო სიმრავლეების განხილვა კი შესაძლებელს ხდის ტოპოლოგიურის მსგავსი სტრუქტურების განსაზღვრისა [30]. დასასრულ ციფრული გეომეტრიისათვის საჭირო უმცირეს-მიდამოიანი ტოპოლოგიების აგების პ. ალექსანდროვის კონსტრუქციას განვიხილავთ.

ასიმეტრიები ტოპოლოგიაში: ასიმეტრიული ტოპოლოგია სიმრავლური ტოპოლოგიის შედარებით ახალი მიმართულებაა, რომელიც მიზნად ისახავს არასიმეტრიული ბუნების მქონე ობიექტების მათემატიკურ შესწავლას. ცენტრალური ადგილი ასიმეტრიულ ტოპოლოგიაში უჭირავს ბიტოპოლოგიურ სივრცეებს, რომელთა განხილვის აუცილებლობა 1963 წელს იქნა ინიცირებული ჯ. კელის მიერ. ჩვეულებრივ, **ბიტოპოლოგიური სივრცეების** ქვეშ მოიაზრება დალაგებული სამეულები (X,τ_1,τ_2), სადაც τ_1 და τ_2 არიან ფიქსირებულ X-სიმრავლეზე განსხვავებული ტოპოლოგიები. აქ ჩვენ მოკლედ მიმოვიხილავთ ბიტოპოლოგიური სტრუქტურების წარმოშობის ზოგიერთ კლასიკურ კონსტრუქციას.

ჯ. კელის (J.C. Kelly [34]**) კონსტრუქცია:** ვთქვათ X სიმრავლეზე განსაზღვრულია ისეთი ფუნქცია $p: X\times X \to [0;+\infty[$, რომელიც აკმაყოფილებს აქსიომათა შემდეგ წყვილს:

QPM1) $p(x;x)=0$, $\forall x\in X$-თვის;

QPM2) $p(x;y)\le p(x;z)+p(z;y)$, $\forall x;y;z\in X$-თვის.

მაშინ, p-ს ეწოდება **კვაზი-ფსევდო-მეტრიკა, ხოლო** (X,p) წყვი-ლს—**კვაზი-ფსევდო-მეტრიკული სივრცე.** როგორც განმარტებიდან ჩანს p-ს, მეტრიკული ფუნქციებისაგან განსხვავებით, არ მოეთხო-ვება $p(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ და სიმეტრიის აქსიომის პირობების დაკმაყო-ფილება. სიმეტრიულობის უგულებელყოფით ჯ. კელიმ პირველმა შენიშნა, რომ შესაძლებელია X სიმრავლეზე განისაზღვროს ორი სხვადასხვა ტოპოლოგია. კერძოდ, თუ განვიხილავთ $p^*(x,y)=p(y,x)$ ფუნქციას (ე.წ. p-ს შეუღლებულს), $\forall x,y \in X$-თვის, მაშინ ბუნებ-რივად ჩნდება ორი ტიპის ღია ბირთვები: $B^\circ{}_{a,r}=\{x\in X \mid p(x,a)<r\}$ და $B^{*\circ}{}_{a,r}=\{x\in X \mid p^*(x,a)<r\}$. აღნიშნული ტიპის ღია სიმრავლეების კლ-ასების განხილვას ბიტოპოლოგიური სივრცეების შესწავლის აუც-ილებლობამდე მივყავართ.

მაგალითი 3.5.1 ნამდვილ რიცხვთა **R** სიმრავლეზე კვაზი-ფსევ-დო-მეტრიკას წარმოადგენს ფუნქცია:

$$p(x;y)=\begin{cases}\min\{1;\ y-x\},\ \text{თუ}\ x<y\\ 0,\ \text{თუ}\ x\ge y.\end{cases}$$

აღსანიშნავია, აგრეთვე ისიც, რომ თუკი მეტრიკის განმარტ-ებაში მხოლოდ სიმეტრიულობის აქსიომას უგულებელვყოფთ (ე.ი. საქმე გვაქვს ე.წ. **კვაზი-მეტრიკებთან**), მაშინაც ჩვენ ბიტოპოლოგ-იური სტრუქტურების აგების შესაძლებლობა გვეძლევა.

უ. პერვინის (W. Pervin [35]**) კონსტრუქცია:** ფიქსირებული X სიმრავლისათვის $\mathrm{B}(X)$-ბულიანზე განსაზღვრულ θ-მიმართებას ეწ-

ოდება **კვაზი-მახლოობის**, თუკი ის აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომ-ებს:

1. $X\bar{\theta}\phi$ და $\phi\,\bar{\theta}\,X$;

2. $\begin{cases} C\theta(A\cup B)\Leftrightarrow C\theta A \text{ ან } C\theta B, \\ (A\cup B)\theta C\Leftrightarrow A\theta C \text{ ან } B\theta C; \end{cases}$

3. $\{x\}\theta\{x\}$, $\forall x\in X$ -თვის;

4. თუ $A\bar{\theta}B$, მაშინ $\exists C\in \mathrm{B}(X)$ ისეთი, რომ $A\bar{\theta}C$ და $(X\setminus C)\bar{\theta}B$.

(X,θ) წყვილს ეწოდება კვაზი-მახლოობის სივრცე. აღსანიშნა-ვია, რომ $A\theta B\Leftrightarrow B\theta^{-1}A$ ეკვივალენციით განმარტებული θ^{-1} მიმარ-თება იწოდება θ-ს შეუღლებულ კვაზი-მახლოობად.

ყოველ $A\in \mathrm{B}(X)$ სიმრავლესთან (X,θ)-კვაზი-მახლოობის სივრც-ეში ასოცირდება სიმრავლე: $CL_\theta A=\{x\mid\{x\}\theta A\}$ წოდებული A-ს ჩაკე-ტვად (X,θ)-ში. ამ გზით X-სიმრავლეზე განიმარტება $\tau(\theta)$ ტოპო-ლოგია, რომელშიაც ჩაკეტილებად გამოცხადებულია $A=CL_\theta A$ სახ-ის სიმრავლეები. ანალოგიური კონსტრუქცია შეუღლებული θ^{-1}-კვაზი მახლოობისათვის განმარტავს X-ზე $\tau(\theta^{-1})$ ტოპოლოგიას, რასაც ამ შემთხვევაშიც $(X,\tau(\theta),\tau(\theta^{-1}))$ ბიტოპოლოგიური სივრცის განხილვამდე მივყავართ.

არამკაფიო ტოპოლოგიები: §2.3-ში ჩვენ განვიხილეთ არამკაფ-იო მათემატიკური ლოგიკის ზოგიერთი ფუნდამენტური საკითხი და არამკაფიო სიმრავლეების თვისებები. III-თავში გადმოცემული

სიმრავლური ტოპოლოგიის საკითხები ბუნებრივად წარმოშობს შეკითხვას: შესაძლებელია, თუ არა არამკაფიო სიმრავლეების გამოყენებით ფიქსირებულ სიმრავლეზე ტოპოლოგიურის მსგავსი სტრუქტურის შემოტანა?. ამ კითხვაზე დადებითი პასუხი პირველად ქ. ჩანგის მიერ იქნა გაცემული 1968 წ. [30].

ვთქვათ X-ფიქსირებული სიმრავლეა, მაშინ თუ X-ის რაიმე $\tilde{A} = \{< \lambda(x)/x >| x \in X\}$ არამკაფიო ქვესიმრავლეს გავაიგივებთ მისი ელემენტების მიკუთვნების ფუნქციასთან, ცხადია $\tilde{A}$-არამკაფიო სიმრავლე შეიძლება ეწოდოს $\lambda : X \to I \equiv [0;1]$ ასახვას. აღვნიშნოთ I^X-ით X-ის ყველა არამკაფიო ქვესიმრავლეების კლასი.

ამბობენ, რომ X-სიმრავლეზე განსაზღვრულია $\tilde{\tau}X$-**არამკაფიო ტოპოლოგია**, თუ $\tilde{\tau}X \subset I^X$ არამკაფიო სიმრავლეების ისეთი ოჯახია, რომ

Ft1) $0;1 \in \tilde{\tau}X$ (0 და 1–შესაბამისად აღნიშნავს იგივურად ნულოვან და იგივურად ერთეულოვან ფუნქციებს);

Ft2) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \tilde{\tau}X$-თვის $\Rightarrow (\lambda_1 \cap \lambda_2) \in \tilde{\tau}X$;

Ft3) $\forall \{\lambda_\alpha \in \tilde{\tau}X\}_{\alpha \in \Lambda}$-თვის $\Rightarrow \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha \right) \in \tilde{\tau}X$.

$(X, \tilde{\tau}X)$-წყვილს **არამკაფიო ტოპოლოგიური სივრცე** ეწოდება. აღსანიშნავია, რომ $\tilde{\tau}X$-ის ელემენტებს ეწოდებათ **არამკაფიოდ ღია** სიმრავლეები, ხოლო მათ დამატებებს კი **არამკაფიოდ ჩაკეტილი** სიმრავლეები. შევთანხმდეთ, რომ თუ λ-არამკაფიოდ ღია სიმრავ-

ლეა ჩავწეროთ $\lambda \in \tilde{\tau}X$, ხოლო თუ μ -არამკაფიოდ ჩაკეტილია, მაშინ $\mu \in co(\tilde{\tau}X)$.

მაგალითი 3.5.2. ვთქვათ $X = \{a; b; c\}$ -უნივერსალური სიმრავლეა, ხოლო $\lambda_1(x) = \begin{cases} 0,2 \text{ თუ } x = a \\ 0,3 \text{ თუ } x = b \\ 0,9 \text{ თუ } x = c \end{cases}$; $\lambda_2(x) = \begin{cases} 0,1 \text{ თუ } x = a \\ 1 \text{ თუ } x = c \end{cases}$; $\lambda_3(x) = \begin{cases} 0,1 \text{ თუ } x = a \\ 0,9 \text{ თუ } x = c \end{cases}$

და $\lambda_4(x) = \begin{cases} 0,2 \text{ თუ } x = a \\ 0,3 \text{ თუ } x = b \\ 1 \text{ თუ } x = c \end{cases}$, მაშინ $\tilde{\tau}X = \{0; 1; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4\}$ -ოჯახი წარმოადგენს არამკაფიო ტოპოლოგიას.

მაგალითი 3.5.3. ვთქვათ $X = [0; +\infty[$ -უნივერსალური სიმრავლეა, ხოლო

$$\lambda_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6} & \text{თუ } 0 \le x \le 6 \\ 1 & \text{თუ } x \ge 6 \end{cases}; \quad \lambda_2(x) = 1 - \frac{x}{6}, \text{ როცა } 0 \le x \le 6;$$

$$\lambda_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6} & \text{თუ } 0 \le x \le 3 \\ 1 - \dfrac{x}{6} & \text{თუ } 3 \le x \le 6 \end{cases} \quad \text{და} \quad \lambda_4(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{6} & \text{თუ } 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{x}{6} & \text{თუ } 3 \le x \le 6 \\ 1 & \text{თუ } x \ge 6 \end{cases}.$$

ცხადია, რომ $\tilde{\tau}X = \{0; 1; \lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4\}$ -ოჯახი წარმოადგენს არამკაფიო ტოპოლოგიას X -ზე.

თუ $(X, \tilde{\tau}X)$ არამკაფიო ტოპოლოგიური სივრცეში $\mu \in I^X$ რაიმე არამკაფიო ქვესიმრავლეა, მაშინ მისთვის **არამკაფიო ინტერიერი და არამკაფიო ჩაკეტვა** განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\mathrm{Int}\mu = \sup\{\eta \mid \eta \le \mu, \ \eta \in \tilde{\tau}X\}; \qquad \mathrm{Cl}\mu = \inf\{\psi \mid \psi \ge \mu, \ (1\text{-}\psi) \in \tilde{\tau}X\}.$$

მაგალითი 3.5.4. თუ მაგალითი 3.5.2-ის პირობებში განვიხილავთ არამკაფიო სიმრავლეს $\mu = \begin{cases} 0{,}3 & \text{თუ } x = a \\ 1 & \text{თუ } x = c \end{cases}$, მაშინ ცხადია, რომ $\mathrm{Int}\mu = \lambda_2$. μ-თვის არამკაფიო ჩაკეტვის განსასაზღვრად თავდაპირველად საჭიროა ამოვწეროთ არამკაფიოდ ჩაკეტილი სიმრავლეები $co(\tilde{\tau}X) = \{0;\ 1;\ \lambda_1';\ \lambda_2';\ \lambda_3';\ \lambda_4'\}$, სადაც

$$\lambda_1'(x) = \begin{cases} 0{,}8 & \text{თუ } x = a \\ 0{,}7 & \text{თუ } x = b \\ 0{,}1 & \text{თუ } x = c \end{cases}; \quad \lambda_2'(x) = \begin{cases} 0{,}9 & \text{თუ } x = a \\ 1 & \text{თუ } x = b \end{cases}; \quad \lambda_3'(x) = \begin{cases} 0{,}9 & \text{თუ } x = a \\ 1 & \text{თუ } x = b \\ 0{,}1 & \text{თუ } x = c \end{cases} \text{ და}$$

$\lambda_4'(x) = \begin{cases} 0{,}8 & \text{თუ } x = a \\ 0{,}7 & \text{თუ } x = b \end{cases}$, აქედან კი ცხადია, რომ $\mathrm{Cl}\mu = 1$.

$\tilde{\tau}X$-ის $\tilde{\mathrm{B}}$-ქვეოჯახს ეწოდება **არამკაფიო ტოპოლოგიის ბაზა,** თუკი $\tilde{\tau}X$-ის ყოველი ელემენტი არის $\tilde{\mathrm{B}}$-ის რაიმე ელემენტების გაერთიანება.

თეორემა 3.5.1. არამკაფიო $(X, \tilde{\tau}X)$ ტოპოლოგიურ სივრცეში არამკაფიო ინტერიერის ოპერატორს გააჩნია თვისებები:

1) $\mathrm{Int}0 = 0$; $\mathrm{Int}1 = 1$;

2) $\mathrm{Int}\lambda \le \lambda$, $\forall \lambda \in I^X$-თვის;

3) თუ $\lambda, \mu \in I^X$ და $\lambda \le \mu \Rightarrow \mathrm{Int}\lambda \le \mathrm{Int}\mu$;

4) $\mathrm{Int}(\lambda \cap \mu) = \mathrm{Int}\lambda \cap \mathrm{Int}\mu$, $\forall \lambda, \mu \in I^X$-თვის;

5) $\mathrm{Int}\lambda \cup \mathrm{Int}\mu = \mathrm{Int}(\lambda \cup \mu)$, $\forall \lambda, \mu \in I^X$-თვის.

დამტკიცება. 1)-ის სამართლიანობა ტრივიალურია.

2)-ის დასამტკიცებლად ავიღოთ $\forall x \in X$ ელემენტი და არამკაფიო ინტერიერის განმარტების შესაბამისად განვიხილოთ $(\mathrm{Int}\lambda)(x) \equiv \sup\{\nu(x) \mid \nu(x) \le \lambda(x),\ \nu \in \tilde{\tau}X\}$. ცხადია, რომ სამართლიანია შეფასება $(\mathrm{Int}\lambda)(x) = \sup\{\nu(x) \mid \nu(x) \le \lambda(x),\ \nu \in \tilde{\tau}X\} \le \lambda(x)$, ე.ი. 2)-თვისების ჭეშმარიტება შემოწმებულია.

3)-თვის ავიღოთ $\forall x \in X$ ელემენტი, მაშინ $\lambda(x) \le \mu(x)$. ვინაიდან ადგილი აქვს: $\{\nu(x) \mid \nu(x) \le \lambda(x),\ \nu \in \tilde{\tau}X\} \subseteq \{\nu(x) \mid \nu(x) \le \mu(x),\ \nu \in \tilde{\tau}X\}$, ამიტომ $(\mathrm{Int}\lambda)(x) \equiv \sup\{\nu(x) \mid \nu(x) \le \lambda(x),\ \nu \in \tilde{\tau}X\} \le \sup\{\nu(x) \mid \nu(x) \le \mu(x),\ \nu \in \tilde{\tau}X\} \equiv (\mathrm{Int}\mu)(x)$.

4)-თვის ავიღოთ $\forall x \in X$ ელემენტი და შევნიშნოთ, რომ რადგან ყოველთვის $\lambda(x) \le \mu(x)$ ან $\lambda(x) \ge \mu(x)$, ამიტომ

$$(\mathrm{Int}(\lambda \cap \mu))(x) \equiv \sup\{\nu(x) \mid \nu(x) \le \min\{\lambda(x), \mu(x)\},\ \nu \in \tilde{\tau}X\} = \begin{cases} (\mathrm{Int}\lambda)(x), \text{ თუ } \lambda(x) \le \mu(x) \\ (\mathrm{Int}\mu)(x), \text{ თუ } \mu(x) \le \lambda(x) \end{cases}.$$

3)-ის გათვალისწინებით კი ჩვენ დავსაკვნით:

$$(\mathrm{Int}(\lambda \cap \mu))(x) = \begin{cases} (\mathrm{Int}\lambda)(x), \text{ თუ } \lambda(x) \le \mu(x) \\ (\mathrm{Int}\mu)(x), \text{ თუ } \mu(x) \le \lambda(x) \end{cases} =$$
$$= \min\{(\mathrm{Int}\lambda)(x);\ (\mathrm{Int}\mu)(x)\} = (\mathrm{Int}\lambda)(x) \cap (\mathrm{Int}\mu)(x).$$

5)-ის დასამტკიცებლად საჭიროა ავიღოთ $\forall x \in X$ ელემენტი და 3)-ის გათვალისწინებით განვიხილოთ

$$\mathrm{Int}(\lambda \cup \mu)(x) = \begin{cases} (\mathrm{Int}\lambda)(x), \quad \text{თუ } \mu(x) \le \lambda(x) \\ (\mathrm{Int}\mu)(x), \quad \text{თუ } \lambda(x) \le \mu(x) \end{cases} = \max\{(\mathrm{Int}\lambda)(x);\ (\mathrm{Int}\mu)(x)\} =$$
$$= (\mathrm{Int}\lambda \cup \mathrm{Int}\mu)(x).$$

ამრიგად, ჩვენ ვაჩვენეთ 5)-ის სამართლიანობა.■

თეორემა 3.5.2. თუ $(X, \tilde{\tau}X)$ არამკაფიო ტოპოლოგიურ სივრცეში $\lambda \in I^X$, მაშინ $\mathrm{Int}\lambda = 1 - \mathrm{Cl}(1 - \lambda)$ და $\mathrm{Cl}\lambda = 1 - \mathrm{Int}(1 - \lambda)$.

დამტკიცება. საჭიროა შევნიშნოთ, რომ ადგილი აქვს ტოლობას $(\mathrm{Int}\lambda)(x)=\sup\{\nu(x)\mid \nu(x)\le\lambda(x),\ \nu\in\tilde{\tau}X\}=1-\inf\{(1-\nu(x))\mid 1-\nu(x)\ge 1-\lambda(x),\ \nu\in\tilde{\tau}X\}=$ $=1-\mathrm{Cl}(1\text{-}\lambda)(x)$.

მეორე ტოლობის მისაღებად საკმარისია პირველ ტოლობაში λ-ს ნაცვლად ავიღოთ არამკაფიო სიმრავლე $1-\lambda$.■

თეორემა 3.5.1 და თეორემა 3.5.2-ის საფუძველზე იოლად დავასკვნით, რომ არამკაფიო ჩაკეტვის ოპერატორს გააჩნია შემდეგი თვისებები

თეორემა 3.5.3. თუ $(X,\tilde{\tau}X)$ არამკაფიო ტოპოლოგიურ სივრცეში $\lambda\in I^X$, მაშინ

1) $\mathrm{Cl}0=0$; $\mathrm{Cl}1=1$;

2) $\lambda\le\mathrm{Cl}\lambda$, $\forall\lambda\in I^X$ -თვის;

3) თუ $\lambda,\mu\in I^X$ და $\lambda\le\mu\Rightarrow\mathrm{Cl}\lambda\le\mathrm{Cl}\mu$;

4) $\mathrm{Cl}(\lambda\cap\mu)=\mathrm{Cl}\lambda\cap\mathrm{Cl}\mu$, $\forall\lambda,\mu\in I^X$ -თვის;

5) $\mathrm{Cl}\lambda\cup\mathrm{Cl}\mu=\mathrm{Cl}(\lambda\cup\mu)$, $\forall\lambda,\mu\in I^X$ -თვის.

თეორემა 3.4.3-ის საფუძველზე ჩვენ დავასკვნით, რომ თუკი $\lambda,\mu:(X,\tau)\to(I,\tau^*{}_{\text{ჩვ.}})$ უწყვეტი ტიპის არამკაფიო სიმრავლეებია (მიკუთვნების ფუნქციები უწყვეტია), ხოლო (X,τ) კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცეა, მაშინ მანძილი λ და μ სიმრავლეებს შორის შეიძლება განისაზღვროს ფორმულით: $\tilde{\rho}(\lambda,\mu)=\max\limits_{x\in X}|\lambda(x)-\mu(x)|$. აქვე შევნიშნოთ, რომ როდესაც $cardX=n<\aleph_0$, ხოლო λ და μ ინექციურებია, მაშინ $\lambda,\mu:(X,\tau)\to(I,\tau^*{}_{\text{ჩვ.}})$ უწყვეტობა $\Leftrightarrow$ $\tau=\tau_{\text{დ}}$.

პ. ალექსანდროვის ტოპოლოგია: თუ T_0-ტიპის ტოპოლოგიური სივრცეებისათვის დამატებით მოვითხოვთ, რომ ღია სიმრავლეების უსასრულო თანაკვეთაც იყოს ღია, მაშინ ასეთნაირად წარმოქმნილ სტრუქტურას ეწოდება **უმცირეს-მიდამოიანი, (ანუ პ. ალექსანდროვის)** სივრცე. აღსანიშნავია, რომ როცა უმცირეს-მიდამოიანი სივრცე აკმაყოფილებს განცალების T_1 ან T_2 აქსიომას, მაშინ ის წარმოადგეს დისკრეტულ ტოპოლოგიურ სივრცეს. იოლი შესამჩნევია, რომ ალექსანდროვის სივრცეები არიან სავსებით სიმეტრიულნი ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეების მიმართ. ამასთანავე, ამ ტიპის სტრუქტურებში $\forall p \in (X,\tau)$ -თვის ყოველთვის შეგვიძლია მოვძებნოთ p-წერტილის უმცირესი ღია მიდამო: $O(p) = \bigcap\limits_{U \in \sum_{\tau}^{X}(p)} U$. მაშასადამე, სიმეტრიულობის გამო არსებობს p-ის უმცირესი ჩაკეტილი მიდამოც: $F(p) = \bigcap\limits_{\substack{p \in V \\ V \in co\tau}} V$.

სავარჯიშოები

III.5.1. დარწმუნდით, რომ $p(x;y) = \max\{0;\ (y-x)\}$ ფუნქცია წარმოადგენს **R**-ზე კვაზი-ფსევდო-მეტრიკას.

III.5.2. აჩვენეთ, რომ $[0;\ 1]$-ზე კვაზი-მეტრიკაა შემდეგი სახის ფუნქცია:

$$p(x;y) = \begin{cases} y-x, & \text{თუ } x \le y \\ 1, & \text{თუ } x > y. \end{cases}$$

III.5.3. ვთქვათ $p(x,y)$ და $p^*(x,y)$ ურთიერთშეუღლებული კვაზი-მეტრიკებია X-სიმრავლეზე, მაშინ $\Psi(x,y)=\max\{\,p(x,y);\ p^*(x,y)\,\}$ ფუნქცია წარმოადგენს თუ არა X-ზე მეტრიკას?

III.5.4. ვთქვათ, $X=\{m;n;p;q\}$, ხოლო $\tau_1=\{\phi;X\}\cup\{\{m\};\{q\};\{m,q\};\{m,p,q\}\}$ და $\tau_2=\{\phi;X\}\cup\{\{m\};\{n,q\};\{m,n,q\}\}$. განვიხილოთ (X,τ_1,τ_2) ბიტოპოლოგიური სივრცის $A=\{m,q,n\}$ ქვესიმრავლე, მაშინ რას უდრის $\tau_1 cl(\tau_2 \operatorname{int} A)$, თუ $\tau_2 \operatorname{int} A$-აღნიშნავს A-ს ინტერიერს τ_2-ტოპოლოგიის მიმართ, ხოლო $\tau_1 cl(\cdot)$- წარმოადგენს τ_1 ტოპოლოგიაში ჩაკეტვის ოპერატორს.

III.5.5. (X,τ_1,τ_2) ბიტოპოლოგიურ სივრცეში $A=A_1\cap A_2$-ქვესიმრავლეს ეწოდება p-ღია თუ $A_1\in\tau_1$ და $A_2\in\tau_2$. წარმოქმნის თუ არა $p-$ღია სიმრავლეების ერთობლიობა ტოპოლოგიას X-ზე?

III.5.6. დაამტკიცეთ, რომ $(X,\tilde{\tau}X)$ არამკაფიო ტოპოლოგიურ სივრცეში ადგილი აქვს $\lambda\in\tilde{\tau}X \Leftrightarrow \lambda=\mathrm{Int}\lambda$ და $\mu'\in\tilde{\tau}X \Leftrightarrow \mathrm{Cl}\mu=\mu$.

III.5.7. თუ $X=\{a;b;c\}$ უნივერსალური სიმრავლეა, ხოლო არამკაფიო ტოპოლოგია $\tilde{\tau}X=\{0;1;\lambda_1;\lambda_2;...;\lambda_9\}$, სადაც $\lambda_1(x)=\begin{cases}0{,}2 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}7 & \text{თუ } x=b\\ 0{,}4 & \text{თუ } x=c\end{cases}$;

$\lambda_2(x)=\begin{cases}0{,}1 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}6 & \text{თუ } x=c\end{cases}$; $\lambda_3(x)=\begin{cases}0{,}9 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}2 & \text{თუ } x=b\\ 0{,}5 & \text{თუ } x=c\end{cases}$; $\lambda_4(x)=\begin{cases}0{,}2 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}7 & \text{თუ } x=b\\ 0{,}6 & \text{თუ } x=c\end{cases}$;

$\lambda_5(x)=\begin{cases}0{,}9 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}7 & \text{თუ } x=b\\ 0{,}5 & \text{თუ } x=c\end{cases}$; $\lambda_6(x)=\begin{cases}0{,}9 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}2 & \text{თუ } x=b\\ 0{,}6 & \text{თუ } x=c\end{cases}$; $\lambda_7(x)=\begin{cases}0{,}1 & \text{თუ } x=a\\ 0{,}4 & \text{თუ } x=c\end{cases}$;

$\lambda_8(x)=\begin{cases}0{,}2 & \text{თუ} \quad x=a\\ 0{,}2 & \text{თუ} \quad x=b\\ 0{,}4 & \text{თუ} \quad x=c\end{cases}$; $\lambda_9(x)=\begin{cases}0{,}1 & \text{თუ} \quad x=a\\ 0{,}5 & \text{თუ} \quad x=c\end{cases}$. იპოვეთ $\mathrm{Int}\mu$ და $\mathrm{Cl}\mu$,

თუ $\mu(x)=\begin{cases}1 & \text{თუ} \quad x=a\\ 0{,}2 & \text{თუ} \quad x=b\\ 0{,}45 & \text{თუ} \quad x=c\end{cases}$.

III.5.8. ვთქვათ $X=\{a;b;c;d\}$, ხოლო არამკაფიო სიმრავლეები განმ- არტებულია ფუნქციებით შემდეგნაირად: $\lambda(x)=\begin{cases}0{,}1 & \text{თუ} \quad x=a\\ 0{,}4 & \text{თუ} \quad x=b\\ 0{,}5 & \text{თუ} \quad x=c\\ 0{,}8 & \text{თუ} \quad x=d\end{cases}$ და

$\mu(x)=\begin{cases}0{,}3 & \text{თუ} \quad x=a\\ 0{,}2 & \text{თუ} \quad x=b\\ 0{,}7 & \text{თუ} \quad x=c\\ 0{,}5 & \text{თუ} \quad x=d\end{cases}$. გამოთვალეთ $\tilde{\rho}(\lambda,\mu)$ -მანძილი.

III.5.9. აჩვენეთ, რომ თუ $X=\mathbf{Z}$, ხოლო $O(n_0)=\{n\in Z \mid n\geq n_0\}$-სახის სიმრავლეებს გამოვაცხადებთ ღიად, მაშინ მიღებული სტრუქტურა (X,τ)-წარმოადგენს უმცირეს-მიდამოიან სივრცეს.

III.5.10. დაამტკიცეთ, რომ თუ (X,τ) არის უმცირეს-მიდამოიანი სივრცე, ხოლო $\forall a;b\in X$ განსხვავებული წერტილებია, მაშინ

ა) $a\in O(b)\Rightarrow b\notin O(a)$ და $a\in F(b)\Rightarrow b\notin F(a)$;

ბ) $a\in F(b)\Leftrightarrow b\in O(a)$;

გ) $F(a)\subseteq F(b)\Leftrightarrow O(b)\subseteq O(a)$.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

სახელმძღვანელოები:

1. **S. Abramsky, D.M. Gabbay, T.S. E. Maibaum**-Handbook of Logic in Computer Science // Oxford Univ. Press, 1994.
2. **П.С. Александров**-Введение в теорию множеств и общую топологию // М., «Наука», 1977.
3. **N.P. Cook-**Introductory Computer Mathematics // Prentice-Hall, 1999.
4. **Ю. Ершов, Е. Палютин-**Математическая логика // М., «Наука», 1979.
5. **M. Escardo-**Synthetic Topology of Data Types and Classical Spaces // Elsevier, Netherlands, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 87, 2004.
6. **H. Gallaire, J. Minker-**Logic and Databases // Plenum Press, N.Y., 1978.
7. **У. Гренандер-**Лекции по теории образов, т.1,2,3 // М., «Мир», 1979, 1981, 1983.
8. **L.Haan, T. Koppelaars**-Applied Mathematics for Database Professionals // Apress, Berkeley, CA, 2007.
9. **P. Hajek-**Metamathematics of Fuzzy Logic // Kluwer Academic Publishers, 1998.
10. **S. G. Hoggar-**Mathematics for Computer Graphics // Cambridge University Tracts in Theoretical Computer Science, 1993.

11. **A. Kandel-**Fuzzy Techniques for Pattern Recognition // John Wiley, N.Y., 1982.
12. **R. Kopperman, B. Flagg**-The Asymmetric Topology of Computer Science // Lecture Notes in Computer Science, vol. 802, 1992.
13. **Л.Д. Кудрявцев-**Краткий курс математического анализа // М., «Наука», 1989.
14. **A. Lew-**Computer Science: A Mathematical Introduction // Prentice-Hall, Inter-national Series in Computer Science, 1985.
15. **Z. Manna**, **R. Waldinger-**The Logical Basis for Computer Programming, v.1 // Addison-Wesley Series in Computer Science, 1985.
16. **G. Mazzola, G. Milmeister, J. Weissmann-**Comprehensive Mathematics for Computer Scientists, v.1,2 // Springer-Verlag, 2004.
17. **R. Moore-**Interval Analysis // Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.
18. **Д. Мейер-**Теория реляционных баз данных // М., «Мир», 1987.
19. **М. Нагао, Т. Катаяма, С. Уэмура**-Структуры и базы данных // М., «Мир», 1986.
20. **S.A. Naimpally, B.D. Warrack**-Proximity Spaces // Cambridge Univ. Press, 1970.
21. **K. Nickel-**Interval Mathematics // Lecture Notes in Computer Sciences, v. 29, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

22. **Б. И. Плоткин-**Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных // М., «Наука», 1991.
23. **G. M. Reed, A. W. Roscoe, R. F. Wachter**-Topology and Category Theory in Computer Science // Oxford Univ. Press, New-York, 1991.
24. **A. Rosenfeld-**Digital Picture Processing // Computer Science and Applied Mathematics, 1999.
25. **J. Serra-**Image Analysis and Mathematical Morphology // Academic Press, 1982
26. **J.D. Ullman-**Principles of Database Systems // Computer Science Press, Stanford University, 1982.
27. **S. Vickers-**Topology via Logic // Carnegie Mellon University Press, 1989.
28. **Л. Заде-**Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию решений // М., «Мир», 1976.
29. **Л. Заде-**Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // М., «Знание», 1974.

სტატიები:

30. **C.L. Chang-**Fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl., 24, 1968, pp. 182-190.
31. **I. Dochviri-**On Some Properties of Bitopological QHC Spaces // Lithuanian Math. Journ., 2006, v. 46(2), pp.150-154.

32. **I. Dochviri-**Some Comments on Regular and Normal Bitopological Spaces // Ukrainian Math. Journ., 2006, v. 58(12), pp. 1720-1724

33. **I. Dochviri-**Fixed Point Theorems of Q-Contractive Maps of Quasi-Metric Spaces // Proc. Tbilisi State Univ., Ser. “Mathematics, Mechanics and Astronomy”, 2005, v.354, pp. 205-208.

34. **J.C. Kelly-**Bitopological Spaces // Proc. London Math. Soc., 9(13), 1963, pp.71-89.

35. **W. Pervin-**Quasi-Proximities for Topological Spaces //Math. Ann., 150, 1963, pp.325-326

IRAKLI J. DOCHVIRI

COMPUTER MATHEMATICS

Logical and Set-Topological Constructions

Tbilisi-2008

„Technical University Press”

ИРАКЛИЙ ДЖУМБЕРОВИЧ ДОЧВИРИ

КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Логические и множественно-топологические конструкции

Тбилиси-2008

„Технический университет”