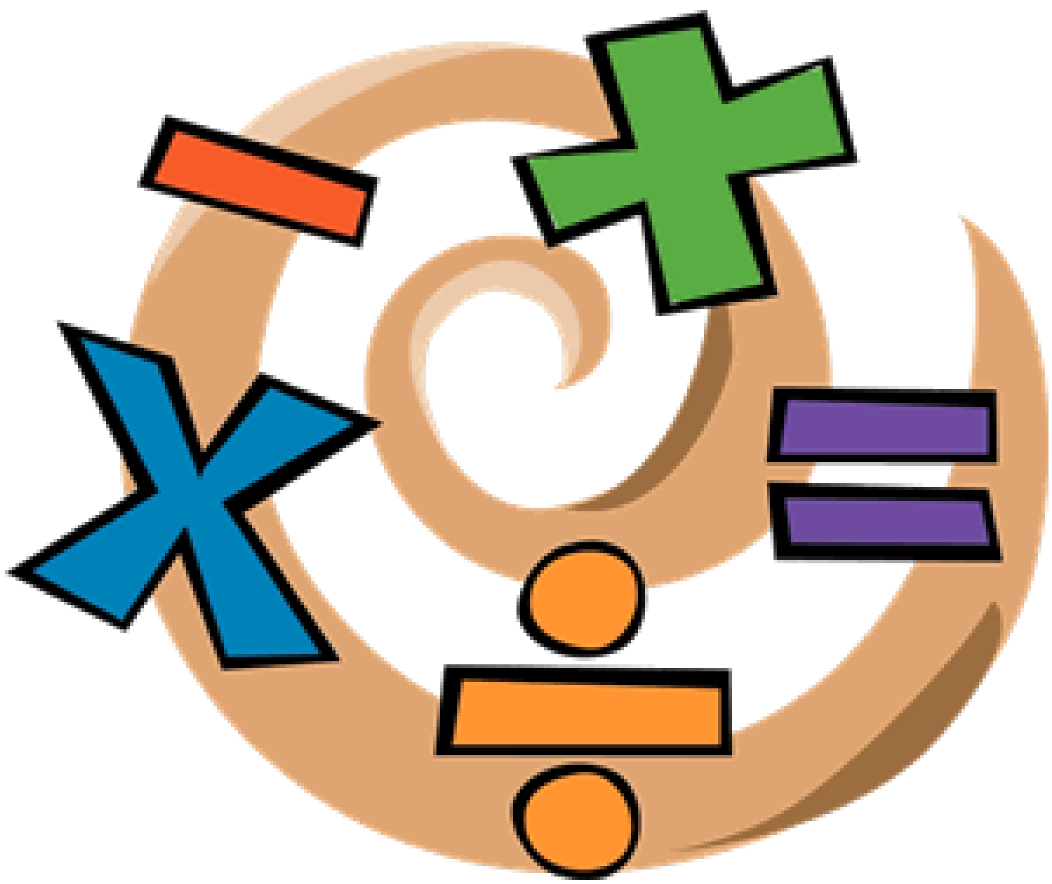
ზაურ ჯაბუა

ექსპერიმენტის შედეგების ელემენტარული დამუშავება



თბილისი 2015

წიგნში ელემენტარულად გადმოცემულია ცდომილებების თანამედროვე თეორია და მისი გამოყენების მეთოდები ფიზიკური ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებაში. მოყვანილი მასალის ათვისებისათვის საკმარისია ბაკალავრიატის პირველი კურსის მათემატიკის საფუძვლების ცოდნა. მასალის გადმოცემის ხასიათი გათვალისწინებულია ცდომილებების რაოდენობრივი შეფასების საწყისი ეტაპების გასაცნობად, მაგრამ ის შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას პრაქტიკული სამუშაოების ჩასატარებლადაც.

სახელმძღვანელო გათვალიწინებულია ბაკალავრიატის მაღალი კურსის სტუდენტებისათვის, მაგრამ ის გარკვეულ დახმარებას გაუწევს დოქტორანტებს და ფიზიკური ექსპერიმენტით დაკავებულ პირებს მიღებული შედეგების მათემატიკურ დამუშავებაში.

სულ 149 გვერდი

ცხრილი 26

ნახაზი 22

რეცენზენტები: აკადემიური დოქტორი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი ბეჟან კოტია

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, სოხუმის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი ვახტანგ ცხადაია

სარჩევი

თ ა ვ ი I
გაზომვის ცდომილებები

თავი II
საშუალო მნიშვნელობები და მათი შეფასება

თავი III
ემპირიული ფორმულების პარამეტრების დადგენა

თავი IV
კორელაციური დამოკიდებულებები

თავი V
ექსპერიმენტული მონაცემების ანალიზის ზოგიერთი ამოცანები

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

გაზომვების შედეგებიდან მაქსიმალურად სანდო ინფორმაციის მიღება აუცილებლად მოითხოვს ამ შედეგების მათემატიკურ დამუშავებას და ანალიზს. ექსპერიმენტული მონაცემების მათემატიკური დამუშავების თანამედროვე მეთოდებისა და მათი ანალიზის არასრულყოფილი ცოდნა ხშირად იწვევს გამარტივებული და დაუსაბუთებელი ხერხების გამოყენებას, რამაც საბოლოო ჯამში შეიძლება ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ დასკვნებში იჩინოს თავი. ამასთან იმ საკითხების წრე, რომელიც ხშირად გვხვდება მსგავს ამოცანებში, არცთუ ფართოა. ეს საკითხებია ემპირიული ფორმულების შეჩევა და მათი პარამეტრების დადგენა, გაზომილი სიდიდეების ნამდვილი მნიშვნელობებისა და გაზომვის სიზუსტის შეფასება, კორელაციური დამოკიდებულებების კვლევა და ასევე ანალიზის ზოგიერთი ისეთი საკითხები როგორებიცაა - ინტეგრირება, დიფერენცირება, ინტერპოლაცია. სწორედ ამ საკითხებზეა ძირითადად გამახვილებული ყურადღება მოცემულ სახემძღვანელოში.

სახელმძღვანელო შედგება ხუთი თავისაგან. პირველ თავში მოყვანილია ისეთი საკითხები როგორებიცაა: გაზომვის ცნება, გაზომვის შედეგების ჩაწერა და შესაბამისი გრაფიკების აგება, გაზომვის შედეგების კლასიფიკაცია, გაზომვის უხეში ცდომილებების გამორიცხვის მეთოდები, ხელსაწყოს ცდომილების გათვალისწინება და ირადაპირი გაზომვის ცდომილებები. მეორე თავი დათმობილი აქვს საშუალო მნიშვნელობებსა და მათ შეფასებას, ცდომილებათა განაწილების კანონებს. მესამე თავში მოყვანილია ემპირიული ფორმულების პარამეტრების შერჩევის მეთოდიკა. მეოთხე თავი მთლიანად ეძღვნება კორელაციური დამოკიდებულებების ანალიზს. მეოთხე თავში გადმოცემულია ცდისეული მონაცემების ანალიზის ფართოდ გავრცელებული მეთოდები და მათი გამოყენების სპეციფიკა. სახელმძღანელოს ბოლოში დანართის სახით მოცემულია საანგარიშო ფორმულები, ძირითადი ცხრილები და ზოგიერთი გაანგარიშების მაგალითები.

თ ა ვ ი I

გაზომვის ცდომილებები

1.1. გაზომვის ცნება

ფიზიკური ექსპერიმენტის მიზანია ამა თუ იმ სიდიდის გაზომვა, რაც საშუალებას გვაძლევს დავამყაროთ კავშირი სხვადასხვა სიდიდეებს შორის და ამით ჩავწვდეთ ფიზიკური მოვლენის არსს. მაგალითად ძნელი დასაჯერებელია, რომ სინათლის ორი სხივის ზედდებისას შეიძლება წარმოიქმნას ბნელი უბანი, ანუ სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ ადგილი ჰქონდეს ინტერფერენციას. შესაბამისი ექსპერიმენტის ჩატარება და ფიზიკური სიდიდეების გაზომვა კი გვარწმუნებს, რომ ინტერფერენციას მართლაც აქვს ადგილი და ის ემორჩილება გარკვეულ ობიექტურ კანონებს. ექსპერიმენტატორი კანონზომირებების შესწავლისას, ცდილობს გამოყოს ის თავისებურებები, რომლებიც მას არსებითად ეჩვენება და ამის შემდეგ ახდენს გამოყოფილი მოვლენის განზოგადოებას, აგებს თეორიას და აკეთებს შესაბამის დასკვნებს, რომელთა შემოწმებაც შემდგომ ხდება ექსპერიმენტებით.

გაზომვა ეწოდება გასაზომი სიდიდის შედარებას ერთეულად აღებულ ამავე სახის სიდიდესთან - ეტალონთან. ეტალონი წარმოადგენს იმავე განზომილების მქონე სხვა სიდიდეს, რომელიც აღებულია ერთეულად. გაზომვისას ჩვენ ვიგებთ თუ რამდენჯერაა მეტი ან ნაკლები გასაზომი სიდიდე ეტალონთან შედარებით. მაგალითად თოკის სიგრძის მეტრობით გაზომვისას ვიგებთ თუ რამდენი მეტრიანისგან შედგება ეს თოკი. ამ გაზომვას საფუძვლად უდევს მეტრის ეტალონი. სხეულის მასის გაზომვისას მას ვადარებთ მასის ეტალონს - კილოგრამს.

ყურადღება მივაქციოთ, რომ პრინციპში გასაზომი სიდიდე ყოველთვის არ გამოისახება ეტალონური მნიშვნელობების მთელი რიცხვებით. მაგალითად გავზომოთ ღეროს სიგრძე. გაზომვის დაწყებამდე ვიცით, რომ ღეროს სიგრძე წარმოადგენს ფიზიკურ სიდიდეს, რომელსაც გააჩნია გარკვეული დადებითი სკალარული მნიშვნელობა L_0, მაგრამ ის ჩვენთვის უცნობია.

ეტალონად შეგვიძლია ავიღოთ საზომი რულეტი 1 სმ ტოლი დანაყოფებით. თუ გასაზომ ღეროში განთავსდა 51 სმ ეტალონური მნიშვნელობა

ვიტყვით, რომ გაზომვის შედეგია $L_1 =$ 51 სმ. ისმის კითხვა შეიძლება თუ არა ვამტკიცოთ, რომ ღეროს სიგრძე L_0 ზუსტად 51 სმ-ის ტოლია? უფრო ყურადღებით გაზომვისას აღმოჩნდება, რომ ღეროს სიგრძე მთლად ზუსტად არ ემთხვევა 51 სმ-ის ტოლ მონაკვეთს. ე.ი. $L_0 \neq L_1$, თუმცა $L_0 \approx L_1$ ეს იმას ნიშნავს, რომ მივიღეთ მიახლოებითი შედეგი. შედეგის დასაზუსტებლად აუცილებელია ავიღოთ სხვა გამზომი ხელსაწყო, მაგალითად რულეტი მილიმეტრებიანი დანაყოფებით. ვთქვათ გაზომვის შედეგი ტოლი აღმოჩნდა $L_1 =$ 513 მმ-ის ეს იმას ნიშნავს, რომ მივიღეთ გასაზომი სიდიდის უფრო ზუსტი მნიშვნელობა.

მაგრამ ისევ ჩნდება კითხვა: 513 მმ არის თუ არა ღეროს ნამდვილი სიგრძე? თუ ავიღებთ კიდევ ერთ ხელსაწყოს, მაგალითად ლაზერულ ინტერფერომეტრს - და მივიღებთ ღეროს სიგრძეს მიკრომეტრებში, იქნება თუ არა ახალი შედეგი უფრო ახლოს ნამდვილ მნიშვნელობასთან? ალბათ იქნება. დაემთხვევა თუ არა აბსოლუტურად ზუსტად გაზომვის შედეგი გასაზომი სიდიდის ნამდვილ მნიშვნელობას? ალბათ არა.

ამრიგად ჩვენ მივედით გაზომვის სიზუსტის პრობლემასთან, ან უფრო ზუსტად თუ ვიტყით, ჩატარებული გაზომვის ცდომილების განსაზღვრის პრობლემასთან.

დავსვათ ორი კითხვა:

1) შეიძლება თუ არა აბსოლუტურად ზუსტად გაიზომოს ფიზიკური სიდიდე?

2) საჭიროა თუ არა ასეთი გაზომვა?

პირველ კითხვაზე პასუხი იქნება უარყოფითი. ვინაიდან ნებისმიერ ეტალონს გააჩნია საბოლოო სიდიდე, არანაირი საფუძველი არა გვაქვს ვივარაუდოთ, რომ გასაზომ სიდიდეში ყოველთვის ზუსტად მოთავსდება ეტალონის მთელი რიცხვი.

ნათქვამის საფუძველზე შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ზოგადი მტკიცება:

გაზომვა იძლევა მიახლოებით შედეგს, ან სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ ის შეიცავს გაზომვის ცდომილებას.

გაზომვის ცდომილება ეწოდება სხვაობას გასაზომი სიდიდის ნამდვილ A მნიშვნელობასა და გაზომვის a_i შედეგს შორის

$$A - a_i \qquad (1.1)$$

მეორე კითხვაზე პასუხიც უარყოფითია. აბსოლუტური სიზუსტე - იდეალური ცნებაა, ხოლო - ექსპერიმენტალურ ფიზიკაში - უსარგებლოც.

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ რაც უფრო დიდი სიზუსტით მოვინდომებთ გაზომვის ჩატარებას მით უფრო ძნელია ამის გაკეთება, უნდა დავასკვნათ, რომ გაზომვა უნდა ჩატარდეს არა მაქსიმალური სიზუსტით არამედ მხოლოდ იმ სიზუსტით რასაც მოითხოვს მოცემული ამოცანა. მაგალითად, მაგიდის დამზადებისას სრულებით საკმარისია 0,5 სმ სიზუსტე რაც შეადგენს ~ 0,5%; საკისრის ზოგიერთი დეტალის დამზადებისას აუცილებელია 0,001 მმ ანუ 0,01% სიზუსტე, მაგრამ სინათლის გამოსხივების სპექტრალური ხაზების ტალღის სიგრძის გაზომვისას ზოგჯერ აუცილებელია 10^{-11} სმ ანუ 10^{-5} % სიზუსტე. ამასთან ერთად უნდა ვიცოდეთ, რომ არცთუ იშვიათად გაზომვის ცდომილების შემცირება საშუალებას იძლევა, აღმოჩენილ იქნას ახალი კანონზომიერებები და ამის მრავალი მაგალითი არსებობს. მაგალითად ცნობილია მასის შენახვის კანონი, რომლის მიხედვითაც ქიმიურ რეაქციაში მონაწილე ნივთიერებების მასათა ჯამი რეაქციამდე ტოლია რეაქციის შემდეგ მიღებული ნივთიერებების მასათა ჯამის. მაგრამ ქიმიური რეაქციის დროს ადგილი აქვს ენერგიის გამოყოფას ან შთანთქმას და აინშტაინის ფორმულის თანახმად ეს ენერგია გამოითვლება ფორმულით $E = mc^2$ (E –გამოყოფილი ან შთანთქმული ენერგიაა, m - მასა, c - სინათლის სიჩქარე), ამიტომ მორეაგირე ნივთიერებების მასები განსხვავებული იქნება რეაქციის შემდეგ მიღებული ნივთიერების მასების ჯამის. ნახშირის წვისას ეს განსხვავება შეადგენს 1 გ-ს 3 000 ტ ნახშირზე. ამ განსხვავების შესამჩნევად საჭიროა გაზომვის ჩატარება ძალიან მაღალი სიზუსტით - $3 \cdot 10^{-8}$%. ეს იმას ნიშნავს, რომ მასათა შენახვის კანონი ნახშირის წვისას სამართლიანია $3 \cdot 10^{-8}$ % - მდე სიზუსტით გაზომვების ჩატარებისას. შევნიშნოთ, რომ ასეთი სიზუსტის მიღწევა აწონვით შეუძლებელია და ამიტომ აღნიშნული ცვლილება დადგენილ იქნა არაპირდაპირი მეთოდებით.

გაზომვის სიზუსტის გაზრდის სხვა სასარგებლო მაგალითია 1932 წელს წყალბადის მძიმე იზოტოპის – დეიტერიუმის აღმოჩენა, რომელიც მიღწეულ იქნა ჩვეულებრივი წყლის სიმკვრივის მაღალი სიზუსტით გაზომვით. დეიტერიუმი მხოლოდ უმნიშვნელოდ ზრდის წყლის სიმკვრივეს.

ზუსტად ასევე 1894 წელს რელეის მიერ ზუსტი გაზომვებით დადგენილ იქნა, რომ ჰაერიდან გამოყოფილი აზოტის სიმკვრივე რამდენადმე აღემატებოდა სუფთა ამიაკის დაშლით მიღებული აზოტის სიმკვრივეს. ეს სხვაობა ძალიან მცირე იყო, სულ რაღაც 5 მგ/ლ, მაგრამ მან რამსეის და რელეის საშუალება მისცა 1895 წელს აღმოეჩინათ ინერტული აირი – არგონი.

ექსპერიმენტული ფიზიკა კმაყოფილდება გაზომვის მიახლოებითი შედეგებით, მაგრამ ამასთან ერთად აუცილებლად უნდა ვიცოდეთ გაზომვის ცდომილების სიდიდე.

ყურადღება მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ (1.1) გამოსახულება არ გამოდგება გაზომვის ცდომილების სიდიდის საანგარიშოდ, ვინაიდან თვით A სიდიდე ჩვენთვის უცნობია.

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ გაზომვის ცდომილება დამოკიდებულია გამოყენებულ გამზომ ხელსაწყოზე. მრავალ ხელსაწყოს გააჩნია დანაყოფებიანი სკალა. მეზობელ დანაყოფებს შორის მნიშნელობათა სხვაობას ეწოდება უმცირესი დანაყოფის ფასი (უდფ). მიწის საზომი ლენტის უდფ ტოლია 1 სმ - ის, სადურგლო ლენტის - 1 მმ - ის, ხოლო მიკრომეტრის 0,01 მმ-ის და ა.შ.

უმცირესი დანაყოფის ფასი აუცილებლად არ წარმოადგენს სიგრძეს. ელექტროგამზომ ხელსაწყოებს გააჩნიათ უდფ, რომელიც გამოისახება მაგალითად დენის ძალის ერთეულებში, ელექტრული ძაბვის ერთეულებში და ა.შ. მაგ. უდფ შეიძლება ტოლი იყოს 0,1 ა; 1 მა; 5 მკა; 0,05 ვ და აშ. თუ ხელსაწყო ისრიანი არაა, არამედ გააჩნია ციფრული ტაბლო, მაშინ უდფ ტოლია ტაბლოს უმცირესი თანრიგის (ანუ ასახვადი მნიშვნელობების უმცირესი სხვაობის).

უნდა გვახსოვდეს, რომ იმ სიდიდის გაზომვა, რომელიც ნაკლებია მოცემული ხელსაწყოს უმცირესი დანაყოფის ფასზე არაკორექტულია.

მაგალითად სახაზავით, რომლის უდფ ტოლია 1 სმ-ის შეუძლებელია დადგინდეს თუ რამდენ მილიმეტრს შეიცავს გასაზომი მონაკვეთი. ამისათვის საჭიროა ავიღოთ სახაზავი, რომლის უდფ ტოლია 1 მმ-ის.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითიდან ჩანს, რომ $A - a_i$ სხვაობა არ შეიძლება აღემატებოდეს უდფ-ს. მაშასადამე, რაც ნაკლებია უდფ, მით უფრო ზუსტია ხელსაწყო და მით ნაკლებია გაზომვის ცდომილება.

შეიძლება თუ არა ცდომილების სიდიდედ ავიღოთ უდფ? თუ ასე მოვიქცევით მივიღებთ შესაძლო ცდომილების ზედა ზღვარს. ერთი შეხედვით ისე ჩანს, რომ გაზომვის ცდომილების შესამცირებლად საკმარისია ავიღოთ უფრო ზუსტი - ნაკლები უდფ-ს მქონე ხელსაწყო.

სამწუხაროდ პრობლემა უფრო რთულია.

აღმოჩნდა, რომ (ამაში თქვენ თვითონ დარწმუნდებით ექსპერიმენტის ჩატარებისას), თუ ერთიდაიმავე სიდიდიდეების გაზომვას გაიმეორებს სხვადადსხვა ადამიანი ერთი და იმავე ხელსაწყოთი, ერთი და იმავე პირობებში, შეიძლება მიიღოს სხვადასხვა შედეგი.

ასე, მაგალითად, ლაბორატორიულ სამუშაოში “ატვუდის მანქანა” ტვირთის ვარდნის დრო იზომება ელექტრონული წამზომით, რომლის უდფ ტოლია 0,02 წმ-ის. სამუშაოს შესრულებისას ერთნაირ პირობებში 5-ჯერ იზომებოდა ერთი და იმავე ტვირთის ვარდნის დრო. მიღებულ იქნა შემდეგი მნიშვნელობები: 5,08; 5,04; 5,06; 5,04 წმ. როგორც ვხედავთ ზოგიერთი მიღებული მნიშვნელობა ერთმანეთისაგან განსხვავდება უდფ-ზე მეტი მნიშვნელობით, რაც ცხადია ვერ აიხსნება ხელსაწყოს ცდომილებით.

საქმე იმაშია, რომ “ექსპერიმენტის პირობების უცვლელობა - იდენტურობა” - იდეალიზირებული ცნებაა, და თუ მკაცრად ვიტყვით, არარეალურიც. ჩვენ ვცხოვრობთ ისეთ სამყაროში, რომელშიც შემავალ ობიექტებს შორის ადგილი აქვს მრავალგვარ ურთიერთქმედებას, ამასთან ამ ურთიერთქმედებების ინტენსივობა თითქმის ყოველთვის იცვლება.

ზემოთ მოყვანილ მაგალითში, ტვირთის ვარდნაზე გავლენას ახდენს ჰაერის მოძრაობა, ჰაერის სიმკვრივის ფლუქტუაცია, მტვერი, დანადგარის ვიბრაცია, რომელიც გამოწვეულია გარემომცველი სხეულების მოძრაობით და

ა.შ. გარდა ამისა, გაზომვის შედეგზე მოქმედებს ხელსაწყოს შიგნით მიმდინარე პროცესები. თუ ხელსაწყო, თუნდაც უმარტივესი, ხის სახაზავია, დანაყოფებს შორის მანძილი იცვლება სითბური გაფართოების ან ტენიანობის ცვლილების გამო. თუ ხელსაწყო ელექტრონულია, მისი ჩვენება დამოკიდებულია ძაბვის ცვლილებაზე მკვებავ წრედში მიუხედავად იმისა მასში ჩამონტაჟებულია თუ არა სტაბილიზაციის ბლოკი.

ყველაზე მნიშვნელოვანია ორი გარემოება:

1) გაზომვა შეიძლება მრავალი მიზეზით დამახინჯდეს. ამასთან თითოეული მათგანის გავლენა შესაძლებელია მცირე იყოს მაგრამ მათმა ჯამურმა გავლენამ შეიძლება გამოიწვიოს მნიშვნელოვანი სხვაობა A და a_i სიდიდეებს შორის, ანუ დიდი ცდომილება.

2) ყველაზე ცუდია ის, რომ ასეთი ცდომილებების აღმოფხვრა და მათი გამოთვლა წინასწარ შეუძლებელია. ასეთ ცდომილებებს შემთხვევითი ეწოდება.

შემთხვევითი ცდომილება ყოველთვის არსებობს გაზომვის შედეგში და ამიტომ შეიძლება გავაკეთოთ მნიშვნელოვან დასკვნა.

გაზომის შედეგი შემთხვევითი სიდიდეა.

პრაქტიკაში ეს იმას ნიშნავს, რომ იდენტურ პირობებში A ფიზიკური სიდიდის გაზომვის გამეორებისას, ზოგადად, რომ ვთქვათ მიიღება სხვადასხვა რიცხვითი მონაცემები $a_1, a_2, \cdots, a_i$.

მოცემული სახელმძღვანელოს მიზანია შემთხვევითი ცდომილებების რაოდენობრივი შეფასება.

კონკრეტული მეთოდიკების განხილვამდე, შევნიშნოთ, რომ გაზომვები ორ ჯგუფად იყოფა: პირდაპირი და არაპირდაპირი. პირდაპირი გაზომვებისას გასაზომი სიდიდე პირდაპირ უდარდება ერთეულ სიდიდეს გამზომი ხელსაწყოთი, რომელიც დაგრადუირებულია გაზომვის შესაბამისი ერთეულებით.

პირდაპირი გაზომვის მაგალითებია: სიგრძის გაზომვა სახაზავით, დროის გაზომვა წამზომით და ა.შ.

არაპირდაპირი გაზომვისას განსასაზღვრელი სიდიდე გამოითვლება პირდაპირი გაზომვით მიღებული სხვა სიდიდეების საშუალებით, რომლებთანაც ის დაკავშირებულია ფუნქციონალური კავშირით.

მაგალითები:

1) მათემატიკური ქანქარის პერიოდის T გამოთვლა. T გასაზომად აუცილებელია გაიზომოს ის t დრო, რომლის განმავლობაშიც ხორციელდება n რხევა. შემდეგ პერიოდი გამოითვლება ფორმულით

$$T = \frac{t}{n}$$

2) ცილინდრის მოცულობის გაზომვა. ცილინდრის მოცულობის გასაზომად საჭიროა პირდაპირ გაიზომოს ცილინდრის დიამეტრი d და სიმაღლე h, ხოლო შემდეგ მოცულობა გამოითვალოს ფორმულით

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4}$$

3) ელექტრონის მასის გაზომვა. ცხადია ელექტრონის მასის გაზომვა სასწორით შეუძლებელია, ე.ი. შეუძლებელია პირდაპირი გაზომვის ჩატარება. ელექტრონის მასის არაპირდაპირი გზით გაზომვის ზოგიერთი მეთოდი ეყრდნობა ელექტრულ და მაგნიტურ ველში აჩქარებული ელექტრონების ნაკადის გადახრას.

ხაზი უნდა გავუსვათ იმას, რომ არაპირდაპირი გაზომვით განსასაზღვრავი სიდიდე გამოითვლება თეორიულად მიღებული ფორმულების ან ალგორითმების მეშვეობით სხვა გაზომილი სიდიდეების დამუშავებით. სწორედ თეორიული ფიზიკის მეთოდებითაა შესაძლებელი ძალიან მცირე და ძალიან დიდი ობიექტების (ატომები, ვარსკვლავები და ა.შ.) პარამეტრების გაზომვა.

თანამედროვე მეცნიერებაში ძირითადად ტარდება არაპირდაპირი გაზომვები.

სანამ გადავიდოდეთ გაზომვის მეთოდების უფრო დაწვრილებით განხილვასა და ცდომილებებზე, მოკლედ შევეხოთ გაზომვის შედეგების ჩაწერასა და შესაბამისი გრაფიკის გამოსახვის წესებს.

1.2. გაზომვის შედეგების ჩაწერა, გრაფიკები

ეცადეთ ექსპერიმენტის მონაცემები ყოველთვის ჩაწეროთ ცხრილის სახით. ასეთი ჩანაწერი კომპაქტურია და ადვილი წასაკითხი. ერთი და იმავე

სიდიდის მნიშვნელობები უმჯობესია ჩაწეროთ ვერტიკალურ სვეტში, ვინაიდან თვალისთვის ასე უფრო იოლია ციფრების აღქმა. ყოველი სვეტის დასაწყისში დაწერეთ შესაბამისი სიდიდის დასახელება ან სიმბოლო და უჩვენეთ ერთეული. განზომილების ერთეულს მიეცით ისეთი ათობითი მამრავლი, რომ ჩაწერილი მონაცემები მოთავსდეს 0.1 – დან 1 000 – მდე ინტერვალში. მაგალითად $0.026=26\cdot10^{-3}$.

განვიხილოთ ცხრილი 1.1, რომელიც წარმოადგენს რაღაც დიდი ცხრილის ნაწილს სხვადასხვა მასალის იუნგის მოდულისთვის.

ცხრილი 1.1. იუნგის მოდული რკინისათვის

მასალა	იუნგის მოდული E, 10^{11} ნ $\cdot$ მ$^{-2}$
რკინა	2.11

რეკომდებულია ისარგებლოთ ჩანაწერით, როდესაც ფიზიკური სიდიდის შემდეგ დასმულია მძიმე და ნაჩვენებია ერთეული, მოცემულ შემთხვევაში - 10^{11}ნ $\cdot$ მ$^{-2}$ ასეთი ჩანაწერი გასაგებია და ალბათ გაურკვევლობას არ იწვევს. ერთეული ნაჩვენებია სვეტის დასაწყისში და ამდენად აუცილებელი არაა მისი განმეორება ყველა მნიშვნელობისთვის. ცხრილში უნდა მოვერიდოთ ზედმეტ განმეორებებს, ცხადია რაც ნაკლებია მეორე ხარისხოვანი მით ადვილია მთავარის დანახვა.

გაზომვის ყველა შედეგი ჩაწერეთ მაშინათვე და ყოველგვარი დამუშავების გარეშე. ამ წესიდან გამონაკლისი არ არსებობს. არ ჩაატაროთ არავითარი, თუნდაც მარტივი არითმეტიკული მოქმედებები ზეპირად, მანამ სანამ შედეგს არ ჩაწერთ ცხრილში. მაგალითად, ვთქვათ დენის სიდიდის მისაღებად საჭიროა ამპერმეტრის ჩვენების ორზე გაყოფა. ჩაწერეთ ხელსაწყოს ჩვენება პირდაპირ და არ გაყოთ ორზე. ცხადია თუ რატომ უნდა მოვიქცეთ ასე: თუ თქვენ ორზე გაყოფისას შეცდებით, მისი გამოსწორება შემდეგ საკმაოდ გაძნელდება. გაზომვის ჩატარებისა და ჩანაწერის გაკეთებისას კიდევ ერთხელ დახედეთ ხელსაწყოს და გადაამოწმეთ ჩანაწერი. ამრიგად დახედეთ, ჩაიწერეთ, შეამოწმეთ.

ძალიან ცუდია, როდესაც აწარმოებენ ახალ-ახალ გაზომვებს, ისე, რომ არ ატარებენ საშუალედო ანალიზს და სჯერდებიან მხოლოდ საბოლოო განხილვას. ექსპერიმენტის შედეგების ნაწილის ანალიზისას ხშირად ვლინდება გარკვეული შეუსაბამობები, რომლებიც აუცილებელს ხდიან შესაბამისი კორექტივები შეტანას ექსპერიმენტის მსვლელობაში. გარდა ამისა შესაძლებელია შედეგების ერთმა სერიამ გამოიწვიოს ექსპერიმენტის მიმდინარეობის შეცვლა.

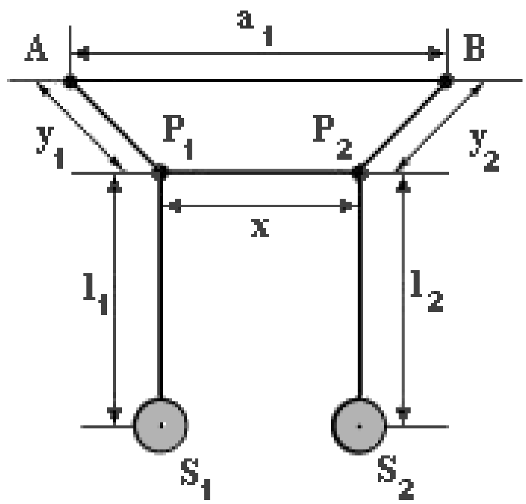
არსებობს ძველი ჩინური ანდაზა “ერთი ნახატი სჯობს ათას სიტყვას”. ექსპერიმენტის ჩანაწერებში და ანგარიშში ძალიან დიდი მნიშვნელობა აქვს სქემებს. სქემა, რომელსაც თან ერთვის რამდენიმე განმარტება, ხშირად გაცილებით უკეთესად აღწერს ექსპერიმენტის იდეას ვიდრე ვიდრე ამ სქემის აღწერა მხოლოდ სიტყვებით. ქვემოთ მოყვანილია ერთმანეთთან დაკავშირებული ქანქარების რხევის შესასწავლი დანადგარის ნაწილის აღწერის ორი ვარიანტი.

ვარიანტი I. ჰორიზონტალური ღეროს A და B წერტილებში მიმაგრებულია ძაფი, მათთან P_1 და P_2 წერტილებში მოსრიალე კვანძების სახით დამატებით მიმაგრებულია კიდევ ორი ძაფი, რომლებზეც კიდია ორი S_1 და S_2 სფერო. AB, AP_1, BP_2 და P_1P_2 უბნების სიგრძეები აღნიშნულია შესაბამისად a_1, y_1, y_2 და x. მანძილი P_1 კვანძიდან S_1 ბირთვის ცენტრამდე ტოლია l_1, მანძილი P_2 კვანძიდან S_2 ბირთვის ცენტრამდე ტოლია l_2. ქანქარებს შორის მანძილების ცვლას ვახდენთ x მანძილის ცვლილებით, რისთვისაც P_1 და P_2 კვანძებს გადავაადგილებთ AP_1P_2B ძაფის გასწვრივ, ისე რომ სისტემის სიმეტრია არ დაირღვეს, ანუ შენარჩუნდეს ტოლობა $y_1 = y_2$..

ვარიანტი II. მოწყობილობის სქემა მოყვანილია ნახ.1.1-ზე. AP_1P_2B არის ძაფის მთლიანი მონაკვეთი, ხოლო P_1 და P_2 - მოსრიალე კვანძები. კავშირს ვცვლით კვანძების გადაადგილებით x სიდიდის ცვლილებით, ამასთან $y_1 = =y_2$.

ცხადია აღწერის მეორე ვარიანტი უფრო გასაგებია და ლაკონური.

სქემა უნდა იყოს რაც შეიძლება მარტივი და მასზე ნაჩვენები უნდა იყოს მხოლოდ ის დეტალები რაც უშუალოდ ექსპერიმენტს ეხება. ექსპერიმენტის შედეგების დამუშავებაში ძალიან დიდ როლს თამაშობენ



ნახ.1.1. ქანქარების რხევის შესასწავლი დანადგარის სქემა

გრაფიკები. ისინი, ჯერ ერთი, საშუალებას იძლევიან დავადგინოთ ზოგიერთი სიდიდე, მაგალითად დახრა, ან მონაკვეთი, რომელსაც გრაფიკი მოკვეთს ღერძებს და ა.შ. მეორეც და მთავარი – გრაფიკებს იყენებენ თვასაჩინოებისთვის.

მაგალითად, დავუშვათ, ვზომავთ წყლის დინების სიჩქარეს მილში, როგორც წნევათა სხვაობის ფუნქციას და ჩვენი მიზანია დავადგინოთ თუ როდის ხდება დინების ლამინარული რეჟიმიდან ტურბულენტურზე გადასვლა.

გაზომვის შედეგები მოყვანილია ცხრილში 1.2.

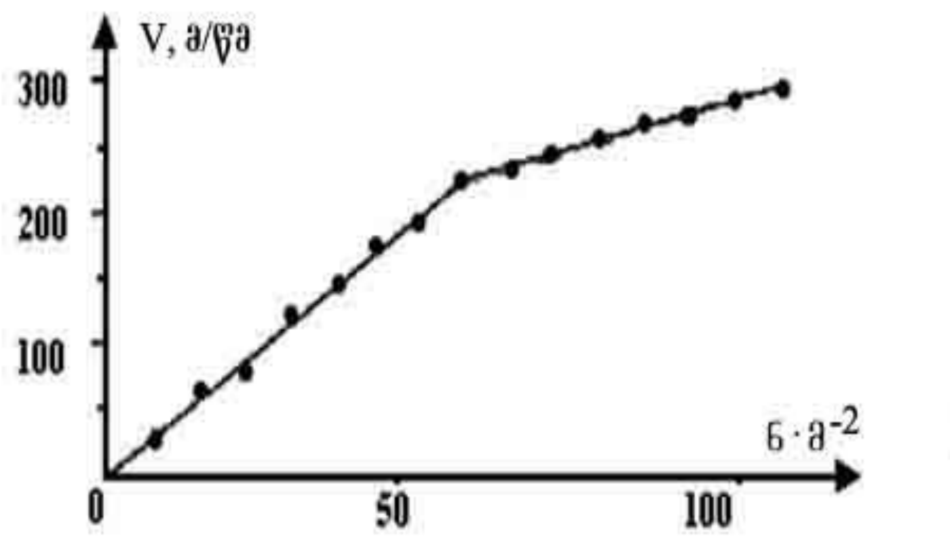
ნაკადი ლამინარული რჩება მანამ სანამ მისი სიჩქარე პროპორციულია წნევათა სხვაობის. ცხრილში მოყვანილი მონაცემებით იმის თქმა თუ როდის ირღვევა პროპორციულობა ძნელი სათქმელია, სხვა საქმეა, როდესაც მონაცემები მოყვანილია გრაფიკის სახით (ნახ. 1.2), ამ შემთხვევაში მაშინათვე ჩანს წერტილი, რომელშიც პროპორციულობა ირღვევა.

გრაფიკები საშუალება იძლევიან უფრო თვასაჩინოდ შევადაროთ ერთმანეთს ექსპერიმენტული და თეორიული მონაცემები

მესამეც, ექსპერიმენტულ ნაშრომებში გრაფიკებს იყენებენ ორ სიდიდეს შორის ემპირიული თანაფარდობის დასადგენად. მაგალითად ვაგრადუირებთ რა საკუთარ თერმომეტრს რაიმე ეტალონური თერმომეტრით, ვადგენთ შესწორებას

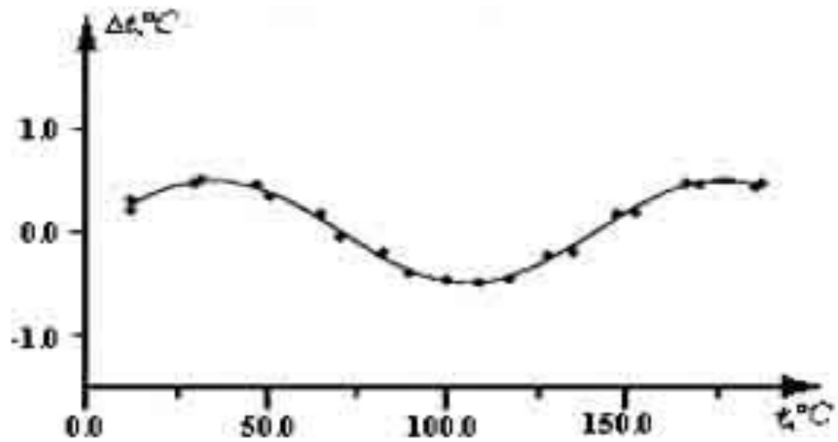
ცხრილი 1.2. მილში წყლის დინების სიჩქარის დამოკიდებულება წნევათა სხვაობისაგან

წნევათა სხვაობა, $ნ \cdot მ^{-2}$	საშუალო სიჩქარე, მმ/წმ	წნევათა სხვაობა, $ნ \cdot მ^{-2}$	საშუალო სიჩქარე, მმ/წმ
7,8	35	78,3	245
15,6	65	86,0	258
23,4	78	87,6	258
31,3	126	93,9	271
39,0	142	101,6	277
46,9	171	109,6	284
54,7	194	118,0	290
62,6	226		

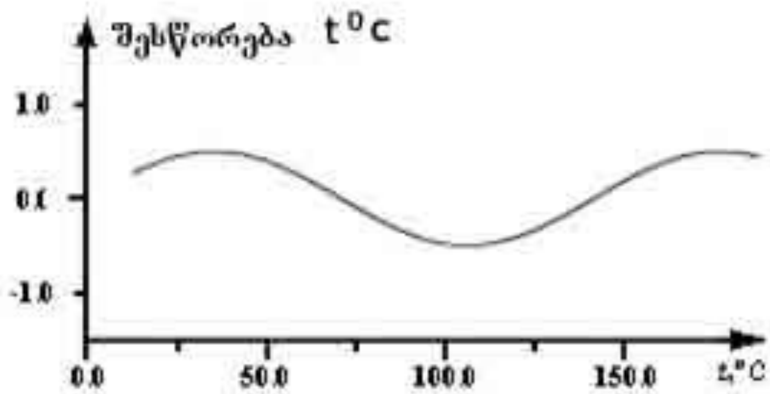


ნახ.1.2. წყლის დინების სიჩქარის დამოკიდებულება წნევაზე

და მიღებულ წერტილებზე ვავლებთ მდოვრე მრუდს (ნახ.1.4), რომელსაც შემდგომში ვიყენებთ თერმომეტრის ჩვენების კორექციისთვის.



ნახ.1.3. თერმომეტრის დაგრადუირების მრუდი



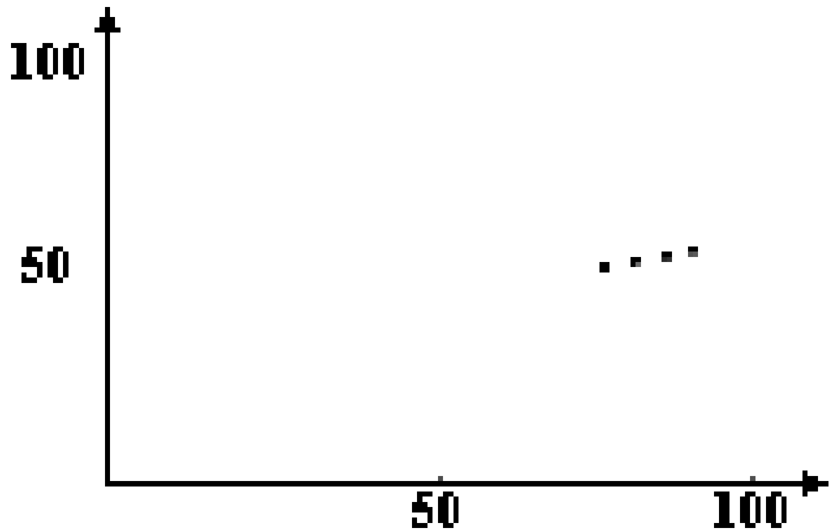
ნახ.1.4. თერმომეტრის ჩვენების შესწორება

მასშტაბი. გრაფიკის აგებისას ჰორიზონტალურ ღერძზე იღებენ დამოუკიდებელ ცვლადს, ხოლო ვერტიკალურზე – გაზომილ სიდიდეს. გრაფიკების ასაგებად იყენებენ სხვადასხვა ქაღალდს: ჩვეულებრივი წრფივი მასშტაბით (მილიმეტრული) და ლოგარითმული მასშტაბით. ეს უკანასკნელი ორი სახისაა ნახევრად ლოგარითმული (ამ შემთხვევაში ლოგარითმები

აღებულია მხოლოდ ერთ ღერძზე) და ორმაგად ლოგარითმული (როდესაც ორივე ღერძზე ლოგარითმებია აღებული). ნახევარლოგარითმული ქაღალდი მოსახერხებელია მაშინ, როდესაც ცვლადებს შორის კავშირი ლოგარითმული ან ექსპონენციალური ხასიათისაა ($y = B_0 + B_1 e^{kx}$), ხოლო თუ ამ კავშირს აქვს e^{kx} სახე სადაც k უცნობი სიდიდეა, უმჯობესია ავიღოთ ორმაგი ლოგარითმული ქაღალდი.

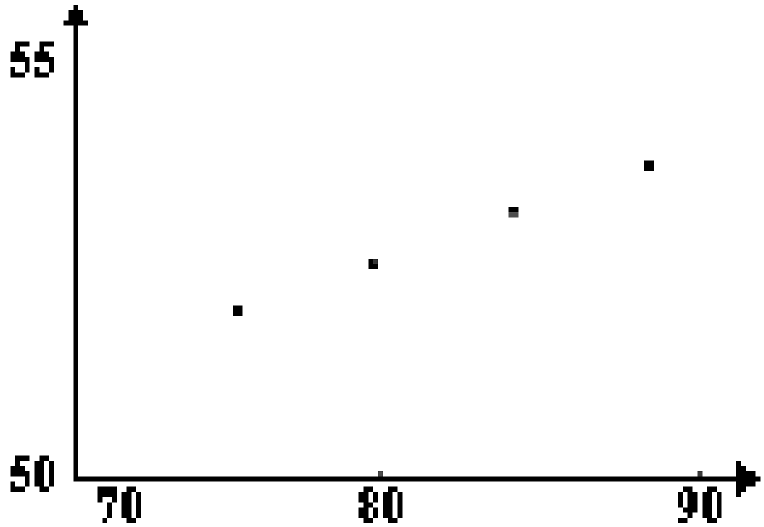
ვთქვათ მილიმეტრულ ქაღალდზე ვაგებთ გრაფიკს. მასშტაბის არჩევისას უნდა გამოვიდეთ შემდეგი მოსაზრებებიდან:

1) ექსპერიმენტული წერტილები არ უნდა იყვნენ ერთმანეთთან ძალიან ახლოს (ნახ.1.5), ვინაიდან ამ შემთხვევაში ძნელია სასარგებლო იფორმაციის აღება.



ნახ.1.5. არასწორად შერჩეული მასშტაბის მაგალითი

ექსპერიმენტული წერტილები ერთმანეთისგან აზრიანი ინტერვალით უნდა დავაშოროთ, როგორც ეს მაგალითად ნახ. 1.6 – ზეა ნაჩვენები. თუ x და y სიდიდეების საწყისი მნიშვნელობები საკმაოდაა დაშორებული კოორდინატთა სათავიდან მაშინ მიზანშეწონილია დანაყოფების ათვლა ღერძებზე დავიწყოთ ისეთი მნიშვნელობებიდან, რომლებიც მხოლოდ ცოტათი განსხვავდებიან ცდით მიღებული იმ მნიშვნელობისგან, რომელიც შესაბამის ღერძზე უნდა დავიტანოთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში გრაფიკზე მივიღებთ უსაფუძვლოდ დიდ ცარიელ



ნახ.1.6. უკეთესადა შერჩეული მასშტაბის მაგალითი

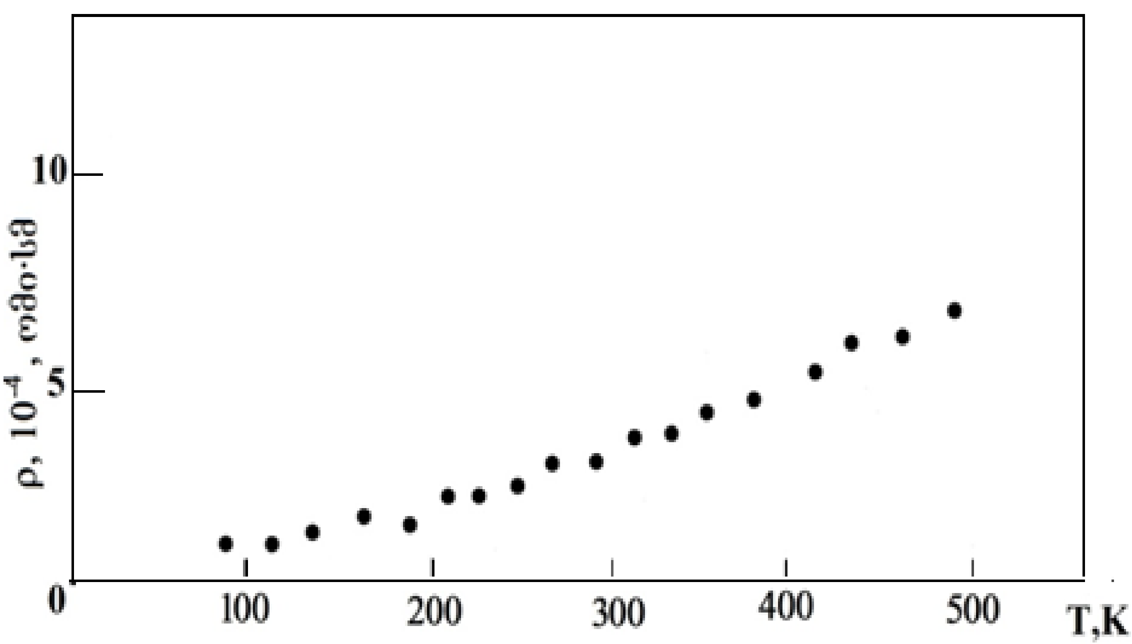
ადგილს. ღერძებზე მასშტაბური დანაყოფების დატანის შემდეგ მათ სიახლოვეს უნდა დავსვათ შესაბამისი რიცხვები.

2) მასშტაბი უნდა იყოს მარტივი. ყველაზე მოსახერხებელია როდესაც გაზომილი სიდიდის ერთეულს (ან 0.1, ან 10, ან 100 და ა.შ.) შეესაბამება 1 სანტიმეტრი. ასევე შეიძლება ისეთი მასშტაბი შეირჩეს, რომ 1 სმ შეესაბამაბოდეს 2 ან 5 ერთეულს. სხვა მასშტაბებს თავი უნდა ავარიდოთ თუნდაც იმიტომ, რომ წინააღმდეგ შემთხვევაში მოგვიწევს არითმეტიკული მოქმედებების ჩატარება ზეპირად.

3) ზოგჯერ მასშტაბის შერჩევა ხდება თეორიული მოსაზრებების საფუძველზე. ასე მაგალითად, თუ გვაინტერესებს, თუ რამდენად აკმაყოფილებენ გაზომილი სიდიდეები $y = kx$ თანაფარდობას, მაშინ გრაფიკზე x უნდა ემთხვეოდეს კოორდინატთა სისტემის დასაწყისს.

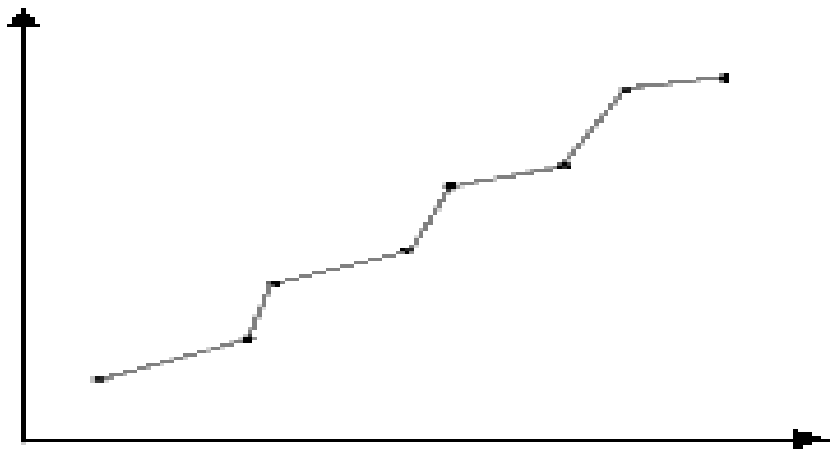
საზომი ერთეულები. ისევე როგორც ცხრილების შემთხვევაში, ათობითი მამრავლი მოსახერხებელია მივანიჭოთ საზომ ერთეულს. მაშინ გრაფიკზე დანაყოფები შეიძლება აღვნიშნოთ ციფრებით 1, 2, 3 ⋯ ან 10, 20, 30 ⋯, და არა 10000, 20000 და ა.შ., ან 0.0001, 0.0002 და ა.შ. კოორდინატთა ღერძებზე უნდა მოვიყვანოთ სახელწოდება ან სიმბოლოები. საზომი ერთეულები უნდა ვუჩვენოთ ისეთივე ხერხით, როგორც ეს გავაკეთეთ ცხრილებში, ანუ ათობითი მამრავლები უნდა მივაკუთვნოთ საზომ ერთეულს. ისევე როგორც ცხრილების

შემთხვევაში, ათობითი მამრავლი მოსახერხებელია მივანიჭოთ საზომ ერთეულს. მაშინ გრაფიკზე დანაყოფები შეიძლება აღვნიშნოთ ციფრებით 1, 2, 3 ⋯ ან 10, 20, 30 ⋯, და არა 10000, 20000 და ა.შ., ან 0.0001, 0.0002 და ა.შ. კოორდინატთა ღერძებზე უნდა მოვიყვანოთ სახელწოდება ან სიმბოლოები. ნახ.1.7-ზე ნაჩვენებია თუ როგორ უნდა გავაკეთოთ წარწერები კოორდინატთა ღერძებზე და მივუთითოთ საზომი ერთეულები. ზოგჯერ სასარგებლოა ექსპერიმენტულ



ნახ.1.7. ლითონის კუთრი წინაღობის დამოკიდებულება ტემპერატურაზე

წერტილებზე გავატაროთ “საუკეთესო” მდორე წირი (ნახ.1.7-ზე როგორც ვხედავთ მრუდი არაა გატარებული). ყურადღება მიაქციეთ ტერმინს – მდორე წირი. დამწყები ექსპრიმენტატორები ხშრად ექსპერიმენტულ წერტილებს აერთებენ უბრალოდ ტეხილი წირით, როგორც ეს ნახ. 1.8 - ზეა ეს ნაჩვენები. გამოდის, რომ ორ სიდიდეს შორის თანაფარდობა აიწერება ტეხილით, რაც ნაკლებად ალბათურია. უფრო მოსალოდნელია, რომ ეს დამოკიდებულება აიწერება მრუდი წირით და წერტილების გადახრა გამოწვეულია, გაზომვის შემთხვევითი ცდომილებებით.



ნახ.1.8. ექსპერიმენტული წერტილების არასწორადა შეერთების მაგალითი

ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ წერტილებზე წირის გატარებისას უნდა ვისარგებლოთ შემდეგი წესებით:

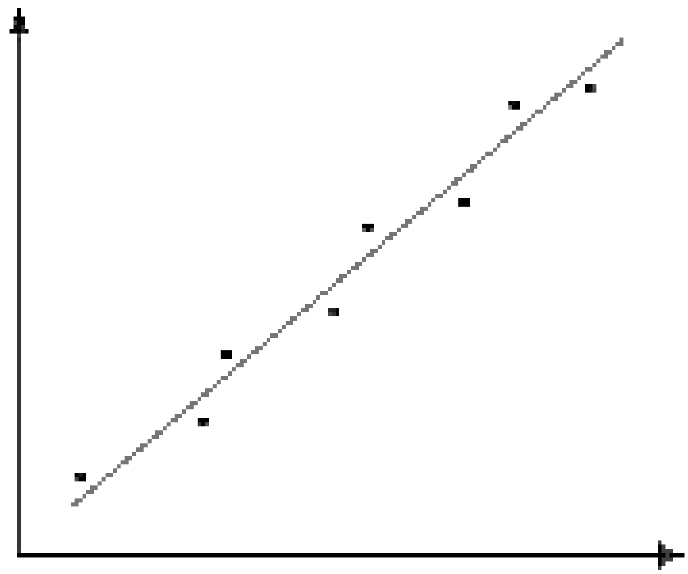
1) რაც მეტი გადაღუნვის წერტილები და უსწორმასწორებები აქვს მრუდს მით ნაკლებ ალბათურია ისინი და ასეთი განსაკუთრებულობების შესამოწმებლად საჭიროა შესაბამის არეებში უფრო ზუსტი გაზომვების ჩატარება.

2) მრუდი ისე უნდა გატარდეს, რომ ის რაც შეიძლება ახლოს იყოს ექსპერიმენტულ წერტილებთან და მის ორივე მხარეს წერტილების ერთნაირი რაოდენობა უნდა იყოს განთავსებული.

3) შესაძლებლობის ფარგლებში ექსპერიმენტული წერტილები ძალიან დიდად არ უნდა იყოს დაშორებული მრუდიდან, უმჯობესია დავუშვათ ორი სამი მცირე გადახრა ვიდრე ერთი დიდი.

იმ შემთხვევაში, როდესაც მოცემული გვაქვს თეორიული მრუდი, უმჯობესია ექსპერიმენტის შედეგად მიღებულ წერტილებზე არ გავატაროთ "მდოვრე" მრუდი", ვინაიდან ის შეიძლება არ შეესაბამებოდეს ფაქტიურ მონაცემებს და ამან შეიძლება ხელი შეგვიშალოს ექსპერიმენტის შედეგების თეორიულთან პირდაპირ შედარებაში.

ნახ.1.9-ზე მოყვანილია გრაფიკის სწორად აგების მაგალითი.



ნახ.1.9. გრაფიკის სწორად აგების მაგალითი

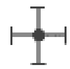
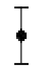
სხვადასხვა ნივთიერებებზე ან სხვადასხვა პირობებში გაზომვის შედეგად მიღებული შედეგები უმჯობესია აღვნიშნოთ სხვადასხვა ნიშნაკებით: მაგალითად ნათელი რგოლებით, მუქი რგოლებით, ჯვრებით და ა.შ. ამასთან ერთად საჭიროა ზომიერების დაცვაც, თუ გრაფიკი ძალიან გადაიტვირთა უმჯობესია ცალკეული ჯგუფისთვის ავაგოთ სპეციალური გრაფიკი.

კოორდინატთა ღერძებზე დანაყოფები და გრაფიკი უკეთესია დასაწყისში ავაგოთ ფანქრით, ვინაიდან შესაძლებელია მოგვინდეს მასშტაბის შეცვლა ან არასწორად დასმული წერტილების გასწორება.

მას შემდეგ რაც მასშტაბი შერჩეულია სწორად და ექსპერიმენტული წერტილები დასმულია საჭირო სიზუსტით, შეგვიძლია ისინი გავამუქოთ და გავატაროთ მუქი მრუდი შესაბამისი ხელსაწყოთი. გრაფიკის აგების შემდეგ მას უნდა დავაწეროთ დასახელება, რომელიც უნდა მოიცავდეს მოკლე შინაარს იმისა თუ რას აჩვენებს ეს გრაფიკი.

ექსპერიმენტული მონაცემის ცდომილების საჩვენებლად ქსპერიმენტული წერტილი უნდა დავსვათ ცდომილების მაჩვენებელი მონაკვეთის შიგნით, როგორც ეს ნახ.1.10 – ზე არის ნაჩვენები.

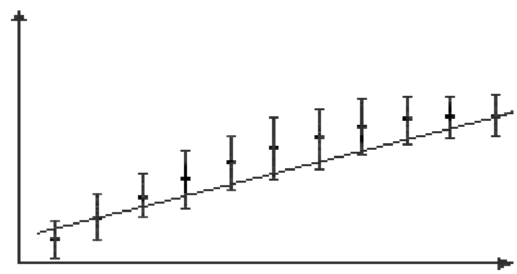
ასეთი აღნიშვნების დატანა დიდ დროს მოითხოვს, ართულებს გრაფიკს და ამდენად ის უნდა გამოვიყენოთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც ეს აუცილებელია, ანუ როდესაც ცდომილებების სიდიდეზე დამოკიდებულია თეორიული მრუდიდან

 ან 

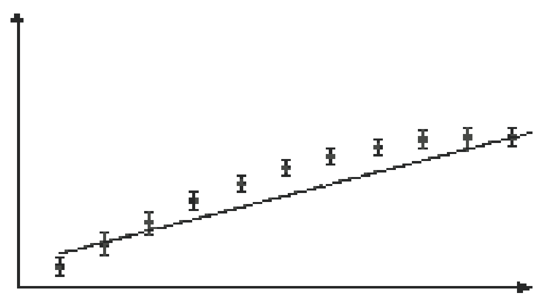
ნახ.1,10. ცდომილების მაჩვენებელი მონაკვეთები

ექსპერიმენტული წერტილების გადახრა (ნახ.1.11 და ნახ. 1.12).

როგორც ვხედავთ ექსპერიმენტული წერტილების გადახრა წრფიდან ორივე გრაფიკზე ერთნაირია, მაგრამ 1.11 გრაფიკზე გადხრა ალბათ არაარსებითია, ხოლო 1.12 – ზე კი არსებითი. ცდომილებებს ჩვეულებრივ მიუთითებენ მაშინაც, როდესაც ის სხვადასხვაა სხვადასხვა ექსპერიმენტული წერტილისთვის.



ნახ.1.11. ექსპერიმენტული წერტილების გადახრა წრფიდან არაარსებითია



ნახ.1.12. ექსპერიმენტული წერტილების გადახრა წრფიდან არსებითია

1.3. გაზომვის ცდომილებათა კლასიფიკაცია

ფიზიკური სიდიდის რიცხვითი მონაცემები მიიღება გაზომვის შედეგად. ცნობილია, რომ ერთი და იგივე სიდიდის საკმაოდ მაღალი სიზუსტით რამოდენიმეჯერ გაზომვისას მიიღება სხვადასხვა რიცხვები ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გაზომვები შეიცავენ ცდომილებებს.

ამა თუ იმ გაზომვის სიზუსტეს ახასიათებენ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებებით.

გაზომვის აბსოლუტური ცდომილება $\boldsymbol{\Delta x}$ ეწოდება გაზომვის შედეგად მიღებულ x სიდიდესა და გასაზომი სიდიდის ნამდვილ $x_ნ$ მნიშვნელობას შორის სხვაობის აბსოლუტურ მნიშვნელობას და მისი ერთეულია გასაზომი სიდიდის ერთეული. ვინაიდან გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობის განსაზღვრა შეუძლებელია, პრაქტიკაში მის ნაცვლად იყენებენ მის მოქმედ მნიშვნელობას $x_მ$, ანუ ფიზიკური სიდიდის მნიშვნელობას, რომელიც მიღებულია ცდების მეშვეობით მაღალი სიზუსტის მეთოდებისა და ხელსაწყოების გამოყენებით და რომელიც იმდენად ახლოსაა ნამდვილ მნიშვნელობასთან, რომ შესაძლებელია მისი გამოყენება მოცემულ გაზომვით ამოცანაში. მოქმედ მნიშვნელობად ჩვეულებრივ იღებენ საშუალოსტატისტიკურ $(\bar{x})$ მნიშვნელობას

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (1.2)$$

მათემატიკურ სტატისტიკაში მტკიცდება, რომ სისტემატური ცდომილებების არ არსებობისას (ან მისი გამორიცხვის შემდეგ) ეს სიდიდე წარმოადგენს საუკეთესო მიახლოებას გასაზომი სიდიდის ნამდვილ მნიშვნელობასთან.

ყოველივე ზემოთქმულის საფუძველზე აბსოლუტური ცდომილებისათვის შეიძლება დავწეროთ

$$\Delta x = |\bar{x} - x| \quad (1.3)$$

აბსოლუტური ცდომილება იზომება იმვე ერთეულებში რა ერთეულებშიც იზომება x სიდიდე.

აბსოლუტური ცდომილება სრულყოფილად ვერ ახასიათებს გაზომვის ხარისხს. მაგალითად თუ ავტოკალმის სიგრძეს გავზომავთ 1 სმ სიზუსტით, ეს

იქნება ძალიან დაბალი სიზუსტე ($\approx$ 10%), მაგრამ თუ ამავე 1 სმ სიზუსტით გავზომავთ მანძილს თბილისიდან ბათუმამდე ეს მეტისმეტად მაღალი სიზუსტე იქნება ($\approx 0{,}8 \cdot 10^{-5}\%$).

ამდენად აბსოლუტური ცდომილების მითითება ბევრ არაფერს გვეუბნება ნამდვილი სიზუსტის შესახებ, თუ ერთმანეთს არ შევადარებთ აბსოლუტურ ცდომილებას და თვით გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობას. გარდა ამისა აბსოლუტური ცდომილება, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, იზომება იმავე ერთელებში რა ერთეულებში იზომება გასაზომი სიდიდე, და თუ ზომის ერთეული შევცვალეთ მისი მნიშვნელობაც შეიცვლება, რაც გარკვეულ უხერხულობებს ქმნის.

ამ თვალსაზრისით გაცილებით მეტ და რაც მთავარია ზუსტ ინფორმაციას შეიცავს ფარდობითი ცდომილება. გაზომვის ფარდობითი ცდომილება ε, ეწოდება აბსოლუტური ცდომილების შეფარდებას გასაზომი სიდიდის ნამდვილ (მოქმედ) მნიშვნელობასთან და ხშირად გამოისახება პროცენტებით, ე.ი. გვაქვს

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_\partial} \cdot 100\%$$

ან ყოველივე ზემოთქმულის გათვალისწინებით

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

ფარდობითი ცდომილება უგანზომილებო სიდიდეა და როგორც წესი პროცენტებში გამოისახება.

ამრიგად აბსოლუტური ცდომილება ახასიათებს მეთოდს, რომელიც გაზომვისთვის იქნა არჩეული, ხოლო ფარდობითი ცდომილება კი - გაზომვის ხარისხს.

ექსპერიმენტული მონაცემების მათემატიკური დამუშავების ერთ-ერთ მიზანს წარმოადგენს გაზომვის შედეგების მიხედვით გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობის შეფასება. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად აუცილებელია ვიცოდეთ ცდომილებების ძირითადი თვისებები და შეგვეძლოს მათი გამოყენება.

გაზომვის ცდომილებები მიზანშეწონილია დაიყოს სამ ნაწილად: სისტემატური, შემთხვევითი და უხეში.

სისტემატური ცდომილებები ეწოდებათ ცდომილებებს, რომლებიც გამოწვეულია ისეთი ფაქტორებით, რომლებიც ერთნაირად მოქმედებენ ერთიდაიმავე გაზომვების მრავალჯერადი ჩატარებისას. სისტემატური ცდომილების მაგალითია თეფშებიანი სასწორით გაზომვების ჩატარება არაზუსტი საწონებით. ვთქვათ გვაქვს საწონი რომლის წონა ნამდვილი წონისგან (ვთქვათ 1000 გ) განსხვავდება 0,1 გ-ით, მაშინ ჩვენს მიერ აწონილი სხეულის წონა ნამდვილისგან მეტი ან ნაკლები იქნება 0,1 გ-ით და ნამდვილი წონის დასადგენად ცხადია მიღებულ მნიშვნელობას უნდა მივუმატოთ ან გამოვაკლოთ 0,1 გ. სისტემატური ცდომილების მეორე მაგალითია სხეულის აწონვა ჰაერში. არქიმედეს კანონის თანახმად ჰაერში აწონილი სხეულის წონა განსხვავდება ნამდვილი წონისგან ამ სხეულის მიერ გამოდევნილი ჰაერის წონით (გავიხსენოთ არქიმედეს კანონი: სითხეში ან აირში მოთავსებულ სხეულზე მოქმედებს ვერტიკალურად ზევით მიმართული ამომგდები ძალა, რომელიც ამ სხეულის მიერ გამოდევნილი სითხის ან აირის წონის ტოლია). ეს მსჯელობა სამართლიანია საწონისთვისაც. სწორი წონის მისაღებად, აწონვის პროცესის ჩატარების შემდეგ საჭიროა სათანადო შესწორების შეტანა, თუ ამას არ გავაკეთებთ გაზომვის შედეგები “დამძიმებული” იქნება სისტემატური ცდომილებით.

მოყვანილი ორივე მაგალითი სისტემატურ ცდომილებას მიეკუთვნება, მაგრამ მათ შორის არსებობს არსებითი განსხვავებაც. მეორე შემთხვევაში ადვილად შეიძლება გამოვთვალოთ წონის დანაკარგი. ამისათვის საჭიროა ვიცოდეთ ჰაერის, საწონის მასალის და ასაწონი სხეულის სიმკვრივე, ასევე საწონისა და ასაწონი სხეულების მოცულობები. სიმკვრივეების მნიშვნელობები საკმაოდ მაღალი სიზუსტით შეიძლება ავიღოთ ცნობარებიდან. ამისგან განსხვავებით პირველ შემთხვევაში საწონის წონაზე შესწორება უმრავლეს შემთხვევაში უცნობია. მის შესახებ მხოლოდ იმის თქმა შეიძლება, რომ ის არ აღემატება 0.1 გ-ს, ანუ 0,01%. ამდენად საწონის არაზუსტ სიდიდეზე შესწორების შეტანა შეუძლებელია და შეგვიძლია დავწეროთ მხოლოდ ის, რომ სხეულის წონა ტოლია $P = (1000 \pm 0{,}1)$ გ. თუ საწონის წონის შესახებ სხვა რამ არ არის ცნობილი, გარდა იმისა, რომ მისი ცდომილება არ აღემატება 0,1

გ-ს, არავითარი სხვა გაზომვები ამ საწონებით უფრო ზუსტ მნიშვნელობებს ვერ მოგვცემს.

სისტემატური ცდომილების წყარო შეიძლება იყოს გამზომი ხელსაწყოს არასწორი რეგულირება, რამაც შეიძლება გამოიწვიოს ათვლის დასაწყისის წანაცვლება ერთ ან მეორე მხარეს რაღაც მუდმივი სიდიდით, თუ ხელსაწყოს სკალა თანაბარია, ხოლო თუ სკალა არათანაბარია მაშინ ათვლის დასაწყისის წანაცვლება შეიძლება სხვა გარკვეულ კანონს ექვემდებარებოდეს. სისტემატური ცდომილების სხვა მაგალითია გარეშე პირობების ცვლილება, მაგალითად ტემპერატურის, თუ ცნობილია მათი გავლენა გაზომვის შედეგებზე.

სისტემატური ცდომილების გამოვლენა მოითხოვს სპეციალური კვლევების ჩატარებას (მაგალითად ერთი და იგივე სიდიდის გაზომვა სხვადასხვა მეთოდებით ან ცნობილი სიდიდეების ეტალონების გაზომვების ჩატარება ერთი და იგივე ხელსაწყოებით).

თუ სისტემატური ცდომილებები დადგენილია, ისინი შეიძლება ადვილად გავითვალისწინოთ შესაბამისი შესწორებების შეტანით.

შემთხვევითი ცდომილებები ეწოდებათ ისეთ ცდომილებებს, რომლებიც გაზომვის შედეგებში რჩებიან მას შემდეგ რაც გამორიცხულია ყველა უხეში ცდომილება და სისტემატური ცდომილებები. შემთხვევითი ცდომილებები გამოწვეულია მრავალი ისეთი ფაქტორით, რომელთა გავლენაც იმდენად უმნიშვნელოა, რომ მათი გამოყოფა და გათვალისწინება გაზომვის ტექნიკის განვითარების მოცემულ ეტაპზე შეუძლებელია. მაგალითად შემთხვევითი ცდომილების მიზეზი შეიძლება იყოს ჰაერის რხევა თეფშებიანი სასწორით აწონვის დროს, როდესაც ეს რხევა სხდასხვანაირად მოქმედებს სასწორის თეფშებზე; მტვრის ნაწილაკები, რომლებიც შეიძლება განლაგდნენ საწონებზე; სხვადასხვა ხახუნი სასწორის მარცხენა და მარჯვენა ბერკეტებში და ა.შ. შემთხვევითი ცდომილება ამ ფაქტორების ჯამური ზემოქმედების შედეგია. შემთხვევითი ცდომილების თავიდან აცილება შეუძლებელია. მათი გამორიცხვა გაზომვის თითოეული შედეგიდან ასევე შეუძლებელია, თუმცა ალბათობის თეორიის გამოყენებით ხერხდება მათი გავლენის შეფასება გასაზომ სიდიდეზე, რაც საბოლოოდ საშუალებას იძლევა გასაზომი სიდიდე დადგინდეს რაც

შეიძლება მცირე ცდომილებით, იმ ცდომილებებთან შედარებით, რომლებსაც ცალკე აღებული გაზომვები იძლევიან.

სისტემატური ცდომილებები შეიძლება ზოგიერთ შემთხვევაში იმდენად დიდი იყოს, რომ მნიშვნელოვნად დაამახინჯოს გაზომვის შედეგები. სისტემატური ცდომილებები შეიძლება ოთხ ჯგუფად დაიყოს:

1) ცდომილებები, რომელთა ბუნებაც ჩვენთვის ცნობილია და რომელთა სიდიდეც შეიძლება ზუსტად იქნას განსაზღვრული. ასეთი ცდომილებები შეიძლება თავიდან იქნას აცილებული შესაბამისი შესწორებების შეტანით. მაგალითად სიგრძის გაზომვისას შესაძლებელია აუცილებელი გახდეს შესწორებების შეტანა, რომლებიც დაკავშირებულია გასაზომი სხეულის და საზომი სახაზავის ზომების ტემპერატურულ ცვლილებებთან; წონის გაზომვისას – ცდომილება, რომელიც გამოწვეულია ჰაერში წონის "დანაკარგთან", რომელიც თავის მხრივ გამოწვეულია ჰაერის ტემპერატურაზე, ტენიანობაზე, ატმოსფერულ წნევაზე და ა.შ. ცდომილებების ასეთი წყაროები ზედმიწევნით გულდასმით უნდა გაანალიზდეს, განისაზღვროს შესწორებები და გათვალისწინებულ იქნას საბოლოო შედეგებში. ამასთან ნებისმიერი გაზომვის დროს უნდა გამოვიჩინოთ გონიერი მიდგომა. ვნახოთ ეს სიგრძის გაზომვის მაგალითზე. ვთქვათ ვზომავთ ბრინჯაოს ცილინდრის დიამეტრს 0^0C ტემპერატურაზე დამზადებული ფოლადის სახაზავით და გაზომვას ვაწარმოებთ 25^0C ტემპერატურაზე. დავუშვათ ცილინდრის დიამეტრია 10 სმ და გვინდა მისი სიდიდის დადგენა 0^0C - ზე. ბრინჯაოს წრფივი გაფართოების კოეფიციენტი შეადგენს $19 \cdot 10^{-6}$ 1/გრად, ხოლო ფოლადის - $11 \cdot 10^{-6}$ 1/გრად. ადვილი საჩვენებელია, რომ 25^0C -მდე გახურებისას სახაზავის დაგრძელება იქნება 0,027 მმ, ხოლო დიამეტრის – 0,047 მმ. ამ სიდიდეების სხვაობა ტოლია 0,02 მმ-ის, რაც შეადგენს ჩვენი გაზომვის შესწორებას.

მოვიყვანოთ სხვა მაგალითი: ვთქვათ სხეულს ვწონით არათანაბარი სიგრძის მხრების მქონე ბერკეტიანი სასწორით. დავუშვათ მხრებს შორის სხვაობა შეადგენს 0.001 მმ-ს. თუ მხრების მთლიანი სიგრძეა 70 მმ და ასაწონი სხეულის მასაა 200 გ მარტივი გამოთვლებით დავადგენთ, რომ სისტემატური ცდომილება იქნება 2.68 მგ. ამ გაზომვის სისტემატური ცდომილების

გამორიცხვა შესაძლებელია აწონვის სპეციალური მეთოდების გამოყენებით (გაუსის მეთოდი, მენდელეევის მეთოდი და ა.შ.)

ჩვეულებრივ ფოლადის სახაზავს გააჩნია მილიმეტრული დანაყოფები. თუ დავუშვებთ, რომ თვალით შესაძლებელია შედარებით დამაჯერებლად შევაფასოთ 0.2 მმ-ის ტოლი დანაყოფი, მაშინ 0.2 მმ იქნება ის სიზუსტე, რომელიც მიიღწევა მოცემული გამზომი ხელსაწყოთი. სწორედ ასეთი სიზუსტითაა დატანილი დანაყოფები სახაზავზე. როგორც ვხედავთ ტემპარატურული ცდომილება 0,02 მმ გაცილებით ნაკლებია სახაზავის დანაყოფის ფასზე და ამდენად ამ ცდომილებაზე შესწორების შეტანა უაზროა.

სხვა საქმეა თუ გაზომვას ვაწარმოებთ მიკრომეტრით – ხელსაწყოთი, რომელიც გაზომვის საშუალებას იძლევა 0,001 მმ სიზუსტით. ამ შემთხვევაში შესწორების – 0,02 მმ შეყვანა არა მარტო მიზანშეწონილია არამედ აუცილებელიც.

2) ცნობილი წარმოშობის ცდომილებები, რომელთა სიდიდეც უცნობია, მაგრამ ვიცით, რომ ის არ აღემატება რაღაც გარკვეულ მნიშვნელობას. მათ რიცხვს მიეკუთვნება ჩვენს მიერ ნახსენები გამზომი ხელსაწყოების ცდომილებები, რომლებიც ზოგჯერ ხელსაწყოს კლასით განისაზღვრება. თუ ხელსაწყოს სკალაზე ნაჩვენებია სიზუსტის კლასი მაგ. 0.5, ეს იმას ნიშნავს, რომ ხელსაწყოს ჩვენება სწორია სიზუსტით მთელი სკალის 0.5%-ით. სხვანაირად, რომ ვთქვათ თუ ხელსაწყოს მთელი სკალა შეესაბამება მაგ. 150 ვოლტს, მაშინ გაზომვის ცდომილება არ აღემატება 0.75 ვოლტს. ცხადია ასეთი ხელსაწყოთი შეუძლებელია გაზომვის ჩატარება, მაგალითად 0.01 ვ სიზუსტით, თუ სპეციალურ რაიმე კომპენსაციურ სქემებს არ შევქმნით.

ზოგჯერ ხელსაწყოს კორპუსზე დატანილია მაქსიმალური ცდომილებების მიშვნელობები, ზოგჯერ ცდომილებები მითითებულია პასპორტში. ჩვეულებრივ მოცემულია აბსოლუტური ცდომილების მნიშვნელობა, რომელიც იძულებული ვართ ჩავთვალოთ მუდმივ სიდიდედ მთელ სკალაზე, თუ არ არის მოცემული შესწორების სპეციალური ცხრილი.

ზემოთ აღწერილი სისტემატური ცდომილებების გამორიცხვა შეუძლებელია, მაგრამ როგორც წესი ცნობილია მათი მაქსიმალური სიდიდეები

და მაგალითად თუ ძაბვა გავზომეთ ზემოთ ნახსენები ვოლტმეტრით და მივიღეთ მნიშვნელობა $V = 47.6$ ვ ეს იმას ნიშნავს, რომ ძაბვის მნიშვნელობა ძევს 46.8 და 48.4 შორის, ანუ შეგვიძლია დავწეროთ $V = (47.6 \pm 0.75)$ვ

კიდევ ერთი მაგალითი: ვთქვათ მიკრომეტრის პასპორტში წერია, რომ "დასაშვები ცდომილება შეადგენს ± 0.004 მმ-ს $+20 \pm 4^0 C$ - ზე" ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული მიკრომეტრით გაზომილი სხეულის ზომას პასპორტში მითითებულ ტემპერატურაზე გააჩნია ± 0.004 მმ ცდომილება გაზომვის ნებისმიერი შედეგისას.

3) სისტემატური ცდომილებები, რომლებიც განპირობებულია გასაზომი ობიექტის თვისებებით. ეს ცდომილებები ხშირად დაიყვანება შემთხვევით ცდომილებებზე. მაგალითად ვთქვათ გვინდა რაიმე მასალის ელექტროგამტარობის დადგენა, რისთვისაც ავიღეთ გამტარის ნაჭერი, რომელსაც გააჩნია რაიმე დეფექტი (გამსხვილება, არაერთგვაროვნება და ა.შ), ცხადია ელექტროგამტარობის განსაზღვრაში დაშვებული იქნება გარკვეული ცდომილება. განმეორებითი გაზომვა მოგვცემს იმავე შედეგს, ანუ დაშვებულია გარკვეული სისტემატური ცდომილება. გავზომოთ ასეთი გამტარის რამდენიმე ნაჭერის ელექტროგამტარობა და მოვძებნოთ საშუალო მნიშვნელობა, რომლის სიდიდეც შეიძლება მეტი ან ნაკლები იყოს ცალკეული გამტარების ელექტროგამტარობის სიდიდიდეზე, შესაბამისად ამ გაზომვების ცდომილებები შეიძლება მივაკუთვნოთ შემთხვევით ცდომილებებს.

4) სისტემატური ცდომილების მესამე სახე ყველაზე სახიფათოა. ეს ის ცდომილებებია, რომელთა არსებობის შესახებ ჩვენ ეჭვიც კი შეიძლება არ გვეპარებოდეს, მაგრამ მათი ზეგავლენა მნიშვნელოვანი შეიძლება იყოს. ისინი თავს იჩენენ როგორც წესი რთული გაზომვების დროს და ხშირად როცა გვგონია, რომ გაზომვა ჩატარებულია 2 – 3% სიზუსტით, ამ დროს ცდომილებამ შეიძლება გადააჭარბოს გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობას 2-3 ჯერ და მეტჯერაც. ასე მაგალითად თუ ვადგენთ რაღაც ლითონის ბირთვის სიმკვრივეს და ამისთვის გავზომეთ წონა და მოცულობა, დავუშვებთ ძალიან უხეშ ცდომილებას, თუ ეს ბირთვი შიგნით შეიცავს სიღრუვეს, რომლის შესახებაც ჩვენ წარმოდგენაც არ გვქონდა და რომელიც ბირთვის ჩამოსხმის დროს გაჩნდა.

საჭიროა გვახსოვდეს შემდეგი მარტივი წესები:

1) თუ სისტემატური ცდომილება განმსაზღვრელია, ანუ თუ მისი სიდიდე არსებითად აღემატება შემთხვევით ცდომილებას, რომელიც მოცემულ მეთოდს ახასიათებს, საკმარისია გაზომვა ჩატარდეს მხოლოდ ერთხელ;

2) თუ შემთხვევითი ცდომილება აღემატება სისტემატურს, გაზომვები უნდა ჩატარდეს რამდენჯერმე. გაზომვათა რაოდენობა იმდენი უნდა იყოს, რომ საშუალო არითმეტიკულის შემთხვევითი ცდომილება ნაკლები იყოს სისტემატურ ცდომილებაზე, ისე, რომ ეს უკანასკნელი იყოს მთლიანი ცდომილების განმსაზღვრელი. ამასთან უნდა აღვნიშნოთ, რომ შეიძლება მხოლოდ ერთი გაზომვით დავკმაყოფილდეთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც რაღაც სხვა წყაროებიდან ცნობილია, რომ შემთხვევითი ცდომილების სიდიდე ნაკლებია სისტემატურზე. ეს ხდება მაშინ, როდესაც გაზომვებს ვაწარმოებთ მეთოდით, რომლის ცდომილებები რაღაც ხარისხით ცნობილია. მაგალითად, ვთქვათ ვზომავთ კალმის სიგრძეს სახაზავით, რომლის დანაყოფის ფასია 1 მმ, მაშინ შეიძლება დარწმუნებული ვიყოთ, რომ შემთხვევითი ცდომილება გაცილებით ნაკლებია 1 მმ-ზე და შეიძლება დავკმაყოფილდეთ ერთი გაზომვით. ზუსტად ასევე ჩვენ ვიცით, რომ ჩვეულებრივი სავაჭრო სასწორზე აწონვისას შემთხვევითი ცდომილება ნაკლებია 5 გ-ზე, მაშინ როდესაც ასეთი სასწორის დანაყოფის ფასიც 5 გ-ია და შესაბამისად სისტემატური ცდომილება ახლოსაა ამ მონაცემთან. შესაბამისად ასეთ სასწორზე აწონვა უნდა ჩავატაროთ ერთხელ, რაც პრაქტიკაში ასეც ხორციელდება. პირიქით, ზოგიერთი მარკის ზუსტი ლაბორატორიული სასწორის შემთხვევითი ცდომილება მეტია სისტემატურ ცდომილებაზე და ამდენად გაზომვები უნდა ჩატარდეს რამდენიმეჯერ.

3) ზოგჯერ შესაძლებელია ექსპრიმენტის მეთოდიკა ისე შეიცვალოს, რომ სისტემატური ცდომილება გაქრეს. მაგალითად, ლაბორატორიულ სამუშაოში “მათემატიკური ქანქარა”, თავისუფალი ვარდნის აჩქარების გამოსათვლელად საჭიროა გაიზომოს ქანქარის სიგრძე. სიგრძის გაზომვის სისტემატური ცდომილების თავიდან ასაცილებლად ხშირად გამოიყენება ე.წ. სხვაობითი მეთოდი. რხევის პერიოდებს T_1 და T_2 გამოთვლიან შესაბამისად სიგრძის ორი სხვადასხვა მნიშნელობისათვის L_1 და L_2, ჩაწერენ პერიოდისათვის ორ

ფორმულას შესაბამისად L_1 და L_2 სიგრძეებისათვის და ქვემოთ მოყვანილი ფორმულით იანგარიშებენ თავისუფალი ვარდნის gაჩქარებას:

$$g = 4\pi^2 \frac{L_1 - L_2}{T_2^2 - T_1^2}, (L_1 \neq L_2) \quad (1.4)$$

ამ ფორმულაში ქანქარის სიგრძის გაზომვის სისტემატური ცდომილებები გამოკლებისას ერთმანეთს აბათილებენ.

შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი ხერხი მოითხოვს L_1 და L_2, და შესაბამისად T_1 და T_2 სიდიდეებს შორის მნიშვნელოვან განსხვავებას. თუ L_1 და L_2 (და შესაბამისად L_1 და L_2) შორის განსხვავება უმნიშვნელო იქნება, ეს მკვეთრად გაზრდის შედეგის, ამ შემთხვევაში g, შემთხვევითი ცდომილებას. სხვა შემთხვევაში სისტემატური ცდომილებების გათვალისწინება ხდება შესწორებების შეტანით. მაგალითად, სიგრძის გაზომვისას შესაძლებელია შესწორების გამოთვლა წაგრძელებაზე, რომელიც გამოწვეულია ტემპერატურის ცვლილებით, შეიძლება გამოითვალოს ასევე ჰაერის ამომგდები ძალის სიდიდე სხეულის მასის დადგენისას აწონვით და ა.შ.

სისტემატური ცდომილება შესაძლებელია წინასწარ გამოითვალოს ან თავიდან იქნას აცილებული ექსპერიმენტის მეთოდიკის გაუმჯობესებით.

უხეში ცდომილება ისეთი ცდომილებაა, რომელიც გამოწვეულია ექსპერიმენტატორის მიერ გაზომვის პირობების დარღვევით ან მისი უყურადღებობით, მაგალითად ექსპერიმენტატორმა დაკვირვებათა ცხრილში 11-ის ნაცვლად ჩაწერა 12. უხეში ცდომილება შეიძლება გამოწვეული ხელსაწყოს დაზიანებით, ექსპერიმენტში გაუთვალისწინებელი შემთხვევის ჩარევით და სხვა. უხეში ცდომილება როგორც წესი მთელი ექსპერიმენტის შემთხვევაში მხოლოდ ერთი-ორჯერ იჩენს თავს. უხეში ცდომილების აღმოჩენისას შესაბამისი მონაცემი უკუგდებულ უნდა იქნას და თუ ეს შესაძლებელია გაზომვები თავიდან ჩატარდეს. უხეში ცდომილებების თავიდან აცილების ერთ-ერთი გზაა გაზომვების ჩატარება მაქსიმალური ყურადღებით, იმავე სიდიდის გაზომვა სხვა ექსპერიმენტატორის მიერ და ა.შ. გაზომვის უხეში ცდომილების ერთ-ერთი გარეგანი მაჩვენებელია მისი მკვეთრი განსხვავება სხვა გაზომილი სიდიდეებისგან. არსებობს უხეში ცდომილების გამორიცხვის ზოგიერთ მათემატიკურ მეთოდი, რომლებსაც ქვემოთ შევეხებით.

შემთხვევითი ცდომილებები ისეთი ცდომილებებია, რომლებიც რჩებიან ყველა გამოვლენილი სისტემატური და უხეში ცდომილებების გათვალისწინების შემდეგ. შემთხვევითი ცდომილებები გამოწვეულია მრავალი ისეთი ფაქტორის ზეგავლენით რომელთა მოქმედების ეფექტი იმდენად უმნიშნელოა, რომ მათი ცალკე გამოყოფა და გათვალისწინება შეუძლებელია. შემთხვევითი ცდომილება შეიძლება განვიხილოთ როგორც ამ ფაქტორების ჯამური მოქმედების შედეგი.

შემთხვევითი ცდომილებების გამორიცხვა შეუძლებელია, მაგრამ ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენებით შესაძლებელია მათი გავლენის გათვალისწინება გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობის შეფასებაში, რაც საშუალებას იძლევა გასაზომი სიდიდის მნიშვნელობა დადგინდეს ცალკეული გაზომვის ცდომილებაზე მნიშველოვნად ნაკლები ცდომილებით.

1.4. გაზომვის შემთხვევით ცდომილებათა განაწილება

არსებობს გაზომვის შემთხვევით ცდომილებათა განაწილების ალბათური მოდელი და ნორმალური განაწილების კანონი.

სანამ შევეხებოდეთ ალბათურ მოდელს განვიხილოთ ალბათობათა თეორიის ზოგიერთი საკითხები.

ხდომილობა ეწოდება რაიმე მოვლენას, რომელიც შეიძლება მოხდეს ან არა. ხდომილობა სამი სახისაა აუცილებელი, შეუძლებელი და შემთხვევითი. ხდომილობას ეწოდება აუცილებელი თუ ცდის ჩატარების მოცემულ პირობებში ის აუცილებლად მოხდება. მაგალითად თუ ურნაში დევს ხუთი ცალი შავი ბურთი, იქიდან ამოღებული ერთი ბურთი აუცილებლად შავი იქნება. ხდომილობას ეწოდება შეუძლებელი თუ თუ ცდის ჩატარების მოცემულ პირობებში ის ვერ მოხდება. მაგალითად თუ ურნაში დევს მხოლოდ შავი ბურთები იქიდან თეთრი ბურთის ამოღება შეუძლებელია. ხდომილობას ეწოდება შემთხვევითი თუ ცდის მოცემულ პირობებში ის შეიძლება მოხდეს ან არ მოხდეს. მაგალითად თუ ყუთში დევს ერთი შავი და ერთი თეთრი ბურთი, იქიდან შემთხვევით ამოღებული ბურთი ან შავი იქნება ან არა. მოვიყვანოთ შემთხვევითი და არაშემთხვევითი ხდომილობების მაგალითები. მზის

დაბნელების დასაწყისი და დასასრული შესაძლებელია ზუსტად იქნას ნაწინასწარმეტყველები და ამდენად ის არ მიეკუთვნება შემთხვევით ხდომილებას. ასევე არაა შემთხვევითი ხდომილება მატარებლის მოსვლა სადგურში ვინაიდან მატარებლები მოძრაობენ წინასწარ განსაზღვრული გრაფიკით. მაგრამ ტაქსის მოსვლა სადგურში შემთხვევითი მოვლენაა, ვინადან ის წინასწარ არაა ზუსტად გაწერილი.

უფრო დეტალური განხილვა გვიჩვენებს, რომ მოყვანილ ორ მაგალითს შორის მკვეთრი განსხვავების მითითება ყოველთვის არაა შესაძლებელი.

მართლაც, მატარებლის სადგურზე მოსვლა მითითებულია საათებსა და წუთებში. შემთხვევითი არაა, რომ მაგალითად მატარებელი ბათუმი-თბილისი თბილისის სადგურში შემოდის 6 სთ-და 15 წთ-ზე. მაგრამ თუ უფრო ზუსტად დავაკვირდებით მატარებლის გაჩერებას, მაშინვე დავრწმუნდებით, რომ ყოველდღე ეს ხდება სხვადასხვა დროს: დღეს მაგალითად ეს მოხდა 6 სთ-ზე, 15 წთ-ზე და 19 წმ-ზე., გუშინ 6 სთ-ზე, 15 წთ-ზე და 56 წმ-ზე, გუშინწინ 6 სთ-ზე, 15 წთ-ზე და 8 წმ-ზე და ა.შ. ამდენად ბათუმი-თბილისის მატარებლის ჩამოსვლა თბილისში წამების სიზუსტით შემთხვევითი მოვლენაა, იგივე მოვლენა წუთების სიზუსტით – კანონზომიერი. ზუსტად იგივე შეიძლება ითქვას მზის დაბნელების შესახებ. ის გამოთვლილია მზის სისტემის სხეულების მოძრაობის კანონების საფუძველზე გარკვეული სიზუსტით. სწორედ ეს განაპირობებს მზის დაბნელების დასაწყისისა და დამთავრების სიზუსტის განსაზღვრას. ამ კუთხით მზის დაბნელება არაა შემთხვევითი მოვლენა, მაგრამ იმ სიზუსტეზე მეტი სიზუსტით რა სიზუსტითაც დადგენილია პლანეტების მოძრაობის კანონები მზის დაბნელება შემთხვევითი მოვლენაა.

სპეციალურად ჩატარებული განმეორებადი ცდები (ექსპერიმენტები) თავიანთი შედეგების მიხედვით შეიძლება იყოს კანონზომიერი ან შემთხვევითი.

ცდას ეწოდება კანონზომიერი, თუ ცდის ჩატარებამდე შესაძლებელია მისი შედეგების ცალსახად წინასწარმეტყველება და მას არ გააჩნია ურთიერთგამორიცხავი შედეგები. მაალითად მაგიდიდან რამდენჯერაც არ უნდა ჩამოვაგდოთ ბურთი ის ყოველთვის დაეცემა იატაკზე. შევნიშნოთ, რომ ურთიერთგამორიცხავი ხდომილობები ეწოდებათ ისეთ ხდომილობებს, როდესაც

ერთი მათგანის განხორციელების შემთხვევაში სხვა ხდომილობები გამოირიცხება. მაგალითად ერთი კამათელის გაგორებისას თუ ამოვიდა 3 წერტილი ის გამორიცხავს სხვა რაოდენობის წერტილების ამოსვლას. არაურთიერთგამომრიცხავი (თავსებადი) ხდომილობების განხორციელების შემთხვევაში ერთი ხდომილობის განხორციელება ხელს არ უშლის მეორე ხდომილობის განხორციელებას. მაგალითად ვთქვათ ვაგორებთ ორ კამათელს, A ხდომილობა იყოს პირველ კამათელზე 6 წერტილის ამოსვლა, ხოლო B - მეორეზე 5 წერტილი ამოსვლა. ცხადია პირველი ხდომილობა ხელს არ უშლის მეორეს და პირიქით.

ცდას ეწოდება შემთხვევითი, თუ ცდის ჩატარებამდე შეუძლებელია მისი შედეგის წინასწარმეტყველება, მაგრამ შესაძლებელია ჩასატარებელი ცდის ყველა ურთიერთგამომრიცხავი ხდომილობის დასახელება. შემთხვევითი ცდის მარტივი მაგალითია ერთი კამათელის გაგორება. ცხადია ამ შემთხვევაში შეიძლება ამოვიდეს 1, 2, 3, 4, 5, 6 წერტილი. ე.ი. სულ შესაძლებელია ექვსი ურთიერთგამორიცხავი ხდომილობა, თითოეული მათგანი ელემენტარულ ხდომილობას წარმოადგენს. მაშასადამე ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება მოცემული ცდის ყველა შესაძლო შედეგს, თუ ის ამავე ცდის სხვა შედეგებთან წყვილ-წყვილად არათავსებადია.

რაიმე A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობას ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომელის განხორციელების შემთხვევაში ადგილი არა აქვს A ხდომილობის განხორციელებას და აღინიშნება სიმბოლოთი $\bar{A}$. მაგალითად ვთქვათ A არის ერთ კამათელზე კენტი რაოდენობის წერტილების ამოსვლა $A=\{1,\ 3,\ 5\}$ მაშინ მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა იქნება $\bar{A}=\{2,\ 4,\ 6\}$.

A და B ხდომილობებს თავსებად ხდომილობებს უწოდებენ, თუ A და B ხდომილობების თანაკვეთა ხდება, ხოლო თუ თანაკვეთას ადგილი არა აქვს მაშინ ხდომილობებს არათავსებად ხდომილობებს უწოდებენ. ორი A და B ხდომილობების თანაკვეთა ეწოდება ისეთ C ხდომილობას, რომლის შემადგენელი ერთი ელემენტარული ხდომილობა მაინც ერთდროულად წარმოადგენს როგორც A ხდომილობის ასევე B ხდომილობის ელემენტარულ

ხდომილობას. თუ თუ A და B ხდომილობების თანაკვეთა არ ხდება, მაშინ მათ არათავსებად ხდომილობებს უწოდებენ.

ხდომილობას დამოუკიდებელი ეწოდება, თუ ერთი მათგანის განხორციელება ან არ განხორციელება არანაირ გავლენას არ ახდენს მეორე ხდომილობის განხორციელებაზე ან არ განხორციელებაზე. მაგალითად როცა ვაგორებთ ორ კამათელს, მაშინ პირველ კამათელზე ამოსული წერტილების რაოდენობა არავითარ გავლენას არ ახდენს მეორე კამათელზე ამოსული წერტილების რაოდენობაზე.

მოკლედ განვიხილოთ ისეთი ცნებები, როგორებიცაა ფარდობითი სიხშირე და ალბათობა. ვთქვათ ვაგდებთ მონეტას და გვაინტერესებს "საფასურის" ან "ბორჯღალის" მოსვლა თუ როგორ არის დაკავშირებული მონეტის აგდების რაოდენობასთან. ვთქვათ 100 აგდებისას "საფასური" ამოვიდა 44-ჯერ, ხოლო "ბორჯღალი" – 56-ჯერ. მაშინ ვიტყვით, რომ "საფასურის" ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{44}{100} = 0,44$ ან 44%, ბორჯღალის ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{56}{100} = 0,56$ ან 56%. ვთქვათ 200 ცდის შემდეგ შესაბამისად "საფასური" ამოვიდა 108-ჯერ, ხოლო "ბორჯღალი" – 92-ჯერ, მაშინ ვიტყვით რომ "საფასურის" ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{108}{100} = 0,54$ ან 54%, ხოლო "ბორჯღალის" ამოსვლის ფარდობითი სიხშირეა $\frac{92}{200} = 0,46$ ან 46%. როგორც სპეციალურად ჩატარებულმა ცდებმა აჩვენეს ცდების რიცხვის შემდგომი ზრდისას როგორც "საფასურის" ისე "ბორჯღალის" ამოსვლის ფარდობითი სიხშირე მერყეობს 50% ფარგლებში.

მოცემულ ცდაში რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება, განხორციელებული ხდომილობების რაოდენობის შეფარდებას ცდების მთლიან რაოდენობასთან.

მოცემულ ცდაში რომელიმე შემთხვევითი ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე ეწოდება განხორციელებული ხდომილობის რაოდენობის შეფარდებას ცდების საერთო რაოდენობასთან.

რამდენიმე ხდომილობას ტოლშესაძლო ეწოდება, თუ მათი განხორციელების შანსი მოცემულ ცდაში ერთნაირია. მაგალითად ერთი

კამათელის გაგორებისას 1, 2, 3, 4, 5, 6 რაოდენობის წერტილების ამოსვლის შანსი ერთნაირია და თითოეული მათგანის ამოსვლა კი - ტოლშესაძლო. A ხდომილობის ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილობა ეწოდება იმ ხდომილობას, რომლის განხორციელებაც გვსურს მოცემულ ცდაში.

მაგალითად თუ ვაგორებთ ერთ კამათელს და გვსურს ლუწი რაოდენობის წერტილების ამოსვლა, მაშინ ამ ცდის ხელშემყწობი ელემენტარული ხდომილობები იქნება 2, 4, 6 წერტილების ამოსვლა.

რაიმე ტოლშესაძლო ელემენტარული ხდომილობებისგან შემდგარი A ხდომილობის ალბათობა ეწოდება ამ A ხდომილობების ხელშემწყობი ხდომილობების რაოდენობის შეფარდებას ამავე A ხდომილობის შემადგენელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობასთან. n -ით აღვნიშნოთ A ხდომილობის ხელშემწობ ხდომილობათა რაოდენობა, ხოლო m -ით A ხდომილობის ყველა შემადგენელ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, მაშინ A ხდომილობის ალბათობა $P(A)$ გამოითვლება ფორმულით

$$P(A) = \frac{n}{m}$$

ალბათობათა თეორიის ძირითადი კანონის თანახმად, რომელსაც დიდი რიცხვების კანონსაც უწოდებენ, ჩატარებული ცდების საკმაოდ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში, რაიმე შემთხვევითი ხდომილობის ალბათობა გარკვეული მიახლოებით ამავე ხდომილობის ფარდობითი სიხშირის ტოლია.

ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს ცდით საკმაოდ კარგი მიახლოებით გავთვალოთ ჩვენთვის უცნობი შემთხვევითი ცდომილების ალბათობა.

მოკლედ შევეხოთ ხდომილობათა ჯამის, საწინააღმდეგო ხდომილობის და ხდომილობათა ნამრავლის ალბათობის გამოთვლას.

მტკიცდება, რომ ორი არათავსებადი ხდომილობის ჯამის ალბათობა შემადგენელი ხდომილობების ალბათობათა ჯამის ტოლია

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

თუ A და B ხდომილობები თავსებადია, მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

რაღაც A ხდომილობის საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობა ტოლია 1 გამოკლებული A ხდომილობის ალბათობა

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

ვთქვათ A და B დამოუკიდებელი ხდომლობებია, ხოლო C იყოს ხდომილობა, რომელიც ხორციელდება მხოლოდ მაშინ როდესაც ერთდროულად ხორციელდება A და B ხდომილობები. მაშინ ამბობენ, რომ C ხდომილობა წარმოადგენს A და B ხდომილობების ნამრავლს. მტკიცდება, რომ ორი დამოუკიდებელი ხდომილობის ნამრავლის ალბათობა თანამამრავლი ხდომილობების ალბათობათა ნამრავლის ტოლია

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

სიმარტივისთვის განვიხილოთ შემთხვევითი ხდომილობის უფრო თვალსაჩინო მაგალითი. ვთქვათ გვაქვს ურნა, რომელშიც ჩაყრილია ზომითა და წონით ერთნაირი სიდიდის შავი და თეთრი ფერის ბურთულები. ვინაიდან ბურთულები ერთმანეთისგან განსხვავდებიან მხოლოდ ფერით და სხვა არაფრით, თუ ურნაში არ ჩავიხედავთ ვერ მივხდებით თუ რა ფერის ბურთი ამოვიღეთ. ამოვიღოთ ურნიდან ბურთი, ჩავინიშნოთ და ისევ ჩავდოთ ურნაში შევურიოთ ბურთები და გავიმეოროთ ამოღების ოპერაცია რამოდენიმეჯერ.

თუ ურნაში იდო n ცალი თეთრი და n ცალი შავი ბურთი, მაშინ ჩვენ საშუალოდ ეს ბურთები უნდა ამოგვეღო ერთნაირი რაოდენობით. სხვანაირად ეს ასე შეიძლება გამოვსახოთ: სულ ურნაში $2n$ ბურთია, მათ შორის n – თეთრია. თეთრი ბურთულების რაოდენობის შეფარდება ბურთულების საერთო რაოდენობასთან წარმოადგენს თეთრი ბურთულების ამოღების ალბათობას. მოცემულ შემთხვევაში ის ტოლია $n/2n = 1/2$. ცხადია ასეთივეა შავი ბურთულების ამოღების ალბათობაც. თუ ბურთულების რაოდენობა სხვადასხვაა, მაგალითად, თეთრი ბურთულების რაოდენობა ორჯერ მეტია, ვიდრე შავების მაშინ ადვილი საჩვენებელია, რომ თეთრი ბურთულების ამოღების ალბათობა ტოლი იქნება 2/3, ხოლო შავის 1/3.

$$P(a) + P(b) = 1$$

ჩვენ შეგვიძლია ხდომილებების ალბათობა გამოვთვალოთ მხოლოდ მაშინ, როდესაც ცნობილია თუ რამდენი სახის ხდომილება შეიძლება

არსებობდეს. მოცემულ შემთხვევაში უნდა ვიცოდეთ ურნაში მოთავსებული თეთრი (a) და შავი (b) ბურთულების რაოდენობა. ხშირად ეს ჩვენთვის ცნობილი არაა და გვიწვევს შებრუნებული ამოცანის ამოხსნა – თეთრი და შავი ბურთულების ამოღების სიხშირით უნდა დავადგინოთ ამა თუ იმ ბურთულია ამოღების ალბათობა. ვთქვათ ჩავატარეთ N ცდა, ანუ N -ჯერ ამოვიღეთ ბურთულები და თითოეულ შემთხვევაში ჩავინიშნეთ ფერი და ბურთულა დავაბრუნეთ უკან. ვთქვათ K -ჯერ ამოვიღეთ თეთრი ბურთულა, მაშინ თეთრი ბურთულას ამოღების სიხშირე ეწოდება სიდიდეს

$$\frac{K}{N}$$

ალბათობის თეორიის ძირითადი კანონი – დიდი რიცხვების კანონი – ამტკიცებს, რომ დიდი რაოდენობის N ცდის შემთხვევაში ჩვენთვის სასურველი მოვლენის სიხშირე რამდენადაც გვინდა მცირედ განსხვავდება ამ მოვლენის ალბათობისგან, სხვანაირად, რომ ვთქვათ თუ

$$P(a) = \frac{a}{a+b}$$

(ამასათან a და b ჩვენთვის უცნობია), ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ საკმაოდ დიდი N, ისე, რომ შესრულდეს თანაფარდობა

$$\left|P(a) - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{N}}\right| < \varepsilon$$

სადაც ε - რაგინდ მცირე დადებითი რიცხვია.

ეს თანაფარდობა საშუალებას გვაძლევს ცდით საკმაოდ კარგი მიახლოებით გავთვალოთ ჩვენთვის უცნობი შემთხვევითი ცდომილების ალბათობა.

ამრიგად არაშემთხვევითი ხდომილობისგან განსხვავებით, რომელთა შესახებაც ჩვენ შეიძლება ზუსტი ცოდნა გვქონდეს, ექნება მას ადგილი თუ არა, შემთხვევითი ხდომილობის შესახებ ამის თქმა შეუძლებელია. ასეთი ხდომილობის გამოჩენის სიხშირე განისაზღვრება მისი ალბათობით. ალბათური შეფასება შეიძლება საკმაოდ საიმედო იყოს და შესაბამისად ჩვენ შეგვიძლია მას დავეყრდნოთ ჩვენთვის მნიშვნელოვანი ხდომილებების წინასწარმეტყველებისას და ხშირად არცთუ უფრო ცუდად, იმ შემთხვევასთან

შედარებით, როდესაც საქმე გვაქვს ხდომილობების შესახებ საიმედო მონაცემებთან.

ვთქვათ გვაქვს ლატარიის ერთი ბილეთი, ლატარიისა რომლის ყოველ ათ ბილეთზე მოდის ერთი მოგება. თითოეული ბილეთისთვის მოგების ალბათობა შეადგენს 0.1 და შესაბამისად ის რომ ის არ მოიგებს შეადგენს - 0.9.

ცხადია, რომ ამ ბილეთის მფლობელი არ იქნება განსაკუთრებით გაოცებული არც მოგებით და არც წაგებით. ვთქვათ, მას გააჩნია ასეთი 50 ბილეთი. რა იქნება ალბათობა იმისა, რომ მათგან ერთი მაიც მოიგებს. ალბათობის თეორიაში მტკიცდება, რომ ალბათობა იმისა, რომ ერთდროულად მოხდება რამდენიმე ხდომილება, რომლებიც ხდება ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ტოლია თითოეულ ხდომილებათა ალბათობათა ნამრავლის. მოცემულ შემთხვევაში ალბათობა იმისა, რომ პირველი მოცემული 50 ბილეთიდან ვერ მოიგებს ტოლია 0.9, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს მეორე მათგანი ისევ იქნება – 0.9 (თუმცა შევნიშნოთ, რომ მეორე ბილეთისათვის, რომ ის არ მოიგებს ალბათობა იქნება რამდენადმე მეტი, ვინაიდან მონაწილე ბილეთების რაოდენობა ერთით ნაკლებია – პირველი ჩვენს მიერ გათვალისწინებულია როგორც არამოგებული. ატარიის ბილეთების დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ეს ისეთი დეტალია, რომ ის შეგვიძლია უგულებელვყოთ). მოცემულ პირობებში ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს ვერც პირველი და ვერც მეორე იქნება $0,9 \cdot 0,9 = 0,9^2 = 0,81$. ზუსტად ასევე ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს ვერც პირველი, ვერც მეორე, ვერც მესამე ბილეთი იქნება $0,9^3$, ხოლო ალბათობა იმისა, რომ ვერ მოიგებს ვერც ერთი ბილეთი 50 ბილეთიდან იქნება, - $0,9^{50}$ ანუ დაახლოებით 0,005.

მეორეს მხრივ ალბათობა იმისა, რომ მოიგებს ყველა 50 ბილეთი იქნება გაცილებით ნაკლები $0,1^{50}$-ზე. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ როგორც პირველი ისე მეორე ხდომილობა პრაქტიკულად არასოდეს არ განხორციელდება. ყველაზე ალბათურია, რომ 50 ბილეთიდან მოიგებს 5 ბილეთი, მაგრამ 4 ან 6 ბილეთის მოგების ალათობაც საკმაოდ მაღალია. ნაკლებ ალბათური იქნება 3 ან 7 ბილეთის მოგების ალბათობა. ალბათობის თეორია საშუალებას იძლევა

გათვლილ იქნას თითოეული ამ ხდომილობის ალბათობა. ეს მონაცემები მოყვანილია ცხრილ 1.3-ში.

ცხადია ცხრილში მოყვანილი ყველა ალბათობის ჯამი ერთის ტოლია, ვინაიდან არავითარი სხვა ხდომილობა, გარდა ცხრილში მოცემულისა, არ ხდება, ხდომილობათა ასეთ სისტემას სრული ეწოდება.

ცხრილი 1.3. ლატარიაში მოგების ალბათობები
(არსებული 50 ბილეთიდან მოგების n
ალბათობა, როდესაც ერთი ბილეთის
მოგების ალბათობა შეადგენს 0.1)

n	$P(n)$	n	$P(n)$
0	0.0051	7	0.1077
1	0.0290	8	0.0643
2	0.07790	9	0.0334
3	0.01387	10	0.0191
4	0.1809		
5	0.1850	$P(0)+P(1)+\cdots+p(10)$	0.9913
6	0.1541	$P(11)+P(12)+\cdots+p(50)$	0.0087

ისმის კითხვა როგორი უნდა იყოს ხდომილობის ალბათობა, რომ მისი განხორციელება იყოს უტყუარი. ამ კითხვაზე პასუხი მნიშვნელოვნად სუბიექტურია და ძირითადად დამოკიდებულია იმაზე თუ რამდენად არსებითია მოსალოდნელი ხდომილობა. განვიხილოთ ეს საკითხი ორ მაგალითზე: სტატისტიკა მეტყველებს, რომ დანიშნული კონცერტების 5% არ შედგება ხოლმე. მიუხედავად ამისა, ავიღებთ რა ბილეთს, მივდივართ კონცერტზე და დარწმუნებული ვართ, რომ ის შედგება, თუმცა მისი ალბათობა მხოლოდ 0.95 - ის ტოლია. ამასთან თვითმფრინავებით ფრენისას კატასტროფების ალბათობა 5%, რომ იყოს ჩვენ ალბათ უარს ვიტყოდით საჰაერო ტრანსპორტით სარგებლობაზე.

იმისთვის, რომ მშვიდობიანობის პერიოდში არ გავრისკოთ საკუთარი სიცოცხლით, ალბათ საკმარისია, რომ სიკვდილიანობის ალბათობა იყოს არა

უმეტეს 0.0001. თუმცა სხვადასხვა ადამიანი სხვადასხვანაირად ეკიდება რისკს, მაგრამ ყველაზე ფრთხილებიც კი ადვილად წავლენ მასზე თუ თუ არახელსაყრელი შემთხვევის ალბათობა შეადგენს $10^{-6} - 10^{-7}$. ასეთია მაგალითად დიდი ქალაქის ქუჩაში საავტომობილო კატასტროფაში მოყოლების ალბათობა, მაგრამ მიუხედავად ამისა არავის ეშინია ქუჩაში გამოსვლა.

ამრიგად შეგვიძლია პრაქტიკულად საკმარისად ჩათვალოთ ალბათობა, რომელიც ერთისგან განსხვავდება $10^{-6} - 10^{-7}$ -ით, ხოლო პარაქტიკულად შეუძლებლად თუ – თუ მისი განხორციელების ალბათობა ნაკლებია $10^{-6} - 10^{-7}$- ზე.

შევნიშნოთ, რომ ცდის საკმაოდ დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ეს უკანასკნელი შემთხვევები მაინც ხორციელდება, და მიუხედავად იმისა, რომ ალბათობა იმისა, რომ ადამიანი მოჰყვეს ავტოკატასტროფაში ნაკლებია 10^{-6} -ზე, მილიონიან ქალაქში ის მაინც ხორციელდება.

ყოველივე ზემოთ თქმულის მიუხედავად, შეიძლება მოვიყვანოთ იმის მაგალითი, როდესაც ალბათობა იმდენად მცირეა, რომ ის არასოდეს არ განხორციელდება და არც შეიძლება განხორციელდეს. ამ ალბათობის შეფასება შეიძლება სამყაროს ასაკის T და იმ უმცირესი t დროის შეფასებით, რომლის განმავლობაშიც შეიაძლება განხორციელდეს რაღაც ელემენტარული აქტი. თანამედროვე კოსმოლოგიური წარმოდგენებით $T \approx 10^{10}$ წელს და $t \approx 10^{-30}$ წმ-ს. თუ გავითვალისწინებთ სამყაროს ზომებს, ელემენტარული მოცულობების რაოდენობა n იქნება 10^{150} ეს იმას ნიშნავს სამყაროს არსებობის პერიოდში სულ განხორციელდა $tn \approx 10^{250}$ ელემენტარული აქტი. ამასთან ერთად ე.წ. “ბორელის სასწაულის” ალბათობა – ალბათობა იმისა, რომ მაიმუნი ყოველგვარი დახმარების გარეშე შემთხვევით კომპიუტერზე კლავიშების დაჭერით დაწერს რაიმე გააზრებულ ტექსტს, მაგალითად ვაჟა-ფშაველას სტუმარ-მასპინძელს, როგორც მარტივი გამოთვლები აჩვენებენ შეადგენს 10^{-2000} , რაც იმდენად ნაკლებია 10^{-200} -ზე ანუ ელემენტარული აქტის განხორციელების ალბათობაზე, რომ “ბორელის სასწაულის” განხორციელების ალბათობა არამარტო ნაკლებ ალბათურია არამედ პრაქტიკულად შეუძლებელიც.

ფიზიკური სიდიდეების გაზომვისას იმ შემთხვევაში, როდესაც ძირითად როლს თამაშობენ შემთხვევითი ცდომილებები მაშინ გაზომვის სიზუსტე შეიძლება შეფასდეს მხოლოდ გარკვეული ალბათობით. მართლაც, შემთხვევით ცდომილებებს ადგილი აქვს იმ მიზეზებით, რომლებიც შემთხვევით ხასიათს ატარებენ და რომელთა გათვალისწინებაც შეუძლებელია მაგრამ გავლენას ახდენენ გაზომვის საბოლოო შედეგზე. ზოგიერთი ეს ცდომილება დადებითია, ზოგიერთიც – უარყოფითი. საბოლოო ცდომილებას, რომელიც მიიღება ამ ცდომილებების შეკრებით, შეიძლება სხვადასხვა მნიშვნელობა ჰქონდეს, მაგრამ თითოეულ მათგანს, ზოგადად, რომ ვთქვათ სხვადასხვა ალბათობა შეესაბამება.

მოვიყვანოთ ნათქვამის ილუსტრაცია. დავუშვათ უნდა ავწონოთ ასი ნიმუში და გვაქვს საწონები, რომლებიც საშუალებას გვაძლევენ აწონვა ჩავატაროთ 0.05 გ სიზუსტით (მაგალითად იმიტომ, რომ ყველაზე პატარა საწონი, რომელიც გაგვაჩნია ტოლია 0.1 გ). ვთქვათ სასწორის კონსტრუქცია ისეთია, რომ მის თეფშზე არ შეიძლება 1 – ზე მეტი ნიმუშის დადება. ისმის კითხვა რა ცდომილებას დავუშვებთ ყველა ასივე ნივთის ჯამური წონის დადგენისას?

ჩვენ ვიცით, რომ თითოეული აწონვისას ცდომილება შეიძლება იყოს, როგორც დადებითი ისე უარყოფითი, ამასთან ერთად ის არ აღემატება 0.05. ბუნებრივია, რომ აწონვისას ჩვენ ერთნაირი რაოდენობით დავუშვებთ ცდომილებას როგორც ერთი, ისე მეორე მიმართულებით. ე.ი. + 0.05 გ ცდომილების დაშვების ალბათობა ტოლია - 0.05 ცდომილების დაშვების ალბათობის. მაშინ $P(+0.05) = P(-0.05) = 1/2$.

ამასთან ჩვენ ვუშვებთ, რომ ცალკეული ცდომილებები ერთმანეთისგან განსხვავდება მხოლოდ ნიშნით და აბსოლუტური მნიშვნელობა ტოლია 0.05. ასეთი დაშვებები მხოლოდ ზრდის საერთო შედეგის ცდომილებას, მაგრამ ამ შემთხვევაში ეს არაარსებითია. ვთქვათ პირველი გაზომვისას დავუშვით ცდომილება +0.05, რომლის ალბათობაც როგორც ზემოთ ვთქვით ტოლია $1/2$. ალბათობა იმისა, რომ მეორე გაზომვის ცდომილებაც ტოლი იქნება +0.05- ის, ალბათობათა ნამრავლის წესის თანახმად იქნება $(1/2)^2 = 1/4$. ბოლოს

ალბათობა იმისა, რომ ყველა ასივე გაზომვის ცდომილება დადებითი ნიშნის ტოლია, გამოიანგარიშება ფორმულით $(1/2)^{99}$, ანუ დაახლოებით $2 \cdot 10^{-31}$. ასეთი ალბათობა, როგორც ეს ზემოთ ვთქვით პრაქტიკულად ნულის ტოლია. ანუ შეუძლებელია საერთო წონის 5 გ შემთხვევაში დავუშვათ ცდომილება $(0.05 \cdot 100)$, ვინაიდან ასეთი ცდომილების ალბათობა მცირედ აღემატება 0-ს. ჩვენ შევარჩიეთ ყველაზე არახელსაყრელი შემთხვევა. სხვანაირად შეიძლება ვთქვათ რომ აწონვის ასეთ პირობებში ნამდვილი ცდომილება არ იქნება 5 გ-ზე მეტი. ჩვენ ავირჩიეთ ისეთი შემთხვევა, როცა ყველა ცდომილება მაქსიმალურია და თაც ერთი ნიშნის. ალბათობის თეორია საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ თუ როგორი იქნება სხვა სიდიდის ცდომილების დაშვების ალბათობა. ამისთვის შემოვიყვანოთ საშუალო კვადრატული და საშუალო არითმეტიკული ცდომილების ალბათობის ცნება.

ალბათური მოდელი. გაზომვის შემთხვევითი ცდომილებები ხასიათდებიან მათი განაწილების გარკვეული კანონებით. ასეთი კანონების არსებობის აღმოჩენა შესაძლებელია თუ ცდას ჩავატარებთ რამოდენიმეჯერ უცვლელ პირობებში და დავთვლით მონაცემთა m რაოდენობას, რომელიც მოხვდება ნებისმიერ რაღაც არჩეულ ინტერვალში: ამ რიცხვის შეფარდება მთლიანად ჩატარებულ ცდების n რაოდენობასთან (აღნიშნულ ინტერვალში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე) გაზომვების საკმაოდ დიდი რაოდენობისათვის ახლოს იქნება რაღაც მუდმივ რიცხვთან (ცხადია ეს მუდმივი რიცხვი სხვადასხვა იქნება სხვადასხვა ინტერვალისათვის). ეს საშუალებას გვაძლევს შემთხვევითი

ცდომილებების შესწავლისათვის გამოყენებულ იქნას ალბათობის თეორიის მეთოდები. თეორიულ–ალბათური მოდელებში შემთხვევითი ცდომილებები $z = x - a$ (მაშასადამე თვით გაზომვის შედეგები $x = a + z$) განიხილებიან როგორც შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებსაც შეუძლიათ მიიღონ მებისმიერი ნამდვილი მნიშვნელობა, ამასთან თითოეულ ინტერვალს $(z_1; z_2)$ შეესაბამება სრულიად გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ეწოდება შემხვევითი z სიდიდის ამ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა და აღინიშნება $P(z_1 < z < z_2)$ ან $P\left(\epsilon(z_1; z_2)\right)$. ეს ალბათობა გამოდის როგორც $(z_1; z_2)$ ინტერვალში მოხვედრის იდეალიზირებული ფარდობითი სიხშირე, ანუ

პრაქტიკაში სწორედ სწორედ ეს ალბათობაა ახლოს ზემოთ ნახსენებ ფარდობით სიხშირესთან:

$$\frac{m}{n} \approx P(z_1 < z < z_2).$$

წესს, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი ინტერვალისათვის $(z_1 < z < z_2)$ მოიძებნოს $P(z_1 < z < z_2)$ ალბათობები ეწოდება შემთხვევითი z სიდიდის ალბათური განაწილების კანონი. ეს კანონი შეიძლება შემდეგი ინტეგრალით ჩაიწეროს:

$$P(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} p(z)dz$$

სადაც $p(z)$ გარკვეული არაუარყოფითი ფუნქციაა, რომელიც ნორმირებულია პირობით

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z)dz = 1$$

ეს ფუნქცია სრულად განსაზღვრავს ალბათობების განაწილების შესაბამის კანონს და მას ეწოდება განაწილების სიმკვრივე.

გაზომვათა შემთხვევითი ცდომილების გამოსავლენად საჭიროა გაზომვები ჩავატაროთ რამოდენიმეჯერ. თუ თითოეული გაზომვა მოგვცემს ცალკეული გაზომვებისგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს, საქმე გვაქვს სიტუაციასთან, როდესაც შემთხვევითი ცდომილება თამაშობს არსებით როლს.

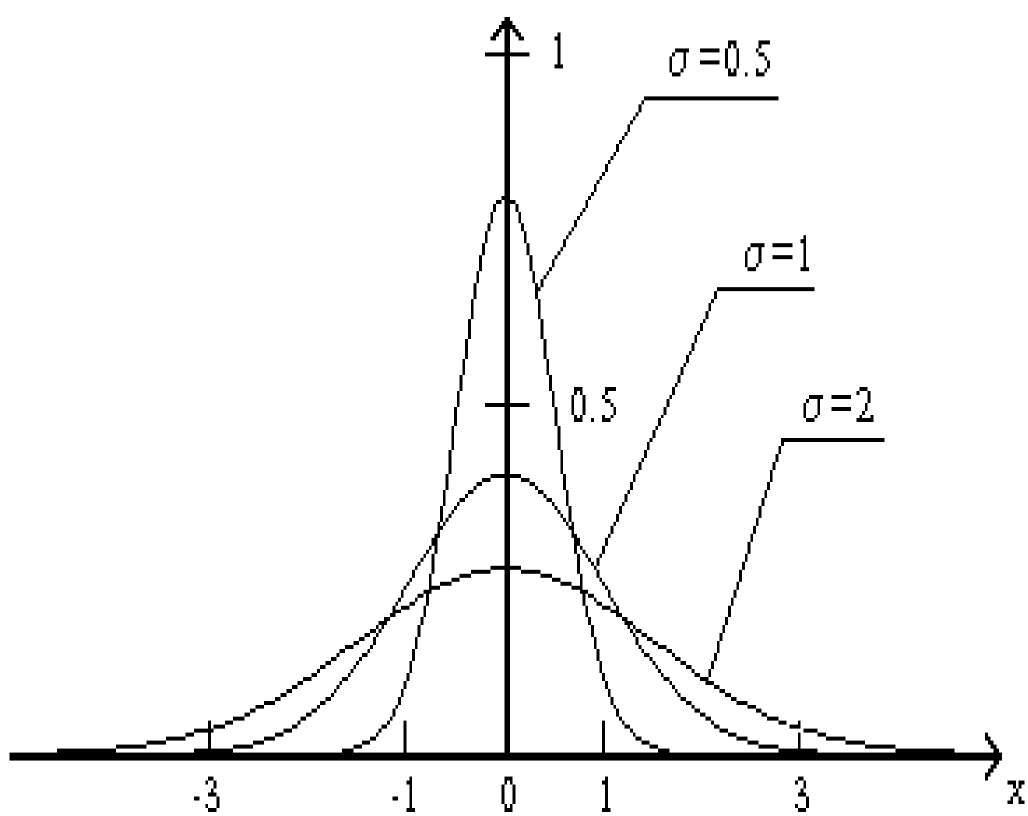
გასაზომი სიდიდის ყველაზე ალბათურ სიდიდედ მიიღება ყველა გაზომილი სიდიდის საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$ (გავიხსენოთ, რომ საშუალო არითმეტიკულის მისაღებად უნდა შევკრიბოთ ყველა გაზომილი სიდიდე და გავყოთ მათ რაოდენობაზე).

უმრავლეს შემთხვევაში შემთხვევითი ცდომილებები ემორჩილება განაწილების ნორმალურ კანონს, რომელიც დადგენილ იქნა გაუსის მიერ და ასე ჩაიწერება:

$$p(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1.5)$$

$p(z)$ ნორმალური განაწილების სიმკვრივეა, $\Delta x -$ წარმოადგენს გადახრას ნამდვილი მნიშვნელობისგან, σ პარამეტრია ($\sigma > 0$) რომელიც

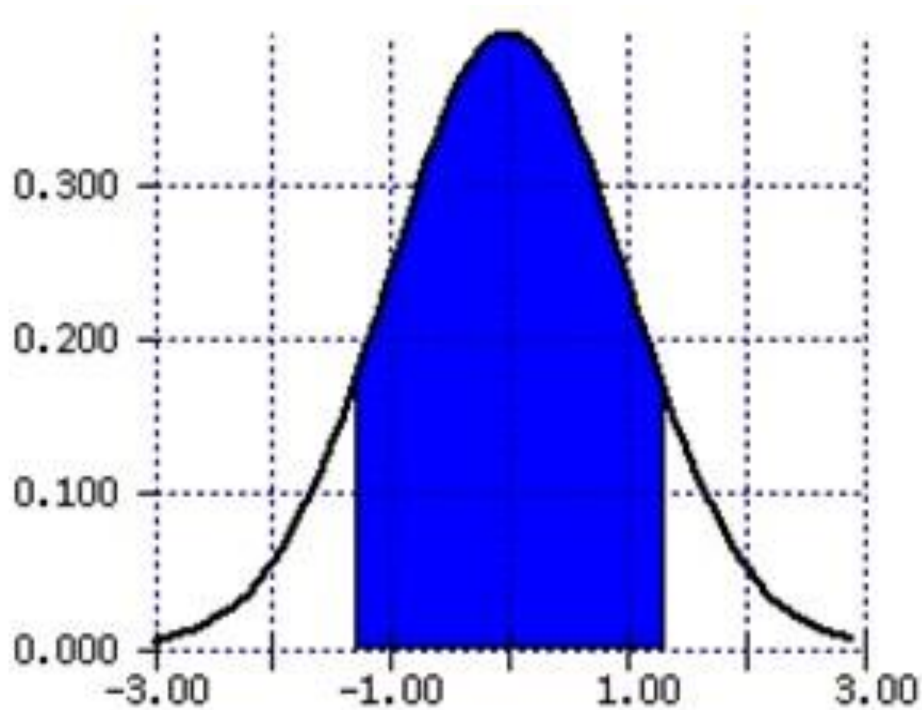
ახასიათებს გაზომვის სიზუსტეს. (σ - პარამეტრს ეწოდება გაზომვის საშუალო კვადრატული გადახრა, სტანდარტული ცდომილება ან უბრალოდ სტანდარტი). σ^2 ეწოდება ცდომილების დისპერსია, ის ახასიათებს შემთხვევითი სიდიდეების გაფანტვას ზაიდელის ვერსია. ალბათობების სიმკვრივის განაწილების გრაფიკს ეწოდება განაწილების მრუდი. ნახ.1.13 - ზე ნაჩვენებია ნორმალური განაწილების მრუდები σ სხვადასხვა მნიშვნელობებისათვის, ამ ნახაზიდან ჩანს, რომ σ პარამეტრის შემცირებით ნორმალური განაწილების მრუდი იკუმშება ვერტიკალური ღერძის გასწვრივ და იშლება ჰორიზონტალური ღერძის გასწვრივ და შესაბამისად რაც ნაკლებია σ, მით უფრო სწრაფად მცირდება განაწილების სიმკვრივე $p(z)$ (ვერტიკალური ღერძი) $|\Delta x|$ გაზრდით.



ნახ.1.13. ნორმალური განაწილების ალბათობის სიმკვრივე

(z_1, z_2) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა $p(z)$ გრაფიკულად გამოისახება შესაბამისი მრუდწირული ტრაპეციის ფართობით ალბათობის

განაწილების მრუდის ქვეშ. კერძოდ, სიმეტრიულ ინტერვალში $(-z_1, z_1)(z_1 > 0)$ მოხვედრის ალბათობა გამოისახება ფართობით, რომელიც დაშტრიხულია ნახ.1.14. აქედან ჩანს, რომ რაც უფრო ნაკლებია σ, მით უფრო ნაკლებია ცდომილების გაფანტვა ნულთან.



ნახ.1.14. ლურჯი ფიგურის ფართობი გვიჩვენებს (-1,3; 1,3) ინტერვალში მოხვედრის ალბათობას (ვერტიკალურ ღერძზე გადაზომილია ალბათობა P(z), ჰორიზონტალურზე – ინტერვალი (-z_1; z_1))

ნორმალური განაწილების კანონი კარგად ასახავს შემთხვევითი ცდომილებების სიმეტრიის ცნობილ თვისებას - სხვადასხვა ნიშნინანი შემთხვევითი ცდომილებები დაახლოებით ერთნარი რაოდენობით გვხვდება და კონცენტრაციის თვისებას - აბსოლუტური სიდიდით მცირე შემთხვევითი ცდომილებები უფრო ხშირად გვხვდება ვიდრე დიდი ცდომილებები.

გაუსის ფორმულა გამოყვანილია შემდეგი დაშვებების გამოყენებით:

1) გაზომვის ცდომილებების შეუძლიათ მიიღონ უწყვეტი მნიშვნელობები;

2) დაკვირვებათა დიდი რაოდენობის შემთხვევაში ერთნაირი სიდიდის მაგრამ საწინააღმდეგო ნიშნის ცდომილებები ერთნაირი სიხშირით გვხვდება;

3) ცდომილებების გამოჩენის ალბათობა მცირდება ცდომილების სიდიდის გაზრდასთან ერთად. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ დიდი ცდომილებები გვხვდება უფრო იშვიათად ვიდრე მცირე სიდიდის ცდომილებები.

შევნიშნოთ, რომ გაუსის ფორმულის გამოყვანისას მიღებულია გარკვეული დაშვებები, რომელთა მკაცრად დასაბუთებაც შეუძლებელია. გარდა ამისა 1-3 დაშვებები, რომლების მიღებული იყო გაუსის ფორმულის გამოყვანისას, მკაცრად არასოდეს არ სრულდება. ეს გამომდინარეობს თუნდაც იქიდან, რომ ცდომილებები არასოდეს არ შეიძლება იყოს რაგინდ მცირე. მაგალითად როდესაც ვზომავთ თოკის სიგრძეს შემოსაზღვრული ვართ ატომების ზომებით ($\approx 10^{-8}$ სმ), ელექტრული მუხტის გაზომვისას კი - ელემენტარული მუხტის სიდიდით e (4.8$\cdot 10^{-10} CGSE$) და ა.შ.

ეს მრუდები საშუალებას იძლევა დავადგინოთ, თუ რა სიხშირით შეიძლება გამოჩნდეს ამა თუ იმ სიდიდის ცდომილებები. გაუსის ფორმულა ექსპერიმენტულად არაერთგზის არის შემოწმებული, რომლებმაც აჩვენეს, რომ თუნდაც იმ უბნებში სადაც ცდომილებები ძალიან დიდი არ არის, ის შესანიშნავად ეთანხმება ექსპერიმეტულ მონაცემებს.

მიუხედავად იმისა, რომ ზოგიერთ შემთხვევაში ექსპერიმენტული მონაცემები უკეთესად აიწერებიან სხვა ფუნქციებით, მაინც სარგებლობენ განაწილების ნორმალური კანონით, უშვებენ რა მის სისწორეს როგორც თავისდავად ცხადს. სინამდვილეში საქმე უფრო რთულადაა. ამ კანონთან დაკავშირებით ხშირად სარკასტულად შენიშნავენ, რომ “ექსპერიმენტატორები ენდობიამ მას მათემატიკოსების დამტკიცებაზე დაყრდნობით, ხოლო მათემატიკოსები – ფიზიკოსების ექსპერიმეტებზე დაყრდნობით”. მათემატიკური მტკიცების არასიმკაცრე ჩვენ ზემოთ უკვე აღვნიშნეთ. რაც შეეხება ექსპერიმეტალურ დასაბუთებას, ის არაფერს გვაძლევს გარდა ჰისტოგრამისა და ყოველთვის შეგვიძლია შევარჩიოთ მაინტერპოლირებელი ფუნქცია, რომელიც საშუალებას მოგვცემს ჰისტოგრამის წერტილები (თუნდაც მაშინ როდესაც ის საკმაოდ დეტალურადაა აგებული) ისე ავაგოთ, რომ ცდომილების შემთხვევითი ხასიათის გამო ისინი არ დაემთხვევიან ჰისტოგრამის წერტილებს, მაგრამ მაინც არსებობს ნორმალური განაწილების გამოყენების სერიოზული

საფუძველი. მისი განსაკუთრებული მნიშვნელობა მდგომარეობს შემდეგში: იმ კერძო შემთხვევებში, როდესაც ჯამური ცდომილება ვლინდება სხვადასხვა ფაქტორების ერთდროული მოქმედებით, რომელთაგან თითოეულს მცირე წვლილი შეაქვს საერთო ცდომილებაში, რა კანონსაც არ უნდა შეესაბამებოდეს მათი განაწილებები, ჯამური განაწილება ყოველთვის შეესაბამება გაუსის განაწილებას.

გაუსის განაწილების გამოყენების ძირითადი პირობაა ის, რომ არ არსებობს დომინირებადი ცდომილების ცალკეული წყაროები. მის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ სამკუთხედის კუთხეების ჯამის გაზომვის შედეგები, რომლებიც ჩატარებულია გეოდეზიური გადაღებით. როგორც ცხრილი 1.4 –დან ვხედავთ გათვლილი და დამზერილი ცდომილებები ერთმანეთს საკმაოდ კარგად ემთხვევა თუ არ გავითვალისწინებთ ბოლო მონაცემებს სადაც გაუსის მიხედვით უნდა იყოს 1.1, ხოლო ცდით მიღებულია 9. მიღებული შეუსაბამობა 8 –ჯერ $\Delta x \geq 1''$ შემთხვევისათვის არ უნდა იყოს გასაკვირი, ვინაიდან გაუსის ფორმულა ყოველთვის სამართლიანია Δx მცირე მნიშვნელობებისთვის. რაც შეეხება ცდომილების დიდ მნიშვნელობებს იქ ექსტრაპოლაცია უხეშია და შედეგიც ზუსტი არ არის. როგორც ნახაზიდან ვხედავთ (3) ფუნქციას მაქსიმუმი გააჩნია წერტილში $x = 0$, გარდა ამისა ის ლუწია. (3) ფუნქციის არსი იმაში მდგომარეობს, რომ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც მოქცეულია მრუდს და Δx ღერძის ორი ორდინატის Δx_1 და Δx_2 შესაბამის წერტილებს (დაშტრიხული ფართი) შორის რიცხობრივად ტოლია ალბათობისა, რომლითაც ნებისმიერ გაზომილი სიდიდე ხვდება მოცემულ (Δx_1, Δx_2) ინტერვალში.

ვინაიდან მრუდი სიმეტრიულია ორდინატთა ღერძის მიმართ, შეგვიძლია ვამტკიცოთ, რომ იმ ცდომილებების ალბათობები, რომლებიც სიდიდით ტოლია და ნიშნით საწინააღმდეგო ერთმანეთის ტოლია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ გასაზომი სიდიდის შესაფასებლად შეგვიძლია ავიღოთ არჩევის ყველა ელემენტის საშუალო მნიშვნელობა

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i}{n} \qquad (1.6)$$

სადაც n გაზომვათა რაოდენობაა.

ცხრილი 1.4. ცდომილებების განაწილება სამკუთხედის კუთხეების ჯამის გაზომვისას (დაკვირვებათა საერთო რაოდენობა 470, საშუალო კვადრატული ცდომილება $\sigma = 0.40''$)

ცდომილების საზღვრები (″)	დაკვირვებათა რაოდენობა მოცემული ცდომილებით	
	ცდით მიღებული	გაუსის ფორმულით გამოთვლილი
0.0-0.1	94	92.3
0.1-0.2	88	86.5
0.2-0.3	78	76.7
0.3-0.4	58	64.0
0.4-0.5	51	49.8
0.5-0.6	36	36.7
0.6-0.7	26	25.4
0.7-0.8	14	16.9
0.8-0.9	9	9
0.9-1	7	6.1
1-ზე მეტი	9	1.1

ამრიგად თუ თუ ერთი და იმავე პირობებში ჩატარებულია n გაზომვა, მაშინ, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, გაზომილი სიდიდის ყველაზე ალბათური მნიშვნელობაა მისი საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობა $\bar{x}$ სიდიდე. ის მიისწრაფის გაზომილი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობისკენ, როდესაც გაზომვების რაოდენობა $n \to \infty$.

ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება ეწოდება სიდიდეს

$$S = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x}-x_{\mathrm{i}})^2}{n-1}} \qquad (1.7)$$

ის ახასიათებს ყოველი ცალკეული გაზომვის ცდომილებას. როცა $n \to \infty$ მაშინ S მიისწრაფის σ-კენ

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} S \quad (1.8)$$

σ გაზრდასთან ერთად იზრდება ანათვლების ფანტვა და მცირდება გაზომვის სიზუსტე.

საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება ეწოდება სიდიდეს

$$S_r = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{n}(\bar{x}-x_{\mathrm{i}})^2}{n(n-1)}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad (1.9)$$

ეს უკანასკნელი გამოსახავს გაზომვის სიზუსტის ზრდის ფუნდამენტურ კანონს გაზომვების რაოდენობის ზრდისას. S_r ცდომილება ახასიათებს სიზუსტეს რომლითაც მიიღება გაზომილი სიდიდის $\bar{x}$ საშუალო მნიშვნელობა.

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (1.10)$$

ცდომილების გაანგარიშების ეს მეთოდიკა კარგ შედეგებს (0.68 საიმედოობით) იძლევა მხოლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც, ერთი და იგივე სიდიდე გაზომილია არანაკლებ 30 – 50 ჯერ.

α აღვნიშნოთ ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის შედეგი ნამდვილი მნიშვნელობისგან განსხვავდება არა უმეტეს Δx-ით და ის ასე ჩაიწერება

$$P(-\Delta x < x - \bar{x} < \Delta x) = \alpha \text{ ან}$$

$$P(\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x) = \alpha \qquad (1.11)$$

α ალბათობას ეწოდება ნდობის ალბათობა ან ნდობის კოეფიციენტი. მნიშვნელობების ინტერვალს $x - \Delta x$ -დან $x + \Delta x$ -მდე ეწოდება ნდობის ინტერვალი. გამოსახულება (9) გვიჩვენებს, რომ გაზომვის შედეგი α ტოლი ალბათობით არ გამოდის ნდობის ინტერვალიდან. ცხადია რაც მეტ საიმედოობას მოვითხოვთ მით მეტი იქნება ნდობის ინტერვალი და პირიქით რაც მეტი სიდიდის ნდობის ინტერვალს მოვითხოვთ მით მეტია ალბათობა იმისა, რომ გაზომვის შედეგი არ გამოვა მის საზღვრებს გარეთ.

ჩვენ მივედით მეტად მნიშვნელოვან დასკვნამდე: შემთხვევითი ცდომილების დასახასიათებლად საჭიროა ორი რიცხვის დასახელება, რომელთაგან ერთია თვით ცდომილების სიდიდე (ანუ ნდობის ინტერვალი) და მეორე - ნდობის ალბათობა. მხოლოდ ცდომილების სიდიდის დასახელება მისი შესაბამისი ნდობის ინტერვალის მითითების გარეშე გარკვეულწილად აზრს მოკლებულია ვინაიდან ჩვენ არ ვიცით რამდენად საიმედოა ჩვენი მონაცემები. ნდობის ალბათობის ცოდნა კი საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ მიღებული შედეგის საიმედოობა.

საიმედოობის ხარისხი საბოლოოდ მაინც დამოკიდებულია ჩატარებული გაზომვების ხარისხზე.

ცხადია თვითმფრინავის დეტალების საიმედობაა გაცილებით უფრო მაღალი უნდა იყოს ვიდრე მოტორიანი ნავის, ხოლო ამ უკანასკნელის დეტალების საიმედოობა უნდა აღემატებოდეს ხელის ურიკის დეტალების საიმედოობას.

მაღალი ხარისხის საიმედობაა საჭირო პასუხსაგები გაზომვების ჩატარებისას, ეს იმას ნიშნავს, რომ ისინი მოითხოვენ მეტი ნდობის ინტერვალის არჩევას (σ წილებში), სხვანაირად, რომ ვთქვათ იმავე სიდიდის (Δx) ცდომილების მისაღებად საჭიროა გაზომვების ჩატარება მეტი სიზუსტით, ე.ი. საჭიროა σ სიდიდე ამა თუ იმ ხერხით შემცირდეს საჭირო რიცხვჯერ. ასეთი მიზნის მიღწევის გზაა გაზომვების რიცხვის მრავალჯერადი გაზრდა.

ჩვეულებრივი გაზომვებისას საკმარისია გაზომვების ჩატარება 0.90 - 0.95 ნდობის ალბათობით, ხოლო გაზომვებისთვის, რომლებსაც მოეთხოვება ძალიან მაღალი საიმედოობა საჭიროა 0.999 ნდობის ალბათობის მიღწევა. ამაზე მაღალი ნდობის ალბათობა ძალიან ბევრ შემთხვევაში საჭირო არაა.

ძალიან ხშირად, ცდომილების ძირითადი რიცხობრივი მახასიათებლის სახით, მოსახერხებელია სტანდარტული ცდომილების გამოყენება, რომელსაც შეესაბამება სრულიად განსაზღვრული საიმედოობის ალბათობა 0.68, (ჩვენ აქაც და მომავალშიც ვგულისხმობთ, რომ ცდომილებები განაწილებულია ნორმალური კანონით). ნდობის ინტერვალის ნებისმიერი მნიშვნელობისთვის,

გაუსის ფორმულით, შესაძლებელია გათვლილ იქნას ნდობის ალბათობა. ეს გათვლები მოცემულია სპეციალურ ცხრილებში (იხ. დანართი ცხრილი I)

მოვიყვანოთ ამ ცხრილის გამოყენების მაგალითები.

ვთქვათ რაღაც გაზომვებისას ჩვენ მივიღეთ შემდეგი მნიშვნელობები: $x = 1.27,\ \sigma = 0.032$. რა არის ალბათობა იმისა, რომ ცალკეული გაზომვის მნიშვნელობები მოთავსებული იქნება შუალედში 1.26 $< x < 1.28$. ჩვენს მიერ დადგენილი ნდობის ინტერვალია ± 0.01, რაც შეადგენს (σ წილში) 0.01 $: 0.032 = 0.31$. დანართის 1 ცხრილიდან ვხედავთ, რომ ნდობის ალბათობა $\varepsilon =$ 0.3-თვის შეადგენს 0.24. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ გაზომვების დაახლოებით 1/4 მოთავსებული იქნება ცდომილების ± 0.01 შუალედში. განსაზღვროთ ახლა ნდობის ალბათობა საზღვრებისთვის $1.20 < x_i < 1.3$. ამ ინტერვალის მნიშვნელობა გამოსახული σ წილებში, იქნება $\varepsilon = 0.07 : 0.032 \approx 2.2$. დანართის 1 ცხრილის მიხედვით ვპოულობთ α მნიშვნელობას $\varepsilon = 2.2$ -თვის, რაც 0.97 –ის ტოლია. ეს იმას ნიშნავს, რომ გაზომვების შედეგების დაახლოებით 97% განთავსდება ამ ინტერვალში.

დავსვათ მეორე კითხვა: როგორი საიმედოობის ინტერვალი უნდა ავირჩიოთ, იმავე გაზომვებისთვის, ისე რომ შდეგების დაახლოებით 98% განთავსდეს ამ ინტერვალში? იმავე ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ $\alpha =$ 0.98 შეესაბამება მნიშვნელობა $\varepsilon = 2.2$ და შესაბამისად $\alpha\varepsilon = 0.032 \cdot 2{,}4 \approx 0.777$ და მითითითებულ ნდობის ალბათობას შეესაბამება ინტერვალი 1.193$< x < 1.347$ ან დამრგალებულად 1.19 $< x < 1.35$. ზოგჯერ მიღებული შედეგი ასეც შეიძლება ჩაიწეროს $x = 1.27 \pm 0.08$ ნდობის ალბათობით 0.98. ამრიგად შემთხვევითი ცდომილების აღმოსაჩენად საჭიროა დავადგინოთ ორი რიცხვი – ნდობის ინტერვალი (ცდომილების სიდიდე) და ნდობის ალბათობა. საშუალო კვადრატულ ცდომილებას σ შეესაბამება ნდობის ინტერვალი 0.68, გაორმაგებულ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას – (2 σ) - ნდობის ალბათობა 0.95, გასამმაგებულის (3σ) - 0.997

ცდომილების სხვა მნიშვნელობებისთვის ნდობის ალბათობა განისაზღვრება დანართის I ცხრილით.

ზემოთ მოყვანილი ცდომილების სამი მნიშვნელობა სასურველია ვიცოდეთ ზეპირად, რადგან ჩვეულებრივ, როგორც წიგნებში ისე სტატიებში, როცა მოცემულია საშუალო კვადრატული ცდომილება, ჩვეულებრივ არ მოიცემა ნდობის ინტერვალი. თუ გვეცოდინება ზემოთ მოყვანილი სამი რიცხვი, ეს საკმარისია იმისთვის, რომ გავერკვეთ გაზომვის საიმედოობაში იმ შემთხვევაში როდესაც მოცემულია საშუალო კვადრატული ცდომილება ან ვარიაციის კოეფიციენტი.

საშუალო კვადრატულ ცდომილებასთან ერთად ზოგჯერ სარგებლობენ (1.12) ფორმულით გამოთვლილი საშუალო არითმეტიკული ცდომილებით.

$$r_n = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{n} \quad (1.12)$$

დაკვირვებათა დიდი რიცხვის შემთხვევაში (პრაქტიკულად $n > 30$) s და r შორის არსებობს მარტივი თანაფარდობა

$$s = 1.25\, r \text{ ან } r = 0.8\, s \quad (1.13)$$

მკაცრად, რომ ვთქვათ ეს თანაფარდობები სამართლიანია მხოლოდ σ და ρ -თვის, მაგრამ არა s ან r -თვის. მცირე n -თვის, თანაფარდობა s/r მნიშვნელოვნად განსხვავდება ზღვრული მნიშვნელობისგან, ამასათან როგორც წესი

$$\frac{s}{r} > \frac{\sigma}{\rho}$$

უმრავლეს შემთხვევაში მიზანშეწონილია ვისარგებლოთ s სიდიდით და არა r. უპირველეს ყოვლისა იმიტომ, რომ ვსარგებლობთ რა სტანდარტული ცდომილებით s, უფრო მარტივია განვსაზღვროთ ნდობის ალბათობის ინტერვალები, რომლებიც სპეციალური ცხრილებშია მოცემული. საშუალო არითმეტიკული ცდომილების r, უპირატესობას წარმოადგენს ის, რომ მისი გაანგარიშება გაცილებით მარტივია. ვიდრე s. ქვემოთ მოყვანილია მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევა პრაქტიკულად თავი ავარიდოთ ამ სიძნელეებს. ცხადია n -ის დიდი მნიშვნელობების შემთხვევაში სულერთია თუ რომელი ცდომილებით ვისარგებლებთ, ვინაიდან მათ შორის არსებობს (1.13) თანაფარდობა. n - ის მცირე მნიშვნელობების დროს, ზემოთ მოყვანილი

მიზეზების გამო ყოველთვის უნდა ვისარგებლოთ სტანდარტული ცდომილებით ან ვარიაციის კოეფიციენტით

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (1.14)$$

თუ გაზომვების n მცირე რაოდენობებისათვის ვისარგებლებთ არითმეტიკული ცდომილებით, უფრო სწორი იქნება თუ გამოვიყენებთ არა (1.14) ფორმულას არამედ ვისარგებლებთ თანაფარდობით

$$r = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (1.15)$$

n დიდი მნიშვნელობების დროს განსხვავება ამ ორი ფორმულით მოცემულ მნიშვნელობებს შორის უმნიშვნელოა. ნდობის ინტერვალის გათვლები ჩვენ ჩავატარეთ იმ შემთხვევებისთვის როდესაც გაზომვის შედეგები განაწილებული იყო ნორმალური კანონით.

არცთუ იშვიათად, როგორც ეს ზემოთ იყო ნათქვამი, ყოველთვის არაა ცნობილი ცდომილების განაწილების კანონი და ის განსხვავებულია ნორმალურისგან. დისპერსიის გამოთვლა ამ შემთხვევაშიც საშუალებას გვაძლევს გამოვთვალოთ ნდობის ინტერვალი, გამოვიყენებთ რა ჩებიშევის უტოლობას, რომელიც მიღებულია განაწილების ნებისმიერი კანონისთვის და ამდენად გააჩნია ზოგადი ხასიათი.

დავუშვათ, რომ ძველებურად σ წარმოადგენს საშუალო კვადრატულ გადახრას, ხოლო a არის ნებისმიერი 1-ზე მეტი რიცხვი. ამ შემთხვევაში ჩებიშევის უტოლობა ასე ჩაიწერება

$$(|\bar{x} - x| > \sigma\alpha) < \frac{1}{\alpha^2} \qquad (1.16)$$

საინტერესოა ნდობის ინტერვალისა და მათი შესაბამისი ალბათობების გამოთვლების შედეგების შედარება ნორმალური განაწილებისა და ჩებიშევის უტოლობით შეფასებულ მნიშვნელობებს შორის თავისუფალი განაწილებისთვის. ეს შედარება მოყვნილია 1.5 ცხრილში.

ცხრილიდან ჩანს, რომ დიდი გადახრების ალბათობები თავისუფალი განაწილებისთვის არსებითად მეტია ნორმალურთან შედარებით: ეს ბუნებრივად შედეგია იმისა, რომ ჩებიშევის უტოლობის გამოყვნა ეყრდობა განაწილების უფრო ზოგად კანონებს.

ცხრილი 1.5

$\alpha\sigma$	$P_{ნორმ}$	PR
1	0.32	-
1.5	0.13	0.8
2	0.05	0.25
3	0.003	0.11

აქედან შეიძლება გავაკეთოთ ზოგადი დასკვნა: ანალიზის დაწყების წინ, რამდენადაც ეს შესაძლებელია, უნდა დავრწმუნდეთ განაწილების კანონის ნორმალურთან სიახლოვეში და ვისარგებლოთ ნდობის ინტერვალების შესაბამისი შეფასებებით.

1.5. გაზომვის უხეში შეცდომების გამორიცხვის მეთოდები

მიზანშეწონილია ცდომილებების ცალკე სახეობად განხილულ იქნას უხეში ცდომილებების. მათ მიეკუთვნებათ შედეგები ანომალური რიცხვითი მნიშვნელობებით. ლაპარაკია შედეგებზე, რომლებიც 10 - ჯერ და მეტჯერ განსხვავდებიან სხვა მნიშვნელობებისაგან.

უხეში ცდომილებების მიზეზი შეიძლება იყოს ხელსაწყოს მუშაობაში შეფერხება, ექსპერიმენტატორის შეცდომა ანათვალის აღებისას და ა.შ. ცხადია უხეში შეცდომები ამოღებული უნდა იყოს გაზომვის შედეგების სერიიდან.

ამასთან ზოგიერთი ანომალური შედეგის ხელაღებით გამორიცხვაც არაა გამართლებული. ამდენად საჭიროა მათემატიკური პროცედურის ჩატარება, რომელიც საშუალებას მისცემს ექსპერიმენტატორს განასხვავოს უხეში შეცდომა დასაშვები შემთხვევითი ცდომილებისაგან.

უხეში შეცდომების ძებნის ქვემოთ მოყვანილი მეთოდიკას საფუძვლად უდევს მოსაზრება, რომ შემთხვევითი შეცდომები ემორჩილებიან ალბათობების განაწილების გაუსის კანონს (ნორმალური განაწილება).

ალბათობის თეორიის თანახმად, შემთხვევითი ცდომილებები ემორჩილებიან განაწილების ნორმალურ კანონს თუ სრულდება შემდეგი სამი პირობა:

1)შემთხვევითი ფაქტორების გავლენა, რომლებიც გაზომვის შედეგებზე ახდენენ გავლენას, ძალიან ბევრია (პრაქტიკულად შემოუსაზღვრავია).

2) თითოეული შემთხვევითი ფაქტორი დამოუკიდებელია სხვისგან.

3) შემთხვევითი ფაქტორებიდან არცერთი არ დომინირებს სხვაზე.

დავუშვათ, რომ ეს პირობები სრულდება.

ნორმალური განაწილების გამოყენებით შეიძლება გამოვთვალოთ გაზომილი სიდიდის გადახრის ალბათობა გასაზომი სიდიდისაგან. თუ ეს ალბათობა ε მცირეა, მაშინ $\alpha = 1 - \varepsilon$ საიმედოობით შეიძლება ასეთი შედეგი ჩავთვალოთ უხეშ შეცდომად და მხედველობაში არ მივიღოთ.

ნომალური შდეგების ანალიზის პროცედურა შეიძლება შემდეგ ეტაპებად დავყოთ.

1) უპირველეს ყოვლისა უნდა შევარჩიოთ გარკვეული ნდობის ალბათობა α.

2) შემდეგ გაზომვის შედეგებიდან $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ დროებით ამოვიღოთ “საეჭვო” შედეგი, რომელიც მნიშვნელოვნად განსხვავდება სხვებისგან, მაგალითად a_k.

3) გამოვთვალოთ დარჩენილი a_i შედეგების საშუალო სტატისტიკური მნიშვნელობა $i \neq k$, ფორმულით (2.1).

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i-1, i\neq k}^{n} a_i \qquad (1.17)$$

4) სტიუდენტის კოეფიციენტების ცხრილიდან ამოვწეროთ $t_{\alpha,n-2}$, რომელიც შეესაბამება α საიმედოობას და გაზოვათა რაოდენობას $n-1$ ანუ თავისუფლების ხარისხის მნიშვნელობას $\nu = n-2$.

5) გამოვთვალოთ სიდიდე

$$\Delta a_m = t_{\alpha,n-2} \sqrt{\frac{nD_1}{(n-1)(n-2)}}.$$

სადაც D_1 პარამეტრი გამოიანგარიშება ფორმულით:

$$D_1 = \sum_{i=1,i\neq k}^{n}(a_i - \overline{a_1})^2.$$

შევნიშნოთ, რომ ამ უკანასკნელ ჯამში არ შედის როგორც შესაკრები "საეჭვო" მნიშვნელობა a_k.

Δa_m სიდიდე წარმოადგენს მაქსიმალურ დასაშვებ გადახრას α სანდოობის ინტერვალისას.

6) ბოლოს, ვამოწმებთ პირობას

$$|\overline{a_1} - a_k| \geq \Delta a_m \quad (1.17)$$

თუ სრულდება (1.17) პირობა, "საეჭვო" a_k მნიშვნელობა ითვლება უხეშ შეცდომად და ის ამოღებულ უნდა იქნას გაზომვების მოცემული სერიის მნიშვნელობებიდან.

თუ (1.17) პირობა არ სრულდება მაშინ a_i გაზომვის შედეგი რჩება იგივე.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ შტანგენფარგლით დისკოს d დიამეტრის გაზომვისას მივიღეთ შემდეგი 6 მნიშვნელობა: 153,4 მმ; 154,6 მმ; 154,7 მმ, 155,0 მმ, 164,3 მმ; 154,3 მმ. შევაწმოთ არის თუ არა მეხუთე შედეგი 164,3 მმ უხეში შეცდომა.

1) ავიღოთ სანდოობის ინტერვალი $\alpha = 0{,}95$.
2) მნიშვნელობების მონაცემებიდან ამოვიღოთ a_5=164,3.
3) გამოვთვალოთ დანარჩენი ხუთი სიდიდის საშუალო სტატისტიკური მნიშვნელობა $\bar{a}_1 = 154{,}4$.
4) $\alpha = 0{,}95$ და თავისუფლების ხარისხის $6 - 2 = 4$ მნიშვნელობისათვის სტიუდენტის კოეფიციენტების ცხრილიდან (დანართი ცხრილი II). ამოვწეროთ სტიუდენტის კოეფიციენტის მნიშვნელობა $t_{\alpha,4} = 2{,}776$.
5) სიდიდე $D_1 = 1{,}50$, ხოლო მაქსიმალური დასაშვები გადახრა $\Delta a_m = 1{,}862$.

მოცემულ მაგალითში a_5 გამოსაცდელი შედეგის მნიშვნელობა სხვა შედეგების საშუალო $\bar{a}_1$ მნიშვნელობისაგან განსხვავდება სიდიდით, რომელიც გაცილებით აღემატება Δa_m, ამიტომ a_5 შედეგი უნდა ჩაითვალოს უხეშ შეცდომად და ამოღებულ უნდა იქნას გაზომვის მონაცემებიდან.

a_5 სიდიდის ამოღების შემდეგ უნდა შემოწმდეს დარჩენილი შედეგები პროცედურით, რომელიც აღწერილი იყო წინა პარაგრაფში. დისკის დიამეტრისათვის საბოლოოდ ვიღებთ:

$$\bar{d} = 154{,}4; \quad 153{,}6 \leq d \leq 155{,}2.$$

თუ უხეშ შეცდომას a_5 დავტოვებთ გაზომვის შედეგებში და ჩავატარებთ იგივე პროცედურებს. მაშინ ჩვენ ჯერ ერთი მივიღებთ გასაზომი სიდიდის გაზრდილ მნიშვნელობას:

$$\bar{d} = 156{,}1;$$

მეორეც, ნდობის ინტერვალის გაუმართლებლად ფართო სიგანეს

$$151{,}8 \leq d \leq 160{,}3.$$

1.6. ხელსაწყოს ცდომილების გათვალისწინება

ექსპერიმენტის ჩატარებისას ზოგჯერ ყველა გაზომილი a_i სიდიდე ერთმანეთს ემთხვევა. ამ შემთხვევაში $\Delta A_{შემ}$ ნულის ტოლია. მაგრამ არ იქნება სწორი თუ ჩავთვლით, რომ მივიღეთ გასაზომი სიდიდის ნამდვილი A მნიშვნელობა. გარდა შემთხვევითი $\Delta A_{შემ}$ ცდომილებისა, გაზომვის შედეგზე გავლენას ახდენს გამზომი ხელსაწყოს ცდომილებაც. ხელსაწყოს მიერ შეტანილი ცდომილება აღვნიშნოთ δ ასოთი. რაც ნაკლებია δ მით უფრო ზუსტია ხელსაწყო.

ზემოთ ჩვენ შევნიშნეთ, რომ ხელსაწყოს სიზუსტე განისაზღვრება უდფ -ით. მაგრამ თუ გამზომი ხელსაწყო რთული აგებულებისაა, მხედველობაში უნდა მივიღოთ, რომ ესაა ობიექტი, რომელიც მრავალი ნაწილისაგან შედგება და ფუნქციონირებს რაღაც ფიზიკური მოვლენის საფუძველზე. მაგალითად არსებობენ მაგნიტოელექტრული, ელექტრომაგნიტური, ელექტროდინამიკური და სხვა სისტემების ელექტროგამზომი ხელსაწყოები. ხელსაწყოს სხვადასხვა ნაწილების ურთიერთქმედებაზე მრავალი შემთხვევითი ფაქტორი ახდენს გავლენას. ამრიგად გაზომვის შედეგში თვით ხელსაწყოც შეაქვს თავისი წვლილი.

მრავალი ელექტროგამზომი ხელსაწყოს ცდომილება გამოისახება სიზუსტის კლასით. სიზუსტის კლასი K – ესაა ხელსაწყოს ცდომილება, რომელიც გამოისახება პროცენტებით მაქსიმალურად დასაშვები ჩვენებიდან:

$$K = \frac{\delta}{A_m} 100\% \quad (1.18)$$

სადაც A_m – გასაზომი სიდიდის მაქსიმალური მნიშვნელობაა მოცემული შკალით.

(8) (1.18) – დან ვღებულობთ:

$$\delta = \frac{A_m}{100\%} K \ (\%) \qquad (1.19)$$

ხელსაწყოს სიზუსტის კლასი მოყვანილია პასპორტში ან თვითონ ხელსაწყოზე. არსებობს ელექტროგამზომი ხელსაწყოების სიზუსტის შემდეგი კლასები: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. პირველი ოთხი კლასი პრეციზიულია (მაღალი სიზუსტის), დანარჩენები – ტექნიკური სიზუსტის.

მაგალითად: ვთქვათ მაქსიმალური ძაბვა, რომელიც შეიძლება გაიზომოს ვოლტმეტრით შერჩეული სკალით, ტოლია 500 ვოლტის, ხელსაწყოს სიზუსტის კლასი $K = 0{,}5$. ხელსაწყოს ცდომილების საანგარიშოდ უნდა გამოვთვალოთ

$$\delta = \frac{500A}{100\%} 0{,}5 \ (\%) = \ 2{,}5A.$$

ითვლება, რომ δ მუდმივი სიდიდეა ხელსაწყოს მთელს სკალაზე.

ზოგიერთი გამზომი ხელსაწყოს პასპორტში ან უშუალოდ ხელსაწყოზე მითითებულია ცდომილება. თუ სიზუსტის კლასი უცნობია და არ არსებობს მონაცემები ხელსაწყოს ცდომილებაზე, მაშინ თვლიან, რომ δ ტოლია ხელსაწყოს სკალის უმცირესი დანაყოფის ფასის.

არსებითად, δ სიდიდე განპირობებულია მრავალი შემთხვევითი პროცესით, რომელიც ხელსაწყოს შიგნით მიმდინარეობს, და ასევე წარმოადგენს შემთხვევითი ცდომილების შეფასებას. $\Delta A_{შემ}$ სიდიდე განიხილება, როგორც ხელსაწყოს შიგნით, ისე მის გარეთ, მიმდინარე შემთხვევითი პროცესებით გამოწვეული ცდომილებების შეფასება. შეიძლება ვთქვათ, რომ δ წარმოადგენს საშუალო ცდომილების შეფასებას ნდობის მაღალი დონით (ერთთან ახლოს მყოფი), რომელიც მიიღება ხელსაწყოს გამოცდისას მრალჯერადი გაზომვებით.

ზემოთ გაკეთებული დასკვნების მიხედვით სიდიდეები S_0 და δ დამოუკიდებელია ერთმანეთისაგან. მათემატიკურ სტატისტიკაში მტკიცდება, რომ გაზომვის შედეგის მთლიანი ცდომილება შეიძლება წარმოვადგინოთ როგორც კვადrატული ფესვი ცალკეული ცდომილებების კვადრატების ჯამიდან

$$\Delta A = \sqrt{(\Delta A_{ńë})^2 + (\Delta A_{ḋd̈})^2} \qquad (1.20)$$

სადაც $\Delta A_{ḋd̈} = t_{\alpha,\infty}\frac{\delta}{3}$ ხელსაწყოს ცდომილებაა, რომელიც შეესაბამება არჩეულ ნდობის ინტერვალს α. თანამამრავლი $t_{\alpha,\infty}$ – სტიუდენტის კოეფიციენტია მოცემული ნდობის ალბათობისათვის α და თავისუფლების ხარისხის უსასრულო მნიშვნელობისათვის, გაზომვების $n \to \infty$ რაოდენობისათვის. $t_{\alpha,\infty}$ მნიშვნელობები სხვადასხვა $\alpha-$თვის მოცემულია სტიუდენტის კოეფიციენტების ცხრილში.

ამრიგად, A სიდიდის გაზომვის შედეგები შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$A = \bar{a} \pm \sqrt{\left(t_{\alpha,n-1}S_0\right)^2 + \left(t_{\alpha,\infty}\frac{\delta}{3}\right)^2} \qquad (1.21)$$

ან უფრო მოკლედ $A = \bar{a} \pm \Delta A$, სადაც ΔA გამოითვლება (10) ფორმულით.

ამრიგად გასაზომი A სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა α ალბათობით, იმყოფება ნდობის ინტერვალის შიგნით, რომელსაც გააჩნია შემდეგი სახე:

$$(\bar{a} - \Delta A;\ \bar{a} + \Delta A). \qquad (1.22)$$

შევნიშნოთ, რომ თუ პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას აბსოლუტური ცდომილებები $\Delta A_{ńë}$ და $\Delta A_{ḋd̈}$ ერთმანეთისაგან მნიშვნელოვნად განსხვავდება (ათჯერ და მეტად), წინასწარი შეფასებისას შეიძლება უგულებელვყოთ უმცირესი მათგანი. საბოლოო გაანგარიშების წარმოებისას უნდა ვისარგებლოთ ზოგადი ფორმულით (1.20).

1.7. პირდაპირი გაზომვების შემთხვევითი ცდომილებები

ვთქვათ რაღაც A სიდიდე გავზომეთ რამოდენიმეჯერ და მივიღეთ მნიშვნელობები: $a_1, a_2 \cdots, a_i$, $\cdots$, a_n სადაც n გაზომვების რაოდენობაა. a_i რიცხვებს შორის განსხვავება შესაძლებელია საკმაოდ შესამჩნევი იყოს,

მიუხედავად იმისა, რომ გაზომვები ჩატარებულია ერთნაირ პირობებში, ერთი და იმავე მეთოდით და ერთი და იმავე ექსპერიმენტატორის მიერ.

გაზომვის ცდომილების შემთხვევითი ხასიათის გამო საძებნი სიდიდე, ზოგადად, რომ ვთქვათ უცნობია.

შემთხვევითი ცდომილებების გამოთვლა ემყარება ალბათობის თეორიას და მათემატიკურ სტატისტიკას.

მათემატიკურ სტატისტიკაში მტკიცდება, რომ სისტემატური ცდომილებების არ არსებობისას (ან მათი აღმოფხვის შემდეგ) A სიდიდის საუკეთესო მიახლოებას წარმოადგენს გაზომვის შედეგების საშუალო სტატისტიკური მნიშვნელობა

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \quad (1.23)$$

თუ გაზომვების რაოდენობა n საკმაოდ დიდია, მრავალი გაზომვით მიღებულ შედეგს a_i, შეიძლება ერთნაირი ნიშნადი ციფრები გააჩნდეს. ამ შემთხვევაში საშუალო სტატისტიკური უფრო მოსახერეხებელია გამოითვალოს ფორმულით:

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_k a_i \quad (1.24)$$

სადაც n_k წარმოადგენს a_k მნიშვნელობის გაზომვების რაოდენობის გამეორებას გაზომვების n სერიიდან. აჯამვა ხდება ყოველი განსხვავებული a_k მნიშვნელობისათვის. ცხადია, რომ

$$n = \sum_k n_k \quad (1.25)$$

მაგალითად, ექსპერიმენტში სამჯერ იქნა მიღებული 2,1; ხუთჯერ – 2,3 და ორჯერ – 2,2, მაშინ საშუალო სტატისტიკური გამოითვლება ფორმულით

$$\bar{a} = \frac{3 \cdot 2{,}1 + 5 \cdot 2{,}3 + 2 \cdot 2{,}2}{3 + 5 + 2} = 2{,}22$$

გაზომვის ნებისმიერი რაოდენობის n გაზომვისას შეუძლებელია გარანტირებულ იქნას, რომ (1.23) ან (1.24) ფორმულებით გამოთვლილი $\bar{a}$ მნიშვნელობა ზუსტად დაემთხვევა საძებნ A სიდიდეს. საქმე იმაშია, რომ

მიუხედავად იმისა რომ გაზომვის კონკრეტულ სერიაში ჩვენ ვღებულობთ n გარკვეულ რიცხვს a_i $(i = 1,2,3,\cdots,n)$, გაზომვის შედეგები თავიანთი არსით წარმოადგენენ შემთხვევით სიდიდეებს. ამაში ჩვენ დავრწმუნდებით თუ ჩავატარებთ n რაოდენობის სერიულ გაზომვებს, ვნახავთ, რომ მივიღებთ სხვა რიცხვებს a_i $(i = 1,2,3,\cdots,n)$. (1.23) ან (1.24) ფორმულებით გამოთვლილი საშუალო სტატისტიკური $\bar{a}$ დამოკიდებულია ყველა a_i - ზე. ამ სიტუაციაში საშუალო სტატისტიკურიც $\bar{a}$ შემთხვევითი სიდიდეა. ამის ილუსტრაცია შეიძლება მოვახდინოთ თუ ჩავატარებთ n რაოდენობის სერიულ გაზომვებს რამოდენიმეჯერ. გამოვთვლით რა თითოეულ შემთხვევაში საშუალო სტატისტიკურ სიდიდეს $\bar{a}$ ზემოთ მოყვანილი ფორმულებით, ზოგადად რომ ვთქვათ ყოველთვის მოვიღებთ სხვადასხვა რიცხვით მნიშვნელობებს გაზომვების სხვადასხვა სერიისათვის, თუმცა ეს $\bar{a}$ რიცხვები დაჯგუფდებიან A სიდიდის ირგვლივ. შესაბამისად მიღებული შედეგის ცდომილება - $(A - \bar{a})$ - ასევე წარმოადგენს შემთხვევით სიდიდეს.

მათემატიკური სტატისტიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თეორემა ამტკიცებს, რომ გაზომვათა n რაოდენობის უსასრულოდ გაზრდისას საშუალო სტატისტიკური სიდიდე $\bar{a}$ უსასრულოდ უახლოვდება A სიდიდეს.

აქედან გამომდინარეობს, რომ შედეგის $A = \bar{a}$ სიზუსტის გაზრდა შესაძლებელია გაზომვების n რაოდენობის გაზრდით. მაგრამ მეორეს მხრივ შეუძლებელია გაზომვების უსასრულო n რაოდენობის ჩატარება და შესაბამისად $A = \bar{a}$ ტოლობის მიღწევა. ამიტომ აუცილებელია გამოთვლილ იქნას $(A - \bar{a})$ ცდომილების რაოდენობრივი მნიშვნელობა.

მათემატიკური სტატისტიკა შემთხვევითი ცდომილების საშუალო მნიშვნელობის გამოსათვლელად, გვთავაზობს ფორმულას

$$S_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}} \qquad (1.25)$$

ამ სიდიდეს ხშირად ეწოდება საშუალო მნიშვნელობის საშუალო კვადრატული გადახრა. S_0 სიდიდე ახასიათებს საძებნი A სიდიდის განსაზღვრის სიზუსტეს, $\bar{a}$ საშუალო სტატისტიკურის გამოთვლით. უფრო ზუსტად, რომ ვთქვათ S_0

წარმოადგენს $\bar{a}$ საშუალო სტატისტიკურის გადახრას ნამდვილი A მნიშვნელობისაგან. მაგრამ გაზომვის შედეგის ჩაწერა გამოსახულებით

$$A = \bar{a} \pm S_0 \quad (1.26)$$

სერიოზულ გაუგებრობას იწვევს.

საქმე იმაშია, რომ გავიმეორებთ რა სერიას n გაზომვების რაოდენობით და გამოვთვლით რა თითოეულ შემთხვევაში ახალ საშუალო სტატისტიკურს $\bar{a}$, მივიღებთ რიცხვებს, რომლებიც მოხვდებიან როგორც $(\bar{a} - S_0; \bar{a} + S_0)$ ინტერვალის შიგნით, ისე მის გარეთ (აქ $\bar{a}$ ქვეშ იგულისხმება გაზომვების პირველი სერიის ქვეშ მიღებული საშუალო სტატისტიკური). უფრო დაწვრილებითი გამოთვლები აჩვენებენ, რომ ნაჩვენები ინტერვალიდან დაახლოებით საშუალო სტატისტიკური მონაცემების ერთი მესამედი ნაწილი გამოდის მოყვანილი ინტერვალიდან. ეს ბუნებრივია, ვინაიდან S_0 წარმოადგენს საშუალოს და არა მაქსიმალური ცდომილების შეფასებას. S_0 სიდიდეს ხშირად უწოდებენ მიახლოებითი ტოლობის $A \approx \bar{a}$ საშუალო კვადრატულ ცდომილებას.

ზოგადად თეორია უშვებს მაქსიმალური ცდომილების უსასრულოდ დიდ მნიშვნელობას. ამასთან მხედველობაში უნდა გვქონდეს ის გარემოებაც, რომ ძალიან დიდი ცდომილებები პრაქტიკაში თითქმის არ გვხვდება.

მათემატიკური სტატისტიკის მიხედვით, გაზომვის შედეგის კორექტული წარმოდგენისათვის საჭიროა წინასწარ დავსახოთ მისი საიმედოობა, ან სხვანაირად თუ ვიტყვით სანდოობის ინტერვალი α (სანდოობის ალბათობა გამოისახება რიცხვით 0-დან ერთამდე, ან პროცენტებით 0-დან 100-მდე და გვიჩვენებს ალბათობას იმისა, რომ გაზომილი სიდიდის ნადვილი მნიშვნელობა განთავსდება მოცემულ შუალედში).

α მნიშვნელობა ისე აიღება, რომ დამატებითი ალბათობა (1 -α) იმდენად მცირე იქნება, რომ, ხდომილობა (1 -α) ტოლი ალბათობით ერთჯერ გაზომვისას პრაქტიკულად არ განხორციელდება. პრაქტიკაში სანდოობის ალბათობა α აიღება რაც შეიძლება 1 თან ახლოს: 0,9; 0,95; 0,99.

შემთხვევითი ცდომილებები მიღებულია წარმოდგენილ იქნას ნდობის ინტერვალის სახით (ნდობის ინტერვალი წარმოადგენს სტატისტიკურ მახასიათებელს, რომელიც გვიჩვენებს თუ რა ფარგლებში იმყოფება პარამეტრის

ნამდვილი მნიშვნელობა) ამ ინტერვალის სიგრძე განისაზღვრება ნდობის ალბათობის სიდიდით. ნდობის ინტერვალის ცენტრად გასაზომი A სიდიდისათვის აიღება მისი საშუალო მნიშვნელობა $\bar{a}$, რომელიც გამოთვლილია A სიდიდის გაზომვების სერიიდან. ამ ნდობის ინტერვალის საზღვრები გამოისახება საშუალო კვადრატული გადახრისა და უგანზომილებო სტიუდენტის კოეფიციენტის $t_{\alpha,V}$ ნამრავლით.

სტიუდენტის კოეფიციენტის სიდიდე დამოკიდებულია ადრე არჩეული ნდობის ალბათობასა და მთელრიცხვიან პარამეტრს ν –ზე, რომელსაც თავისუფლების ხარისხი ეწოდება. ნდობის ინტერვალის აგებისას თავისუფლების ხარისხის ν მნიშვნელობად აიღება რიცხვი, რომელიც 1–ით ნაკლებია გაზომვების n რაოდენობაზე, რომლებიც ჩატარებულია ერთნაირ პირობებში. სტიუდენტის კოეფიციენტის რიცხვითი მონაცემები ნდობის სხვადასხვა ალბათობისათვის მოყვანილია ცნობარებში.

A ფიზიკური სიდიდის შედეგი მოიცემა შემდეგი სახით:

$$A = \bar{a} \pm t_{\alpha,V} S_0 \quad (\quad (1.27)$$

ჩანაწერის არსი მდგომარეობს შემდეგში: გასაზომი სიდიდე A ალბათობით α იმყოფება $(\bar{a} - t_{\alpha,V}S_0; \bar{a} + t_{\alpha,V}S_0)$ ინტერვალის შიგნით. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, აგებული ინტერვალი ფარავს უცნობ A სიდიდეს α ალბათობით.

ამრიგად, გაზომვების n სერიის რაოდენობის გამეორება მოგვცემს საშუალო სტატისტიკურის $\bar{a}$ მნიშვნელობას, რომელიც პრაქტიკულად განთავსდება ადრე აგებული ნდობის ინტერვალის შიგნით. პრაქტიკული სანდოობა მიიღწევა ნდობის ალბათობის α დიდი სიდიდით. საწინააღმდეგო შედეგის დადგომის ალბათობა (1 – α) ტოლია, ანუ შედეგი პრაქტიკულად შეუძლებელია.

ნამრავლი

$$\Delta A_{n\ddot{e}} = t_{\alpha,n-1} S_0 \qquad (1.28)$$

უნდა განვიხილოთ, როგორც საძებნი A სიდიდის დადგენის შემთხვევით მაგრამ არა მაქსიმალურ ცდომილებად, რომელსაც შეესაბამება α საიმედოობა. თუ α ახლოსაა ერთთან, მაშინ $\Delta A_{\tilde{n}\ddot{e}}$ ცდომილება პრაქტიკულად არ განსხვავდება

მაქსიმალურად შესაძლებლისაგან, რომელიც რეალურად შეიძლება შეგვხვდეს ექსპერიმენტში.

მოკლედ შეიძლება დავასკვნათ, რომ (1.28) ფორმულაში სტიუდენტის კოეფიციენტი გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ მეტია ალბათური შემთხვევითი ცდომილება (რომელიც შეესაბამება არჩეულ სანდოობის ალბათობას) საშუალო კვადრატულ გადახრაზე S_0.

თავი II

საშუალო მნიშვნელობები და მათი შეფასება

2.1. საშუალოები, მათი გამოთვლის მეთოდები

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ სიდიდეების საშუალო არითმეტიკული ეწოდება ამ მონაცემების ჯამს შეფარდებულს მონაცემების მთლიან რაოდენობასთან

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (2.1)$$

საშუალო $\bar{x}$ მნიშვნელობიდან საშუალო კვადრატული გადახრა ეწოდება კვადრატულ ფესვს თითოელი მნიშვნელობისა და საშუალო მნიშეელობის სხვაობის კვადრატების საშუალო არითმეტიკულიდან

$$s^* = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_2-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad (2.2)$$

თუ გაზომვის შედეგებს შორის გვხვდება ერთმანეთის ტოლი სიდიდეები მაშინ (2.1) და (2.2) ფორმულებში შესაბამისი სიდიდეები შეიძლება გავაერთიანოთ. ვთქვათ x_1 მონაცემი გვხვდება m_1 ჯერ, x_2 მონაცემი m_1 ჯერ,$\cdots$, x_k მონაცემი m_k ჯერ $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n)$,მაშინ გვექნება:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \quad (2.3)$$

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-\bar{x})^2} \quad (2.4)$$

საშუალო შეწონილი მნიშვნელობა განისაზღვრება ფორმულით

$$\bar{x} = \frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k}{p_1+p_2+\cdots+p_k} = \frac{\sum p_ix_i}{\sum p_1} \quad (2.5)$$

საშუალო შეწონილის კვადრატული გადახრის ფორმულას აქვს შემდეგი სახე

$$s^* = \sqrt{\frac{p_1(x_1-\bar{x})^2+p_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+p_k(x_2-\bar{x})^2}{p_1+p_2+\cdots+p_k}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}p_1}} \quad (2.6)$$

სადაც $p_1, p_2, \cdots, p_k$ შესაბამისად გაზომვის შედეგების $x_1, x_2, \cdots, x_n$ წონებია (წონები წარმოადგენენ ცდომილებათა წილის შებრუნებულ სიდიდეებს. მაგალითად თუ რაღაც სიდიდის x_i გაზომვის ცდომილებაა 40% ანუ 0,4 ნაწილი, მაშინ მისი წონა იქნება $\frac{1}{0,4} = 2,5$). შეწონილი საშუალო მნიშვნელობები გამოიყენება არათანაბარი სიზუსტის გაზომვების შედეგების დამუშავებისას. არათანაბარი სიზუსტის გაზომვები ეწოდებათ ისეთ გაზომვებს, რომლებიც ჩატარებულია განსხვავებული სიზუსტის ხელსაწყოებით და (ან) ჩატარებულია სხვადასხვა პირობებში.

საშუალო მნიშვნელობის გამოთვლა ძალიან მარტივდება თუ x_i მნიშვნელობების ათვლას დავიწყებთ სათანადოდ შერჩეული ათვლის სათავიდან სათანადო მასშტაბით. პაქტიკულად ესაა წრფივი ჩანაცვლება

$$x_i = a + hb \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, k) \quad (2.7)$$

მოყვანილი ცვლილების გათვალისწინებით საანგარიშო ფორმულები მიიღებენ სახეს

$$\bar{x} = a + h\bar{b} \ (1.6) \ \text{სადაც} \ \bar{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h} m_ib_i \quad (2.8)$$

$$s^* = h\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{h} m_i\left(b_i-\bar{b}\right)^2} = h\sqrt{\overline{b^2}-\left(\bar{b}\right)^2} \quad (2.9) \ \text{სადაც}$$

$$\overline{b^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i\, b_i^2 \quad (2.10)$$

კონტროლის მიზნით ყველა გათვლას იმეორებენ ათვლის სხვა a_1 საწყისის მიმართ: მიღებული შედეგები უნდა დაემთხვეს დამრგვალების სიზუსტით.

გათვლის მოყვანილი მეთოდიკა განსაკუთრებით მოსახერხებელია საშუალოების გამოსათვლელად იმ შემთხვევისათვის როდესაც გაზომვის ყველა მონაცემი დაჯგუფებულია ერთნაირი სიგრძის ინტერვალებად (მონაცემთა ინტერვალური რიგი, დაჯგუფებული მონაცემები). ამ შემთხვევაში x_i აღნიშნავენ ინტერვალების საშუალოს, ათვლის a საწყისად იღებენ შუა ინტერვალის შუა მონაცემს (ან ერთ-ერთი საშუალო ინტერვალის შუა მონაცემს), ხოლო h სიდიდედ იღებენ ინტერვალის სიგრძეს. ამასთან b_i მნიშვნელობები ტოლია ინტერვალების ნომრების, რომლებიც ათვლილია არჩეული შუა ინტერვალიდან.

გაზომვის შემთხვევითი ცდომილებები ემორჩილებიან განაწილების გარკვეულ კანონებს, რომლებსაც აღმოვაჩენთ თუ ჩავატარებთ რაღაც გაზომვებს უცვლელ პირობებში და ვიანგარიშებთ იმ შედეგების m რაოდენობას, რომლებიც მოხვდებიან ნებისმიერ გამოყოფილ ინტერვალში. ამ რიცხვის შეფარდება ჩატარებულ გაზოვათა n რაოდენობასთან, რომელსაც ეწოდება გამოყოფილ ინტერვალში მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე, გაზომვათა საკმაოდ დიდი რაოდენობის პირობებში ახლოს იქნება გარკვეულ მუდმივ რიცხვთან. ეს გარემოება საშუალებას გვაძლევს შემთხვევითი ცდომილების შესასწავლად გამოვიყენოთ ალბათობის თეორიის ელემენტები. თეორიულ ალბათურ მოდელში შემთხვევითი ცდომილებები $z = x - a$ (z შემთხვევითი ცდომილებაა, x გაზომვის შედეგი, ხოლო a - გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა) და თვით გაზომვის შედეგი $x = z + a$ განიხილებიან, როგორც შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებიც იღებენ ნებისმიერ ნამდვილ მნიშვნელობას, ამასთან თითოეულ (z_1, z_2) ინტერვალს შეესაბამება სრულებით გარკვეული რიცხვი, რომელსაც ეწოდება z შემთხვევითი სიდიდის ამ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობა და აღინიშნება ასე: $P(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2)$ ან $P(z \in (\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2))$. პრაქტიკულად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ მოცემულ ინტერვალში z სიდიდის მოხვედრის ფარდობითი სიხშირე ტოლია ზემოთ ნახსენები ალბათობის:

$$\frac{m}{n} \approx \boldsymbol{P}(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2).$$

წესი, რომელიც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი (z_1, z_2) ინტერვალისათვის მოიძებნოს $P(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2)$ ალბათობა, ატარებს შემთხვევითი z სიდიდის განაწილების ალბათობის კანონის სახელს. ეს კანონი ჩაიწერება შემდეგი ინტეგრალის სახით

$$P(\mathrm{z}_1 < z < \mathrm{z}_2) = \int_{\mathrm{z}_1}^{\mathrm{z}_2} p(z)dz$$

სადაც $p(z)$ - რაღაც არაუარყოფითი ფუნქციაა, რომელიც ნორმირებულია პირობით

$$\int_{\mathrm{z}_1}^{\mathrm{z}_2} p(z)dz = 1$$

ეს ფუნქცია სრულიად აკმაყოფილებს ალბათობების განაწილების შესაბამის კანონს და მას ეწოდება განაწილების სიმკვრივე.

შემთხვევითი სიდიდის ერთ-ერთი რიცხვითი მახასიათებელია მათემატიკური მოლოდინი, რომელსაც თეორიული საშუალო ეწოდება. მათემატიკურ მოლოდინს გააჩნია მარტივი ფიზიკური არსი: თუ რაღაც წრფეზე შემთხვევით განვათავსებთ ერთეულ მასას, ისე რომ თითოეულ i - ურ წერტილში განლაგდება i – ური მასა (დისკრეტული განაწილება) ან უწყვეტად "წავუსვამთ" ამ მასას (აბსულუტურად უწყვეტი განაწილება), მაშინ მათემატიკური მოლოდინი გვიჩვენებს წრფის "სიმძიმის ცენტრის" კოორდინატას.

სხვანაირად მათემატიკური მოლოდინი არის რიცხვი რომლის გარშემოც თავმოყრილია შემთხვევითი მნიშვნელობის მონაცემები.

დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდისათვის X (რომელიც მოცემულია მნიშვნელობებით $x_1, x_2, \cdots, x_n$ და ამ მნიშვნელობების შესაბამისი ალბათობებით $p_1, p_2, \cdots, p_n$ მაშინ მათემატიკური მოლოდინი MX იანგარიშება ფორმულით

$$MX = x_1 p_1, + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \quad (2.11)$$

ხოლო, თუ შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია უწყვეტად $P(x)$ - ის ალბათობის განაწილების სიმკვრივით, მაშინ მათემატიკური მოლოდინის საანგარიშო ფორმულას აქვს სახე

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x)\,dx$$

ზოგჯერ ფიზიკური ექსპერიმენტის მიზანია კვლევის სხვადასხვა ობიექტში განსაზღვრული პარამეტრის სხვადასხვაობის მიზეზის დადგენა. მაგალითად ახალი მასალის შექმნისას შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ მისი რაღაც პარამეტრის მნიშვნელობა განსხვავდება იმავე პარამეტრისაგან, რომელიც გააჩნდა ადრე მიღებულ მასალას და ეს განსხვავება არ იყოს მაინც და მაინც დიდი. ამ შემთხვევაში ჩნდება ეჭვი ხომ არ არის ეს განსხვავება გამოწვეული ექსპერიმენტის ცდომილებით.

საკითხის გადასაწყვეტად არის თუ არა ეს განსხვავება გამოწვეული შემთხვევითი თუ კანონზომიერი ფაქტორებით ატარებენ ექსპერიმენტის ორ სერიას თითოელი ობიექტისათვის და თითოელი მათგანისათვის გამოთვლიან მიღებული ექსპერიმენტული შედეგების საშუალოს $\overline{x_1}$ და $\overline{x_2}$. საკითხი ასე ისმის, როდის შეიძლება ამ საშუალოებს შორის სხვაობა ჩაითვალოს საკმარისად დიდად, რომ პრაქტიკულად დარწმუნებული ვიყოთ ამ სხვაობის წარმოქმნის არაშემთხვევით ხასიათზე. განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

საშუალოების შედარება როდესაც ცნობილია დისპერსია და როდესაც დისპერსია ცნობილია არ არის.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. ვთქვათ ჩატარებულია n_1 რაოდენობის თანაბარწერტილოვანი გაზომვა პირველ სერიაში და n_2 - რაოდენობის მეორეში., ამასთან σ_1^2 და σ_2^2 იყოს შესაბამისად პირველი და მეორე გაზომვების ცდომილების დისპერსიები. გაზომვის შედეგების საშუალო მნიშვნელობები შესაბამისად იყოს $\overline{x_1}$ და $\overline{x_2}$. საშუალოების განსხვავებების შემთხვევით თუ კანონზომიერ ხასიათზე დასკვნის გასაკეთებლად ვიანგარიშოთ სიდიდე

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \quad (2.3\text{-}1)\ \ (2.12)$$

შემდეგ ავირჩიოთ დასკვნის საჭირო ალბათობა და დანართის II ცხრილიდან ვიპოვოთ $t(P)$ შესაბამისი მნიშვნელობა (მაგ. $P = 0{,}99$ – თვის გვაქვს $t = 2{,}576$).

თუ (2.12) თანაფარდობის აბსოლუტური მნიშვნელობა აღემატება ჩვენს მიერ დადგენილ $t(P)$ მაშინ საშუალო მნიშვნელობებს შორის განსხვავება უნდა ჩაითვალოს მნიშვნელოვნად P ალბათობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში შეიძლება განსხვავებას ყურადღება არ მივაქციოთ და ის შეიძლება ჩავთვალოთ შემთხვევითად.

თუ ცდომილების დისპერსიები გაზომვათა ორივე სერიისათვის ერთნაირია $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ მაშინ (2.12) ფორმულა მიიღებს სახეს

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sigma\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (2.3\text{-}2) \quad (2.13)$$

მაგალითი. ვთქვათ გაზომვების ორი სერია 25 და 50 გაზომვების რაოდენობით ჩატარებულია $\sigma = 1{,}20$ საშუალო კვადრატული ცდომილებით, და თითოეული სერიის გაზომვების საშუალო მნიშვნელობებია შესაბამისად $\overline{x_1} = 23{,}56$ და $\overline{x_2} = 22{,}80$. საჭიროა შევადაროთ ეს საშუალოები ერთმანეთს და დავადგინოთ განსხვავების მნიშვნა.

ამოხსნა. (2.13) ფორმულის თანახმად

$$t = \frac{23{,}56 - 22{,}80}{1.20\sqrt{1/25 + 1/50}} = 2{,}59$$

დანართის II ცხრილიდან ვპოულობთ უახლოეს უმცირეს მნიშნელობას $t(0{,}99) = 2{,}576$.

დასკვნა: განსხვავება მნიშვნელოვანია 0,99 ალბათობით.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა როდესაც დისპერსიები უცნობია. ამ შემთხვევაში ვუშვებთ, რომ ეს დისპერსიები ერთნაირია (ემ დაშვება მიიღება შეუმოწმებლად, როდესაც გაზომვების ორივე სერია ტარდება ერთი და იმავე ხელსაწყოებით).

ერთნაირი სიზუსტით ჩატარებული პირველი სერიის n_1 რაოდენობის გაზომვათა საშუალო მნიშვნელობაა $\overline{x_1}$ და ემპირიული დისპერსიაა s_1^2 ხოლო მეორე სერიის n_2 რაოდენობის გაზომვათა საშუალო მნიშვნელობაა $\overline{x_2}$ და ემპირიული დისპერსიაა s_2^2. იმის გადასაწყვეტად თუ რითაა გამოწვეული საშუალო მნიშვნელობების განსხვავება ვიანგარიშოთ თანაფარდობები.

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{s\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (2.14)$$

სადაც

$$s=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{(n_1-1)+(n_2-1)}} \quad (2.3\text{-}4)\ \ (2.15)$$

მის შემდეგ დავსახოთ საჭირო ალბათობა და დანართის IV ცხრილით ვიპოვოთ $t(P,k)$, რომელიც შეესაბამება არჩეულ ალბათობას P და თავისუფლების ხარისხს $k=n_1+n_2$. თუ (2.14) თანაფარდობის აბსოლუტური სიდიდე აღემატება $t(P,k)$ მოძებნილ სიდიდეს მაშინ საშუალო მნიშვნელობებს შორის სხვაობა შეიძლება ჩავთვალოთ არაშემთხვევითად P საიმედოობით. წინააღმდეგ შემთხვევაში განსხვავება იქნება მნიშვნელოვანი.

(2.15) ფორმულით განსაზღვრული თანაფარდობა საშუალება იძლევა შეფასდეს უცნობი σ^2 დისპერსია

$$\sigma^2 \approx s_*^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

ის შეიძლება წარმოვადგინოთ საშუალო მნიშვნელობებიდან საშუალო კვადრატული გადახრებით

$$s_1^*=\sqrt{\frac{n_1-1}{n_1}}S_1 \text{ და } s_2^*=\sqrt{\frac{n_2-1}{n_2}}S_2$$

კერძოდ

$$s^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}(n_1 s_1^{*2}+n_2 s_2^{*2}) \quad (2.3\text{-}5)\ \ (2.15)$$

მაგალითი. ვთქვათ ჩატარებულია თანაბარი სიზუსტის გაზომვების ორი სერია 25 და 50 გაზომვების რაოდენობით საშუალო მნიშვნელობებია შესაბამისად $\overline{x_1}=23{,}56$, $\overline{x_2}=22{,}80$ და მათგან საშუალო კვადრატული გადახრებია $s_1^*=1{,}10$ და $s_2^*=1{,}25$. საჭიროა შევადაროთ ეს საშუალოები ერთმანეთს და დავადგინოთ განსხვავების მნიშვნელობა p =0,99 საიმედოობით.

ამოხსნა. ჯერ გამოვთვალოთ (2) ფორმულის მნიშვნელი

$$s\sqrt{1/n_1+1/n_2}=\sqrt{\frac{1}{73}(25\cdot 1{,}10^2+50\cdot 1{,}25^2)}\sqrt{1/25+1/50}=0{,}298$$

და შემდეგ თანაფარდობა (2.14)

$$t=\frac{23{,}56-22{,}80}{0{,}298}$$

დანართის IV ცხრილით შერჩეული საიმედოობისათვის $P = 0{,}99$ და თავისუფლების ხარისხისათვის $k = 25 + 50 - 1 = 73$ ვპოულობთ $t(0{,}99; 73) = 2{,}65$. ვინაიდან ეს გამოთვლილი მნიშვნელობა 2,55 ნაკლებია ცხრილიდან ნაპოვნ მნიშველობაზე - 2,65, შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ განსხვავება საშუალოებს შორის უმნიშვნელოა 0,99 ალბათობით.

შენიშვნა. IV ცხრილში არაა მონაცემები $k = 73$ მნიშვნელობისათვის. შესაბამისი მონაცემები მიღებულია წრფივი ინტერპოლაციით. როცა $P = 0{,}99$ ცხრილიდან ვპოულობთ ორ მნიშვნელობას

როცა $k_1 = 70$ მაშინ $t = 2{,}648$

როცა $k_2 = 80$ მაშინ $t = 2{,}639$

ამ მონაცემებით ვითვლით

როცა $k_1 = 73$ მაშინ $t = 2{,}648 - 0{,}3 \cdot 0{,}009 = 2{,}645$

როცა $k_2 = 80$ მაშინ $t = 2{,}648 - 0{,}6 \cdot 0{,}009 = 2{,}643$

2.2. გაზომილი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობის შეფასება

ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაღაც სიდიდის დამოუკიდებელი გაზომვის n შედეგი და დავუშვათ, რომ ეს $x_1, x_2, \cdots, x_n$ შდეგები არ შეიცავენ სისტემატუ და უხეშ ცდომილებებს, ანუ ყველა უხეში ცდომილება ამოღებულია და სისიტემატურ ცდომილებებზე შეყვანილია შესწორება. შეფასდეს გასაზომი a პარამეტრის ნამდვილი მნიშვნელობა ნიშნავს:

ა) გაზომვის შედეგებზე დაყრდნობილ მიეთითოს ისეთი ფუნქცია $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, რომელიც იძლევა საკმაოდ კარგ მიახლოებას a –თან (ასეთ ფუნქციას წერტილოვანი ან სხვანაირად $a-$ ს შეფასება ეწოდება);

ბ) ნაჩვენები იქნას ინტერვალის საზღვრები $(g - \varepsilon_1, g + \varepsilon_2)$, რმელიც მოცემული P ალბათობით დაფარავს a ნამდვილი სიდიდეს (ასეთ შეფასებას ნდობის შეფასება ეწოდება, ხოლო P ალბათობას – ნდობის ალბათობა ან შეფასების საიმედოობა, $(g - \varepsilon_1, g + \varepsilon_2)$-ეწოდება ნდობის ინტერვალი, ხოლო მის საზღვრებს – ნდობის საზღვრები).

იმისათვის, რომ მიღწეულ იქნას a ნამდვილ მნიშვნელობასთან საკმარისად კარგი მიახლოება, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ შეფასებას შეძლებისდაგვარად უნდა გააჩნდეს შემდეგი თვისებები:

1) ობიექტური. შეფასებას ეწოდება ობიექტური თუ მისი თეორიული საშუალო (მათემატიკური მოლოდინი) ემთხვევა a.

2) შემდგარი. შეფასებას ეწოდება შემდგარი თუ გაზომვების რიცხვის n უსასრულოდ გაზრდით ის ალბათურად მიისწრაფვის a-კენ.

3) ეფექტურობა. ობიექტურ შეფასებას ეწოდება ეფექტური თუ, გაზომვის შედეგების მიხედვით მას გააჩნია უმცირესი გაფანტვა a ობიექტურ შეფასებებს შორის.

წერტილოვანი შეფასებები. თუ a სიდიდის ყველა n გაზომვა ჩატარებულია ერთნაირი სიზუსტით (თანაბარი სიზუსტის გაზომვები), მაშინ ნამდვილი მნიშვნელობის შესაფასებლად გამოიყენება გაზომვის შედეგების საშუალო არითმეტიკული:

$$a \approx \bar{x} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (2.16)$$

ეს შედეგი ობიექტური და შემდგარია. თუ დამატებით დავუშვებთ, რომ გაზომვის ცდომილებები ემორჩილება ალბათობების განაწილების ნორმალურ კანონს, ეს შეფსება ეფექტურიცაა.

თუ გაზომვები არაა თანაბარი სიზუსტის, მაგრამ ცნობილია გაზომვის წონები, ანუ $p_1, p_2, \cdots, p_n$ რიცხვები, რომლებიც უკუპროპორციულია ცდომილებების დისპერსიის $\sigma_1^2, \sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}; \frac{1}{\sigma_2^2}; \cdots, \frac{1}{\sigma_n^2}$ მაშინ ნამდვილი a სიდიდის ნამდვილი ნიშვნელობის შესაფასებლად იყენებენ შეწონილ საშუალო არითმეტიკულ მნიშვნელობას

$$a \approx \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_k x_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_k} = \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_1} \quad (2.17)$$

ამ შეფასებას იგივე თვისება აქვს რაც (2.16). სასრგებლოა ყურადღება მიექცეს იმას, რომ შეწონილი არითმეტიკული მნიშვნელობა (2.17) დამოკიდებულია არა წონებზე $p_1, p_2, \cdots, p_n$ არამედ მხოლოდ მათ თანაფარდობაზე.

შევეხოთ თანაბარი სიზუსტის გაზომვების ნდობის შეფასებას. ქვემოთ მოყვანილი გასაზომი a სიდიდის ნამდვილი მნიშვლობის ნდობის შეფასება მოცემულია იმ დაშვებით, რომ გაზომვის შემთხვევითი მნიშვნელობები ემორჩილება ალბათობების განაწილების ნორმალურ კანონს. აქ განხილულია მხოლოდ სიმეტრიული ნდობის შეფასებები, რომლესაც გააჩნია შემდეგი უტოლობის სახე

$$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon$$

ან

$$|a - \bar{x}| < \varepsilon$$

სადაც $\bar{x}$ საშუალო არითმეტიკული მნიშვნელობაა.

ε სიდიდე განისაზღვრება მოცემული ნდობის ალბათობით (შეფასების საიმედოობა) P; ჩვეულებრივ საიმედოობა P აიღება ერთ-ერთი სამი დონიდან 0,95, 0,99, 0,999.

ნდობის შეფასება გაზომვის ცნობილი მნიშვნელობის შემთხვევაში. თუ წინასწარ ცნობილია საშუალო კვადრატული ცდომილება σ (ან სხვა რომელიმე მასთან დაკავშირებული სიზუსტის მახასიათებელი) მაშინ ნდობის შეფასებას (2.17) აქვს შემდეგი სახე

$$|a - \bar{x}| < t(P)\sigma/\sqrt{n} \qquad (2.18)$$

სადაც n გაზომვების რიცხვია, ხოლო $t(P)$ განისაძღვრება დასახული სანდოობის P ალბათობით პირობიდან

$$2\varphi(t) = P \quad (2.19)$$

ანუ მოიძებნება დანართის II ცხრილიდან ამრიგად აქ

$$\varepsilon = t(P)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

განვიხილოთ მაგალითი 1. ვთქვათ რაღაც სიდიდე გაზომილია 10 – ჯერ შედეგები მოცემულია ცხრილში 2.1, ამასთან $\sigma = 0{,}28$ და გვინდა შევაფასოთ გასაზომი a სიდიდის ნამდვილი მნიშნელობა საიმედოობით $\sigma = 0{,}99$.

ამოხსნა. დანართის II ცხრილიდან $P = 2\varphi(t) = 0.99$ მნიშვნელობისათვის ე.ი. $1 - P = 0{,}01$ - თვის ვპოულობთ $t = 2{,}576$. ცხრილის მონაცემების მიხედვით

ცხრილი 2.1. გაზომვის შედეგები

x	m
35,6	1
35,9	3
36,1	3
36,2	2
36,6	1
ჯამი	10

გ.28.

გათვლილი საშუალო მნიშვნელობა $\bar{x} = 36{,}06$ და შესაბამისად საიმედოობით 0,99 შეიძლება ჩავთვალთ, რომ

$$|a - \bar{x}| = |a - 36{,}06| < 2{,}576 \cdot \frac{0{,}28}{\sqrt{10}} = 0{,}23$$

ეს კი იმას ნიშნავს,რომ a სიდიდე განთავსებულია ინტერვალში

$$(36{,}06 - 0{,}23; 36{,}06 + 0{,}23) = (35{,}83; 36{,}29)$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც უცნობია საშუალო კვადრატული ცდომილება σ. ამ შემთხვევაში იყენებენ ემპირიულ სტანდარტს რომელიც

$$s = s^* \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.2\text{-}6)\ \ (2.20)$$

გამოიყენება σ პარამეტრის შესაფასებლად. ამასთან სანდოობის შეფასება იღებს სახეს

$$|a - \bar{x}| < t(P;k) \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (2.2\text{-}7)\ \ (2.21)$$

ან

$$|a - \bar{x}| < \ t(P;k) \frac{s^*}{\sqrt{k}} \quad (k = n - 1)$$

სადაც თანამამრავლი $t(P;k)$ დამოკიდებულია არამარტო ნდობის ალბათობაზე არამედ გაზომვების რაოდენობასთანაც. ეს პარამეტრი მოყვანილია დანართის IV ცხრილში, რომელიც შედგენილია ე.წ.სტიუდენტის განაწილების მიხედვით.

სტიუდენტის განაწილება დამოკიდებულია მხოლოდ ერთ პარამეტრზე k (თავისუფლების ხარისხი), რომელიც განხილულ ამოცანაში გაზომვების n რაოდენობასთან დაკავშირებულია თანაფარდობით $k = n - 1$.

მაგალითი 2. ვთქვათ მაგალით 1-ში უცნობია σ და გვინდა გასაზომი a სიდიდის მნიშვნელობა შევაფასოთ საიმედოობით $P = 0{,}99$.

ამოხსნა. მოყვანილი მონაცემების საშუალო არითმეტიკული $\bar{x} = 36{,}06$. ვიანგარიშოთ s^* ფორმულით

$$s^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2}$$

მივიღებთ $s^* = 0{,}2$. აღებული საიმედოობით $P = 0{,}99$, გაზომვების რაოდენობით $n = 10$, დანართის IV ცხრილიდან ვპოულობთ თანამამრავლს $t(0{,}99;\ 9)$ და ვღებულობთ ნამდვილი მნიშვნელობის a ნდობის შეფასებას შემდეგი სახით

$$|a - \bar{x}| = |a - 36{,}06| < 3{,}250\ \frac{0{,}25}{\sqrt{9}} = 0{,}27$$

ამრიგად საიმედოობით 0,99 შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ a სიდიდე მოქცეულია ინტერვალში$(36{,}06 - 0{,}27; 36{,}06 + 0{,}27) = (35{,}79; 36{,}33)$.

განვიხილოთ ნდობის შეფასება არათანაბარი სიზუსტის გაზომვებისათვის. როგორც ზემოთ მოყვანილ შემთხვევაში აქაც დავუშვათ, რომ გაზომვის თითოეული შედეგი შეიცავს მხოლოდ სისტემატურ ცდომილებებს, რომელიც ემორჩილება განაწილების რაღაც ნორმალურ კანონს.

ვთქვათ არათანაბარი სიზუსტის გაზომვის შედეგები $x_1, x_2, \cdots, x_n$ შეიძლება განვიხილოთ როგორც რაღაც თანაბარი სიზუსტის გაზომვების საშუალო მნიშვნელობები, ისე რომ გაზომვების თითოეულ სერიაში გაზომვის ცდომილებები ერთნაირია და ცნობილია გაზომვების რაოდენობა თითოეულ სერიაში $(m_1, m_2, \cdots, m)$ მაშინ a სიდიდის გაზომვის სანდოობის შეფასებას აქვს შემდეგი სახე

$$|a - \bar{x}| < t(P;k)\frac{s}{\sqrt{N}} \quad (2.2\text{-}10)\ \ (2.22)$$

სადაც

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \, , N = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$k = n - 1$ (თავისუფლების ხარისხის რაოდენობა), P- ნდობის ალბათობა; $t(P;k)$ თანამარავლი მნიშვნელობა აიღება დანართის IV ცხრილიდან.

შევეხოთ გაზომვათა აუცილებელი რაოდენობის დადგენის საკითხს. როგორც ზემოთ მივუთითეთ შემთხვევითი ცდომილების შესამცირებლად შესაძლებელია ორი ხერხის გამოყენება: გაზომვის სიზუსტის ამაღლება, ანუ σ შემცირება და გაზომვების რიცხვის გაზრდა, ანუ

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

თანაფარდობის გამოყენება. ჩავთავალოთ, რომ გაზომვის ტექნიკის გაუმჯობესების ყველა გზა გამოყენებულია. დავუშვათ, რომ ხელსაწყოს სიზუსტის კლასით და სხვა ანალოგიური გარემოებებით განპირობებული ცდომილებაა δ.

ცნობილია, რომ შემთხვევითი ცდომილების შემცირება მიზანშეწონილია მანამადე სანამ გაზომვის სრული ცდომილება მთლიანად არ განისაზღვრება სისტემატური ცდომილებით. ამისათვის საჭიროა, რომ ნდობის ინტერვალი, რომელიც შერჩეულია ნდობის არჩეული ინტერვალით, არსებითად ნაკლები იყოს სისტემატურ ცდომილებაზე, ანუ

$$\Delta x \ll \delta \quad (2.23)$$

ცხადია უნდა შევთანხმდეთ, თუ ნდობის რა ხარისხი და შემთხვევითი ცდომილების რა სიდიდე გვჭირდება, სხვანაირად Δx და δ რა თანაფარდობობებს ვთვლით დასაშვებად (2.23) პირობის შესაბამისად. ამ გარემოების მკაცრი შეფასება ძნელია, მაგრამ შეიძლება გამოვიდეთ იმ მოსაზრებიდან, რომ როგორც წესი 10%-ზე მეტი სიზუსტით გაზომვის აუცილებლობა არაა საჭირო ხოლმე. ეს იმას ნიშნავს, რომ როცა $\Delta x \leq \delta/10$, (2.23) პირობა შეიძლება შესრულებულად ჩავთვალოთ. პრაქტიკულად

ნაკლებად მკაცრი პირობითაც შეიძლება დავკმაყოფილდეთ $\Delta x \leq \delta/3$ ან თუნდაც $\Delta x \leq \delta/2$.

საიმედოობა α, რომლითაც გვინდა დავადგინოთ ნდობის ინტერვალი, უმრავლეს შემთხვევაში არ უნდა აღემატებოდეს 0.95, თუმცა ზოგჯერ საჭიროა α უფრო მაღალი მნიშვნელობებიც. გაზომვების საჭირო რაოდენობის გამოსათვლელად დანართში განთავსებულია IV ცხრილი. მოვიყვანოთ მისი გამოყენების მაგალითები.

1)ვთქვათ ვზომავთ ბირთვის დიამეტრს მიკრომეტრით რომლის ცდომილებაა 1 მკმ. ერთი გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილებააა 2.3 მკმ. რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ მივიღოთ არა უმეტეს 1.5-ზე მეტი ცდომილება საიმედოობით 0.95?

ვთქვათ $\Delta x = \delta/2 = 0.5$ მკმ; $S_n = 2.3$ მკმ, $\Delta x = 0.5/2.3$, $\delta = 0.22$. დანართის 4 ცხრილის სვეტში ვპოულობთ $\alpha = 0.95$; როცა $\varepsilon = 0.3$; $n = 46$ და $\varepsilon = 0.2$-თვის $n = 100$. შევადგინოთ შესაბამისი პროპორცია, ადვილად გამოვთვლით, რომ $\varepsilon = \Delta x/s = 0.22$ - თვის $n \approx 57$.

სხვანაირად, რომ ვთქვათ საჭიროა ჩავატაროთ 60 – მდე გაზომვა, იმისთვის, რომ შემთხვევითმა ცდომილებამ საერთო ცდომილება შეცვალოს არაუმეტეს 1.5 – ჯერ.

საინტერესოა რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ გაზომვის პირობები უფრო მკაცრი იყოს. კერძოდ შემთხვევითი და სისტემატური ცდომილებები დაახლოებით ტოლი იყოს. ამ შემთხვევისთვის ვუშვებთ $\delta = \Delta x = 0.45S$ და იმავე დანართის IV ცხრილიდან ვპოულობთ (როცა $\alpha = 0.95$) $n \approx 23$

ვხედავთ, რომ ორივე მაგალითში გაზომვების საჭირო რაოდენობა საკმაოდ დიდია მაგრამ შესრულებადი.

1) რაღაც გაზომვებისთვის ვარიაციის კოეფიციენტი w შეადგენს 1%. სისტემატური ცდომილება კი – $\delta = 0.1\%$, რამდენი გაზომვა უნდა ჩავატაროთ, რომ შემთხვევითმა ცდომილებამ გავლენა არ მოახდინოს?

ვინაიდან შემთხვევითი ცდომილებები ფარდობით ერთეულებშია მოცემული, სამართლიანია თანაფარდობა

$$\frac{\Delta x_{ფარდ}}{\omega}=\frac{\Delta x}{S}=\frac{0.05}{1}.$$

ცხრილიდან ვპოულობთ, რომ იმავე ნდობის ინტერვალისთვის $\alpha = 0.95$ და $\Delta x/S = 0.05$ – თვის $n = 1500$ (!)

პრაქტიკულად ამ რაოდენობის გაზომვების ჩატარება ძალიან ძნელია.

მოყვანილი მაგალითებიდან შეიძლება დავასკვნათ, რომ გაზომვების რაოდენობის გაზრდით შესაძლებელია ავიცილოთ შემთხვევითი ცდომილების გავლენა გაზომვის საბოლოო შედეგზე, მხოლოდ მაშინ, როდესაც საშუალო კვადრატული ცდომილება მხოლოდ რამოდენიმეჯერ აღემატება სისტემატურ ცდომილებას. რეალურად ეს შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\sigma \le 5\,\delta$. σ დიდი მნიშვნელობების დროს კი როგორც ეს 4 ცხრილიდან ჩანს, საჭიროა ასი, ათასი ზოგჯერ კი რამდენიმე ათასი გაზომვის ჩატარება. ამ შემთხვევაში საჭიროა რადიკალურად შეიცვალოს გაზომვის მეთოდიკა, რათა შემცირდეს შემთხვევითი ცდომილება.

2.3. გაზომვის სიზუსტის შეფასება

ვთქვათ გაზომვის ცდომილებები შემთხვევითია და განაწილებულია ნორმალური კანონით. გაზომვის სიხუსტის (ხელსაწყოს სიზუსტე) შესაფასებლად ავიღოთ ამ კანონის დისპერსია σ^2 ან საშუალო კვადრატული ცდომილება $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. ჩავთვალოთ, რომ გაზომვები დამოუკიდებელია და თანარწერტილოვანი (დისპერსია ერთნაირია).

დისპერსიის წერტილოვანი შეფასება.

ა) ვთქვათ ვზომავთ ცნობილი სიდიდის (ეტალონის) a პარამტერს (მაგ.სიგრძეს), მაშინ დისპერსიის ეფექტურ შეფასებად აიღება გაზომვის $x_1, x_2, \cdots, x_n$ შედეგების a-დან გადახრის საშუალო კვადრატი;

$$\sigma^2 \approx s_*^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 \quad (2.24)$$

ბ)როცა ვზომავთ უცნობი სიდიდის პარამეტრს, მაშინ დისპერსიის შესაფასებლად იყენებენ ემპირიულ დისპერსიას

$$\sigma^2 \approx s_*^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad (2.25)$$

სადაც $\bar{x}$ წარმოადგენს გაზომვის შედეგების საშუალო არითმეტიკულს

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

(2.25) შეფასება არის ობიექტური და შემდგარი, მაგრამ არ არის ეფექტური (ის მხოლოდ ასიმპტოტურად ეფექტურია, ანუ მისი გაბნევა მიისწრაფვის მინიმალურისაკენ, გაზომვათა n რაოდენობის უსასრულოდ გაზრდისას).

2.4. დისპერსიების შედარება

ხშირად, როდესაც გაზომვები ტარდება სხვადასხვა პირობებში (მაგ. ძველი ხელსაწყოთი და ახალი ხელსაწყოთი) საჭირო ხდება გაზომვის სიზუსტეების შედარება. ამ ამოცანის აქტუალობას განაპირობებს ის, რომ საშუალო კვადრატული ცდომილებების (2.25) ნდობის ინტერვალები საკმაოდ ფართოა.

ვთქვათ ჩატარებულია გაზოვათა ორი რიგი და მიღებულია ემპირიული დისპერსიები:

s_1^2 თავისუფლების ხარისხისათვის k_1

s_2^2 თავისუფლების ხარისხისათვის k_2

აქ ვუშვებთ, რომ $s_1^2 > s_2^2$.

იმის დასადგენად განსხვავება დისპერსიებს შორის შემთხვევითია თუ არაშემთხვევითი ქანიხილავენ დიდი დისპერსიის შეფარდებას მცირესთან

$$s_1^2/s_2^2 = F > 1 \quad (2.26)$$

შემდეგ შეარჩევენ დასკვნის საიმედოობას $P = 0{,}95$ ან $P = 0{,}99$ და დანართის VII ცრილიდან პოულობენ F კრიტიკულ მნიშვნელობას, რომლებიც შეესაბამება k_1 და k_2 თავისუფლების ხარისხებს.

თუ (2.26) თანაფარდობა გადააჭარბებს კრიტიკულს, თვლიან, რომ დისპერსიების სხვაობა არაა შემთხვევითი (მნიშვნელოვანია) P ალბათობით. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ გაზომვის ცდომილებები სხვადასხვაა გაზომვების სხვადასხვა სერიისათვის.

მაგალითი. ვთქვათ ძველ ხელსაწყოს, რომლითაც ჩავატარეთ 200 გაზომვა გააჩნია სიზუსტე, რომელიც განისაზღვრება ემპირიული დისპერსიით $s_1^2 = 3{,}82$. ახალმა ხელსაწყომ პირველი 15 გაზომვისას მოგვცა ემპირიული დისპერსია $s_2^2 = 2{,}00$. შეგვიძლია თუ არა, რომ ახალი ხელსაწყო მივიჩნიოთ უფრო ზუსტად ვიდრე ძველი?

ამოხსნა: დისპერსიების შედარება (2.26) ფორმულით გვაძლევს:

$F = s_1^2/s_2^2 = 1{,}91$, ამასთან თავისუფლების ხარისხები შესაბამისად ტოლია $k_1 = 200 - 1 = 199$ და $k_2 = 15 - 1 = 14$.

ვინაიდან მიღებული ფარდობა $P = 0{,}95$ საიმედოობისას, დანართის VII ცხრილიდან იძლევა $F = 2{,}13$ მნიშვნელობას, ეს არ გვაძლევს საშუალებას დავასკვნათ, რომ ახალი ხელსაწყო უფრო ზუსტია ძველზე.

2.5. განაწილების ნორმალურობის შემოწმება

ზოგჯერ ჩნდება ეჭვი იმის თაობაზე არის თუ არა შემთხვევითი ცდომილებების განაწილება ნორმალური, ამ შემთხვევაში საჭირო ხდება გაზომვათა დიდი რაოდენობის ჩატარება და ზოგიერთი კრიტერიუმის გამოყენება.

ვთქვათ მოცემულია რაღაც რაოდენობის სისტემატური ცდომილებებისაგან თავისუფალი გაზომვების შედეგები. მონაცემებს დაალაგებენ ინტერვალებად ისე, რომ მათ მთლიანად დაფარონ ღერძი $(-\infty; +\infty)$ ისე, რომ მონაცემთა რაოდენობა თითოეულ მათგანში საკმაოდ ბევრი იყოს (ყოველ შემთხვევაში არანაკლებ ხუთისა, უმჯობესია ათი). თითოეული ინტერვალისათვის $(x_{i-1} - x_i)$ დათვლიან ამ ინტერვალში მოხვედრილი გაზომვათა შედეგების რაოდენობას. შემდეგ გამოთვლიან ამ ინტერვალში ალბათობის ნორმალური განაწილების კანონით გაზომვის შედეგის მოხვედრის ალბათობას:

$$P_i = \varphi\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right) - \varphi\left(\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{s}\right) \quad (2.27)$$

სადაც $\bar{x}$ გაზომვის შედეგების საშუალო არითმეტიკულია, s ემპირიული სტანდარტია (საშუალო კვადრატული ცდომილება), φ ალბათობის ინტეგრალია,

რომელიც წარმოდგენილია დანართის ცხრილებით I და II. ბოლოს გამოთვლიან ჯამს

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (2.28)$$

სადაც l ინტერვალების რაოდენობაა $(-\infty, x_1), (x_1 - x_2), \cdots, (x_{i-1}, \infty), n$ - ყველა გაზომვათა რაოდენობა $(n = m_1 + m_2 + \cdots + m_i)$.

თუ ჯამი (2.28) χ^2 კრიტიკულზე მეტი აღმოჩნდა დანართის IX ცხრილის რაღაც ნდობის P ინტერვალისა და თავისუფლების ხარისხისათვის $k = l - 3$, მაშინ P ტოლი საიმედოობით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ შემთხვევითი ცდომილებების ალბათობის განაწილება განსხვავდება ნორმალურისაგან. წინააღმდეგ შემთხვევაში ასეთი დასკვნის გაკეთების უფლება არა გვაქვს.

შევნიშნოთ χ^2 კრიტერიუმის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი თვისება: თუ განაწილება ნორმალურისაგან განსხვავებულია, მაშინ გაზომვათა საკმაოდ დიდი რიცხვისათვის (2.28) ჯამი გადააჭარბებს შესაბამის კრიტიკულ მნიშვნელობას. ამიტომ თუ გაზომვათა მოცემული ჩატარებული რაოდენობისათვის χ^2 მოგვცა მცირე საიმედოობა, მაგრამ ეჭვი ნორმალური განაწილების შესახებ დარჩა, საჭიროა გაზომვათა რაოდენობა გაიზარდოს რამოდენიმეჯერ.

ზემოთ ნახსენები თავისუფლების ხარისხები $k = l - 3$ ეხება მხოლოდ იმ შემთხვევებს, როდესაც როცა ნორმალური განაწილების ორივე პარამეტრიც დადგენილია გაზომვების შედეგების მიხედვით, ანუ a და σ ზუსტი მნიშნელობების ნაცვლად გამოიყენება მათი ემპირიული მნიშვნელობები $\bar{x}$ და s. თუ a მნიშვნელობა ზუსტადაა ცნობილი (მაგალითად ექტალონის გაზომვისას), მაშინ თავისუფლების ხარისხი $k = l - 2$, თუ ცნობილია ორივე პარამეტრი a და σ, მაშუნ თავისუფლების ხარისხი $k = l - 1$. პრაქტიკაში ეს შემთხვევა იშვიათად გვხვდება და ამიტომ თავისუფლების არანაკლებ 5 ხარისხის მისაღებადინტერვათა რაოდენობა უნდა იყოს არანაკლებ 8.

ბოლოს შევნიშნოთ, რომ χ^2 კრიტერიუმის ეფექტურობა გაიზრდება, თუ თითოეულ გამოყოფილ ინტერვალში მოხვდება მონაცემთა ტოლი რაოდენობა. ს გათვალისწინებული უნდა იყოს საწყისი მასალის დალაგებისას.

მაგალითი. განვიხილოთ χ^2 კრიტერიუმის გამოყენებისათვის საჭირო ალბათობების გაამოთვლა. ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაღაც სიდიდის გაზომვები, რომლის საშუალო მნიშვნელობაა $\bar{x} = 8{,}63$ და $s = 0{,}127$ (გავიხსენოთ, რომ s არის ემპირიული სტანდარტი და ის გამოითვლება ფორმულით $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$). მიღებული შედეგები მოყვანილია 2.2 ცხრილის პირველ ორ სვეტში. კიდურა ინტერვალებად აღებულია უსასრულო სიდიდეები.

ცხრილი 2.2. გაზომვის შედგები

ინტერვალ-ლები $(x_{i-1}; x_i)$	m_i	t_i	$\varphi(t_i)$	p_i	$m_i - np_i$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
$(-\infty;\ 8{,}425)$	7	$-1{,}614$	$-0{,}4467$	0,0533	1,67	0,523
(8,425; 8,475)	5	$-1{,}220$	$-0{,}3888$	0,0579	$-0{,}79$	0,108
(8,475; 8,525)	8	$-0{,}827$	$-0{,}2959$	0,0929	$-1{,}29$	0,179
(8,525; 8,575)	10	$-0{,}433$	$-0{,}1675$	0,1283	$-2{,}83$	0,624
(8,575; 8,625)	18	$-0{,}039$	$-0{,}0165$	0,1520	2,80	0,516
(8,625; 8,675)	17	0,354	0,1383	0,1539	1,61	0,168
(8,675; 8,725)	12	0,748	0,2728	0,1345	$-1{,}45$	0,157
(8,725; 8,775)	9	1,142	0,3733	0,1005	-1.05	0,110
(8,775; 8,825)	7	1,536	0,4377	0,0644	0,56	0,046
$(8{,}825;\ +\infty)$	7	$+\infty$	0,5000	0,0623	0,77	0,095
ჯამი	$n = 100$	-	-	1,0000	-	$\chi^2 = 2{,}528$

მესამე სვეტში ნაანგარიშებია თანაფარდობა

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{x_i - 0{,}83}{0{,}127}$$

მარჯვენა ბოლოებისათვის, მაგალითად

$$t_1 = \frac{8{,}425 - 8{,}63}{0{,}127} = -1{,}614.$$

მეოთხე სვეტში მოყვანილია ალბათობის ინტეგრალის შესაბამისი მნიშვნელობები $\varphi(t_i)$ (დანართის ცხრილი I). $\varphi(t_i)$ მნიშვნელობების მიხედვით

მეხუთე სვეტში გამოთვლილია p_i ალბათობები როგორც $\varphi(t)$ შესაბამისი სხვაობები:

$$p_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1});$$

მაგალითად

$$p_2 = -0{,}3888 — (-0{,}4467) = 0{,}0579$$

ამასთან p_1 გათვლისას გათვალისწინებულია, რომ $\varphi(-\infty) = -0{,}5$. m_i არის თითოეულ ინტერვალში მონაცემთა რაოდენობა. ბოლო სვეტის ჯამი იძლევა საძიებელ სიდიდეს $\chi^2 = 2{,}528$. ამ მნიშვნელობის შედარება კრიტიკულ მნიშვნელობებთან თავისუფლების ხარისხისათვის $k = 10 - 3 = 7$ გვიჩვენებს, რომ მოცემული მონაცემების ნორმალურ განაწილებაში ეჭვის შეტანის საფუძველი არ არსებობს (ეჭვის შეტანის საფუძველი იარსებებდა თუ X^2 გათვლილი მნიშვნელობა 5-6 –ჯერ მაინც გადააჭარბებდა კრიტიკულს).

გაზომვათა შემთხვევითი ცდომილების გამოსავლენად საჭიროა გაზომვები ჩავატაროთ რამოდენიმეჯერ. თუ თითოეული გაზომვა მოგვცემს ცალკეული გაზომვებისგან განსხვავებულ მნიშვნელობებს, საქმე გვაქვს სიტუაციასთან, როდესაც შემთხვევითი ცდომილება თამაშობს არსებით როლს.

გასაზომი სიდიდის ყველაზე ალბათურ სიდიდედ მიიღება ყველა გაზომილი სიდიდის საშუალო არითმეტიკული $\bar{x}$ (გავიხსენოთ, რომ საშუალო არითმეტიკულის მისაღებად უნდა შევკრიბოთ ყველა გაზომილი სიდიდე და გავყოთ მათ რაოდენობაზე).

სანამ ვუპასუხებდეთ კითხვას თუ რამდენი გაზომვის ჩატარებაა აუცილებელი, დავუშვათ, რომ ჩავატარეთ n რაოდენობის გაზომვა, რომელთაგან თითოეული ჩატარებულია ერთი და იმავე მეთოდით. ასეთ გაზომვებს თანაბარ სიზუსტის ეწოდება.

ფიზიკური სიდიდიდეების გაზომვის მონაცემების ანალიზისთვის იყენებენ გრაფიკულ მასალას, რომელსაც ჰოსტოგრამა ეწოდება. მისი აგების პროცედურის ილუსტრაციისთვის განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ რაღაც დეტალის დიამეტრი გავზომეთ 125 – ჯერ, გაზომვისას უდიდესი მნიშვნელობა იყო 10.7 მმ, ხოლო უმცირესი – 9.0 მმ. ჰისტოგრამის ასაგებად უნდა ჩავატაროთ შემდეგი ოპერაციები:

1)განვსაზღვროთ ჩატარებული ოპერაციების რაოდენობა N, ჩვენს შემთხვევაში $N = 125$;

2)განვსაზღვროთ ინტერვალი გაზომილი დიამეტრის მინიმალურ და მაქსიმალურ სიდიდეებს შორის. ჩვენს შემთხვევაში $R = 10{,}7 - 9.0$ მმ $= 1.7$ მმ;

3)მონაცემების რაოდენობის მიხედვით მთელი ინტერვალი დავყოთ თანაბარ კლასებად C. კლასების საჭირო რაოდენობა C შეიძლება შევარჩიოთ 2.3 ცხრილიდან. ჩვენს შემთხვევაში $N = 125$ - თვის კლასების რაოდენობა იცვლება 7 – დან 12 –მდე. სიმარტივისათვის ავიღოთ $C = 10$

ცხრილი 2.3. ჰისტოგრამების კლასების რაოდენობა

მონაცემთა რაოდენობა (წერტილები)	კლასების რაოდენობა
50 –ზე ნაკლები	5 - 7
50 – 100	6 – 10
100 – 250	7 – 12
50-ზე მეტი	10 - 20

ვთქვათ გაზომვების შედეგად მივიღეთ შემდეგი მონაცემები, რომლებიც 2.4 ცხრილშია მოცემული.

4)განვსაზღვროთ თითოეული კლასის სიგანე, რისთვისაც ვისარგებლოთ ფორმულით $H = R/C = 1.7/10 = 0{,}17 \quad = 0.2$ მმ. ფორმულიდან ჩანს, რომ მოცემული კლასისთვის სიგანე დამრგვალებულია 0.2 – მდე. კლასის სიგანე ყოველთვის უნდა დამრგვალდეს ათობითი ნიშნის მეტ სიდიდემდე ვიდრე ეს გვაქვს გაზომვებში. ჩვენს შემთხვევაში, როგორც ეს ცხრილიდან ჩანს კლასის სიგანე დამრგვალებულია მძიმის შემდეგ პირველ ათობით ნიშნამდე;

5) დავადგინოთ თითოეული კლასის ზედა და ქვედა საზღვრები. ამისათვის ჯერ უნდა ჩავთვალოთ, რომ ყველა მონაცემის ქვედა საზღვარი – ესაა პირველი კლასის ქვედა საზღვარი, მაშინ ამ კლასის ზედა საზღვარი მიიღება მისთვის კლასის სიგანისიცვლება 9.0 – დან 9.2 – მდე. შემდეგი კლასი

იწყება 9.2 – დან და მთავრდება 9.4 – ით და ა.შ. უნდა გვახსოვდეს, რომ კლასის ქვედა საზღვარი ეკუთვნის მოცემულ კლსს, ანუ კლასის ქვედა

ცხრილი2.4. დეტალის დიამეტრის გაზომვის შედეგები

№	d,∂∂	№	d,∂∂	№	d,∂∂	№	d,∂∂	№	d,∂∂
1	9,5	26	9,5	51	10,2	76	9,9	101	9,7
2	9,6	27	9,6	52	9,6	77	9,3	102	9,9
3	9,7	28	9,1	53	10,2	78	9,7	103	9,8
4	9,4	29	9,9	54	10,1	79	10,0	104	10,0
5	9,5	30	10,0	55	9,3	80	9,4	105	9,9
6	9,0	31	9,1	56	9,7	81	9,8	106	9,9
7	9,5	32	9,5	57	10,5	82	10,0	107	9,7
8	9,6	33	9,2	58	9,5	83	9,5	108	9,9
9	9,3	34	9,5	59	10,2	84	9,9	109	10,0
10	9,5	35	9,2	60	9,8	85	9,6	110	9,8
11	9,5	36	9,6	61	9,3	86	9,9	111	10,6
12	9,5	37	9,7	62	9,6	87	9,3	112	10,0
13	9,6	38	9,5	63	9,4	88	9,9	113	9,8
14	9,6	39	9,7	64	10,1	89	9,9	114	10,0
15	9,1	40	9,8	65	10,2	90	9,7	115	9,7
16	9,5	41	9,4	66	9,6	91	10,3	116	10,5
17	9,8	42	9,7	67	9,7	92	9,4	117	9,8
18	9,8	43	9,5	68	9,8	93	9,9	118	10,1
19	9,1	44	9,7	69	9,4	94	10,0	119	9,7
20	9,1	45	9,8	70	10,2	95	10,6	120	10,4
21	9,1	46	9,4	71	9,4	96	9,3	121	9,8
22	9,5	47	9,3	72	9,3	97	9,3	122	9,7
23	9,6	48	9,7	73	10,1	98	10,6	123	9,9
24	9,7	49	10,1	74	10,6	99	10,0	124	9,9
25	9,2	50	9,8	75	9,3	100	9,4	125	9,7

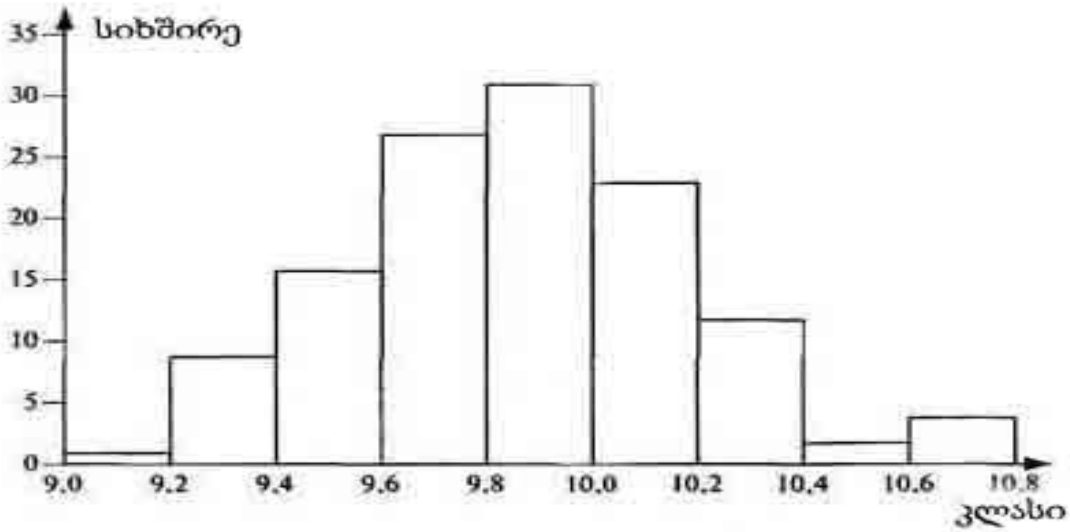
საზღვარს მიეკუთვნება მნიშვნელობები, რომლებიც მეტია ან ტოლი (≥) ქვედა საზღვრის მნიშვნელობის. კლასის ზედა საზღვარი კი მას არ მიეკუთვნება, ანუ მას მიეკუთვნება ზედა საზღვრისგან მკაცრად ნაკლები (<) მნიშვნელობა. ჩვენს შემთხვევაში 9.2 მმ – ის ტოლი სასაზღვრო მნიშვნელობა მიეკუთვნება მეორე კლასს და არა პირველს.

6)ჰისტოგრამის აგების გასამარტივებლად ყველა მონაცემი უნდა შევიყვანოთ ცხრილში, როგორც ეს ქვემოთაა მოყვანილი

ცხრილი 2.5. ჰისტოგრამის გამარტივებულად ასაგები ცხრილი

კლასი	ქვედა მნიშვნელობა	ზედა მნიშვნელობა	სიხშირე	სულ
1	9.0		/	1
2	9.2		///// ////	9
3	9.4		///// ///// ///// /	16
4	9.6		///// ///// ///// ///// //	27
5	9.8		///// ///// ///// ///// ///// ///// ///// /	31
6	10.0		///// ///// ///// ///// ///	23
7	10.2		///// ///// //	12
8	10.4		//	2
9	10.6		///	4
10	10.8			0

7) ჰორიზონტალურ ღერძზე გადავზომოთ კლასები, ხოლო ვერტიკალურზე -სიხშირეები. სიხშირეების განაწილება ნაჩვენებია სვეტებით



ნახ.2.1. ჰისტოგრამა

ჰისტოგრამების ფორმა გვიჩვენებს თუ რამდენად თანაბრადაა განაწილებული მონაცემები შუა ნაწილის მიმართ. ჰისტოგრამას სიმეტრიული ეწოდება, თუ შუა ნაწილი მას ორ მიახლოებით თანაბარ ნაწილად ჰყოფს, როგორც ეს ნახაზზეა მოყვნილი. ასიმეტრიული ჰისტოგრამის შემთხვევაში ცხადია შუა ნაწილის მიმართ სიმეტრია დარღვეულია.

მონაცემების ამ რიგს შერჩევა ეწოდება და ის საშუალებას გვაძლევს შევაფასოთ გაზომვის შედეგები. ასეთი შეფასების სიდიდეა $\bar{x}$, მაგრამ ის არ წარმოადგენს გასაზომი სიდიდის ნამდვილ მნიშვნელობას, საჭიროა შეფასდეს მისი ცდომილება. დავუშვათ შევაფასეთ ცდომილების სიდიდე Δx . მაშინ გაზომვის შედეგი შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (2.29)$$

ვინაიდან გაზომვის $\bar{x}$ და ცდომილების Δx შეფასებითი სიდიდეები ზუსტი არაა, (2.29) გაზომვის სიდიდის ჩანაწერს უნდა მიეთითოს მისი საიმედოობა P . საიმედოობის ან სანდოობის ალბათობის ქვეშ იგულისხმება ალბათობა იმისა, რომ გასაზომი სიდიდის ნამდვილი მნიშვნელობა მოთავსებულია (2) ფორმულაში მითითებულ ინტერვალში, რომელსაც ნდობის

ინტერვალი ეწოდება. მაგალითად, ვთქვათ გავზომეთ რაღაც ღეროს სიგრძე და საბოლოო შედეგი ასე ჩავწერეთ

$$l = 8.34 \pm 0.02 \text{ მმ}, \ (P = 0.95)$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ 100 შანსიდან 95 –ში გაზომილი ღეროს სიგრძის ნამდვილი მნიშვნელობა მოქცეულია შუალედში 8.32 – დან 8.36 – მდე. ამრიგად ამოცანა იმაში მდგომარეობს, რომ (2) შერჩევის მეშვეობით მოვძებნოთ გაზომვების შედეგების შეფასება $\bar{x}$, მისი ცდომილება Δx და საიმედობა.

ეს ამოცანა შეიძლება გადაწყდეს ალბათობის თეორიისა და მათემატიკური სტატისტიკის მეთოდებით.

შემთხვევითი უწყვეტი სიდიდეების განაწილების ყველაზე გავრცელებული კანონია ნორმალური განაწილების კანონი. შემთხვევითი სიდიდე განაწილებულია ნორმალური კანონით თუ თუ მისი ალბათობის სიმკვრივეს გააჩნია შემდეგი სახე:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

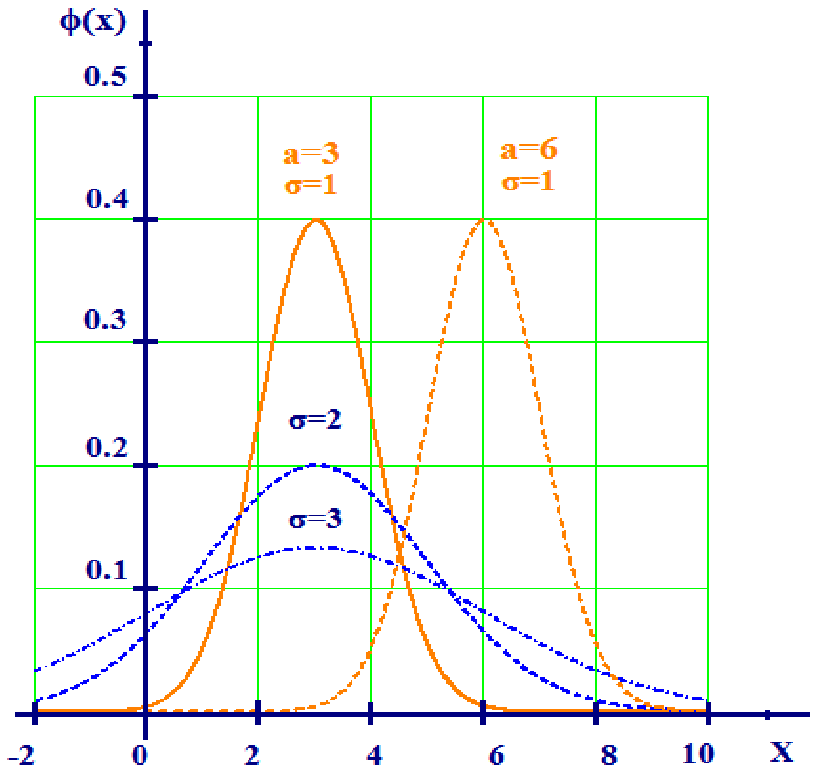
სადაც a შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური მოლოდინია, ხოლო σ - საშუალო კვადრატული გადახრა.

ალბათობის სიმკვრივის ნორმალური განაწილების გრაფიკი სიმეტრიულია $x = a$ წრფის მიმართ, ე.ი. მათემატიკური მოლოდინის x-ის. ამრიგად თუ $x = a$, მრუდს გააჩნია მაქსიმუმი, რომელიც ტოლია

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,3989}{\sigma}.$$

მათემატიკური მოლოდინის გაზრდისას წირი წაინაცვლებს x ღერძის გასწვრივ. ქვემოთ მოყვანილი ნახ.2.2 – დან ჩანს, რომ როდესაც $x = 3$, წირს გააჩნია მაქსიმუმი, ვინაიდან მათემატიკური მოლოდინი 3 – ის ტოლია. თუ მათემატიკური მოლოდინი მიიღებს სხვა მნიშვნელობას, მაგალითად $x = 6$ მაშინ

წირს ექნება მაქსიმუმი როცა $x = 6$. თუ ვილაპარაკებთ საშუალო კვადრატულ გადახრაზე, როგორც გრაფიკიდან ჩანს, რომ რაც მეტია საშუალო კვადრატული გადახრა მით უფრო ნაკლებია ალბათობის სიმკვრივის მაქსიმალური მნიშვნელობა.



ნახ.2.2. ალბათობის სიმკვრივის ნორმალური განაწილება

ზოგჯერ ჰიპოთეზა ნორმალური განაწილების შესახებ ეწინააღმდეგება ექსპერიმენტალურ მონაცემებს. მაგრამ ზოგჯერ შესაძლებელია ექსპერიმენტალური X_i მონაცემები გარდაიქმნას ისე, რომ გარდაქმნილი სიდიდეები $Y_i(X_i)$ შეიძლება დაემორჩილნონ ნორმალური განაწილების კანონს.

მაგალითად ხშირად გვხვდება შემთხვევები, როდესაც ნორმალურ განაწილებას ემორჩილება არა თვით გაზომვის შედეგები არამედ მათი ლოგარითმები. ეს ხდება მაშინ როდესაც ის ფაქტორები, რომლებიც ამახინჯებენ გაზომვის შედეგებს, იწვევენ ეფექტებს, რომლებიც პროპორციულია თვით გაზომვის შედეგების (ანუ როდესაც საშუალოდ უცვლელია არა გაზომვის აბსოლუტური ცდომილებები, არამედ ფარდობითი ცდომილებები). ამ დროს ამბობენ, რომ თვით გაზომვის შედეგი X ემორჩილება ლოგარითმულ ნორმალურ განაწილებას.

თუ შემთხვევითი სიდიდის ლოგარითმი განაწილებულია ნორმალურად, მაშინ ამბობენ, რომ შემთხვევითი სიდიდე ხასიათდება ნორმალური

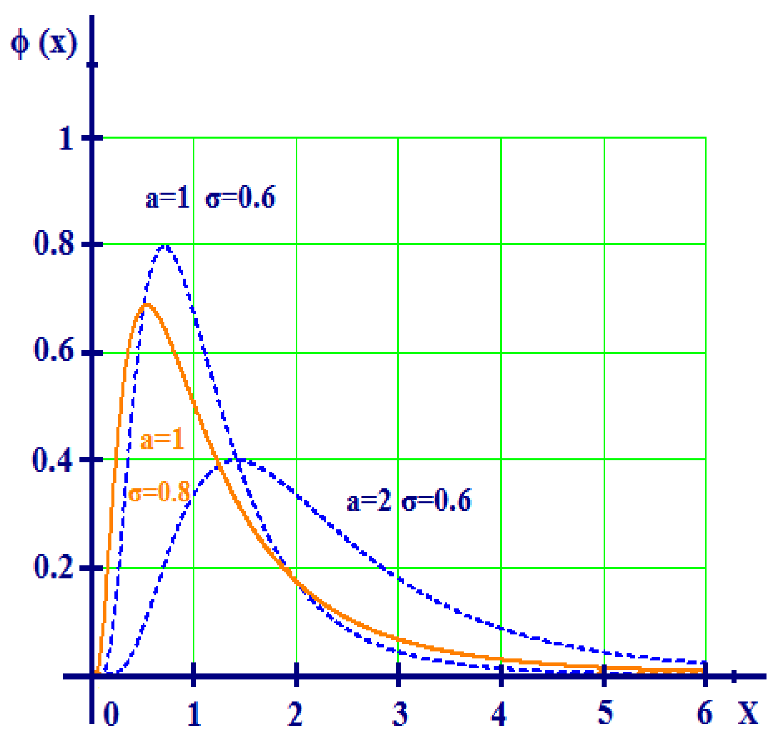
ლოგარითმული განაწილებით. ლოგარითმულად ნორმალურად განაწილების ფუნქციას გააჩნია შემდეგი სახე:

$$P(Lnx) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Lnx} e^{-\frac{(Lnx - Lna)^2}{2\sigma^2}} d(Lnx)$$

ლოგარითმული ნორმალური განაწილების ალბათური სიმკვრივის განაწილების ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(Ln(x) - Lna)^2}{2\sigma^2}}$$

ქვემოთ მოყვანილი ნორმალური ლოგარითმული განაწილების მრუდიდან (ნახ. 2.3) ჩანს, რომ რაც ნაკლებია σ და მეტია მათემატიკური მოლოდინი a, მით უფრო მრუდი ნაკლებად ციცაბოა და მიისწრაფის სიმეტრიისაკენ. მოცემული კანონი ხშირად გამოიყენება ხელსაწყოს ცვეთის, საბანკო შემოსავლების და სხვა ამოცანების აღწერისათვის.



ნახ.2.3. ალბათობის სიმკვრივის ნორმალური ლოგარითმული განაწილება

თავი III

ემპირიული ფორმულების პარამეტრების დადგენა

3.1. უმცირესი კვადრატების მეთოდი

y სიდიდის სხვა x სიდიდისაგან ექსპერიმენტული ფუნქციონალური დამოკიდებულების შესასწავლად აწარმოებენ y სიდიდის გაზომვას x სიდიდის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. შედეგი შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილის (ცხრილი 3.1) ან გრაფიკის სახით.

ცხრილი 3.1

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_N
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	$\cdots$	y_N

ამოცანა მდგომარეობს საძებნი ფუნქციონალური დამოკიდებულების ანალიზურ წარმოდგენაში, ანუ იმ ფორმულის მოძებნაში, რომელიც აღწერს ექსპერიმენტის შედეგებს. ამოცანის თავისებურება იმაშია, რომ შემთხვევითი ცდომილებების არსებობის გამო შეუძლებელია ისეთი ფორმულის მოძებნა, რომელიც ზუსტად აღწერს ექსპერიმენტის შედეგებს. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ საძებნი ფუნქციის გრაფიკი ზუსტად ვერ გაივლის ყველა ექსპერიმენტულ წერტილზე.

ემპირიულ ფორმულებს ჩვეულებრივ ირჩევენ გარკვეული ტიპის ფორმულებიდან, მაგალითად

$$y = ax + b,\ \ y = ae^{bx} + c,\ \ y = a + h\sin(\omega x + \varphi), \ldots$$

სხვა სიტყვებით, ამოცანა მდგომარეობს $a,\ b,\ c, \cdots$ პარამეტრების მოძებნაში იმ ფორმულებში, რომლელთა სახეც გარკვეული მოსაზრებით წინასწარ ცნობილია.

აღვნიშნოთ არჩეული ფუნქციონალური დამოკიდებულება შემდეგნაირად

$$y = f(x;\ a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

ამ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ პარამეტრების დადგენა ფუნქციის ემპირიული მნიშვნელობებით $y_1, y_2, \cdots, y_N$ შეუძლებელია, ვინაიდან ისინი შეიცავენ შემთხვევით ცდომილებებს. ლაპარაკია მხოლოდ საძებნი პარამეტრების მხოლოდ "საკმაოდ კარგი" მნიშვნელობების შერჩევაზე. უმცირესი კვადრატების მეთოდი სწორედ ასეთი $a_0, a_1, \cdots, a_n$ პარამეტრების შერჩევის შესაძლებლობას იძლევა. ამ

დროს იგულისხმება, რომ ფუნქციის $y_1, y_2, \cdots, y_N$ მნიშვნელობები გაზომილია ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად და გაზომვის ცდომილებები ემორჩილება ალბათობების განაწილების ნორმალურ კანონს. თუ ფუნქციის ყველა მნიშვნელობა $y_1, y_2, \cdots, y_N$ გაზომილია ერთნაირი სიზუსტით, მაშინ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ პარამეტრების შეფასება ხდება იმ პირობით, რომ y-ის გაზომილი მნიშვნელობების გაანგარიშებული $f(x;\, a_0, a_1, \cdots, a_n)$ მნიშვნელობებიდან გადახრის კვადრატების ჯამი მინიმალური უნდა იყოს, ანუ სიდიდემ

$$s = \sum_{k=1}^{N} [y_k - f(x;\, a_0, a_1, \cdots, a_n)]^2$$

უნდა მიიღოს მინიმალური მნიშვნელობა.

განვიხილოთ უმცირესი კვადრატების მეთოდი კონკრეტულ მაგალითებზე. 3.2 ცხრილში მოყვანილია რაიმე წინააღმდეგობაში ტყვიის შეღწევის სიღრმის მნიშვნელობები, როგორც მისი ენერგიის ფუნქცია (ნდობის ინტერვალები მოცემული არაა. E და l მოცემულია პირობით ერთეულებში) ეს წერტილები დატანილია გრაფიკზე ნახ. 19 – ზე.

ცხრილი 3.2. ტყვიის წინაღობაში შეღწევის სიღრმე

გაზომვის ნომერი	E	l
1	41	4
2	50	8
3	81	10
4	104	14
5	120	15
6	139	20
7	154	19
8	180	23
9	208	26
10	241	30
11	250	31
12	269	36
13	301	37

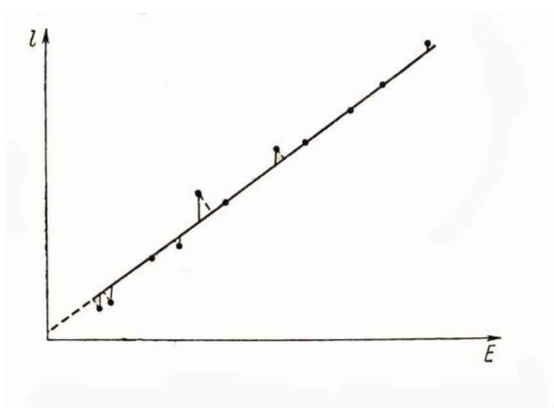
თეორიული მოსაზრების საფუძველზე შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ წინააღმდეგობაში ტყვიის შეღწევის სიღრმე პირდაპირპროპორციულია მისი ენერგიის. ამიტომ უნდა ვეძებოთ არა რაღაც ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ წერტილებს არამედ წრფე, რომელიც ყველაზე ნაკლებადაა გადახრილი ამ მონაცემებიდან. საძებნ წრფეს აქვს სახე

$$y = kx + b$$

k და b კოეფიციენტები საუკეთესო მიახლოებით უნდა იყოს შერჩეული. უმცირესი კვადრატების მეთოდით წრფის საპოვნელად უნდა მოვიქცეთ ასე: გავატაროთ წერტილების y_i ორდინატები საძებნი წრფის გადაკვეთამდე (ნახ.3.1). ამ ორდინატების მნიშვნელობები იქნება $(ax_i + b)$, მანძილი ორდინატის მიხედვით $x_i y_i$ წერტილიდან წრფემდე იქნება ($ax_i + b - y_i$). დავუშვათ ეს წრფე საუკეთესოა, თუ ყველა ასეთი დაშორების კვადრატების ჯამი იქნება მინიმალური. ასეთი ჯამის მინიმუმის პოვნა ხდება დიფერენციალური აღრიცხვის წესებით.

k და b კოეფიციენტების საპოვნელად უნდა მოვძებნოთ შემდეგი ჯამის მინიმუმი $\sum_i^n (ax_i + b - y_i)^2$, ამისთვის გავუტოლოთ ნულს ამ ჯამის წარმოებულები k და b პარამეტრებით. მივიღებთ:

$$\frac{d}{dk} = \sum_i^n (ax_i + b - y_i)^2 = 0$$



ნახ.3.1. უმცირესი კვადრატების მეთოდისთვის

$$\frac{d}{db} = \sum_{i}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 = 0$$

აქედან მარტივად მივიღებთ

$$nk + b\sum x_i - \sum y_i = 0$$

$$k\sum x_i + b\sum x_i^2 - \sum x_i y_i = 0$$

განტოლებათა ასეთ სისტემას ნორმალური ეწოდება და ადვილად ამოიხსნება k და b მიმართ. ამონახსნს აქვს სახე

$$k = \frac{n\sum_i^n x_i y_i - \sum_i^n x_i - \sum_i^n y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{n\sum_i^n x_i^2 \sum_i^n y_i^2 - \sum_i^n x_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n x_i y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

აქ ყველგან n დაკვირვებათა რაოდენობაა. აჯამვა ხდება ყველა წერტილის მიხედვით. 11 ცხრილით რიცხობრივი მონაცემების ჩასმა ჩვენს შემთხვევაში გვაძლევს $k = 0.124, b - 0.7$ და საძებნი წრფის განტოლება იქნება

$$y = 0.124x + 0.7$$

შევნიშნოთ, რომ თუ ტყვიის ენერგია ნულის ტოლია, მაშინ ის საერთოდ ვერ შედის წინააღმდეგობაში. შესაბამისად უფრო სწორი იქნებოდა თუ წრფის განტოლებას მოვძებნიდით შემდეგი სახით

$$y = kx$$

მაგრამ გაზომილი ინტერვალის შიგნით მოძებნილი წრფე უკეთესად აკმაყოფილებს ექსპერიმენულ წერტილებს, ვიდრე წრფე, რომელიც გადის კოორდინატთა სათავეზე. თეორია საშუალებას იძლევა ასევე გამოვთვალოთ წრფიდან წერტილების გადახრის დისპერსია და k და b კოეფიციეტების დისპერსია. თუ S_0^2 - წერტილების დისპერსიაა, ხოლო S_k^2 და S_b^2 კი k და b კოეფიციენტების დისპერსია, მაშინ

$$S_0^2 = \frac{\sum_i^n y_i^2}{(n-2)} - \frac{(\sum_i^n y_i)^2}{n(n-2)} - \frac{(n\sum_1^n x_i y_i)^2}{\left|n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2\right|(n-2)n}$$

$$S_k^2 = \frac{S_0^2 n}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{S_0^2 \sum_i^n x_i^2}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

ჩვენს შემთხვევაში ეს იძლევა $S_k = 4 \cdot 10^{-3}$ და $S_k = 0{,}7$.

ხაზი უნდა გავუსვათ იმ გარემოებას, რომ უმცირესი კვადრატების მეთოდი არ იძლევა საშუალებას, ვუპასუხოთ კითხვას რა სახის ფუნქციები იძლევიან ექსპერიმენტული მონაცემების უკეთეს აპროქსიმაციას.

მაიტერპოლირებელი ფუნქციების სახეები მოცემული უნდა იყოს რაღაც ფიზიკური მოსაზრებების საფუძველზე. უმცირესი კვადრატების მეთოდი მხოლოდ იმის საშუალება იძლევა შევარჩიოთ თუ რომელი წრფე, ექსპონენტა ან პარაბოლა წარმოადგენს უკეთეს წრფეს, ექსპონენტას თუ პარაბოლას.

ზოგადად, რომ ვთქვათ შეიძლება ვამტკიცოთ, რომ რაც მეტ ასარჩევ პარამეტრებს შეიცავენ მაიტერპოლირებელი ფუნქციები მით უფრო ზუსტად ხდება მოცემული წერტილების აპროქსიმაცია. ამიტომ ნორმალური ინტერპოლაციის ამოცანა, როგორც ჩანს ასე ჩამოყალიბდება: არჩეულ იქნას მაიტერპოლირებელი ფუნქცია ისე, რომ პარამეტრების რაოდენობა იყოს რაც შეიძლება მცირე. ცხადია, რომ უმრავლეს შემთხვევებში ზოგადად ეს ამოცანა არ იხსნება და ჩვეულებრივ მისი დადაწყვეტა ხდება ან ფიზიკური მოსაზრებების საფუძველაზე ანდა ემპირიული ცდების საფუძველზე.

შევნიშნოთ, რომ უმცირესი კვადრატების მეთოდით გათვლები საკმაოდ შრომატევადია. არსებობს კარგად დამუშავებული სქემები, რომლებიც მნიშვნელოვნად ამარტივებენ გამოთვლებსა და კონტროლს. ისინი მოყვანილია სპეციალურ ლიტერატურაში.

ზოგჯერ $y = ax + b$ (3.1) ფორმულის პარამეტრების დადგენისას აუცილებელი არაა მაღალი სიზუსტე (მაგალითად როდესაც ეს პარამეტრები საჭიროა მხოლოდ პირველი მიახლოებისათვის, ან როდესაც მოცემული წერტილების რაოდენობა საკმარისად ბევრი არაა) მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ გამარტივებული მეთოდები.

დაჭიმული ძაფის მეთოდი. ეს მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში: გაზომვის შედეგები დააქვთ ე.წ. მილიმეტრულაზე და გამჭვირვალე სახაზავით გაატარებენ

ისეთ წრფეს, რომ მის ზემოთ და ქვემოთ აღმოჩნდეს წერტილების ერთნაირი რაოდენობა. ამ წრფის პარამეტრებს განსაზღვრავენ ორი წერტილით. იმის ნაცვლად, რომ ჩვეულებრივ მილიმეტრულ ქაღალდზე დაიტანონ გაზომვის გადათვლილი შედეგები, შეიძლება ვისარგებლოთ სპეციალური ქაღალდით ფუნქციონალური ბადით, რომელიც შეესაბამება კოორდინატთა გამოყენებულ გარდაქმნებს: ასეთ ქაღალდზე მოცემული წერტილები დაიტანება გადაანგარიშების გარეშე და საძებნი პარამეტრი ასევე განისაზღვრება ორი წერტილით.

ვთქვათ გვაქვს ხარისხოვანი ფუნქცია $y = ax^b$ (3.2) და გვინდა ვიპოვოთ მისი პარამეტრები. ამისათვის საჭიროა (3.2) გამოსახულება გავალოგარითმოთ. მივიღებთ: $lgy = lga + blgx$ (3.3), შემოვიტანოთ აღნიშვნები აღნიშვნები $X = lgx$, $Y = lgy$ (3.4) რაც იძლევა გამოსახულებას $Y = a_1X + b_1$ (3.5) , სადაც $a_1 = b$ და $b_1 = lga$.

მაჩვენებლიანი ფუნქციის $y = ae^{bx}$ (3.6) პარამეტრების მოსაძებნად ასევე იყენებენ ლოგარითმულ გარდაქმნას: $lgy = lga + xblge$ (3.7) და აღნიშვნებს $X = x$, $Y = lgy$ რაც ასევე იძლევა წრფივ დამოკიდებულებას მნიშვნელობებით $a_1 = blge$ (3.8), $b_1 = lga$(3.9).

შესაბამისი გრაფიკების აგებითა და მარტივი გაანგარიშებებით ადვილად მიიღება (3.6) და (3.7) ფორმულებში შემავალი პარამეტრები და ფუნქციონალური დამოკიდებულებების შესატყვისი ფორმულები.

3.2.პარამეტრების შეფასების ზოგადი წესები

შევეხოთ პარამეტრების მოძებნის ზოგად წესებს. განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც საძებნი y ფუნქცია წრფივადაა დამოკიდებული შესარჩევ პარამეტრებზე $a_0, a_1, \cdots a_n$, ე.ი. როდესაც ის შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შემდეგი სახით

$$y = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) \quad (3.8)$$

სადაც $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ მოცემული ფუნქციებია. ამ შემთხვევაში $a_0, a_1, \cdots a_n$ პარამეტრების შერჩევა უმცირესი კვადრატების მეთოდით ხდება ნორმალური წრფივი განტოლებების სისტემების მეშვეობით.

$$a_0 \sum \varphi_0^2(x) + a_I \sum \varphi_1(x)\varphi_0(x) + \cdots + a_n \sum \varphi_n(x)\varphi_0(x) = \sum y\varphi_0(x)$$
$$a_0 \sum \varphi_0\,(x)\varphi_1(x) + a_I \sum \varphi_1^2(x) + \cdots + a_n \sum \varphi_n(x)\varphi_1(x) = \sum y\varphi_1(x)$$
- -
$$a_n \sum \varphi_1(x)\varphi_n(x) + a_I \sum \varphi_n(x)\varphi_1(x) + \cdots + a_n \sum \varphi_n^2(x) = \sum y\varphi_n(x)$$

იმ პირობით, რომ y_k ყველა მნიშვნელობა გაზომილია ერთნაირი სიზუსტით, განტოლებათა ნორმალური სისტემის აგება ხდება შემდეგნაირად. (3.8) განტოლება მორიგეობით მრავლდება თითოეულ $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$ ფუნქციაზე და შემდეგ ხდება მიღებული თანაფარდობის აჯამვა ყველა $x_1, x_2, \cdots, x_N$ წერტილებით. ეს აჯამვა აღინიშნება $\sum_N$ ნიშნით, ანუ $\sum \varphi_n^2(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_n^2(x)$; $\cdots$; $\sum y\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{N} y_k\, \varphi_n(x_n)$ $(n < N)$.

თუ გაზომვის შედეგებს $y_1, y_2, \cdots, y_N$ მიეწერებათ შესაბამისად წონები $w_0, w_1, \cdots, w_N$ მაშინ ყველა ზემოთ დაწერილი ჯამი უნდა გამრავლდეს შესაბამის წონაზე. მაგალითად $\sum \varphi_0^2(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_0^2(x_k), w_N$, $\sum y\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{N} y_k\, \varphi_n(x_k) w_k$

3.3.ემპირიული ფორმულების შერჩევა

ზოგჯერ საქმე გვაქვს ამოცანებთან, რომელთა წინასწარი ანალიზი საშუალებას არ იძლევა დადგენილ იქნას ემპირიული ფორმულის ზუსტი სახე, ამ დროს საჭირო ხდება ფორმულების შერჩევა მათი საკმაოდ ფართო წრიდან. ხშირად შემდგომი ანგარიშის სიმარტივის თვასაზრისით ირჩევენ მრავალწევრს, ამასთან მრავალწევრის ხარისხი წინასწარ უცნობია.

ექსპერიმენტის მონაცემებით მრავალწევრის ოპტიმალური ხარისხის დადგენა ემყარება დაშვებას, რომ საძებნი დამოკიდებულება ზუსტად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას რაღაც n_0 ხარისხის მრავაწევრით:

$$y = \sum_{i=0}^{n_0} a_i\, x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^{n_0} \quad (3.9)$$

და, რომ ფუნქციის y_k გაზომილი სიდიდეები შეიცავენ მხოლოდ შემთხვევით ცდომილებებს $\square_k$, რომლებიც დამოუკიდებელნი არიან და ემორჩილებიან განაწილების ნორმალურ კანონს ერთნაირი σ^2 დისპერსიით თანაბარი სიზუსტით გაზომვებისას, ან დისპერსიებს σ^2/w_k , არათანაბარი სიზუსტით გაზომვებისას (w_k - გაზომვების წონების მნიშვნელობებია, $k = 1, 2, 3, \cdots, N$.

ძირითადი ცნებები ფორმულირებულია (3.9) სიდიდის დაშლის ტერმინებით ჩებიშევის ორთოგონალური მრავაწევრით;

$$y = \sum_{i=0}^{n_0} b_i\, p_i(x) \quad (3.10)$$

სადაც $\sum_{k=1}^{N} p_i(x_k) p_j(x_k) w_k = 0$ როდესაც $i \neq k$. b_j პარამეტრების შეფასება ხდება $b_j = \frac{1}{H_j} \sum_{k=1}^{N} y_k\, p_j(x_k) w_k$, $H_j = \sum_{k=1}^{N} pf(x_k) w_k$ (3.11) ფორმულებით.

თანმიმდევრობით გამოვთვალოთ $b_0, b_1, b_3, \cdots$ პარამეტრები (3.11) ფორმულებით: ყოველი მორიგი b_n შეფასების შემდეგ გამოვთვალოთ გადახრების კვადრატების ჯამი

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} w_k \left[y_k - \sum_{j=0}^{n} \left(b_j\right)_0 p_j(x_k) \right]^2 ,$$

ეს უკანასკნელი ფორმულა მოსახერხებელია წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$S_n = \sum_{k=1}^{N} w_k y_k^2 - (b_0^2 H_0 + b_1^2 H_1 + \cdots + b_n^2 H_n \quad (3.12)$$

ყოველი ახალი $b_{n+1} p_{n+1}(x)$ წევრის დამატება y მრავალწევრის დაშლაში ორთოგონალური მრავალწევრით $p_j(x)$ ამცირებს S_n გადახრების კვადრატების ჯამის მნიშვნელობას სიდიდით $b_{n+1}^2 H_{n+1}$. ასეთნაირად გამოთვლილი S_n ყოველი მნიშვნელობა უნდა გავყოთ $N - n - 1$რიცხვზე და მიღებული მნიშვნელობა უნდა შევადაროთ წინა მნიშვნელობას. შესარჩევი მრავალწევრის ხარისხი უნდა გავზარდოთ მანამ, სანამ (2.13) თანაფადობა არ დაიწყებს შესამჩნევად შემცირებას.

$$\frac{S_n}{N-n-1} = \frac{S_n}{N-n-1} \sum_{k=1}^{N} w_k \left[y_k - \sum_{j=0}^{n} \left(b_j\right)_0 p_j(x_k) \right]^2 \quad (3.13)$$

$n = n_0$ ის მნიშვნელობა, რომლის შემდგომაც (3.13) ფარდობა პრაქტიკულად შეწყვეტს ზრდას, იძლევა მრავალწევრის ოპტიმალურ ხარისხს.

ზოგჯერ ემპირიული ფორმულის შერჩევისას საჭირო ხდება არჩევანის გაკეთება ხარისხოვან და მაჩვენებლიან ფუნქციებს შორის. ამ შემთხვევაში საჭიროა ექსპერიმენტული წერტილები (გადაანგარიშების გარეშე) დავსვათ ლოგარითმულ და ნახევრადლოგარითმულ ქაღალდებზე; თუ წერტილები კარგად დალაგდა წრფეზე ლოგარითმულ ქაღალდზე, მაშინ ვირჩევთ ხარისხოვან ფუნქციას $y = ax^b$, ხოლო თუ წერტილები კარგად დალაგდა ნახევრადლოგარითმულ ქაღალდზე ვირჩევთ მაჩვენებლიან ფუნქციას $y = ae^{bx}$. შესაბამისი ფუნქციის არჩევის შემდეგ მისი პარამეტრების a და b დადგენა ხდება მიღებული წრფის ორი წერტილის მეშვეობით.

თუ არა გვაქვს მითითებული ქაღალდები შეიძლება ვისარგებლოთ იმ გარემოებით, რომ ხარისხოვანი ფუნქციის მნიშვნელობები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, ხოლო მაჩვენებლიანი ფუნქციის მნიშვნელობები ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას, არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას. ამიტომ დასახელებულ ფუნქციებს შორის არჩევანის გაკეთებისას აწარმოებენ გაზომვების ორ რიგს; თანაბრად დაშორებული წერტილებისათვის $x_{k+1} = x_k + h$ და წერტილებისათვის, რომლებიც ადგენენ გეომეტრიულ პროგრესიას $x_{k+1} = x_k q$. ამის შემდეგ თითოეული ამ რიგისათვის ანგარიშობენ თანაფარდობებს

$$\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_2}, \frac{y_4}{y_3}, \dots$$

და ირჩევენ იმ რიგს, რომლისთვისაც ეს თანაფარდობები უფრო მუდმივია. ამით ირჩევენ ემპირიული ფორმულის სახესაც: თუ უფრო მუდმივია ფუნქციის მნიშვნელობები არგუმენტის თანაბრად დაშორებული მნიშვნელობებისათვის ირჩევენ მაჩვენებლიან ფუნქციას, წინააღმდეგ შემთხვევაში – ხარისხოვანს.

თავი IV

კორელაციური დამოკიდებულებები

4.1. კორელაციის ცნება

მრავალი ფიზიკური სიდიდე ერთმანეთთან დაკავშირებულია ფუნქციონალური დამოკიდებულებებით. მაგალითად ომის კანონის თანახმად

წრედის უბანზე დენსა და ძაბვას შორის წრფივი დამოკიდებულება არსებობს. მსოფლიო მიზიდულობის კანონის ძალით ყოველი ორი სხეული ერთმანეთს იზიდავს ძალით, რომელიც პირდაპირპროპორციულია ამ სხეულების მასების ნამრავლის და უკუპროპორციულია მათ შორის მანძილის კვადრატის. ასეთი დამოკიდებულებები მიღებულია ექსპერიმენტული შედეგების განზოგადებით ან თეორიული ფიზიკის მეთოდებით. ფიზიკოსები ყოველთვის ცდილობენ მოვლენები და პროცესები აღწერონ ფუნქციონალური დამოკიდებულებით.

ხშირად რაიმე ფიზიკური პრობლემის გადაწყვეტის საწყის ეტაპზე გარკვეულ ფიზიკურ სიდიდეებს შორის ფუნქციონალური კავშირის ხასიათი უცნობია. უფრო მეტიც არსებობს გარკვეული გაურკვევლობა ასეთი კავშირის არსებობის შესახებ. შესაძლებელია ფიზიკურ სიდიდეებს შორის არც კი არსებობდეს რაიმე კავშირი და ისინი დამოუკიდებელნი იყვნენ.

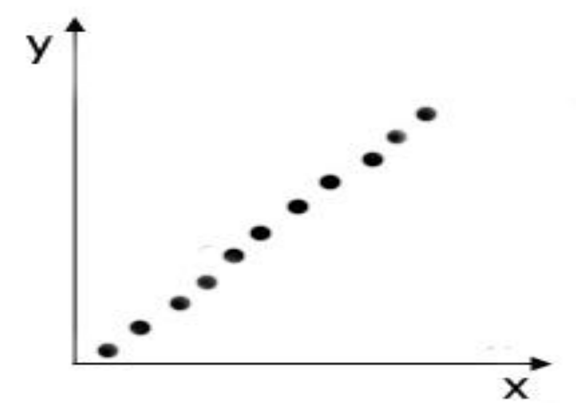
ორ X და Y სიდიდეს შორის მიზეზ-შედეგობრივი კავშირის დადგენას ახდენენ Y სიდიდის გაზომვით X სიდიდის სხვადასხვა მნიშვნელობისათვის. მიღებული შედეგების საფუძველზე აკეთებენ დასკვნას არსებობს თუ არა კავშირი ამ სიდიდეებს შორის. უნდა გვახსოვდეს, რომ გაზომვის ნებისმიერ მეთოდს გარკვეული შემთხვევითი ცდომილება შეაქვს გაზომილ სიდიდეში, რაც თავის მხრივ ართულებს გასაზომ სიდიდეებს შორის ცალსახა კავშირის არსებობის შესახებ დასკვნის გაკეთებას.

რეალური პროცესების შესწავლისას ირკვევა, რომ არსებობენ ისეთი ფიზიკური სიდიდეები, რომლებიც ერთის მხრივ ერთმანეთთან არ არიან დაკავშირებულნი გარკვეული აშკარა ცალსახა ფუნქციონალური დამოკიდებულებით, მეორეს მხრივ კი ისინი აბსოლუტურად დამოუკიდებლები არ არიან. ეს იმას ნიშნავს, რომ ექსერიმენტის ჩატარებისას X ცვლადის ერთსადაიმავე მნიშვნელობას შეესაბამება Y ცვლადის სხვადასხვა მნიშვნელობა, ამასთან Y სიდიდის გაფანტვა შეიძლება მნიშვნელოვნად აღემატებოდეს გაზომვის ΔY ცდომილებას. ამასთან $\bar{Y}$ საშუალო მნიშვნელობები შეიძლება რეგულარულად იზრდებოდნენ ან მცირდებოდნენ X-ის ზრდით. ამის მსგავს სიდიდეებს ეწოდებათ კორელირებული სიდიდეები, ან ამბობენ რომ განსახილველი X და Y სიდიდეების წყვილი ერთმანეთთან დაკავშირებული

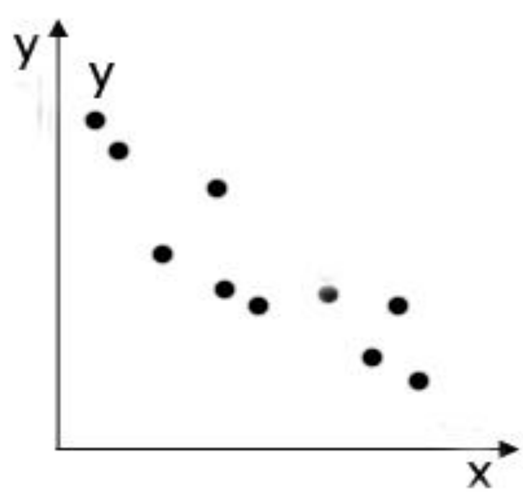
არიან სტოქასტიკური დამოკიდებულებით (ბერძნულიდან στοχαστικός — "გამოცნობის შემძლე")

სტოქასტიკური დამოკიდებულებით დაკავშირებული არიან შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებიც გვხვედიან ფიზიკის თითქმის ყველა დარგში: თერმოდინამიკა, ქვანტური ფიზიკა, არაწრფივი რხევების თეორია. სტოქასტიკური კავშირებით აიწერება მრავალი ბიოფიზიკური პროცესი, რაც დაკავშირებულია საკვლევი ობიექტების სირთულით.

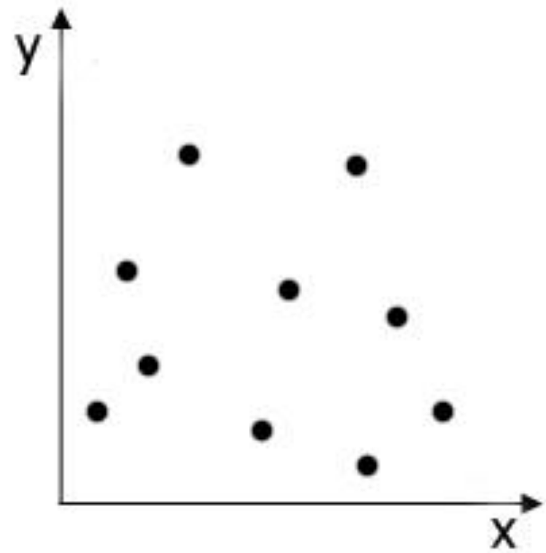
ნახ.4.1-4.3-ზე მოცემულია X და Y სიდიდეებს შორის ურთიერთკავშირის სხვადასხვა სახეები გრაფიკების სახის



ნახ.4.1. ფუნქციონალურად დაკავშირებული X და Y სიდიდეები



ნახ.4.2. სტოქასტიკურად დაკავშირებული X და Y სიდიდეები



ნახ.4.3. დამოუკიდებელი X და Y სიდიდეები

პრაქტიკაში ზოგჯერ ძნელია, შემთხვევითი ცდომილების დიდი მნიშვნელობის გამო გაზომვის შედეგების მიხედვით, "თვალით" გარჩეულ იქნას მკაცრი ფუნქციონალური დამოკიდებულება სტოქასტიკურისაგან. აი რატომ არის ანალიზის მათემატიკური მეთოდი აუცილებელი X და Y სიდიდეებს შორის კავშირის დასადგენად.

ალბათობის თეორიის თვათახედვით კორელირებული სიდიდეები შემთხვევითია. ერთი სიდიდის გაფანტვა მეორე სიდიდის მუდმივი მნიშვნელობისას შეიძლება აიწეროს ალბათობების განაწილებით.

4.2 წრფივი კორელაცია

x და y სიდიდეს შორის კორელაციას ეწოდება წრფივი, თუ რეგრესიის ორივე ფუნქცია წრფივია. ამ შემთხვევაში რეგრესიის მრუდები გადაიქცევიან რეგრესიის წრფეებად. ამ წრფეების საკუთხო კოეფიციენტები გამოისახებიან კორელაციის კოეფიციენტით, რომელიც ამ სიდიდეებს შორის წრფივობის ზომას წარმოადგენს.

კორელაციის კოეფიციენტი ალბათობის თეორიაში განისაზღვრება სხვა ალბათობების დახმარებით.

მოვიყვანოთ კორელაციის კოეფიციენტის ρ_{XY} სამი მნიშვნელოვანი თვისება, რომლებიც მტიცდება ალბათობის თეორიაში

1) ყოველთვის $|\rho_{XY}| \leq 1$, ანუ კორელაციის კოეფიციენტის აბსოლუტური სიდიდე არ აღემატება 1.

2) დამოუკიდებელი სიდიდეებისათვის $\rho_{XY} = 0$.

3) თუ X და Y სიდიდეები ერთმანეთთან დაკავშირებულია წრფივი ფუნქციონარული დამოკიდებულებით, მაშინ $|\rho_{XY}| = 1$.სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ $|\rho_{XY}| = 1$ მაშინ $Y = KX + B$ და K და B კოეფიციენტებია.

კორელაციის კოეფიციენტი მოსახერხებელი მახასიათებელი სიდიდეა X და Y სიდიდეების კავშირის შესახებ. ρ_{XY} რაც უფრო ახლოსაა ნულთან, მით უფრო მეტია Y სიდიდის არარეგულარი გაფანტვა X სიდიდის ნებისმიერი ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის. პირიქით თუ ρ_{XY} სიდიდის მნიშვნელობა ახლოსაა ერთთან, მაშინ შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ Y(X) დამოკიდებულება წრფივია.

ამას გარდა, კორელაციის კოეფიციენტის ნიშანი ცალსახად განსაზღვრავს Y(X) დამოკიდებულების ხასიათს. თუ $\rho_{XY} > 0$ მაშინ X და Y სიდიდეები ერთდროულად იზრდებიან ან ერთდროულად მცირდებიან (შემთხვევითი ცდომილებების სიზუსტით). თუ $\rho_{XY} < 0$ მაშინ X გაზრდით Y მცირდება ან პირიქით X მცირდება Y იზრდება.

ამრიგად კორელაციის კოეფიციენტის რიცხვითი მნიშვნელობა ახასიათებს, თუ რამდენად ახლოსაა კავშირი X და Y სიდიდეებს შორის წრფივთან. $|\rho_{XY}|$ აბსოლუტური მნიშვნელობა მით უფრო მცირდება რაც უფრო გადახრილია Y(X) დამოკიდებულება წრფივისგან, მაშინაც კი როდესაც X და Y სიდიდეები დაკავშირებულნი არიან არა სტოქასტიკურად, არამედ ფუნქიონალურად. შესაბამისად, კორელაციის კოეფიციენტის გამოყენება ეფექტურია ისეთი დამოკიდებულების გამოსაკვლევადაც, როდესაც წრფივ დამოკიდებულებასთან სიახლოვე დასაბუთებულია თეორეულადაც.

კორელაციის კოეფიციენტის გამოყენების მიზანშეწონილობა გამართლებულია იმითაც, რომ პირველი მიახლოებით მრავალი რთული დამოკიდებულება შეიძლება წრფივად ჩაითვალოს.

კორელაციის კოეფიციენტის თეორიულ–ალბათური განსაზღვრა გამოუსადეგარია პრაქტიკული გათვლებისათვის. ექპერიმენტატორს თავის განკარგულებაში არ გააჩნია თეორიული ინფორმაცია საკვლევი სიდიდეების ალბათური განაწილებისა და შემთხვევითი ცდომილებების შესახებ. ამიტომ კორელაციის ρ_{XY} კოეფიციენტის ზუსტი მნიშვნელობის ნაცვლად საჭირო ხდება მისი მიახლოებითი მნიშვნელობის (შეფასების) გამოყენება X და Y სიდიდეების გაზომილი მნიშვნელობების გამოყენებით.

ვთქვათ X და Y სიდიდეები გაზომილ იქნა N−ჯერ და მიღებულ იქნა რიცხვითი მნიშვნელობების N წყვილი:

$$x_i, y_i;\ i = N.$$

კორელაციის კოეფიციენტის საუკეთესო მიახლოებითი მნიშვნელობას, რომელიც შეიძლება გამოთვლილ იქნას გაზომილი სიდიდეების გამოყენებით, წარმოადგენს R სიდიდე, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{N}[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2}} \quad (4.1)$$

სადაც $\bar{x}$ და $\bar{y}$ – შესაბამისად x_i და y_i სიდიდეების საშუალო სტატისტიკური მნიშვნელობებია:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\, , \bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i . \quad (4.2)$$

4.3. არაწრფივი კორელაცია

არაწრფივი კორელაციის შემთხვევაში დამოკიდებულების, ანუ ექსპერიმენტული წერტილების კონცენტრაციის ზომას, რეგრესიის გასაშუალებული წირების მახლობლად წარმოადგენს კორელაციური თანაფარდობა $\eta_{y|x}$ y -ის x -ზე დამოკიდებულებისას, ან $\eta_{x|y}$ x -ის y -ზე დამოკიდებულებისას.

კორელაციური დამოკიდებულებები გამოითვლებიან ფორმულებით

$$\eta_{y|x}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{l} m_j\ (\bar{y}_{|x} - \bar{y})^2}{(n-1)s_y^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{l}\left(m_j - 1\right) s_{y|x_j}^2}{(n-1)s_y^2}$$

$$\eta^2_{x|y} = \frac{\sum_{j=1}^{l^I} m_j \left(\bar{x}_{|y} - \bar{x}\right)^2}{(n-1)x} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{I}\left(m_j^I - 1\right) s^2_{x|y_j}}{(n-1)s_x^2}$$

აქ m_j იმ $(x_{ij}\,;\,y_{ij})$ წერტილების რაოდენობაა, რომლებიც მოხვდნენ j-ურ ინტერვალში, $\bar{y}_{|x}$ პირობითი საშუალო მნიშვნელობაა, ხოლო $s^2_{x|y_j}$ - პირობითი ემპირიული დისპერსია. l იმ ინტერვალების რაოდენობაა, რომლებადაც დაყოფილია x. m_j' და l' იგივე შინაარსი აქვთ x-თვის როგორიც m_j და l აქვთ y-თვის.

კორელაციური თანაფარდობები აკმაყოფილებენ უტოლობებს

$$0 \le |r| \le \eta_{y|x} \le 1 \text{ და } 0 \le |r| \le \eta_{x|y} \le 1$$

კორელაციური დამოკიდებულების ერთთან ტოლობა $\eta_{y,x} = 1$ მიუთითებს ფუნქციონალურ დამოკიდებულებაზე x და y შორის, ხოლო ნულთან ტოლობა $\eta_{y,x} = 0$ - x და y შორის კავშირის არარსებობაზე. ამასთან უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ტოლობიდან $\eta_{y,x} = 0$ სულაც არ გამომდინარეობს, რომ $\eta_{x,y} = 0$.

რეგრესიული მრუდების აგება ხდება უმცირესი კვადრატების მეთოდით. ჩვეულებრივ შემოისაზღვრებიან დაბალი ხარისხის პარაბოლური დამოკიდებულებებით, ანუ 2 ან 3 ხარისხის მრავალწევრებით.

რეგრესიული მრუდის განტოლება მოსახერხებელია ჩაიწეროს ჩებიშევის ორთოგონალური მრავაწევრით (პუნქტი 3.2-3):

$$y = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + \cdots + b_n n(x)$$

4.4. მრავლობითი წრფივი კორელაცია

4.2 პარაგრაფში განხილული წრფივი კორელაციის ცნებები ორ სიდიდეს შორის შესაძლებელია გადატანილ იქნას სიდიდეების უფრო მეტ მნიშვნელობებზე. ქვემოთ მოყვანილია ფორმულები, რომლებიც აუცილებელია სამი ცვლადისათვის x, y, z , ამასთან ჩაწერის შესამოკლებლად ამოწერილია მხოლოდ ის ფორმულები, რომლებიც ეხება z სიდიდის რეგრესია ემპირიულ რეგრესიას x და y-ზე.

z რეგრესიას (x, y)-ზე აქვს შემდეგი განტოლების სახე

$$z-\bar{z}=b_{z|x}(x-\bar{x})+b_{z|y}(y-\bar{y})$$

სადაც რეგრესიის კოეფიციენტები $b_{z|x}$ და $b_{z|y}$ განიასაზღვრება კორელაციის კოეფიციენტებით წყვილებს შორის x და y, x და z , y და z შემდეგი თანაფარდობებით

$$b_{z|x}=\frac{r_{xz}-r_{xy}r_{yz}}{1-r_{xy}^2}\,\frac{s_z}{s_x}$$

$$b_{z|y}=\frac{r_{yz}-r_{xy}r_{xz}}{1-r_{xy}^2}\,\frac{s_z}{s_y}$$

აქ r_{xy}, r_{xz} და r_{yz} გამოითვლებიან ფორმულებით

$$r_{xy}=\frac{\sum(x_k-\bar{x})(y_k-\bar{y})}{(N-1)s_x s_y}$$

$$r_{xz}=\frac{\sum(x_k-\bar{x})(z_k-\bar{z})}{(N-1)s_x s_z}$$

$$r_{yz}=\frac{\sum(y_k-\bar{y})(z_k-\bar{z})}{(N-1)s_y s_z}$$

$$\sum=\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{N}}$$

სადაც N - ექსპერიმენტის შედეგების საერთო რაოდენობაა, ანუ (x_k, y_k, z_k) წერტილების რაოდენობა, s_k, s_k, s_k - ემპირიული სტანდარტებია.

$$s_x^2=\frac{\sum(x_k-\bar{x})^2}{N-1}$$

$$s_y^2=\frac{\sum(y_k-\bar{y})^2}{N-1}$$

$$s_z^2=\frac{\sum(z_k-\bar{z})^2}{N-1}$$

კორელაციის კრებსითი და კერძო კოეფიციენტები. z და x, y წერტილებს შორის დამოკიდებულების ზომაა კორელაციის კრებსითი კოეფიციენტი

$$R=\sqrt{\frac{r_{xz}^2+r_{yz}^2-2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1-r_{xy}^2}}=$$

$$=\sqrt{1-\frac{1}{(N-1)s_z^2}\sum_{k=1}^{N}\left[z_k-\bar{z}-b_{z,x}(x_k-\bar{x})-b_{z,y}(y_k-\bar{y})^2\right]}$$

კორელაციის კრებსითი კოეფიციენტი ყოველთვის მოქცეულია 0 და 1 შორის. თუ z სიდიდე არაა დამოკიდებული x და y - ზე, მაშინ R თეორიული მნიშვნელობა ნულის ტოლია, მაშინ (კრებსითი კოეფიციენტი პრაქტიკულად ძალიან მცირეა) მაშინ z და x, y სიდიდეებს შორის არ არსებობს წრფივი კორელაციური დამოკიდებულება მაგრამ შეიძლება არსებობდეს არაწრფივი კავშირი.

კორელაციის კრებსითი კოეფიციენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ უდრის ერთს, როდესაც ყველა ექსპერიმენტალური წერტილი რეგრესიის სიბრტყეში დევს (R თეორიული მნიშვნელობა ერთის ტოლია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც z წრფივად არის დამოკიდებული x და y – ზე).

მხოლოდ ერთი ფაქტორის, მაგალითად x - ის გავლენის შესასწავლად z-ზე, ანუ კორელაციის შესასწავლად x და z შორის, მას შემდეგ რაც მოშორებულია ცვლილებები, რომლებიც გამოწვეულია y სიდიდის გავლენით, შემოჰყავთ კორელაციის პარციალური (კერძო) კოეფიციენტი x და z სიდიდეების y სიდიდის მიმართ $r_{xy,z}$ და $r_{yz,x}$.

$$r_{xz|y} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2}\sqrt{1 - r_{yz}^2}}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება კორელაციის პარციალური კოეფიციენტები $r_{xy|z}$ და $r_{yz|x}$.

5. ექსპერიმენტული მონაცემების ანალიზის ზოგიერთი ამოცანები

5.1. რიცხვითი ინტეგრირება. ტრაპეციის წესი

რიცხვითი ინტეგრირების ქვეშ იგულისხმება განსაზღვრული ინტეგრალის გამოთვლის რიცხვითი მეთოდების ერთობლიობა და ის გამოიყენება მაშინ როდესაც ფუნქცია მოცემულია არა ანალიზურად, არამედ ცხრილის სახით ანდა, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია მოცემულია მაგრამ მისი პირველყოფილი არ გამოისახება ანალიზური ფუნქციით მაგალითად $f(x) = exp(-x^2)$. ამ ორ შემთხვევაში შეუძლებელია ინტეგრალის გამოთვლა ნიუტონ-ლაიბნიცის ფორმულით. ასევე შესაძლებელია შეიქმნას ისეთი სიტუაცია, რომ

პირველყოფილი იმდენად რთულია, რომ ინტეგრალი შეიძლება გამოითვალოს უფრო სწრაფად რიცხვითი მეთოდებით.

განვიხილოთ ინტეგრალის გამოთვლის ტრაპეციის მეთოდი. ის ჩვეულებრივ გამოიყენება მაშინ როდესაც ფუნქციის მნიშვნელობები გაზომილია თანაბრად დაშორებული არგუმენტებისათვის, ანუ როდესაც წარმოდგენილია ცხრილით მუდმივი h_i ბიჯით (ცხრილი 5.1):

ცხრილი 5.1

x	$y = f(x)$
$x_0 = a$	y_0
$x_1 = x_0 + h$	y_1
$x_2 = x_1 + h$	y_2
$\cdots$	$\cdots$
$x_n = b = x_{n-1} + h$	y_n

ტრაპეციის წესის მიხედვით $I = \int_a^b f(x)\,dx$ (4.1) ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობად აიღება სიდიდე

$$T_k \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) \quad (5.1)$$

ან $$T_k \approx h\left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)$$

ანუ ითვლება, რომ $I \approx T_k$. ტრაპეციის წესის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია მოცემულია ნახ.8-ზე. მრუდწირული ტრაპეციის ფართობი შეცვლილია მართკუთხა ტრაპეციის ფართობებით. ამასთან, როგორც ნახაზიდან ვხედავთ ფუნქციის გაზომილი მნიშვნელობები y_k შეიძლება არ ემთხვეოდეს ფუნქციის $f(x)$ მნიშვნელობებს x_k წერტილებში, ვინაიდან ფუნქციის გაზომილი მნიშვნელობები შეიცავენ ექსპერიმენტულ ცდომილებებს.

5.2. რომბერგის მეთოდი

რომბერგის მეთოდი გამოიყენება მხოლოდ იმ შემთხვევაში როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქციის მნიშვნელობები გაზომილია არგუმენტის იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც $[a, b]$ ინტერვალს ყოფენ n ტოლ ნაწილად, ამასთან n ჯერადია 2 – ის გარკვეული ხარისხის: $n = m \cdot 2^k$ ($m.k$ - ნატურალური რიცხვებია). რომბერგის მეთოდი მდგომარეობს რაღაც h ბიჯით ტრაპეციის მეთოდით გამოთვლილი ინტეგრალის თანმიმდევრობით დაზუსტებაში, იმავე წესით ორმაგი $2h$ ბიჯის გამოყენებით. ის საშუალებას იძლევა ამოღებულ იქნას მაქსიმალური ინფორმაცია მოცემული მონაცემებიდან და გამოითვალოს ინტეგრალი გაცილებით მაღალი სიზუსტით, ვიდრე ამის საშუალებას იძლევა ტრაპეციის მეთოდი იმავე ბიჯით.

5.1 პარაგრაფისაგან განსხვავებით აქ შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

T_i წარმოადგენს $T_k \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$ სახის სიდიდეს ბიჯით h_i;

$$h_0 = (b-a)/m \text{ (საწყისი ბიჯი);}$$

$$h_{i+1} = h/2 \ \ (i = 0, 1, \cdots, k-1).$$

ჯერ ტრაპეციის წესით გამოთვლიან ინტეგრალის მიახლოებით მნიშვნელობას h_0 ბიჯით:

$$T_0 = h_0\left[\frac{f(h_0)}{2} + f(a+h_0) + \cdots + f\left(a + (m-1)h_1 + \frac{f(b)}{2}\right)\right] =$$

$$= h_0\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f(a + jh_0)\right]$$

შემდეგ გამოთვლიან სიდიდეს

$T_1 = h_1\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h_1) + \cdots + f\left(a + (2m-1)h_2 + \frac{f(b)}{2}\right)\right]$ ისე, რომ იყენებენ საშუალო წერტილებში $a + h_1, a + 3h_1, \cdots, a + (2m-1)h_1$ $f(x)-$ ის მხოლოდ დამატებით მნიშვნელობებს.

ამ მიზნით გამოითვლიან შემასწორებელ წევრს

$$V_0 = h_0 \sum_{i=1}^{m} j\left[a + \left(j - \frac{1}{2}\right)h_0\right] \ (4.3)$$

და შემდეგ პოულობენ

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_0 + V_0) \quad (4.4)$$

ინტეგრალის ორი მოძებნილი მიახლოებითი მნიშვნელობით (T_1 ბიჯით h_1 და T_0 ორმაგი ბიჯით $h_0 = 2h_1$) გამოთვლიან უკეთეს მიახლოებას

$$S_1 = T_1 + \frac{1}{3}(T_1 - T_0) = \frac{1}{3}(4T_1 - T_0). \quad (4.5) \quad 6.1\text{-}10$$

S_1 მიახლოება განსაზღვრავს სიმპსონის წესს $I \approx S_1$; S_1 სიდიდეს ჩეულებრივ ჩაწერენ შემდეგი სახით

$$S_1 = \frac{1}{3}h_1[f(a) + 4f(a+h_1) + 2f(a+2h_1) + \cdots + 4f(a+(2m-1)h_1) + f(b)] \quad 6.1\text{-}11$$

5.3. რიცხვითი დიფერენცირება

ხშირად საინჟინრო-ტექნიკური და სხვა გამოყენებითი ამოცანების გადასაწყვეტად საჭირო ხდება გარკვეული რიგის ცხრილის სახით მოცემული $y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის პოვნა. გარდა ამისა, ზოგჯერ $y = f(x)$ ანალიზური სახე რთულია და მისი უშუალო დიფერენცირება ძალიან გაძნელებულია. ამ შემთხვევებში იყენებენ რიცხვით დიფერენცირებას. ზოგადად რიცხვითი დიფერენცირების ამოცანას წარმოადგენს ცხრილში გარკვეული h ბიჯით მოცემული ფუნქციის წარმოებულის პოვნა იმავე h ბიჯით. არსებობს ასეთი დიფერენცირების მრავალი მეთოდი.

პირველ რიგში ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ გარემოებას, რომ თუ რიცხვითი ინტეგრირება მოასწორებს საწყისი მონაცემების ცდომილებებს, ამცირებს ექსპერიმენტის “ხმაურს”, რიცხვითი დიფერენცირების შედეგზე ეს “ხმაური” დიდ გავლენას ახდენს: საწყისმა მცირე ცდომილებებმა შეიძლება მნიშვნელოვნად დაამახინჯოს რიცხვითი დიფერენცირების შედეგები. ამიტომ საჭიროა ჯერ მოსწორდეს საწყისი მონაცემები და მხოლოდ შემდეგ იქნას გამოყენებული რიცხვითი დიფერენცირების მეთოდები.

$y = f(x)$ ფუნქციის წარმოებულის გამოსათვლელი ყველაზე მარტივი ფორმულაა წარმოებულის გამოთვლა თანაბრად დაშორებული კვანძებით.

$$f_k'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{2h} \quad (5.1)$$

სადაც $h = x_k - x_{k-1} = x_{k+1} - x_k$

ზოგჯერ მოცემულ $y = f(x)$ ფუნქციას $[a, b]$ მონაკვეთზე ცვლიან მაინტერპოლირებელი ფუნქციით $y = P(x)$, ყველაზე ხშირად პოლინომით და თვლიან რომ $f^{'}(x) = P^{'}(x)$ სადაც $a \le x \le b$. ანალოგიურად გამოითვლება უფრო მაღალი რიგის წარმოებულები. თუ ცნობილია მაინტერპოლირებელი $y = P(x)$ ფუნქციის ცდომილება

$$R(x) = f(x) - P(x) \quad (5.2)$$

მაშინ $P^{'}(x)$ წარმოებულის ცდომილება

$$r(x) = R^{'}(x) = f^{'}(x) - P^{'}(x) \quad (5.3)$$

ანუ მაინტერპოლირებელი ფუნქციის წარმოებულის ცდომილება ტოლია ამ ფუნქციის ცდომილების წარმოებულის. ზოგადად, რომ ვთქვათ რიცხვითი დიფერენცირება ნაკლებად ზუსტი ოპერაციაა ვიდრე ინტერპოლირება, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f(x)$ და $P(x)$ ფუნქციების სიახლოვე $[a, b]$ შუალედზე არ იძლევა ამავე შუალედზე მათი წარმოებულების სიახლოვის გარანტიას.

მოვიყვანოთ რიცხვითი დიფერენცირების ფორმულები სტირლინგის მაინტერპოლირებელი ფორმულების საფუძველზე. ვთქვათ $\cdots x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$ წარმოადგენენ თანაბრდ დაშორებულ წერტილების სისტემას, ბიჯით $h = h_{i-1} - h_i$ და $y_i = f(x_i)$ წარმოადგენს $y = f(x)$ შესაბამის მნიშვნელობებს. ვთქვათ $q = \frac{x - x_0}{h}$ და შევცვლით რა $y = f(x)$ ფუნქციას სტირლინგის ინტერპოლაციური პოლინომით, მივიღებთ:

$$y = y_0 + q\Delta y_{-1/2} + \frac{q^2}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-3/2} + \frac{q^2(q^2-1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-5/2} + \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \cdots \quad (5.4)$$

სიმოკლისათვის შემოტანილია შემდეგი შემოკლებები:

$$\Delta y_{-1/2} = \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2},$$

$$\Delta^3 y_{-3/2} = \frac{\Delta y_{-2} + \Delta y_{-1}}{2}$$

$$\Delta^5 y_{-5/2} = \frac{\Delta^3 y_{-3} + \Delta^3 y_{-2}}{2} \text{ და ა.შ.}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}$ შეიძლება ჩავწეროთ.

$$y' = \frac{1}{h}(\Delta y_{-1/2} + q\Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6}\cdot\Delta^3 y_{-3/2} + \frac{2q^3-q}{12}\cdot\Delta^4 y_{-2} +$$
$$+\frac{5q^4-15q^2+4}{120}\cdot\Delta^5 y_{-5/2} + \frac{3q^5-10q^3+4q}{360}\cdot\Delta^6 y_{-3} + \cdots) \quad (5.5)$$

$$y'' = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_{-1} + q\Delta^3 y_{-3/2} + \frac{6q^2-1}{6}\cdot\Delta^4 y_{-2} + \frac{2q^3-3q}{12}\cdot\Delta^5 y_{-5/2} +$$
$$+\frac{15q^4-30q^2+4}{360}\cdot\Delta^6 y_{-3} + \cdots)$$

5.4. ინტერპოლაცია

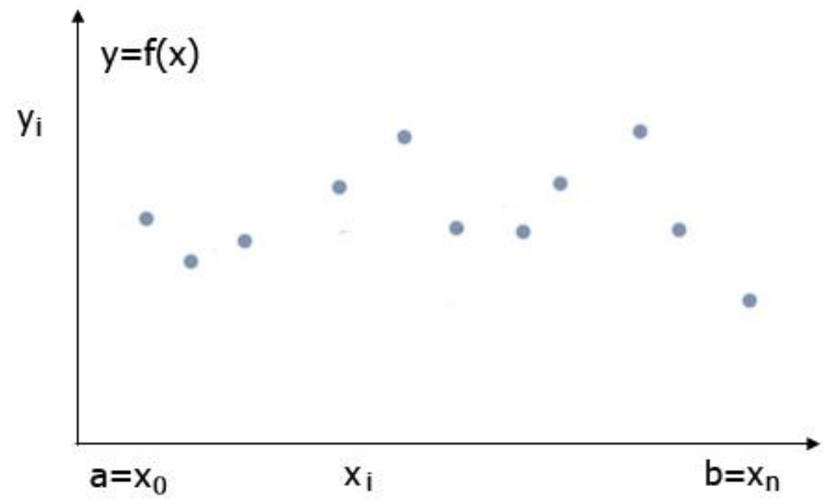
ხშირად პრაქტიკული ამოცანების გადაწყვეტისას გვხვდება შემდეგი სიტუაცია: თეორიული მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ რაღაც y სიდიდე წარმოადგენს უწყვეტი x არგუმენტის $y=f(x)$ ფუნქციას, ამასთან $f(x)$ ფუნქციის სახე უცნობია. ამასთან არგუმენტის შემოსაზღვრულ ინტერვალში $x \in [a,b]$ $x_i(i=1{,}0{,}2,\cdots,i)$ წერტილებში ცნობილია ფუნქციის სასრული რაოდენობის მნიშვნელობები y_i. $x_i(i=1{,}0{,}2,\cdots,n)$ წერტილებს ეწოდებათ კვანძები. სხვანაირად, რომ ვთქვათ გამოსაკვლევი ფუნქციის საწყისი მონაცემები შეიძლება ჩაიწეროს 5.2 ცხრილის სახით, რომელიც შეიცავს რიცხვთა $n+1$ დალაგებულ წყვილს.

ცხრილი 5.2. გამოსაკვლევი ფუნქციის საწყისი მონაცემები

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y_0=f(x_0)$	$y_1=f(x_1)$	$\cdots$	$y_n=f(x_n)$

5.2 ცხრილის საწყისი მონაცემები გრაფიკულად მოყვანილია ნახ.5.1-ზე.

პრობლემა მდგომარეობს $[a,b]$ ინტერვალიდან აღებული $x_i(i=1{,}0{,}2,\cdots,n)$ - ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის ისეთი $y=f(x)$ ფუნქციის, რომელიც არ ემთხვევა არცერთ კვანძს. დასმული პრობლემის გადაწყვეტა ორ ნაწილად



ნახ.5.1. ინტერპოლაციისათვის განკუთვნილი საწყისი მონაცემების გრაფიკის მაგალითი. შავი წერტილებით მონიშნულია $f(x)$ ფუნქციის y_i მნიშვნელობების ინტერპოლაციის კვანძებში $x_i(0,1,2,\cdots,n)$

შეიძლება დაიყოს, რომლებსაც ეწოდებათ ინტერპოლაცია და ექსტრაპოლაცია. რა არის ინტერპოლაცია და ექსტრაპოლაცია? ინტერპოლაცია არის აღდგენა იმისა რაც არის მეზობელ სიდიდეებს შორის - ხერხი, რომელიც საშუალებას იძლევა მოძებნილ იქნას საშუალედო სიდიდეები, როდესაც მოცემულია ცნობილი სიდიდეების დისკრეტული მნიშვნელობები. მაგალითად გვაქვს ცხრილი რომელშიც მოცემულია ელექტრული დენის ძალის მნიშვნელობების დამოკიდებულება ძაბვისაგან $I(U)$, ძაბვებისათვის $U=0,1,2,\cdots,10$ ვ და გვინდა ვიპოვოთ დენის ძალის მნიშვნელობა მაგალითად ძაბვის $U=1{,}372$ ვ მნიშვნელობისათვის. სასარგებლოა აქვე განვმარტოთ ფართოდ გამოყენებული ტერმინი აპროქსიმაცია. აპროქსიმაცია – მიახლოება, წარმოადგენს მეცნიერულ მეთოდს, რომელიც მდგომარეობს ერთი ობიექტის მეორე გარკვეული კუთხით მასთან ახლოს მდგომი, მაგრამ უფრო მარტივი ობიექტით, მაგალითად ირაციონალური რიცხვების შეცვლა რაციონალურით. თუ ზემოთ მოყვანილ მაგალითში ამოცანად დავისახავთ ფუნქციის სახის პოვნას, რომელიც მიახლოებით განსაზღვრავს დენის ძალასა და ძაბვას შორის დამოკიდებულებას ეს იქნება აპროქსიმაციის ამოცანა. ანუ ინტერპოლაციისაგან

განსხვავებით ვპოულობთ არა რაღაც სიდიდეს მეზობელი სიდიდეების მეშვეობით არამედ ფუნქციის სახეს ყველა მოცემული მონაცემების მეშვეობით.

როგორც ზემოთ შევნიშნეთ, ინტერპოლაცია მდგომარეობს ახალი $F(x)$ ფუნქციის პოვნაში, რომელსაც მაინტერპოლირებელი ფუნქცია ან ინტერპოლანტი ეწოდება. $F(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის გარკვეულ კლასს და $x_i (i = 1,0,2, \cdots, n)$ წერტილებში იღებს იმავე მნიშვნელობებს, რასაც $f(x)$ ფუნქცია

$$F(x_i) = y_i = f(x_i), \quad i = 1,0,2, \cdots, n \quad (5.6)$$

არგუმენტის $x_i (i = 0,1,2, \cdots, n)$ მნიშვნელობებს ინტერპოლაციის კვანძები ეწოდებათ.

შევნიშნოთ, რომ თავისთავად 5.2 ცხრილის მონაცემები ვერ განსაზღვრავენ მაინტერპოლირებელი ფუნქციის კონკრეტულ სახეს. მაგალითად, ნახ. 5.1 გრაფიკის წერტილები შეიძლება მიმდევრობით შევაერთოთ წრფის მონაკვეთებით. მეორეს მხრივ ყოველთვის შესაძლებელია მოიძებნოს n - ური რიგის ალგებრული პოლინომი ნამდვილი კოეფიციენტებით, რომლის გრაფიკიც ზუსტად გაივლის $n + 1$ რაოდენობის მოცემულ წერტილზე, თუ 23 ცხრილის ყველა კვანძი სხვადასხვაა.. ზოგადად არსებობს უსასრულო რაოდენობის $F(x)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს 5.2 პირობას. პრაქტიკაში მაინტერპოლირებელ ფუნქციად ხშირად იყენებენ ალგებრულ პოლინომებს, ექსპონენტების ჯამებს, ფურიე-ჯამებს და ა.შ. ინტერპოლანტის სახის შერჩევაზე გავლენას ახდენს ნებისმიერი ინფორმაცია, რომელიც ეხება x და y ცვლადებს შორის კავშირს.

მეორეს მხრივ უნდა შევნიშნოთ, რომ ინტერპოლანტმა (5.6) კვანძებში უნდა მიიღოს საინტერპოლაციო ფუნქციის ზუსტი მნიშვნელობები. თუ ცხრილში მოყვანილი y_i მონაცემები შეიცავენ არსებით ცდომილებებს, მაშინ (5.12) პირობის ზუსტი შესრულება შეუძლებელია. მაშინ $f(x)$ - ის იმ მნიშვნელობების საპოვნელად, რომლებიც არ ემთხვევიან კვანძებს მიზანშეწონილია გამოყენებულ იქნას აპროქსიმაციის მეთოდები.

განვიხილოთ ლაგრანჟის ინტერპოლაციური პოლინომი. ნამდვილი კოეფიციენტის მქონე პოლინომები წარმოადგენენ კარგად შესწავლილ

ფუნქციებს, რომელთა გათვლებიც მარტივია. ისინი კარგად ემორჩილებიან შეკრებას, გადამრავლებას, დიფერენცირებას და ინტეგრებას. მათ ხშირად იყნებენ ინტერპოლანტებად.

ვთქვათ საწყის ინფორმაციას წარმოადგენს 5.2 ცხრილში მოყვანილი მონაცემები ანუ გვაქვს $n+1$ რაოდენობის (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ რიცხვების წყვილი. ავაგოთ მაინტერპოლირებელი ფუნქცია ალგებრული პოლინომის სახით.

ფუნქციათა თეორიიდან ცნობილია, რომ სიბრტყეზე მდებარე $n+1$ რაოდენობის წერტილზე, მოცემული კოორდინატებით (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,n)$, შეიძლება გავავლოთ ალგებრული პოლინომის გრაფიკი ნამდვილი კოეფიციენტებით, თუ $x_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ რიცხვები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან. თუ პოლინომის ხარისხი $m = n$ მაშინ ზოგადად ეს პოლინომი ერთადერთია. (5.6) მოთხოვნის თანახმად ინტერპოლაციის კვანძებში $x_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ ამ პოლონომის მნიშვნელობები $P_m(x)$ ზუსტად ემთხვევა საინტერპოლაციო $f(x)$ ფუნქციის მოცემულ $y_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ მნიშვნელობებს:

$$P_m(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,2,\cdots,n) \text{ (5.7).}$$

ამრიგად ყოველთვის მოიძებნება $m = n$ ხარისხის $P_m(x)$ პოლინომი, რომელიც წარმოადგენს მაინტერპოლირებელ პოლინომს.

სპეციალურ შემთხვევებში, როდესაც (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ წერტილები განლაგებულია განსაკუთრებული წესრიგით, პოლინომის ხარისხი შესაძლებელია n - ზე ნაკლებიც იყოს. მაგალითად როდესაც წერტილები განლაგებულია ერთ წრფეზე, მათზე, მიუხედავად წერტილების რაოდენობისა, გაივლის წრფივი ფუნქციის გრაფიკი (პირველი ხარისხის პოლინომი).

თუ $m > n$ მაშინ იმ პოლინომების რაოდენობა, რომლებიც გაივლიან მოცემულ წერილებზე უსასრულოდ დიდი რაოდენობისაა.

შევეხოთ იმ შემთხვევას, როდესაც კვანძებს შორის მანძილები ერთნაირი არაა. ამ შემთხვევაში მიზანშეწონილია ლაგრანჟის პოლინომის აგება. ეს პოლინომი აიგება შემდეგი ჯამის სახით:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) \cdot y_i, \text{ (5.8)}$$

სადაც $l_i(x)$ - ლაგრანჟის კოეფიციენტებია და ისინი წარმოადგენენ ფუნქციის არგუმენტის x ფუნქციას $(i = 0,1,2,\cdots,n)$ (5.9)

(5.9) პირობის შესასრულებლად ლაგრანჟის კოეფიციენტები უნდა აკმაყოფილებდნენ პირობას:

$$l_i\left(x_j\right) = \delta_{ij} \quad (i, j = 0,1,2,\cdots,n) \quad (5.10)$$

სადაც δ_{ij} - კრონეკერის სიმბოლოა $\left(\delta_{ij} = 0 \text{ თუ } i \neq j \text{ და } \delta_{ij} = 1 \text{ თუ } i = j\right)$.

(5.10) პირობის შესასრულებლად ლაგრანჟის კოეფიციენტები წარმოვადგინოთ ნამრავლის სახით:

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n) \quad (5.11)$$

სადაც c_i ჯერ-ჯერობით უცნობი მუდმივი სიდიდეებია.

ლაგრანჟის i - ურ კოეფიციენტში არ შედის მამრავლი $(x - x_i)$, ამიტომ ყოველი (5.11) მე - i - ე ნამრავლი შეიცავს n რაოდენობის ფრჩხილს და ლაგრანჟის ყოველი კოეფიციენტი n რიგის პოლინომია.

მუდმივი c_i სიდიდეების ცხადის სახით წარმოდგენისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ პირობა $l_i(x_i) = 1 \ (i = 0,1,2,\cdots,n)$, (4.16) მოთხოვნის ძალით. მაშინ (5.11) – დან მაშინათვე გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{c_i} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n}\left(x_i - x_j\right).$$

ამრიგად, ლაგრანჟის კოეფიციენტები წარმოადგენენ შეფარდებათა ნამრავლს:

$$l_i(x_i) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n}\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (5.12).$$

უშუალო ჩასმებით ადვილად შეიძლება დავრწმუნდეთ, რომ (5.12) კოეფიციენტისთვის სრულდება (5.10) პირობა.

ინტერპოლაციური პოლინომი ლაგრანჟის ფორმაში მიიღება მოძიებული კოეფიციენტების (5.12) ჩასმით (5.8) გამოსახულებაში:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i \cdot \prod_{j=0, j\neq i}^{n}\frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\right) \quad (5.13)$$

მეტი თვალსაჩინოებისათვის მესამე ხარისხის პოლინომი ჩავწეროთ გაშლილი სახით:

$$L_3(x) = y_0\frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1\frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$
$$+y_2\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + +y_3\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

როგორც დასაწყისში იყო მითითებული, ლაგრანჟის პოლინომის აგება ხდება კვანძების ნებისმიერი რაოდენობისათვის. მაგრამ მოცემული x არგუმენტისათვის (5.13) ფორმულით ლაგრანჟის პოლინომი მოითხოვს დიდი რაოდენობით გათვლების ჩატარებას, კერძოდ $2n(n+1)+n$ რაოდენობის შეკრება და გამოკლებას, და აგრეთვე $2n(n+1)$ გამრავლება და გაყოფას.

პოლინომები, რომლებიც მუდმივი ბიჯის მქონე ცხრილების ინტერპოლაციას აწარმოებენ შეიძლება გამოთვლილ იქნან უფრო სწრაფად ლაგრანჟის უნივერსალური პოლინომის გამოყენებით.

განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც ცნობილია საინტერპოლირებელი $y=f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობები თანაბრად დაშორებულ კვანძებში. ამ დროს ინტერპოლაციის კვანძები x_i გამოსახებიან ფორმულებით:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0,1,2,\cdots,n \qquad (5.14)$$

მუდმივ h პარამეტრს ეწოდება ინერპოლაციური ნაბიჯი.

ასეთ ამოცანაში საწყისი მონაცემების რაოდენობაა $(n+3)$: ინტერპოლაციის საწყისი კვანძი x_0, ინტერპოლაციის ბიჯი h და ინტერპოლაციის კვანძებში უცნობი ფუნქციის $(n+1)$ რაოდენობის მნიშვნელობები: $y_i (i = 0,1,2,\cdots,n)$.

ავაგოთ n ხარისხის $P_n(x)$ პოლინომი, რომელსაც გააჩნია (5.7) თვისება

$$P_n(x_i) = y_i \ \ (i = 0,1,2,\cdots,n) \qquad (5.15)$$

სადაც x_i მნიშვნელობები მოცემულია (5.14) ფორმულით.

თანაბრად დაშორებული კვნძებისათვის ინტერპოლაციური პოლინომი პირველად აგებულ იქნა ნიუტონის მიერ.

ნიუტონის პირველი პოლინომი აიგება შემდეგი ფორმით:

$$P_n(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(a_j \cdot \prod_{j=1}^{i-1} \left(x - x_j \right) \right) \quad (5.16)$$

ან გაშლილი სახით:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots$$
$$+ a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

პოლინომის კოეფიციენტები უნდა გამოისახოს ცნობილი სიდიდეებით $x_0, h, n, y_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ (5.15) მოთხოვნის გამოყენებით ანუ პოლინომის გრაფიკმა უნდა გაიაროს მოცემული სისტემის ყველა წერტილში. აქვე შევნიშნოთ, რომ (5.16) –ში ჩასმა $x = x_0$ იძლევა საძებნი პოლინომის თავისუფალ წევრს

$$a_0 = y_0 \quad (5.17)$$

პოლინომის დანარჩენი კოეფიციენტები შეიძლება გამოსახოს საბოლოო სხვაობებით, რომელიც აღწერილია ზემოთ (იგულისხმება Δ, Δ^2, ...)

მტკიცდება, რომ

$$\Delta^k P_n(x_0) = \Delta^k y_0 \quad (k = 0,1,2,\cdots,n) \quad (5.18)$$

ავაგოთ საბოლოო სხვაობები $\Delta^i P_n(x)$ სადაც $(i = 0,1,2,\cdots,n)$, ინტერპოლაციის ნებისმიერი წერტილისათვის მოცემული h ბიჯით.

პირველი კოეფიციენტის a_1 მოსაძებნად შევადგინოთ პოლინომის პირველი საბოლოო სხვაობა (5.16):

$$\Delta^1 P_n(x) = P_n(x + hx) - P_n(x) \quad (5.19).$$

ვისარგებლოთ იმ გარემოებით, რომ საბოლოო სხვაობები წრფივია და გამოვთვალოთ ისინი ცალკეული (5.16) შესაკრებებისათვის ისე, რომ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ მამრავლები $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$:

$$i = 0 \qquad a_0 - a = 0$$

$$i = 1 \quad a_1[(x + h - x_0) - (x - x_0)] = ah$$

$$i = 2 \qquad a_2[(x + h - x_0)(x + h - x_1) - (x - x_0)(x - x_1)] =$$

$$= a_2[(x + h - x_0)(x - x_0) - (x - x_0)(x - x_{0-h})] = a_2 2h(x - x_0)$$

ოლო გარდაქმნებში გამოყენებული იყო, რომ $x_1 = x_0 + h$.

შემდგომი გამოთვლებით შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ დანარჩენი $a_i(i > 2)$ კოეფიციენტების თანამამრავლები აუცილებლად შეიცავენ $(x - x_0)$ სხვაობას. საბოლოოდ საწყისი პოლინომის პირველი სხვაობისათვის მივიღებთ გამოსახულებას:

$$\Delta^1 P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)h + 3a_3(x - x_0)(x - x_1)h +$$

$$+ n a_n(x - x_0)\cdots(x - x_{n-2})h \quad (5.20)$$

ახლა თუ (5.20) –ში დავუშვებთ, რომ $x = x_0$, მივიღებთ:

$$\Delta^1 P_n(x_0) = a_1 h.$$

მეორეს მხრივ, (5.18) – დან და (5.15) –დან გამომდინარეობს, რომ

$$\Delta^1 P_n(x_0) = y_1 - y_0.$$

ამ ორი გამოსახულების შედარებიდან $\Delta^1 P_n(x_0)$ - თვის ვიღებთ, რომ საძებნი პოლინომის პირველი კოეფიციენტი ცნობილი სიდიდეების მეშვეობით ასე გამოისახება:

$$a_1 = (y_1 - y_0)/h \qquad (5.21)$$

მეორე კოეფიციენტის a_2 საანგარიშოდ განიხილება (5.16) პოლინომის მეორე საბოლოო სხვაობა:

$$\Delta^2 P_n(x) = \Delta^1 P_n(x+h) - \Delta^1 P_n(x).$$

ცხადია ის არ შეიცავს შესაკრებს a_1 კოეფიციენტით, ვინაიდან ეს კოეფიციენტი წარმოადგენს მამრავლს მუდმივასი, რომელიც შედის ჯამში $\Delta^1 P_n(x)$ (5.20) თანახმად. თუ შევასრულებთ გარდაქმნებს, რომლებიც ანალოგიურია გარდაქმნებისა, რომლებიც ჩატარდა საწყისი პოლინომის პირველი საბოლოო სხვაობის საანგარიშოდ მეორე პოლინომის $\Delta^2 P_n(x)$ თავისუფალი წევრი იქნება $2a_2h^2$, ხოლო დანარჩენი წევრები სეიცავენ თანამამრავლებს $(x - x_0)$. ცხადია $x = x_0$ წერტილში მივიღებთ::

$$\Delta^2 P_n(x_0) = 2a_2h^2.$$

მეორეს მხრივ თეორიიდან ცნობილია, რომ ნებისმიერი ფუნქციისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = P_n(x_2) - 2P_n(x_1) + P_n(x_0),$$

(5.15) პირობის ძალით:

$$\Delta^2 P_n(x_0) = y_2 - 2y_1 - y_0.$$

შედარება საძებნი პოლინომის მეორე კოეფიციენტისათვის იძლევა შემდეგ გამოსახულებას:

$$a_2 = (y_2 - 2y_1 - y_0)/(2h^2) \ \ (5.22).$$

ანალოგიურად, საძებნი (5.16) პოლინომის სხვა კოეფიციენტების მისაღებად საჭიროა გავიმეოროთ აღწერილი პროცედურა უმაღლესი საბოლოო სხვაობებისათვის. შედეგად ჩვენ მივიღებთ ნიუტონის ინტერპოლაციური პოლინომის კოეფიციენტების ზოგადი სახის შემდეგ გამოსახულებას:

$$a_i = \frac{\Delta^i(y_0)}{i!h^i} \qquad (5.23)$$

შესაბამისად ნულოვან კვანძში x_0, $1,2,\cdots,n$ რიგის საბოლოო სხვაობების მეშვეობით გამოთვლილი ნიუტონის მაინტერპოლირებელი პოლინომი გამოსახება შემდეგი ფორმულით:

$$P_x(x) = y_0 + \sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\Delta^i(y_0)}{i!h^i}\prod_{k=0}^{i-1}(x - x_k)\right] \quad (5.24).$$

მტკიცდება, რომ აგებული პოლინომი აკმაყოფილებს პირობას (5.15).

პრაქტიკული მიზნებისათვის ნიუტონის პოლინომის (5.14) ანგარიში უმჯობესია ჩავატაროთ ახალ ცვლადის შემოტანით:

$$q = (x - x_0)/h$$

მაშინ ნიუტონის მაიტერპოლირებელ პოლინომს ექნება შემდეგი სახე:

$$P_n(x) = y_0 + q\cdot\Delta^1 y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$+\frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\cdot\Delta^n y_0 \quad (5.25)$$

(5.25) ფორმულის ანალიზი აჩვენებს, რომ აგებული ნიუტონის ინტერპოლანტის ცდომილება მინიმალურ მნიშვნელობებს იღებს მაშინ როდესაც არგუმენტის მნიშვნელობები ახლოსაა x_0 კვანძთან. ზემოთ ლაგრანჟის პოლინომისათვის მოყვანილი მაგალითი აჩვენებს, რომ ყოველთვის მიზანშეწონილი არაა პოლინომის აგება ყოველი კვანძისათვის, ვინაიდან ამ შემთხვევაში შეიძლება გაჩნდნენ დაუსაბუთებელი გადახრები. პრაქტიკული გაანგარიშებებისას ხშირად წინასწარ ირჩევენ მაინტერპოლირებელი მრავალწევრის ხარისხს. შემდეგ ნულოვან x_0 კვანძად ირჩევენ იმ კვანძს, რომელიც მარცხნიდან უახლოესია x არგუმენტთან, რომლისთვისაც გამოთვლილ უნდა იქნას უცნობი $f(x)$ ფუნქციის მნიშვნელობა. n -ური ხარისხის ინტერპოლანტი (5.25) აიგება x არგუმენტის მარჯვნივ განლაგებულ x_0 და n კვანძებში ფუნქციის y_i მნიშვნელობების დახმარებით. ფუნქციის მნიშვნელობები x_0 კვანძის მარცხნივ არ გამოიყენება.

მოვიყვანოთ ფორმულები ორი მნიშვნელოვანი ინტერპოლაციისათვის.

1)წრფივი ინტერპოლაცია. ინტერპოლაციური პოლინომის (5.25) აგება ხდება ორი კვანძით და წარმოადგენს წრფივ ფუნქციას:

$P_1(x) = y_0 + q \cdot \Delta^1 y_0$ ან $P_1(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}(y_1 - y_0)$ (5.26)

ამ უკანასკნელ ფორმულას ადვილად მივიღებთ ნახ. 9 – ის მეშვეობით, შევაერთებთ რა ორ წერტილს (x_0, y_0) და (x_1, y_1) წრფის მონაკვეთით. მეზობელი კვანძების წერტილების (x_i, y_i) და (x_{i+1}, y_{i+1}) წრფის მონაკვეთით შეერთებითა შეიძლება მივიღოთ და ნაწილ-ნაწილ წრფივი ინერპოლაციური გრაფიკი. პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ ფიზიკის მრავალი ამოცანისათვის ინტერპოლაციის ასეთი სახე მისაღები არაა, ვინაიდან შეიცავს დიდ ცდომილებებს.

2)კვადრატული ინტერპოლაცია. (5.25) პოლინომისათვის ამ შემთხვევაში შეირჩევა სამი კვანძი. პოლინომი წარმოადგენს შემდეგი სახის კვადრატულ ფუნქციას:

$$P_2(x) = y_0 + q \cdot \Delta^1 y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \Delta^2 y_0 \text{ ან}$$

$$P_2(x) = y_0 + q \cdot (y_1 - y_0) + \frac{q(q-1)}{2} \cdot (y_2 - 2y_1 + y_0) \qquad (5.27)$$

გამოთვლით მათემატიკაში ასევე გამოიყენებიან ინტერპოლაციური პოლინომები, რომლებიც აგებულია თანაბრად დაშორებული კვანძების საფუძველზე, რომელთა კოეფიციენტების გათვლაც ხდება ფუნქციის მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც განთავსებულია არჩეული x წერტილების, როგორც მარცხნივ ისე მარჯვნივ.

ასეთი ინტერპოლანტების ასაგებად მოსახერხებელია კვანძები მოცემული იყოს შემდეგი სახით

$$x_i = x_0 + ih, \text{ სადაც } i = 0, \mp 1, \mp 2, \cdots \mp n \qquad (5.28)$$

ამრიგად კვანძის ნომრები შეიძლება იყოს როგორც დადებითი ისე უარყოფითი რიცხვებიც. ცენტრალურ კვანძს გააჩნია ნულოვანი ინდექსი.

შემდგომში q სიდიდედ გამოვიყენებთ (5.15) ფორმულით განსაზღვრულ სიდიდეს. ქვემოთ მოყვანილია სტირლინგის ინტერპოლაციური ფორმულა., შემდეგი სახით:

$$P_S(x) = y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \cdot \Delta^2_{y-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3_{y-2} + \Delta^3_{y-1}}{2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)}{4!} \cdot \Delta^4_{y-2} + \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5_{y-3} + \Delta^5_{y-2}}{2} +$$

$$+ \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{6!} \cdot \Delta^6_{y-3} + \cdots + \frac{q(q^2-1)(q^2-4)(q^2-9)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n-1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{(2n)} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)(q^2-9)\cdots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n} \qquad (5.29).$$

ამ უკანასკნელ ფორმულაში $\Delta^k y_i$ სიმბოლოებით აღნიშნულია საბოლოო სხვაობები, რომლებიც გამოითვლება ფორმულებით:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.\ \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \text{ და ა.შ.}$$

სპეციალურმა კვლევებმა აჩვენეს, რომ სტირლინგის ინტერპოლაციურ ფორმულას (5.29) უმცირესი მნიშვნელობა გააჩნია მაშინ როდესაც $|q| \leq 1/4$.

სტირლინგის კვადრატულ ინტერპოლაციურ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე

$$P_S(x) = y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \cdot \Delta^2_{y-1} = y_0 + \frac{y}{2} \cdot (y_0 - y_{-1}) +$$

$$+ \frac{q^2}{2}(y_i + y_{-1} - 2y_0).$$

დანართი 1
ძირითადი ფორმულები

1. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$$

2. შეწონილი საშუალო

$$x_i = \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}$$

3. ბსოლუტური ცდომილება

$$\Delta x_i = x - x_i$$

ან

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

აქ $\bar{x}$-გასაზომი სიდიდის საშუალო მნიშვნელობაა, ხოლო x-ნამდვილი მნიშვნელობა. ვინაიდან როგორც წესი ნამდვილი მნიშვნელობა უცნობია სარგებლობენ ფორმულით

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

4. ფარდობითი ცდომილება

$$\Delta x_{ფარდ} = \frac{\Delta x_i}{x}, \text{ ან } \Delta x_{ფარდ} = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}}$$

5. გაზომვათა n რაოდენობიასას ცალკეული გაზომვის საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}$$

6.შერჩევითი დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}$$

7.გენერალური დისპერსია

$$\sigma^2 = \lim_{n \to \infty} S_n^2$$

8.გაზომვის წონა

$$p = \frac{k}{\sigma^2}$$

9.არათანაბარწერტილოვანი გაზომვის დისპერსია

$$S_n^2 = \frac{\sum_1^n p(\bar{x} - x_i)^2}{n \sum_1^n p_i}$$

10.ვარიაციის კოეფიციენტი

$$w = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ (გენერალური)}$$

$$w_n = \frac{S_n}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ (შერჩევთი)}$$

11.საშუალო არითმეტიკული ცდომილება შერჩევითი)

$$r_n = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \cdots + |\bar{x} - x_i|}{n} = \frac{\sum_1^n |\bar{x} - x_i|}{n}$$

12.გენერალური საშუალო არითმეტიკული ცდომილება

$$\rho = \lim_{n \to \infty} r_n$$

13.კავშირი საშუალოარითმეტიკულ და საშუალოკვადრატულ ცდომილებას შორის

$$\rho = 0.80\sigma; \quad \alpha = 1.25\rho$$

14.ნდობის ინტერვალი ინტერვალებისთვის

Δx	σ	2σ	3σ
α	0.68	0.95	0.097

15.დისპერსიის შეკრების კანონი:

$$\text{თუ } Z = X + Y, \text{ მაშინ } S_z^2 = S_x^2 + S_y^2$$

16.საშუალო არითმეტიკულის ცდომილება

$$S_{n\bar{x}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$$

17.სტიუდენტის კოეფიციენტი

$$t_{\alpha_n} = \frac{\sqrt{n}\Delta x}{S_n}$$

18.შემთხვევითი დამოუკიდებელი ცდომილებების შეკრების კანონი

$$\text{თუ } Y = X_1 \cdot X_2 \cdots X_3$$

მაშინ $\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\Delta X_n}{X_n}\right)^2$;   თუ $Y = \frac{X_1}{X_2}$, მაშინ

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2;$$

თუ $Y = AX + B$, სადაც A და B მუდმივი სიდიდეებია, მაშინ $\Delta Y = A\Delta X$

19.ჩებიშევის უტოლობა

$$P(|\bar{x} - x_i| < \alpha\sigma) < \frac{1}{\alpha^2}$$

20.ფუნქციის შემთხვევითი ცდომილება

$$\text{თუ } Y = f(X), \text{ მაშინ } \Delta Y = f^I(X)\Delta X$$

და

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{f^I(X)}{f(X)}\Delta X;$$

თუ $Y = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, მაშინ $\Delta Y = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}$

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial lnf}{\partial X_i}\Delta X_i\right)^2}$$

21.უმცირესი კვადრატების მეთოდი

$$y = kx + b,$$

$$k = \frac{n\sum_i^n x_i y_i - \sum_i^n x_i - \sum_i^n y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{n\sum_i^n x_i^2 \sum_i^n y_i^2 - \sum_i^n x_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n x_i y_i}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_0^2 = \frac{\sum_i^n y_i^2}{(n-2)} - \frac{(\sum_i^n y_i)^2}{n(n-2)} - \frac{(n\sum_1^n x_i y_i)^2}{\left|n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2\right|(n-2)n}$$

$$S_k^2 = \frac{S_0^2 n}{n\sum_i^n x_i^2 - (\sum_i^n x_i)^2}$$

$$S_b^2 = \frac{S_0^2 \sum_i^n x_i^2}{n\sum_i^n x_i^2 - \left(\sum_i^n x_i\right)^2}$$

დამხმარე ფორმულები

1.საშუალო არითმეტიკული

$$\bar{x} = x_0 + \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - x_0),$$

სადაც x_0 - $\bar{x}$ - თან ახლოს მყოფი ნებისმიერი რიცხვია

2.საშუალო კვადრატული ცდომილება

ა)ერთეული გაზომვის

$$S_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - \frac{|\sum_1^n (x_0 - x_i)|^2}{n}}{n-1}}$$

ბ)საშუალო არითმეტიკულის

$$S_{n\bar{x}} = \sqrt{\frac{n\sum_1^n (x_0 - x_i)^2 - |\sum_1^n (x_0 - x_i)|^2}{n-1}}$$

დანართი 2.

ცხრილები

ცხრილი I. $\Phi(t)$ ალბათობის ინტეგრალთან დაკავშირებული სიდიდეები; t=t($\mathcal{P}$) ფუნქცია წარმოადგენს $\mathcal{P} = 2\Phi(t)$ ფუნქციის შექცეულს

t	$\Phi(t)$	$1 - 2\Phi(t)$	1-$\mathcal{P}$	t=t($\mathcal{P}$)	$\mathcal{P}$
2,5	0,49379	0,01242	0,05	1,960	0,95
2,6	49534	00932	04	2,054	96
2,7	49653	00693	03	2,170	97
2,8	49744	00511	02	2,326	98
2,9	49813	00373	01	2,576	99
3,0	0,49865	0,00270	0,009	2,612	0,991
3,1	49903	00194	008	2,652	992
3,2	49931	00137	007	2,697	993
3,3	49952	00097	006	2,748	994
3,4	49966	00067	005	2,807	995
3,5	0,499767	0,000465	0,004	2,878	0,996
3,6	499841	000318	003	2,968	997
3,7	499892	000216	002	3,090	998
3,8	499927	000145	001	3,291	999
3,9	499952	000095	0009	3,290	9991
4,0	0,499968	0,000063	0,0008	3,353	0,9992
4,1	499979	000041	0007	3,390	9993
4,2	499987	000027	0006	3,432	9994
4,3	499991	000017	0005	3,481	9995
4,4	499995	000011	0004	3,540	9996
4,5	0,499966	0,0000068	0,0003	3,615	0,9997
4,6	499979	0000041	0002	3,720	9998
4,7	499987	0000045	0001	3,891	9999
4,8	0,499992	0,0000016	10^{-5}	4,417	1-10^{-5}
4,9	499995	0000009	10^{-6}	4,892	1-10^{-6}
5,0	499997	0000006	10^{-7}	5,327	1-10^{-7}

ცხრილი II. ჩებიშევის ორთოგონალური მრავალწევრის მნიშვნელობა 9 წერტილისათვის

$$N = 9 = H_0$$

$$p_1 = u = p_1^*,\ \ p_2 = u^2 - \frac{20}{3} = \frac{1}{3}p_2^*,$$

$$p_3 = u^3 - \frac{59}{5}u = \frac{6}{5}p_3^*,$$

$$p_4 = u^4 - \frac{115}{7}u^2 + \frac{216}{7} = \frac{12}{7}p_4^*,$$

$$p_5 = u^5 - \frac{185}{9}u^2 + \frac{716}{9}u = \frac{20}{3}p_5^*.$$

u	p_1^*	p_2^*	p_3^*	p_4^*	p_5^*
0 1 2 3 4	0 1 2 3 4	-20 -17 -8 7 28	0 -9 -13 -7 14	18 9 -11 -21 14	0 9 4 -11 4
7	60	924	1188	3432	3120
11	60	308	$\frac{7128}{5}$	$\frac{41184}{7}$	20800
$\frac{H_j}{H_{j-1}}$	$6\frac{2}{3}$	$5\frac{2}{15}$	$4\frac{22}{35}$	$4\frac{8}{63}$	$3\frac{53}{99}$

ცხრილი III.

ნდობის ალბათობები α ინტერვალისთვის გამოსახული საშუალო კვადრატული ცდომილების წილებში $\varepsilon = \frac{\Delta x}{\alpha}$

ლაპლასის ფუნქცია: $2\Theta = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}} d\varepsilon = \alpha$

ε	α	ε	α	ε	α
0	0	1.2	0.77	2.6	0.990
0.05	0.04	1.3	0.80	2.7	0.993
0.1	0.08	1.4	0.84	2.8	0.995
0.15	0.12	1.5	0.87	2.9	0.996
0.2	0.16	1.6	0.89	3.0	0.997
0.3	0.24	1.7	0.91	3.1	0.9981
0.4	0.31	1.8	0.93	3.2	0.9986
0.5	0.38	1.9	0.94	3.3	0.9990
0.6	0.45	2.0	0.95	3.4	0.9993
0.7	0.55	2.1	0.964	3.5	0.9995
0.8	0.57	2.2	0.972	3.6	0.9997
0.9	0.63	2.3	0.973	3.7	0.9998
1.0	0.68	2.4	0.984	3.8	0.99986
1.1	0.73	2.5	0.988	3.9	0.99990
					0.99993

ცხრილი IV

სტიუდენტის კოეფიციენტები t_{α_n}

n	α					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
2	0.16	0.33	0.51	0.73	1.00	1.38
3	.14	.45	.45	.62	.82	1.06
4	.14	.42	.42	.58	.77	0.98
5	.13	.41	.41	.57	.74	.94
6	.13	.27	.41	.56	.73	.92
7	.13	.27	.40	.55	.72	.90
8	.13	.26	.40	.55	.71	.90
9	.13	.26	.40	.54	.71	.90
10	.13	.26	.40	.54	.70	.88
11	.13	.26	.40	.54	.70	.88
12	.13	.26	.40	.54	.70	.87
13	.13	.26	.40	.54	.70	.87
14	.13	.26	.39	.54	.69	.87
15	.13	.26	.39	.54	.69	.87
16	.13	.26	.39	.54	.69	.88
17	.13	.26	.39	.54	.69	.86
18	.13	.26	.39	.53	.69	.86
19	.13	.26	.39	.53	.69	.86
20	.13	.26	.39	.53	.69	.86
21	.13	.26	.39	.53	.69	.86
22	.13	.26	.39	.53	.69	.86
23	.13	.26	.39	.53	.69	.86
24	.13	.26	.39	.53	.69	.86
25	.13	.26	.39	.53	.69	.86
26	.13	.26	.39	.53	.68	.86
27	.13	.26	.39	.53	.68	.86
28	.13	.26	.39	.53	.68	.86
29	.13	.26	.39	.53	.68	.86
30	.13	.26	.39	.53	.69	.85
40	.13	.26	.39	.53	.68	.85
60	.13	.25	.39	.53	.68	.85
120	.13	.25	.39	.53	.68	.85
∞	.13	.25	.39	.53	.67	.86

ცხრილი IV. სტიუდენტის კოეფიციენტები t_{α_n} (გაგრძელება)

n	α						
	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	2.0	3.1	6.3	12.7	31.8	63.7	636.6
3	1.3	1.9	2.9	4.3	7.0	9.9	31.6
4	1.3	1.6	2.4	4.3	4.5	5.8	12.9
5	1.2	1.5	2.1	4.3	3.7	4.6	3.6
6	1.2	1.5	2.0	2.6	3.4	4.0	6.9
7	1.1	1.4	1.9	2.4	3.1	3.7	6.0
8	1.1	1.4	1.9	2.4	3.0	3.5	5.4
9	1.1	1.4	1.9	2.3	2.9	3.4	5.0
10	1.1	1.4	1.8	2.3	2.8	3.3	4.9
11	1.1	1.4	1.8	2.2	2.8	3.2	4.6
12	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.5
13	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.1	4.3
14	1.1	1.4	1.8	2.2	2.7	3.0	4.2
15	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	3.0	4.1
16	1.1	1.3	1.8	2.1	2.6	2.9	4.0
17	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
18	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	4.0
19	1.1	1.3	1.7	2.1	2.6	2.9	3.9
20	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.9	3.9
21	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
22	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
23	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3,8
24	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.8
25	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
26	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
27	1.1	1.3	1.7	2.1	2.5	2.8	3.7
28	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
29	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
30	1.1	1.3	1.7	2.0	2.5	2.8	3.7
40	1.1	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.6
60	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.7	3.5
120	1.0	1.3	1.7	2.0	2.4	2.6	3.4
∞	1.0	1.3	1.6	2.0	2.3	2.6	3.3

ცხრილი V

გაზომვათა აუცილებელი რაოდენობა, Δ ცდომილების მისაღებად p საიმედოობით						
$\Delta = \Delta x/\sigma$	p მნიშვნელობა					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	127
0.2	13	29	70	99	171	277
0.1	47	169	273	387	668	1089

ცხრილი VI
ნდობის ინტერვალი σ-თვის

α	0.99		0.98		0.95		0.90	
n \ γ	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
2	0.36	160	0.39	80	0.45	32	0.51	16
3	.43	14	.47	10	.52	6.3	.58	4.4
4	.48	6.5	.51	5.1	.57	3.7	.62	2.9
5	.52	4.4	.55	3.7	.60	2.9	.65	2.4
5	.55	3.5	.58	3.0	.62	2.5	.67	2.1
7	.57	3.0	.60	2.6	0.64	2.2	.68	1.9
8	.59	2.7	.62	2.4	.66	2.0	.70	1.8
9	.60	2.4	.63	2.2	.68	1.9	.72	1.7
10	.62	2.3	.64	2.1	.69	1.8	.73	1.6
11	.63	2.2	.66	2.0	.70	1.7	.74	1.6
12	.64	2.1	.67	1.9	.71	1.6	.75	1.5
13	.65	2.0	.68	1.8	.72	1.6	.76	1.5
14	.66	1.9	.69	1.8	.73	1.6	.76	1.5
15	.67	1.8	.69	1.7	.73	1.5	.77	1.5
16	.68	1.8	.70	1.7	.74	1.5	.77	1.4
17	.68	1,8	.71	1.7	.75	1.5	.79	1.4
18	.69	1.7	.72	1.6	.75	1.5	.79	1.4
19	.70	1.7	.73	1.6	.76	1.5	.79	1.4
20	.70	1.7	.75	1.5	.76	1.4	.81	1.4
25	.73	1.6	.77	1.4	.76	1.3	.83	1.3
30	.74	1.5	.79	1.3	.80	1.3	.85	1.3
40	.77	1.4	.7	1.3	.82	1.2	.86	1.2
50	.79	1.3	.81	1.2	.84	1.2	.88	1.2
70	.82	1.3	.84	1.2	.86	1.2	.89	1.2
100	.85	1.2	.86	1.2	.88	1.2	.90	1.1
200	.89	1.1	.90	1.1	.91	1.1	.93	1.1

ცხრილი VII
აუცილებელ გაზომვათა რაოდენობა ε ტოლი შემთხვევითი ცდომილების α საიმედოობით მისაღწევად

$\varepsilon = \frac{\Delta x}{S}$	α					
	0.5	0.7	0.9	0.95	0.99	0.999
1.0	2	3	5	7	11	17
0.5	3	6	13	18	31	50
0.4	4	8	19	27	46	74
0.3	6	13	32	46	78	130
0.2	13	29	70	100	170	280
0.1	47	110	270	390	700	1100
0.05	180	430	1100	1500	2700	4300
0.01	4500	1100	27000	38000	66000	11000

ცხრილი VIII

უხეში ცდომილების შეფასება

$v_{მაქს} = \left|\frac{\bar{x}-x_k}{S}\right|$ n გაზომვათა რიგში β ალბათობისთვის

n	β			
	0.1	0.05	0.025	0.01
3	1.41	1.41	1.41	1.41
4	1.65	1.69	1.71	1.72
5	1.79	1.87	1.92	1.96
6	1.89	2.00	2.07	2.13
7	1.97	2.09	2.18	2.27
8	2.04	2.17	2.27	2.37
9	2.10	2.24	2.35	2.46
10	2.15	2.29	2.41	2.54
11	2.19	2.34	2.47	2.61
12	2.23	2.39	2.52	2.66
13	2.26	2.43	2.56	2.71
14	2.30	2.46	2.60	2.76
15	2.33	2.49	2.64	2.80
16	2.35	2.52	2.67	2.84
17	2.38	2.55	2.70	2.87
18	2.40	2.58	2.73	2.90
19	2.43	2.60	2.75	2.93
21	2.45	2.62	2.78	2.96
21	2.47	2.64	2.80	2.98
22	2.49	2.66	2.82	3.01
23	2.50	2.68	2.84	3.03
24	2.52	2.70	2.86	3.05
25	2.54	2.72	2.88	3.07

ცხრილი IX

საწყისი მონაცემები		ანგარიში			კონტროლი		
x	m	u	mu	mu^2	u	mu	mu^2
35,6	1	-4	-4	16	-5	-5	26
35,9	3	-1	-3	3	-2	-6	12
36,1	3	1	3	3	0	0	0
36,2	2	2	4	8	1	2	2
36,6	1	6	6	36	5	5	25
ჯამი	10	–	6	66	–	–	64

ცხრილი X

ინტერვალები	x	m	u	mu	mu^2	u	mu	mu^2
8,275 − 8,325	8,30	1	−6	−6	35	−7	−7	49
8,325 − 8,375	8,35	2	−5	−5	50	−6	−12	72
8,375 − 8,425	8,40	4	−4	−4	64	−5	−20	100
8,425 − 8,475	8,45	5	−3	−3	45	−4	−20	80
8,475 − 8,525	8,50	8	−2	−2	32	−3	−24	72
8,525 − 8,775	8,55	10	−1	−1	10	−2	−20	40
8,575 − 8,625	8,60	18	0	0	0	−1	−18	18
8,625 − 8,675	8,65	17	1	1	17	0	0	0
8,675 − 8,725	8,70	12	2	2	48	1	12	12
8,725 − 8,775	8,75	9	3	3	81	2	18	36
8,525 − 8,775	8,80	7	4	4	112	3	21	63
8,775 − 8,825	8,85	6	5	5	150	4	24	96
8,825 − 8,875	8,90	0	6	6	0	5	0	0
8,875 − 8,925	8,95	1	7	7	49	6	6	36
8,925 − 8,975								
ჯამი	−	100	−	60	694	−	−40	674

ცხრილი XI. ფუნქცია $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$
(სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუქცია)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
−1,25	0,1056	−0,93	0,1762	−0,61	0,2709	−0,29	0,3859
−1,24	0,1075	−0,92	0,1788	−0,6	0,2743	−0,28	0,3897
−1,23	0,1093	−0,91	0,1814	−0,59	0,2776	−0,27	0,3936
−1,22	0,1112	−0,9	0,1841	−0,58	0,2810	−0,26	0,3974
−1,21	0,1131	−0,89	0,1867	−0,57	0,2843	−0,25	0,4013
−1,2	0,1151	−0,88	0,1894	−0,56	0,2877	−0,24	0,4052
−1,19	0,1170	−0,87	0,1922	−0,55	0,2912	−0,23	0,4090
−1,18	0,1190	−0,86	0,1949	−0,54	0,2946	−0,22	0,4129
−1,17	0,1210	−0,85	0,1977	−0,53	0,2981	−0,21	0,4168
−1,16	0,1230	−0,84	0,2005	−0,52	0,3015	−0,2	0,4207
−1,15	0,1251	−0,83	0,2033	−0,51	0,3050	−0,19	0,4247
−1,14	0,1271	−0,82	0,2061	−0,5	0,3085	−0,18	0,4286
−1,13	0,1292	−0,81	0,2090	−0,49	0,3121	−0,17	0,4325
−1,12	0,1314	−0,8	0,2119	−0,48	0,3156	−0,16	0,4364
−1,11	0,1335	−0,79	0,2148	−0,47	0,3192	−0,15	0,4404
−1,1	0,1357	−0,78	0,2177	−0,46	0,3228	−0,14	0,4443
−1,09	0,1379	−0,77	0,2206	−0,45	0,3264	−0,13	0,4483
−1,08	0,1401	−0,76	0,2236	−0,44	0,3300	−0,12	0,4522
−1,07	0,1423	−0,75	0,2266	−0,43	0,3336	−0,11	0,4562
−1,06	0,1446	−0,74	0,2296	−0,42	0,3372	−0,1	0,4602
−1,05	0,1469	−0,73	0,2327	−0,41	0,3409	−0,09	0,4641
−1,04	0,1492	−0,72	0,2358	−0,4	0,3446	−0,08	0,4681
−1,03	0,1515	−0,71	0,2389	−0,39	0,3483	−0,07	0,4721
−1,02	0,1539	−0,7	0,2420	−0,38	0,3520	−0,06	0,4761
−1,01	0,1562	−0,69	0,2451	−0,37	0,3557	−0,05	0,4801
−1	0,1587	−0,68	0,2483	−0,36	0,3594	−0,04	0,4840
−0,99	0,1611	−0,67	0,2514	−0,35	0,3632	−0,03	0,4880
−0,98	0,1635	−0,66	0,2546	−0,34	0,3669	−0,02	0,4920
−0,97	0,1660	−0,65	0,2578	−0,33	0,3707	−0,01	0,4960
−0,96	0,1685	−0,64	0,2611	−0,32	0,3745	0	0,5000
−0,95	0,1711	−0,63	0,2643	−0,31	0,3783		
−0,94	0,1736	−0,62	0,2676	−0,3	0,3821		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
−1,25	0,1056	−0,93	0,1762	−0,61	0,2709	−0,29	0,3859
−1,24	0,1075	−0,92	0,1788	−0,6	0,2743	−0,28	0,3897
−1,23	0,1093	−0,91	0,1814	−0,59	0,2776	−0,27	0,3936
−1,22	0,1112	−0,9	0,1841	−0,58	0,2810	−0,26	0,3974
−1,21	0,1131	−0,89	0,1867	−0,57	0,2843	−0,25	0,4013
−1,2	0,1151	−0,88	0,1894	−0,56	0,2877	−0,24	0,4052
−1,19	0,1170	−0,87	0,1922	−0,55	0,2912	−0,23	0,4090
−1,18	0,1190	−0,86	0,1949	−0,54	0,2946	−0,22	0,4129
−1,17	0,1210	−0,85	0,1977	−0,53	0,2981	−0,21	0,4168
−1,16	0,1230	−0,84	0,2005	−0,52	0,3015	−0,2	0,4207
−1,15	0,1251	−0,83	0,2033	−0,51	0,3050	−0,19	0,4247
−1,14	0,1271	−0,82	0,2061	−0,5	0,3085	−0,18	0,4286
−1,13	0,1292	−0,81	0,2090	−0,49	0,3121	−0,17	0,4325
−1,12	0,1314	−0,8	0,2119	−0,48	0,3156	−0,16	0,4364
−1,11	0,1335	−0,79	0,2148	−0,47	0,3192	−0,15	0,4404
−1,1	0,1357	−0,78	0,2177	−0,46	0,3228	−0,14	0,4443
−1,09	0,1379	−0,77	0,2206	−0,45	0,3264	−0,13	0,4483
−1,08	0,1401	−0,76	0,2236	−0,44	0,3300	−0,12	0,4522
−1,07	0,1423	−0,75	0,2266	−0,43	0,3336	−0,11	0,4562
−1,06	0,1446	−0,74	0,2296	−0,42	0,3372	−0,1	0,4602
−1,05	0,1469	−0,73	0,2327	−0,41	0,3409	−0,09	0,4641
−1,04	0,1492	−0,72	0,2358	−0,4	0,3446	−0,08	0,4681
−1,03	0,1515	−0,71	0,2389	−0,39	0,3483	−0,07	0,4721
−1,02	0,1539	−0,7	0,2420	−0,38	0,3520	−0,06	0,4761
−1,01	0,1562	−0,69	0,2451	−0,37	0,3557	−0,05	0,4801
−1	0,1587	−0,68	0,2483	−0,36	0,3594	−0,04	0,4840
−0,99	0,1611	−0,67	0,2514	−0,35	0,3632	−0,03	0,4880
−0,98	0,1635	−0,66	0,2546	−0,34	0,3669	−0,02	0,4920
−0,97	0,1660	−0,65	0,2578	−0,33	0,3707	−0,01	0,4960
−0,96	0,1685	−0,64	0,2611	−0,32	0,3745	0	0,5000
−0,95	0,1711	−0,63	0,2643	−0,31	0,3783		
−0,94	0,1736	−0,62	0,2676	−0,3	0,3821		

შენიშვნა: როდესაც $x>0$ მაშინ $\Phi(x)$ იანგარიშება ფორმულით $\Phi(x)=1-\Phi(-x)$

დანართი 3.
მაგალითები

განვიხილოთ ექსპერიმენტული მონაცემების დამუშავების სხვადასხვა კონკრეტული მაგალითი

I.პირდაპირი გაზომვები.

ამ შემთხვევაში რეკომენდებულია ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

1) გაზომვის თითოეული მონაცემი შეიტანეთ ცხრილში

2) გამოთვალეთ n გაზომვის საშუალო მნიშვნელობა

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

3) გამოინგარიშეთ ცალკეული გაზომვის ცდომილება

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i$$

4) გამოინგარიშეთ ცალკეული გაზომვის ცდომილების კვადრატი

$$(\Delta x_1)^2, (\Delta x_1)^2, \cdots, (\Delta x_n)^2$$

5) გამოინაგარიშეთ საშუალო არითმეტიკულის საშუალო კვადრატული ცდომილება

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_1^n (\Delta x)^2}{n(n-1)}}$$

6) აიღეთ საიმედოობის მნიშვნელობა (ჩვეულებრივ იღებენ $p = 0.95$)

7) საიმედოობის მოცემული p და გაზომვის n რაოდენობისაგან გამომდინარე, განსაზღვრეთ სტიუდენტის კოეფიციენტის მნიშვნელობა t

8) გამოიანგარიშეთ ნდობის ინტერვალი (გაზომვის ცდომილება)

$$\Delta x = S_r \cdot t$$

9) თუ გაზომვის შედეგის ცდომილება Δx ტოლი ან დაახლოებით ერთი სიდიდის აღმოჩნდა ხელსაწყოს ცდომილებისა δ, მაშინ ნდობის ინტერვალის საზღვრად აიღეთ

$$\Delta x = \sqrt{(S_r \cdot t)^2 + \delta^2}$$

თუ ერთი ცდომილება ნაკლებია მეორეზე სამჯერ ან მეტჯერ, უფრო ნალები მოიშორეთ

10) საბოლოოშედეგი ჩაწერეთ შემდეგი სახით

$$x = \bar{x} \pm \Delta x$$

11) შეაფასეთ გაზომვის შედეგის ფარდობითი ცდომილება

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$$

ვნახოთ თუ როგორ გამოიყენება ზემოთ მოყვანილი ფორმულები კონკრეტული რიცხვებისთვის

ვთქვათ გავზომეთ ღეროს დიამეტრი d (სისტემატური ცდომილება იყოს 0.005 მმ). გაზომვის შედეგები შევიტანოთ ცხრილის მეორე გრაფაში. მოვძებნოთ $\bar{x}$ და ცხრილის მესამე გრაფაში შევიტანოთ სხვაობები $d - \bar{x}$, ხოლო მეოთხეში – ამ სხვაობის კვადრატები. $\bar{x} = \frac{\sum_1^n x_i}{n} = \frac{\sum_1^6 d_i}{6} = \frac{24.06}{6} = 4.01$ მმ

$$S_r = \sqrt{\frac{\sum_1^6 (d-\bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.0046}{30}} = 0.01238 \text{ მმ}$$

ავიღებთ, რა საიმედოობას P = 0.95, სტიუდენტის კოეფიციენტების ცხრილიდან ექვსი გაზომვისათვის ვპოულობთ t = 2.57 აბსოლუტურ ცდომილებას ვპოულობთ ფორმულით $\Delta d = S_r \cdot t$ = 0.01238 · 2.57 = 0.04 მმ.

ცხრილი

n	d, მმ	$d - x$	$(d - \bar{x})^2$
1	4.02	+ 0.01	0.0001
2	3.98	- 0.03	0.0009
3	3.97	- 0.04	0.0016
4	4.01	+ 0.00	0.0000
5	4.05	+ 0.04	0.0016
6	4.03	+ 0.02	0.0004
$\sum$	24.06	-	0.0046

შევადაროთ შემთხვევითი და სისტემატური ცდომილებები

$$\frac{\Delta}{\delta}=\frac{0.04}{0.005}=8$$

ვინაიდან $\delta<\Delta$ ამიტომ $\delta=0.005$ უკუვაგდოთ.

საბოლოო შედეგი ასე ჩავწეროთ $d=(4.01\pm 0.04)$ როცა $p=0.95$

$$\varepsilon=\frac{\Delta x}{x}\cdot 100\%=\frac{0.04}{4.01}\cdot 100\%\approx 1\%$$

II.არაპირდაპირი გაზომვები

როგორც ზემოთ იყო მითითებული არაპირდაპირი გაზომვების დროს ჩვენთვის საინტერესო სიდიდე წარმოადგენს უშუალოდ გაზომვადი ერთი ან რამდენიმე სიდიდის ფუნქციას

$$N=f(x,y,z,\ldots)\ \ (1)$$

როგორც ალბათობის თეორიიდან გამომდინარეობს სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა მიიღება ამ უკანასკნელში გაზომილი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობის ჩასმით

$$\bar{N}=f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\ldots)\ \ (2)$$

საჭიროა მოვძებნოთ ამ ფუნქციის აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილებები, თუ ცნობილია დამოუკიდებელი სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობები.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა, როცა შეცდომა სისტემატურია ან შეცდომა შემთხვევითია. სისტემატური ცდომილების შემთხვევაში არაპირდაპირი გაზომვების შესახებ ერთიანი აზრი დღემდე არ არსებობს. მაგრამ თუ გამოვალთ არაპირდაპირი გაზომვების სისტემატური ცდომილების განმარტებიდან მიზანშეწონილია სისტემატური ცდომილებები ვიანგარიშოთ ფორმულებით

$$\delta N=\pm\left[\left|\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right|+\cdots\right]\ \ (3)\ \text{ან}$$

$$\delta N = \pm \bar{N}\left[\left|\frac{\partial lnf}{\partial x}\delta x\right| + \left|\frac{\partial lnf}{\partial y}\delta y\right| + \left|\frac{\partial lnf}{\partial z}\delta z\right| + \cdots\right] \ (4)$$

სადაც

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \dots$$

არის

$$N = f(x, y, z, \dots)$$

ფუნქციის კერძო წარმოებულები $x, y, z, \dots$-ით გამოთვლილი იმ პირობით, რომ ყველა არგუმენტი გარდა იმ არგუმენტებისა, რომლებითაც ჩატარებულია გაზომვა მუდმივი სიდიდეებია. $\delta x, \delta y, \delta z$ არგუმენტების სისტემატური ცდომილებებია. (3) ფორმულით სარგებლობა მოსახერხებელია მაშინ, როდესაც ფუნქციას $N = f(x, y, z, \dots)$ აქვს არგუმენტების ჯამის ან სხვაობის სახე, ხოლო (4) ფორმულით მაშინ როდესაც ფუნქციას აქვს არგუმენტების ნამრავლს ან ფარდობის სახე.

არაპირდაპირი გაზომვების შემთხვევითი ცდომილების საანგარიშოდ უნდა ვისარგებლოთ ფორმულებით

$$\Delta N = \pm\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \cdots\right] \ (5) \ ან$$

$$\Delta N = \pm \bar{N}\left[\left(\frac{\partial lnf}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial lnf}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial lnf}{\partial z}\Delta z\right)^2 + \cdots\right] \ (6)$$

სადაც $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z, \dots$ არის არგუმენტების ნდობის ინტერვალები $x, y, z, \dots$ არგუმენტების მოცემული ნდობის ალბათობებისთვის. მხედველობაში უნდა ვიქონიოთ, რომ Δx, Δy, Δz, ... ინტერვალები აღებული უნდა იყოს ერთნაირი ნდობის ალბათობებისთვის $P_1 = P_2 = \cdots = P_n = P$. ამ შემთხვევაში ΔN ნდობის ინტერვალისთვის საიმედოობა ასევე ტოლი იქნება P.

ხშირად შეიმჩნევა შემთხვევა, როდესაც სისტემატური ცდომილება და შემთხვევითი ცდომილება დაახლოებით ერთნაირია და ორივენი ერთნაირად განაპირობებენ გაზომვის სიზუსტეს. ამ შემთხვევაში სრული ცდომილება Σ განისაზღვრება როგორც კვადრატული ჯამი, შემთხვევითი Δ და

სისტემატური δ ცდომილებებისა, არა ნაკლებ P ალბათობით. სადაც P შემთხვევითი ცდომილების ნდობის ალბათობაა:

$$\sum \; = \sqrt{\Delta^2 + \delta^2}$$

არაპირდაპირი გაზომვებისას, აღწარმოებად პირობებში ფუქციას პოულობენ ცალკეული გაზომვებისთვის, ხოლო ნდობის ინტერვალს მოსაძებნი სიდიდის მისაღებად გამოთვლიან იმ მეთოდიკით, რომელიც გამოიყენება პირდაპირი გაზომვებისთვის.

უნდა აღინიშნოს, რომ როდესაც ფუნქციონალური დამოკიდებულება მოცემულია გალოგარითმებისთვის ხელსაყრელი ფორმულით, უფრო მარტივია განვსაზღვროთ ფარდობითი ცდომილება, ხოლო შემდეგ თანაფარდობიდან $\Delta N = \varepsilon \overline{N}$ მოვძებნოთ აბსოლუტური ცდომილება.

გათვლების დაწყებამდე ყოველთვის უნდა ვიფიქროთ ჩასატარებელ გათვლებზე და დავწეროთ ფორმულები, რომლებითაც ვისარგებლებთ ცდომილებების გამოსათვლელად. ეს ფორმულები საშუალებას მოგვცემენ დავადგინოთ თუ რა გაზომვები უნდა ჩავატაროთ განსაკუთრებული ყურადღებით და რომლებზე არ ღირს დიდი დროის დახარჯვა.

არაპირდაპირი გაზომვების შედეგების დამუშავებისას რეკომენდებულია ოპერაციების შემდეგი მიმდევრობა:

1)პირდაპირი გაზომვის ყველა სიდიდე დაამუშავეთ პირდაპირი გაზომვების შედეგების დამუშავების მეთოდებით. ამასთან გასაზომი სიდიდისთვის აიღეთ ნდობიდ ერთნაირიმნიშვნელობა P

2)არაპირდაპირი გაზომვის ცდომილება შეაფასეთ (3) და (4) ფორმულებით, სადაც წარმოებულები გამოთვალეთ სიდიდეების საშუალო მნიშვნელობისთვის. თუ ცალკეული გაზომვის ცდომილება დიფერენცირების შედეგში შედის რამდენჯერმე, უნდა დავაჯგუფოთ ის წევრები ერთად, რომლებიც შეიცავენ ერთნაირ დიფერენციალს, და ავიღოთ დიფერენციალის წინ ფრჩხილებში მდგომი წევრების მოდული; ხოლო ნიშანი d ნაცვლად ავიღოთ Δ ან δ

3)თუ სისტემატური და შემთხვევითი ცდომილებების მნიშვნელობები ახლოსააა ერთმანეთთან ისინი უნდა შევკრიბოთ ცდომილების შეკრების კანონით. თუ

ერთი ცდომილება ნაკლებია მეორეზე 3-ჯერ ან მეტჯერ უფრო ნაკლები უნდა უკუვაგდოთ.

4) გაზომვის შედეგები ჩაწერეთ შემდეგი სახით

$$N = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) \pm \Delta f$$

5) განსაზღვრეთ არაპირდაპირი გაზომვების სერიის ფარდობითი ცდომილება

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{f}.100\%$$

მოვიყვანოთ არაპირდაპირი გაზომვების დამუშავების მაგალითი

მაგალითი 1. ვიპოვოთ ცილინდრის მოცულობა ფორმულით

$$v = \pi d^2 h \quad (7)$$

სადაც d ცილინდრის დიამეტრია, ხოლო h - ცილინდრის სიმაღლე. ორივე ეს სიდიდე განისაზღვრება პირდაპირი გაზომვით. ვთვათ გაზომვებმა მოგვცეს შემდეგი შედეგები: $d = (4.01 \pm 0.03)$ მმ და $h = (8.65 \pm 0.02)$მმ ერთნაირი $p = 0.95$ საიმედოობით. მოცულობის საშუალო მნიშვნელობა იქნება

$v = 3.14 \cdot\ (4.01)^2 \cdot 8.65$ მმ³

გავალოგარითმოთ (7)

$$lnV = ln\pi + 2lnd + lnh - ln4$$

$$\frac{\partial lnV}{\partial d} = \frac{2}{d}$$

$$\frac{\partial lnV}{\partial h} = \frac{2}{d}$$

$$\Delta V = \pm \bar{V} \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \Delta d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}$$

$$\Delta V = \pm 109.19 \sqrt{\left(\frac{2 \cdot 0.03}{4.01}\right)^2 + \left(\frac{0.02}{8.65}\right)^2} \approx 1.65 \text{ მმ}^3$$

ვინაიდან გაზომვა ჩატარებულია მიკრომეტრით, რომლის დანაყოფის ფასია 0.01 მმ, სისტემატური ცდომილება $\delta d = \delta h = 0.01$ მმ. სისტემატური ცდომილება δV იქნება

$$\delta V = \pm\bar{V}\left(2\cdot\frac{\delta d}{d}+\frac{\delta h}{h}\right) = 109.19\left(\frac{2\cdot 0.01}{4.01}+\frac{0.01}{8.65}\right)\approx 0.67\ \text{მმ}^3$$

სისტემატური ცდომილება შესადარია შემთხვევითი ცდომილების და შესაბამისად

$$\Delta V = \sqrt{(1.65)^2+(0.67)^2} = 1.78 \approx 2\text{მმ}^3$$

ამრიგად გაზომვის შედეგია

$$V = (109 \pm 2)\ \text{მმ}^3 \quad p = 0.95\text{-თვის}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{109}\cdot 100\% \approx 2\%$$

მაგალითი 2. მოძებნეთ აბსოლუტური და ფარდობითი ცდომილების მნიშვნელობები შემდეგი ფუნქციონალური დამოკიდებულებისთვის

$$\tau = \frac{m_1+m_2-m_3}{2m_1m_2}$$

ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია ჯერ მოვძებნოთ ფარდობითი ცდომილება. მაშინ

$$d = \left[ln\left(\frac{m_1+m_2-m_3}{2m_1m_2}\right)\right] = d[ln(m_1+m_2-m_3)-ln2-lnm_1-lnm_2] =$$

$$= d[ln(m_1+m_2-m_3)]-d(ln2)-d(lnm_1)-d(lnm_2)=$$

$$= \frac{d(m_1+m_2-m_3)}{m_1+m_2-m_3}-\frac{dm_1}{m_1}-\frac{dm_2}{m_2} = \frac{dm_1}{m_1+m_2-m_3}+\frac{dm_2}{m_1+m_2-m_3}-\frac{dm_3}{m_1+m_2-m_3}-$$

$$-\frac{dm_1}{m_1}-\frac{dm_2}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1+m_2-m_3}-\frac{1}{m_1}\right)dm_1+\left(\frac{1}{m_1+m_2-m_3}-\frac{1}{m_2}\right)dm_2-$$

$$-\frac{dm_3}{m_1+m_2-m_3} = \frac{m_2-m_3}{m_1(m_1+m_2-m_3)}dm_1+\frac{m_1-m_3}{m_2(m_1+m_2-m_3)}dm_2-$$

$$-\frac{dm_3}{m_1+m_2-m_3} = \frac{m_2-m_3}{m_1(m_1+m_2-m_3)}dm_1+\frac{m_1-m_3}{m_2(m_1+m_2-m_3)}dm_2-$$

$$-\frac{1}{m_1+m_2-m_3}dm_3$$

(48) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{\Delta\tau}{\bar{\tau}} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)}\right]^2 (\Delta m_1)^2 + \left[\frac{m_1 - m_3}{m\ \ (m_1 + m_2 - m_3)}\right]^2 (\Delta m_1)^2 + \left[\frac{dm_3}{m_1 + m_2 - m_3}\right]^2}$$

აბსოლუტური შემთხვევითი ცდომილება მოიძებნება ფორმულიდან

$$\Delta\tau = \varepsilon \cdot \bar{\tau}$$

(4) ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ

$$\varepsilon = \frac{\delta\tau}{\bar{\tau}} = \left|\frac{m_2 - m_3}{m_1(m_1 + m_2 - m_3)}\delta m_1\right| + \left|\frac{m_1 - m_3}{m_2(m_1 + m_2 - m_3)}\delta m_2\right| + \left|\frac{\delta m_3}{m_1 + m_2 - m_3}\right|$$

აბსოლუტურ სისტემატურ ცდომილებას მოვძებნით გამოსახულებიდან

$$\delta\tau = \varepsilon \cdot \bar{\tau}$$

ლიტერატურა

1. ი.სხირტლაძე, თ.ტუღუში, ა.ოსიძე, ა. ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. თბ. 1980 წ, 124 გვ.

2. ვ. ცხადაია, ზ. ჯაბუა. ტესტებისა და ამოცანების კრებული მათემატიკაში. თბ.2009 წ, 457 გვ.

3. З.Румшиский. математическая обработка результатов эксперимента. М., Наука, 1971 г., 192 ст.

4. А.Н. Заидель. Ошибка измерении физических величин. Л., Наука, 1974 г., 108 ст.

5. М.А.Фадеев, К.А.Марков. Численные методы. Нижный новгород. 2010 г., 159 ст.

6. М.А.Фадеев. Элементарная обработка результатов эксперимента. Нижный новгород . 2010 г., 122 ст.

7. John R. Taylor, An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements, 2d Edition, University Science Books, 1997

8. Philip R. Bevington and D. Keith Robinson, Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, 2d Edition, WCB/McGraw-Hill, 1992

9. Handbook of physical measurements. Judith G Hall, Judith E Allenson, Karen W Gripp, Anne M Slavotinek. Reviewed by Deborah J.Stalker. Published by Oxford University Press, Oxford, 2006, pp.520