გ. ფანცულაია, გ. გიორგაძე, ა. კვალიაშვილი

ელემენტარული გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნა არასტანდარტული მეთოდებით

თბილისი 2009

აღნიშნულ ნაშრომში წარმოდგენილია ერთ დროს პოპულარული, მაგრამ შემდეგ მივიწყებული ამოცანები, რომელთა შესწავლა ხელს შეუწყობს საჯარო სკოლის მასწავლებლებს და მაღალი კლასის მოსწავლეებს ისეთი არასტანდარტული მეთოდების შეთვისებაში, როგორიცაა: ბარიცენტრული მეთოდი, მესერული მრავალკუთხედების ფართობის გამოთვლა ეილერის მახასიათებლებით, ჩევის, მენელაის, გიულდენის, კოპერნიკის, ვარინიონის და სხვათა თეორემები.

ყოველ თავს თან ერთვის სავარჯიშო ამოცანები პასუხებით, რომელთა ამოხსნით მკითხველს საშუალება ეძლევა გაეცნოს იმ ამოცანებს, რომლებიც წლების განმავლობაში დიდი ინტერესის საგანს წარმოადგენდნენ როგორც წმინდა მათემატიკოსებისათვის, ასევე მათემატიკის უშუალო გამოყენებით დაინტერესებულ პირთათვის.

აღნიშნული ნაშრომი გარკვეულ დახმარებას გაუწევს სხვადასხვა ტექნიკური სპეციალობის სტუდენტებს ზოგიერთი სივრცითი სხეულის ზედაპირის ფართობისა და მოცულობის გამოსათვლელად ელემენტარული გეომეტრიის არასტანდარტული მეთოდების შეთვისებაში, რომელიც მთელ რიგ შემთხვევებში იძლევა საშუალებას გვერდი აუაროთ უშუალო ინტეგრირების მძიმე და შრომატევად პროცესს.

მისამართი: 0175 თბილისი, კოსტავას ქ. 77,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი,
ანალიზის მიმართულება

e-mail : **gogi_pantsulaia @ hotmail.com**
g_givi@hotmail.com
avtokvaliashvili@posta.ge

§ 1. სელექციის მეთოდით მიღებული სიბრტყის ქვესიმრავლეები

ვთქვათ, E ძირითადი ბაზისური სივრცეა და $P(x)$ არის რაიმე წინადადება, რომლის ფორმულირებაში მონაწილეობს $x \in$ E ელემენტი. E სივრცის ქვესიმრავლეს, განსაზღვრულს პირობით

$\{x : P(x)$-წინადადება ჭეშმარიტია$\}$,

მათემატიკაში უწოდებენ $P(x)$ თვისებით განსაზღვრული ***სელექციის*** მეთოდით მიღებულ ქვესიმრავლეს.

ჩვენ დავინახავთ რაოდენ მნიშვნელოვანია სხვადასვა თვისებებით განსაზღვრული ***სელექციის*** მეთოდი გეომეტრიაში “ახალი სიმრავლეების” (ე.წ. ფიგურების) განსასაზღვრავად.

ამ პარაგრაფში განიხილება სწორედ სიბრტყის ისეთი ქვესიმრავლეები, რომლებიც უშუალოდ მიიღებიან სელექციის ზემოთ აღნიშნული მეთოდით. აქ მოყვანილი იქნება მთელი რიგი ისეთი დებულებებისა, რომელთა საშუალებითაც შესაძლებელი იქნება სხვადასხვა სახის გეომეტრიული ამოცანის ამოხსნა.

ჩვენ შეგახსენებთ უმარტივეს ცნებებს ელემენტარული გეომეტრიის კურსიდან.

განსაზღვრება 1. სიბრტყის ყველა იმ წერტილების სიმრავლეს, რომლებიც მოცემული O წერტილიდან R –ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული(R>o), ეწოდება წრეწირი ცენტრით O და რადიუსით R.

განსაზღვრება 2. AB მონაკვეთის C შუაწერტილზე ამ მონაკვეთისადმი მართობულად გავლებულ წრფეს ამ მონაკვეთის შუამართობი ეწოდება.

განსაზღვრება 3. კუთხის შუაზე გამყოფ სხივს კუთხის ბისექტრისა ეწოდება.

დებულება 1 (მანძილთა კვადრატების წრფივი კომბინაციის შესახებ). *ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც სრულდება პირობა*

$$\alpha_1|MA_1|^2+\alpha_2|MA_2|^2+...+\alpha_n|MA_n|^2=\beta,$$

სადაც $A_1, A_2, ..., A_n$ *მოცემული წერტილებია, ხოლო* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *და* β *მოცემული რიცხვები, წარმოადგენს შემდეგი უმარტივესი გეომეტრიული ფიგურებიდან ერთ-ერთს:*

ა) თუ $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n \neq 0$ *, ეს სიმრავლე შეიძლება იყოს ან წრეწირი ან წერტილი ან ცარიელი სიმრავლე.*

ბ) თუ $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n = 0$ *, ეს სიმრავლე შეიძლება იყოს ან წრფე ან მთელი სიბრტყე ან ცარიელი სიმრავლე.*

დამტკიცება. დავამტკიცოთ ამ დებულების სამართლიანობა კოორდინატთა მეთოდის გამოყენებით.

ცხადია, რომ M(x,y) წერტილსა და $A_k(x_k;y_k)$ (k=1,2,…n) წერტილს შორის მანძილის კვადრატი გამოითვლება ფორმულით:

$$|MA_k|^2=(x-x_k)^2+(y-y_k)^2=x^2+y^2-2xx_k-2yy_k+x_k{}^2+y_k{}^2$$

განვიხილოთ გამოსახულება

$$\alpha_1|MA_1|^2+\alpha_2|MA_2|^2+...+\alpha_n|MA_n|^2.$$

იმისათვის, რომ კოორდინატებში სრული სახით წარმოვადგინოთ ეს გამოსახულება, დაგვჭირდება რამდენიმე ასეთი

$$\alpha(x^2+y^2-2px-2qy+p^2+q^2)$$

სახის გამოსახულებების შეკრება. მივიღებთ

$$ax^2+ay^2+bx+cy+d=0$$

სახის გამოსახულებას სადაც a= $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$.

ა) თუ $a\neq 0$, მაშინ

$$x^2+y^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}y+\frac{d}{a}=0$$

ან რაც იგივეა

$$(x+\frac{b}{2a})^2+(y+\frac{c}{2a})^2=\frac{c^2+b^2-4ad}{4a^2}.$$

აღვნიშნოთ $\frac{c^2+b^2-4ad}{4a^2}=$ m.

1) თუ m>0 ეს წირი წარმოადგენს წრეწირს ცენტრით $C(-\frac{b}{2a};-\frac{c}{2a})$ წერტილში.

2) თუ m=0, წარმოადგენს წერტილს $C(-\frac{b}{2a};-\frac{c}{2a})$.

3) თუ m<0, მაშინ სიმრავლე ცარიელია.

ბ) თუ a=0, მაშინ გვექნება bx+cy+d=0

1) თუ $b^2+c^2\neq 0$, იქნება წრფე.

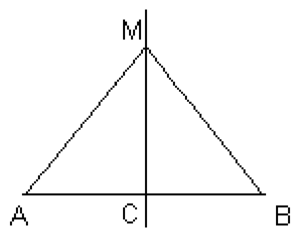
2) თუ b=c=d=0 მაშინ, იქნება მთელი სიბრტყე.

3) თუ b=c=0 და $c\neq 0$ მაშინ იქნება ცარიელი.

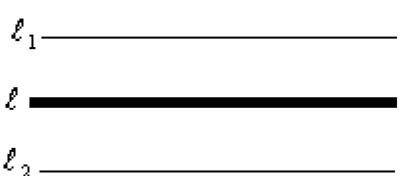
დებულება 1 დამკიცებულია. □

აჩვენეთ შემდეგი დებულებების სამართლიანობა:

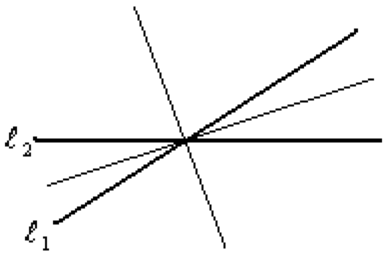
დებულება 2. მონაკვეთის შუამართობის ნებისმიერი წერტილიდან მონაკვეთის ბოლოებამდე მანძილები ტოლია.



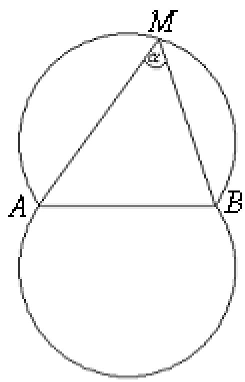
დებულება 3. ყველა იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიდანაც მანძილი მოცემულ ℓ წრფემდე h–ის ტოლია (h>0), არის ℓ_1 და ℓ_2 წრფეების წყვილი, რომლებიც პარალელურები არიან ℓ-ის და მის სხვადასხვა მხარეს მდებარეობენ.



დებულება 4. ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული ურთიერთგადამკვეთი ℓ_1 და ℓ_2 წრფეებიდან, არის ორი ურთიერთმართობული წრფე.

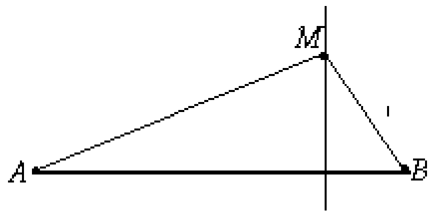


დებულება 5. ყველა იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიდანაც მოცემული AB მონაკვეთი ჩანს მოცემული α კუთხით, არის ორი რკალის გაერთიანება ბოლოებით A და B წერტილებში (AB მონაკვეთი არის ამ რკალების სიმეტრიის ღერძი).



იმ შემთხვევაში როცა $\alpha=\frac{\pi}{2}$, საძიებელი წერტილების სიმრავლე იქნება წრეწირი დიამეტრით AB.

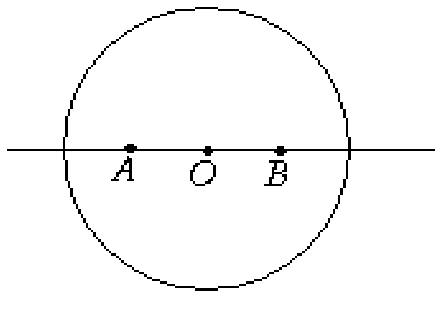
დებულება 6. მოცემულია სიბრტყის A და B წერტილი და ნებისმიერი $h \geq 0$ რიცხვი. ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც $AM^2 - BM^2 = h$, არის AB მონაკვეთის მართობული წრფე.



იმ კერძო შემთხვევაში როცა h=o, საძიებელ წერტილთა სიმრავლე არის AB მონაკვეთის შუამართობი.

დებულება 7. ვთქვათ AB მონაკვეთის სიგრძეა 2h . ავღნიშნოთ F -ით ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც სრულდება პირობა $AM^2 + BM^2 = c$. მაშინ ვღებულობთ:

ა) თუ $c>2h^2$, მაშინ F სიმრავლე არის წრეწირი ცენტრით AB მონაკვეთის O შუაწერტილში და რადიუსით $R=\sqrt{\frac{c-2h^2}{2}}$.



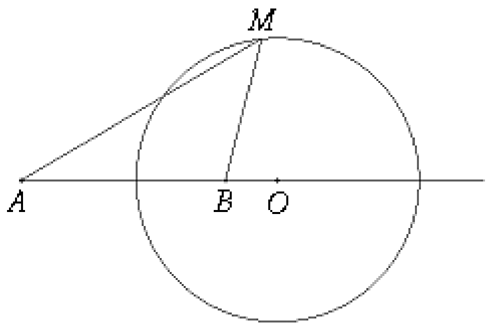
ბ) თუ $c=2h^2$, მაშინ F სიმრავლე არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი

გ) თუ $c<2h^2$, მაშინ F სიმრავლე არის ცარიელი სიმრავლე.

დებულება 8. ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელ-თათვისაც სრულდება პირობა

$$MA : MB = k ,\ k.>0 ,\ k \neq 1,$$

არის წრეწირი რომლის დიამეტრი AB წრფეზეა.

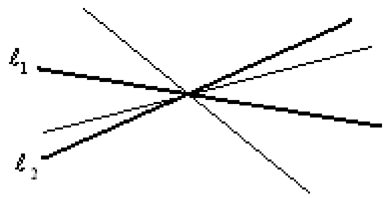


წერტილთა ამ სიმრავლეს აპოლონის წრეწირს უწოდებენ.

დებულება 9. ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომლებიდანაც ურთიერთგადამკვეთ ℓ_1 და ℓ_2 წრფეებამდე მანძილების შეფარდებაა

$$\rho(M;\ell_1):\rho(M;\ell_2)=c,$$

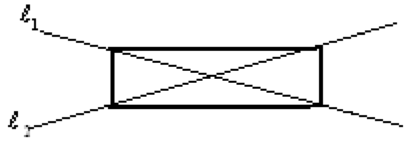
არის წრფეთა წყვილი, რომლებიც გადიან ℓ_1 და ℓ_2 წრფეთა გადაკვეთის წერტილზე.



დებულება 10. ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომლებიდანაც ურთიერთგადამკვეთ ℓ_1 და ℓ_2 წრფეებამდე მანძილების ჯამი c–ს ტოლია, ე.ი.,

$$\rho(M;\ell_1)+\rho(M;\ell_2)=c\ ,$$

არის მართკუთხედის კონტური, რომლის დიაგონალებიც ℓ_1 და ℓ_2 წრფეებზე მდებარეობენ.



სავარჯიშო ამოცანები

ამოცანა 1. ვიპოვოთ ყველა იმ წრეწირთა ცენტრების სიმრავლე, რომლებიც მოცემულ A და B წერტილებზე გადიან.

პასუხი: AB მონაკვეთის შუამართობი.

ამოცანა 2. ვიპოვოთ ყველა იმ წრეწირთა ცენტრების სიმრავლე, რომლებიც ეხებიან ორ ურთიერთგადამკვეთ წრფეს.

პასუხი: ორი ურთიერთმართობული წრფე.

ამოცანა 3. ვიპოვოთ ყველა R რადიუსის მქონე წრეწირთა ცენტრების სიმრავლე, რომლებიც ეხებიან მოცემულ წრფეს.

პასუხი: მოცემული წრფის ორი პარალელური წრფე.

ამოცანა 4. მოცემულია ორი A და B წერტილი. ვიპოვოთ ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც $S_{AMB}=c$, ($c>0$).

პასუხი: AB მონაკვეთის პარალელური ორი წრფე.

ამოცანა 5. ვიპოვოთ ყველა იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიდანაც მოცემული ორი წრეწირისადმი გავლებული მხებები ტოლია.

პასუხი: თუ წრეწირები არ გადაიკვეთებიან, მაშინ საძიებელი სიმრავლე ცენტრთა ხაზის მართობული წრფეა.

თუ წრეწირები ეხებიან, საძიებელი სიმრავლე შეხების წერტილზე გავლებული ცენტრთა ხაზის მართობული წრფეა.

თუ წრეწირები გადაიკვეთებიან, საძიებელი სიმრავლე გადაკვეთის წერტილებზე გავლებული სხივებია.

თუ წრეწირი მეორე წრეწირშია მოთავსებული, მაშინ საძიებელი სიმრავლე ცარიელია.

ამოცანა 6. მოცემულია სამკუთხედი ABC. ვიპოვოთ ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც $S_{AMC} = S_{BMC}$

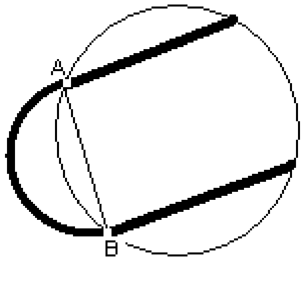
პასუხი: C წერტილზე გავლებული ორი ურთიერთგადამკვეთი წრფე, რომელთაგან ერთი C წვეროს მედიანას მოიცავს, მეორე კი AB წრფის პარალელურია. .

ამოცანა 7. ვიპოვოთ ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომ-ლებიდანაც მოცემული მართკუთხედის ორ მოპირდაპირე წვერომდე მანძილების კვადრატების ჯამი უდრის სხვა ორ წვერომდე მანძილების კვადრატების ჯამს.

პასუხი: მთელი სიბრტყე.

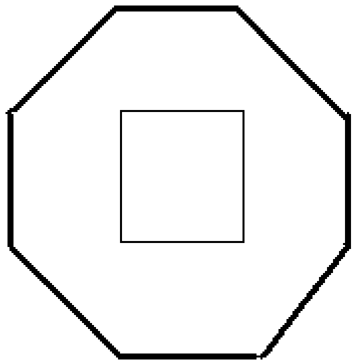
ამოცანა 8. მართკუთხედის ორი წვერო წრეწირზე მდებარეობს, მესამე წვერო კი წრეწირის შიგნით. ვიპოვოთ მართკუთხედის მეოთხე წვეროს შესაბამისი წერტილების სიმრავლე.

პასუხი: ვთქვათ A და B წერტილები წრეწირზე მდებარეობს , მესამე წვერო კი წრეწირის შიგნით. მეოთხე წვეროს საძიებელი წერტილების სიმრავლე წარმოადგენს AB დიამეტრის ნახევარწრეს და ორ პარალელურ მონაკვეთს წრეწირის შიგნით, A და B წერტილების გარეშე.



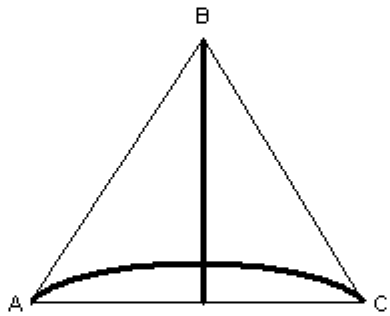
ამოცანა 9. კვადრატის გვერდის სიგრძეა 1სმ. ვიპოვოთ ყველა იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიდანაც კვადრატის გვერდებამდე მანძილების ჯამი 4 სანტიმეტრის ტოლია.

პასუხი: საძიებელ წერტილთა სიმრავლეა ნახაზზე გამოსახული ექვსკუთხედი.



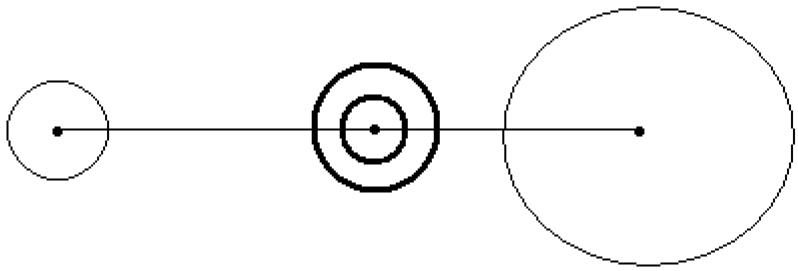
ამოცანა 10. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად D და E წერტილები ისე, რომ AE=CD. ვიპოვოთ ყველა იმ წერტილების სიმრავლე, რომლებიც მიიღება AE და CD მონაკვეთების გადაკვეთისას.

პასუხი: საძიებელ წერტილთა სიმრავლეა წრეწირის 120°-იანი რკალი და B წვეროდან დაშვებული სიმაღლე.



ამოცანა 11. გვაქვს სხვადასხვარადიუსიანი ორი არაგადამკვეთი წრეწირი. ვიპოვოთ ყველა იმ მონაკვეთების შუაწერტილების სიმრავლე, რომელთა ბოლოებიც სხვადასხვა წრეწირებზე მდებარეობენ.

პასუხი: საძიებელ წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს რგოლს, რომელიც მოთავსებულია ორ კონცენტრულ წრეწირს შორის, რომელთა ცენტრი მოცემული წრეწირების ცენტრების შემაერთებელი მონაკვეთის შუაწერტილია, რადიუსები კი მოცემულ წრეწირთა რადიუსების ჯამის ნახევარი და სხვაობის ნახევარი.

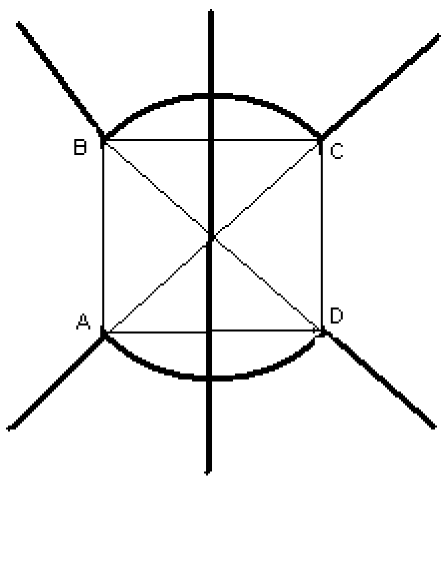


შენიშვნა: წრეწირთა რადიუსების ტოლობის შემთხვევაში , აღნიშნული რგოლი გარდაიქმნება წრეწირად.

ამოცანა 12. მოცემულია ABCD კვადრატი. ვიპოვოთ ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე რომლებისთვისაც სრულდება ტოლობა

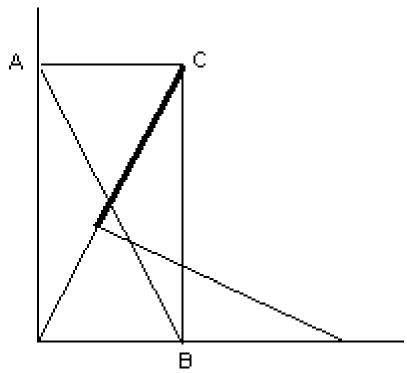
$$\angle AMB = \angle CMD.$$

პასუხი: საძიებელ წერტილთა სიმრავლე გამოსახულია ნახაზზე.



ამოცანა13. ABC მართკუთხა სამკუთხედი მახვილი A და B კუთხის წვეროებით სრიალებს მართ კუთხეში, ვიპოვოთ ყველა იმ წერტილების სიმრავლე რომელსაც აღწერს მართი C კუთხის წვერო სრიალის დროს.

პასუხი: საძიებელ წერტილთა სიმრავლეა მონაკვეთი, რომლის სიგრძეა ჰიპოტენუზისა და მცირე კათეტის სიგრძეთა სხვაობა.

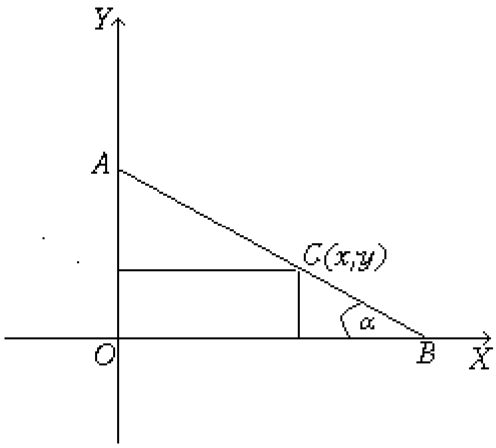


§ 2. ზოგიერთი მოძრაობის ტრაექტორიის შესახებ

ამ პარაგრაფში განვიხილავთ ორ ამოცანას, რომლებშიც მონაწილე ფიგურები ასრულებენ გარკვეულ რთულ მოძრაობებს. აღმოჩნდა, რომ ორივე ეს ამოცანა ერთმანეთთან დაკავშირებულია არა მარტო გარეგნული მსგავსებით, არამედ იმითაც რომ ამ ფიგურათა ზოგიერთი წერტილების მოძრაობის ტრაექტორიები ემთხვევიან ერთმანეთს.

ამოცანა 1 (ლეონარდო და ვინჩი). განვიხილოთ მართი კუთხე და მონაკვეთი, რომლის ბოლოებიც კუთხის გვერდებზე მდებარეობს. მონაკვეთი სრიალებს ისე, რომ ამ მონაკვეთის წვეროები კუთხის გვერდებს არ სცილდება. დავადგინოთ იმ წირის სახე, რომელსაც აღწერს მონაკვეთის რომელიმე შიგა წერტილი აღნიშნული მოძრაობის დროს.

ამოხსნა. მართკუთხა კოორდინატთა XOY სისტემის ღერძები მივიჩნიოთ მართი კუთხის გვერდებად. მონაკვეთი მოვათავსოთ საკოორდინატო სიბრტყის I მეოთხედში ისე, რომ მისი ბოლოები ეხებოდეს ორივე ღერძს. $\angle$ ABO აღვნიშნოთ α-თი.



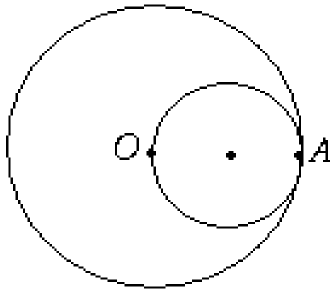
დავუშვათ C(x;y) არის AB მონაკვეთის შიგა წერტილი, AC=a და CB=b. რადგან x=acosα და y=bsinα, ამიტომ სრულდება პირობა

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

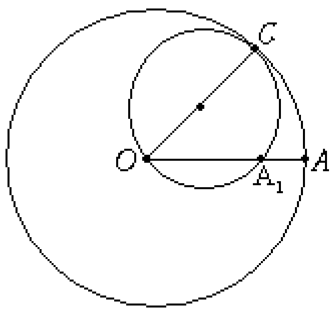
ამრიგად მონაკვეთის სრიალის დროს მისი ნებისმიერი წერტილი (საწყისი და ბოლო წერტილების გარდა, რომლებიც წრფეზე მოძრაობენ) აღწერს ელიფსის რკალს. ცხადია, რომ თუ AC=CB ,

მაშინ ყველა იმ C წერტილების სიმრავლე, რომლებიც მიიღება მონაკვეთის ღერძზე სრიალის დროს წარმოადგენს წრეწირის რკალს, ცენტრით O და რადიუსით $R = \frac{AB}{2}$.

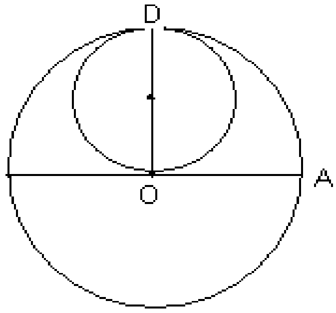
ამოცანა 2 (კოპერნიკი). ორი წრეწირი შიგნიდან ეხება ერთმანეთს A წერტილში. მცირე წრეწირი, რომლის რადიუსი ორჯერ მცირეა დიდის რადიუსზე, მიგორავს (სრიალის გარეშე) დიდი წრეწირის შიგნით. რა წირი აღიწერება მცირე წრეწირის A წერტილით?



ამოხსნა. ვთქვათ, მცირე წრეწირის A წერტილს გარკვეული მობრუნების შემდეგ უკავია C წერტილის ადგილი, ხოლო C წრეწირთა შეხების წერტილია.



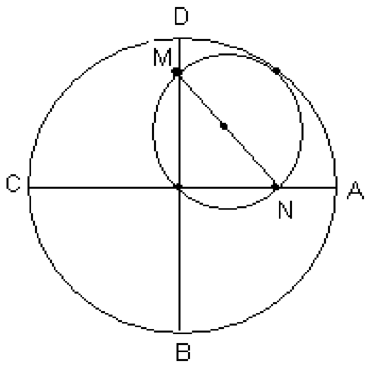
ცხადია, რომ AC და A_1C რკალთა სიგრძეები ტოლია. რადგან მცირე წრეწირის რადიუსი 2-ჯერ ნაკლებია დიდის რადიუსზე, ამიტომ A_1C რკალის გრადუსული ზომა 2-ჯერ მეტია AC რკალის გრადუსულ ზომაზე. ამრიგად $\angle AOC = \angle A_1OC$, რაც იმას ნიშნავს, რომ A_1 წერტილი OA რადიუსზე მდებარეობს.როდესაც მცირე წრეწირი ბრუნვით გაივლის დიდი წრეწირის მეოთხედს, თავდაპირველი შეხების A წერტილი აღმოჩნდება დიდი წრეწირის O ცენტრში.



ამავე დროს მცირე წრეწირი შეეხება დიდ წრეწირს D წერტილში ისე, რომ $\angle DOA = 90^0$. ამრიგად, მცირე წრეწირის შეხების A წერტილი, გორვისას მოძრაობს მონაკვეთზე, რომელიც წარმოადგენს დიდი წრეწირის დიამეტრს.

ზემოთ განხილული ამოცანების შედეგთა მომხიბვლელობა გამოიხატება ფიგურების (პირველ შემთხვევაში მონაკვეთის, მეორე შემთხვევაში კი წრეწირის) საკმაოდ რთული მოძრაობების მიუხედავად, მათ ზოგიერთ წერტილთა მოძრაობის ტრაექტორიების სიმარტივეში. ორივე ამოცანა დაკავშირებულია ერთმანეთთან არა მარტო გარეგნული მსგავსებით, არამედ იმითაც, რომ ორივე განხილული მოძრაობა ემთხვევა ერთმანეთს.

მართლაც, ვთქვათ R რადიუსის წრეწირი მიგორავს 2R რადიუსიანი წრეწირის შიგნით. მცირე წრეწირის დიამეტრია MN.



ცხადია, რომ N და M წერტილები მოძრაობენ შესაბამისად დიდი წრეწირის AC და BD ურთიერთმართობულ დიამეტრებზე.

სავარჯიშო ამოცანები

ამოცანა 1. O წერტილი მდებარეობს AC მონაკვეთზე. ვიპოვოთ ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც სრულდება შემდეგი პირობა $\angle MOC = 2\angle MAC$.

პასუხი: წრეწირი ცენტრით O , რადიუსით OA (A წერტილის გარეშე) და OC სხივი (O წერტილის გარეშე).

ამოცანა 2. მოცემულია A და B წერტილები. B წერტილზე გავლებულია ყველა შესაძლო წრფე, ხოლო A-დან ამ წრფეთა პერპენდიკულარები. დავადგინოთ წრფეების და პერპენდიკულარების გადაკვეთის წერტილთა სიმრავლით მიღებული წირის სახე

პასუხი: წრეწირი რადიუსით $\frac{1}{2}AB$.

ამოცანა 3. ვთქვათ, A და B რაიმე სიბრტყის ორი წერტილია. ვიპოვოთ სიბრტყის ყველა იმ M წერტილების სიმრავლე, რომელთათვისაც AMB სამკუთხედი არის

ა) მახვილკუთხა,
ბ) მართკუთხა,
გ) ბლაგვკუთხა.

პასუხი: ℓ_A და ℓ_B-თი აღვნიშნოთ AB მონაკვეთის მართობული წრფეები, რომლებიც შესაბამისად გადიან A და B წერტილებზე.

ა) AB დიამეტრის მქონე წრეწირის გარეთ მოთავსებული წერტილები, რომლებიც ℓ_A და ℓ_B წრფეებს შორისაა მოთავსებული.

ბ) ან AB დიამეტრის მქონე წრეწირი, ან ℓ_A წრფე, ან ℓ_B წრფე (A და B წერტილების გარდა).

გ) ან AB დიამეტრის მქონე წრეწირის შიგა წერტილები, ან . ℓ_A , ან ℓ_B წრფეების გარეთ მოთავსებული წერტილები.

ამოცანა 4. ვაჩვენოთ, რომ თუ სამი წრეწირი წყვილ-წყვილად გადაიკვეთება, მაშინ წრეწირთა ყოველი წყვილის საერთო ქორდები (ან მათი გაგრძელებები) ან ერთ წერტილში იკვეთებიან ან არიან პარალელურები.

ამოცანა 5(ჩევის თეორემა). ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად C_1, A_1 და B_1 წერტილები. ვაჩვენოთ, რომ AA_1 , BB_1 და CC_1 მონაკვეთები ერთ წერტილში იკვეთებიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა სრულდება პირობა

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

.

ამოცანა 6. ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად C_1 , A_1 და B_1 წერტილები. ვაჩვენოთ, ამ გვერდებზე შესაბამისი წერტილებიდან აღმართული პერპენდიკულარები ერთ წერტილში იკვეთებიან მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა სრულდება პირობა

$$AC_1^2+BA_1^2+CB_!^2=AB_1^2+BC_1^2+CA_1^2.$$

მოცანა7. ამოზნექილი ოთხკუთხედის გვერდებზე როგორც დიამეტრებზე შემოხაზულია წრეები. ვაჩვენოთ, რომ ისინი ფარა-ვენ ოთხკუთხედს.

ამოცანა 8 (მენელაის თეორემა). ვთქვათ A_1, B_1 და C_1 წერტილები შესაბამისად მდებარეობენ ABC სამკუთხედის BC, AC და AB გვერდებზე ან მათ გაგრძელებებზე. მაშინ ეს წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა სრულდება პირობა

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

ამოცანა 9. ABC სამკუთხედის AD მედიანაზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ AM:MD=3:1. რა შეფარდებით ყოფს BM წრფე AC გვერდს?

პასუხი: 3:2

ამოცანა 10. ABC სამკუთხედის AB და AC გვერდებზე აღებულია შესაბამისად M და N წერტილები ისე, რომ $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{NA}=\frac{1}{2}$. რა შეფარდებით ყოფს BN და CM მონაკვეთების გადაკვეთის L წერტილი ამ მონაკვეთებს?

პასუხი: NL:LB=1:6 და CL:LM=3:4 .

ამოცანა 11. ABC სამკუთხედის AD ბისექტრისა BC გვერდს ყოფს შეფარდებით 2:1 C წვეროს მხრიდან. რა შეფარდებით ყოფს CE მედიანა ამ ბისექტრისას?

პასუხი: AN :ND=3:2 .

ამოცანა 12. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია D წერტილი, BC გვერდზე კი E და F წერტილები ისე, რომ AD:DB=3:2 , BE:EC=1:3, BF:FC=4:1 . რა შეფარდებით ყოფს AE წრფე DF მონაკვეთს?

პასუხი: 16:3 .

ამოცანა 13. ABC წესიერი სამკუთხედის BC და AC გვერდების შუაწერტილებია შესაბამისად E და D. $F\in DC$, $BF\cap DE=M$, $S_{ABMD}=\frac{5}{8}S_{ABC}$. რა შეფარდებით ყოფს M წერტილი BF მონაკვეთს?

პასუხი: BM:MF=3:1 .

ამოცანა 14. ABCD პარალელოგრამის A წვერო შეერთებულია BC გვერდის M შუაწერტილთან, რომელიც BD დიაგონალს კვეთს N წერტილში. იპოვეთ S_{NMCD} ოთხკუთხედის ფართობი, თუ $S_{ABCD}=48$.

პასუხი: 20.

ამოცანა 15. M, N და K წერტილები მდებარეობენ შესაბამისად ABC სამკუთხედის AB, BC და AC გვერდებზე ისე, რომ AM:MB = BN:NC = CK:KA = 1:4. იპოვეთ CM , AN და BK წრფეებით შემოსაზღვრული სამკუთხედის ფართობი, თუ $S_{ABC}=105$.

პასუხი: 45.

§3. ოთხკუთხედები

ამ პარაგრაფში ჩვენ განვიხილავთ ოთხკუთხედებისათვის დამახასიათებელ საინტერესო თვისებებს და წარმოგიდგენთ იმ ამოცანებს, რომელთა ამოხსნა შესაძლებელია ელემენტარული გეომეტრიის გამოყენებით.

განსაზღვრება 1. სიბრტყეზე მდებარე ჩაკეტილ ტეხილს, რომელსაც აქვს ოთხი წვერო და ოთხი გვერდი, ოთხკუთხედი ეწოდება.

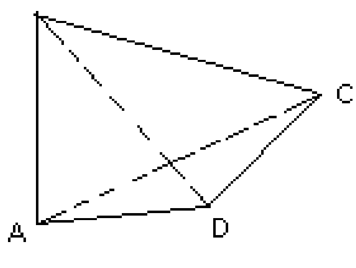
განსაზღვრება 2. ოთხკუთხედს ეწოდება ამოზნექილი, თუ ის მისი ნებისმიერი გვერდის შემცველი წრფის ცალ მხარეს მდებარეობს. წინააღმდეგ შემთხვევაში ოთხკუთხედს ჩაზნექილი ეწოდება.

განსაზღვრება 3. ოთხკუთხედის ორ წვეროს ეწოდება მოსაზღვრე თუ ისინი ერთ გვერდზე მდებარეობენ. წინააღმდეგ შემთხვევაში მათ მოპირდაპირე წვეროები ეწოდებათ.

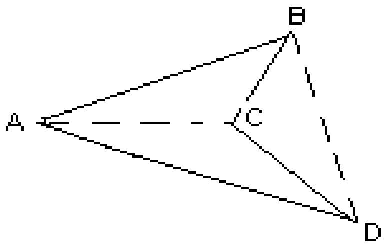
განსაზღვრება 4. მოპირდაპირე წვეროების შემაერთებელ მონაკვეთს ამ ოთხკუთხედის დიაგონალი ეწოდება.

არსებობს სამი სხვადასხვა ტიპის ABCD ოთხკუთხედი:

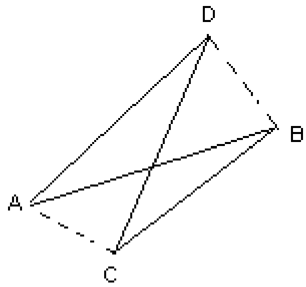
ა) ამოზნექილი, რომლის ორივე დიაგონალი ოთხკუთხედის სიბრტყის შიგნითაა



ბ) ჩაზნექილი, რომლის ერთი დიაგონალი ოთხკუთხედის სიბრტყეშია, მეორე კი მის გარეთ



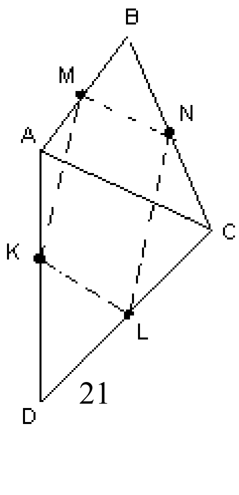
გ) ჩაზნექილი, რომლის ორივე დიაგონალი სიბრტყის გარეთაა



არსებობს მთელი რიგი ისეთი გეომეტრიული ამოცანები, რომელთა ამონახსნების გზების ძიება იზიდავს ყველას, ვისაც კი უწევს მათთან უნებლიე შეხვედრა. როგორც ჩანს ასეთი ინტერესი გეომეტრიული ამოცანებისადმი არსებობდა უძველესი დროიდან. საკმარისია გავიხსენოთ სამი ცნობილი ამოცანა: “კუბის გაორმაგება”, “კუთხის ტრისექცია”, “წრის კვადრატურა”.

თეორემა რომელიც ეკუთვნის პიერ ვარინიონს (1654 -1722) იმდენად მარტივია, რომ იწვევს გაკვირვებას იმის გამო, რომ მისი პუბლიკაცია მოხდა მხოლოდ 1731 წელს.

თეორემა. (ვარინიონი). ამოზნექილი ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილების თანმიმდევრობითი შეერთებით მიღებული ფიგურა წარმოადგენს პარალელოგრამს, რომლის ფართობი ოთხკუთხედის ფართობის ნახევარია.



შენიშვნა 1. ვარინიონის თეორემა სამართლიანია იმ ჩაზნექილი ოთხკუთხედებისათვისაც, რომელთა ერთი დიაგონალი სიბრტყის გარეთაა, მეორე კი შიგნით.

შენიშვნა 2. იმ ჩაზნექილი ABCD ოთხკუთხედისთვის რომლის ორივე დიაგონალი სიბრტყის გარეთაა და $S_{ABD} > S_{CBD}$, საძიებელი ფიგურის ფართობია $\frac{1}{2}(S_{ABD} - S_{CBD})$.

სავარჯიშო ამოცანები

ამოცანა1. აჩვენეთ, რომ ვარინიონის პარალელოგრამის პერიმეტრი ამ ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა ჯამის ტოლია.

ამოცანა 2. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი ამოზნექილი ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთები და დიაგონალების შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი, ერთ წერტილში იკვეთებიან.

ამოცანა 3. აჩვენეთ, რომ თუ ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალი ყოფს ამ ოთხკუთხედს ორი ტოლი ფართობის მქონე სამკუთხედად, მაშინ ეს დიაგონალი შუაზე ყოფს მეორე დიაგონალსაც.

ამოცანა 4. აჩვენეთ, რომ თუ ამოზნექილი ოთხკუთხედის ერთი დიაგონალი შუაზე ყოფს მეორეს, მაშინ ეს დიაგონალი ყოფს ოთხკუთხედს ორ ტოლდიდ სამკუთხედად.

ამოცანა 5 (ბრახმაგუპტა). აჩვენეთ, რომ წრეში ჩახაზული ოთხ-კუთხედის ფართობი რომლის გვერდებია a, b , c და d არის

$S = \sqrt{(P-a)(P-b)(P-c)(P-d)}$, სადაც $P = \frac{a+b+c+d}{2}$.

ამოცანა 6. აჩვენეთ, რომ ფართობი წრეში ჩახაზული და წრეზე შემოხაზული იმ ოთხკუთხედისა, რომლის გვერდებია a, b ,c და d არის $S = \sqrt{abcd}$.

ამოცანა 7. აჩვენეთ, რომ პარალელოგრამის გვერდების კვადრატების ჯამი, დიაგონალების კვადრატების ჯამის ტოლია.

ამოცანა 8 (პტოლემე). აჩვენეთ, რომ წრეში ჩახაზული ამოზნექილი ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ნამრავლთა ჯამი, ამ ოთხკუთხედის დიაგონალების ნამრავლის ტოლია.

ამოცანა 9. ABCD ოთხკუთხედი ჩახაზულია წრეში. ცნობილია, რომ BD=BC=CD. ვაჩვენოთ, რომ AC=AD+AB.

ამოცანა 10. ABCD კვადრატის შიგნით აღებულია P წერტილი ისე, რომ $\angle PAD = \angle BDA = 15°$. ვაჩვენოთ, რომ B, C და P წესიერი სამკუთხედის წვეროებს წარმოადგენს.

ამოცანა 11. ABCD პარალელოგრამის გარეთ აღებულია P წერტილი ისე, რომ $\angle PBC = \angle PDC$. ვაჩვენოთ, რომ $\angle CPB = \angle DPA$.

ამოცანა 12. ABCD პარალელოგრამის AB და CD გვერდებზე აღებულია შესაბამისად M და N წერტილები ისე, რომ $AM : MB = CN : ND = m : n$. MD და MC მონაკვეთები გადაკვეთენ NA და NB მონაკვეთებს შესაბამისად E და F წერტილებში. ვაჩვენოთ, რომ $S_{MFNE} : S_{ABCD} = \frac{mn}{(m+n)^2}$.

ამოცანა 13. M წერტილი არის წრეში ჩახაზული ABCD ოთხკუთხედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. აჩვენეთ, რომ $\frac{1}{AD} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{MD}$, თუ AB=BC=AC.

ამოცანა 14. ABCD ოთხკუთხედის AD და BC მოპირდაპირე გვერდების გაგრძელებები იკვეთებიან K წერტილში, ხოლო M და N წარმოადგენენ შესაბამისად AC და BD დიაგონალების შუაწერტილებს. აჩვენეთ, რომ $S_{KMN}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$.

ამოცანა 15. პარალელოგრამის გვერდებზე სიბრტყის გარეთ აგებულია კვადრატები. აჩვენეთ, რომ ამ კვადრატების ცენტრების მიმდევრობით შეერთებით მიიღება კვადრატი.

§4. ბარიცენტრული მეთოდის გამოყენება გეომეტრიულ ამოცანებში

განსაზღვრება 1. (A,m) ორეულს, სადაც $A\in R$ $(R^2$ ან $R^3)$, ხოლო $m\in R^+$, ეწოდება მატერიალური წერტილი.

შენიშვნა 1. ჩანაწერი (A,m) გვიჩვენებს, რომ m სიდიდის მასა არის მოთავსებული A წერტილში.

განსაზღვრება 2. ორი (A,a) და (B,b) მატერიალური წერტილის სიმძიმის ცენტრი ანუ ბარიცენტრი ეწოდება ისეთ $C\in[A,B]$ წერტილს, რომლისთვისაც სრულდება ბერკეტის წონასწორობის პირობა

$$a\times|AC|=b\times|BC|.$$

შენიშვნა 2. $(A_1,m_1),\cdots,(A_n,m_n)$ მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი განისაზღვრება მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით:

ა) ვპოულობთ $(A_1,m_1),\cdots,(A_{n-1},m_{n-1})$ მატერიალური წერტილების ბარიცენტრს C_{n-1}-ს;

ბ) შემდგომ ვპოულობთ $(C_{n-1},m_1+\cdots+m_{n-1})$ და (A_n,m_n) მატერიალური წერტილების ბარიცენტრს C_n-ს .

განვიხილოთ ბარიცენტრის ზოგიერთი თვისება, რომლებსაც აქვთ საინტერესო გამოყენებები გეომეტრიული ამოცანების ამოხსნისას:

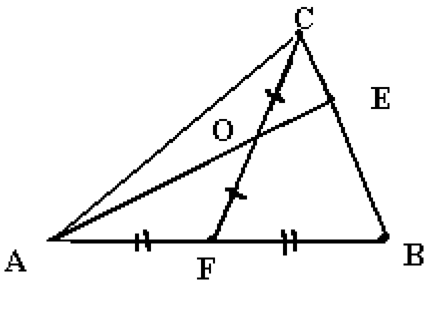
თვისება 1. მატერიალურ წერტილთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის არსებობს ბარიცენტრი;

თვისება 2. მატერიალურ წერტილთა ბარიცენტრის მდებარეობა არაა დამოკიდებული იმ რიგზე, რომელშიც შესაბამისად ერთიანდება ეს მატერიალური წერტილები;

თვისება 3. მატერიალურ წერტილთა ბარიცენტრის მდებარეობა არ შეიცვლება, თუ რამოდენიმე მატერიალური წერტილის გაერთიანებას შევცვლით ისეთი ერთი მატერიალური წერტილით, რომლის პირველი კომპონენტაა ამ მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი, ხოლო მეორე კომპონენტია ამ მატერიალური წერტილების მეორე კომპონენტების (ე.ი. მასების) ჯამი.

ბარიცენტრული მეთოდის გამოყენებით ამოვხსნათ შემდეგი ამოცანა.

ამოცანა 1. მოცემულია ABC სამკუთხედი. წრფე AE ყოფს CF მედიანას ორ ტოლ ნაწილად. ვიპოვოთ $CE:EB$.



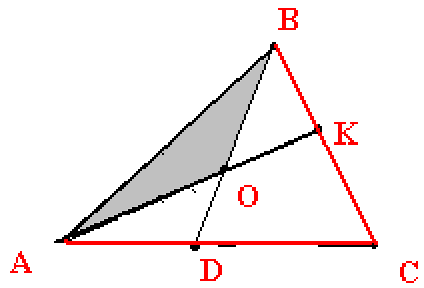
ამოხსნა: მოვათავსოთ A და B წერტილებში მასები $m_A=1$ და $m_B=1$; მაშინ $(A,1)$ და $(B,1)$ მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი იქნება F. C წერტილში მოვათავსოთ მასა m_C იმდაგვარად, რომ $(A,1),(B,1)$ და (C,m_C) მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი იყოს O წერტილი; ბარიცენტრის მე-3 თვისების გამო, ჩვენ შეგვიძლია $(A,1)$ და $(B,1)$ მატერიალური წერტილები შევცვალოთ $(F,2)$ მატერიალური წერტილით. შევნიშნოთ, რომ $(F,2)$ და (C,m_C) მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი იქნება იგივე, რაც $(A,1),(B,1)$ და (C,m_C) მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი. მაშინ მივიღებთ $|CO|\times m_C=|OF|\times 2$; აქედან $m_C=2$. ცხადია, რომ E წერტილი იქნება

$(C,2)$ და $(B,1)$ მატერიალური წერტილების ბარიცენტრი. ეს ნიშნავს, რომ $|CE|\times 2=|EB|\times 1$. აქედან საბოლოოდ ვღებულობთ

$$|CE|:|EB|=1:2.$$

სავარჯიშო ამოცანები

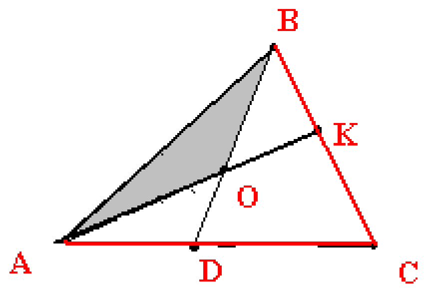
ამოცანა 1.



ABC სამკუთხედის ფართობია 21. ვიპოვოთ ABO სამკუთხედის ფართობი, თუ BK:KC=5:6 და AD:DC=1:2.

პასუხი: 5

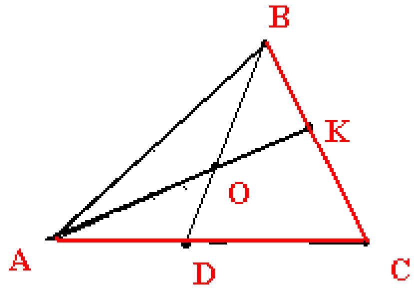
ამოცანა 2.



ABC სამკუთხედის ფართობია 84. ვიპოვოთ ABO სამკუთხედის ფართობი, თუ AD:DC=3:4 და AO:OK=2:1.

პასუხი: 21

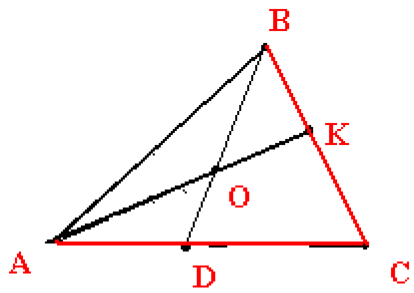
ამოცანა **3.**



ABC სამკუთხედის ფართობია 115. ვიპოვოთ ABK სამკუთხედის ფართობი, თუ AD:DC=3:4 და BO:OD=3:2.

პასუხი: 45.

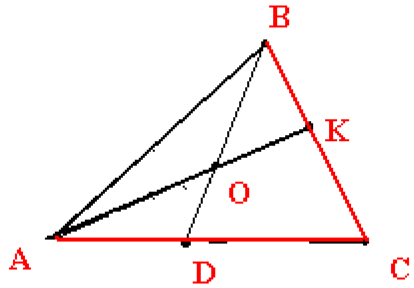
ამოცანა 4.



ABC სამკუთხედში AD:DC=3:4 და BO:OD=5:4. ვიპოვოთ BK:KC.

პასუხი: 15:28

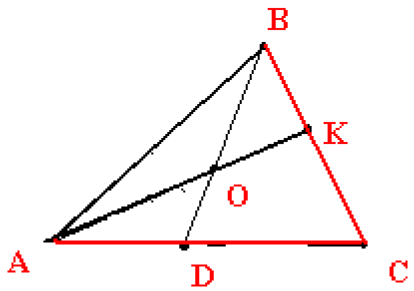
ამოცანა 5.



ABC სამკუთხედში BO:OD =2:1 და BK=KC. ვიპოვოთ AD:DC.

პასუხი: 1 : 1

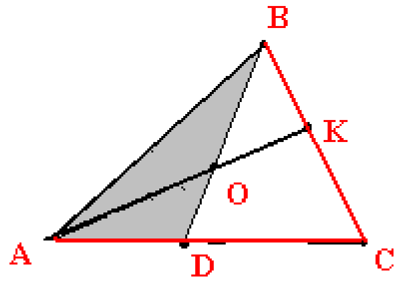
ამოცანა 6.



სამკუთხედ ABC-ში BK:KC=2:3, AO:OK=3:2; ვიპოვოთ AD:DC.

პასუხი: 3 : 5

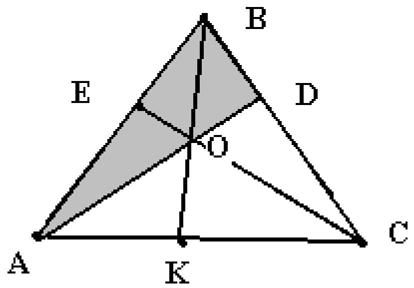
ამოცანა 7



ABC სამკუთხედში BK:KC=3:4 და AO:OK=3:2. ვიპოვოთ **ABC** სამკუთხედის ფართობი, თუ BDC სამკუთხედის ფართობია 28.

პასუხი: 46.

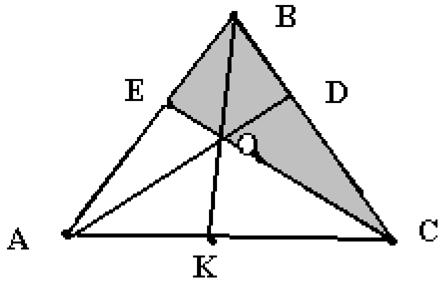
ამოცანა 8



ABC სამკუთხედში AE:EB=5:4 და EO:OC=1:4. ვიპოვოთ ABD სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 145.

პასუხი: 45.

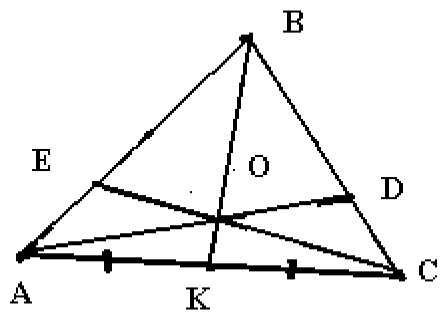
ამოცანა 9



ABC სამკუთხედში AK:KC=3:4 და DO:OA=1:2. ვიპოვოთ EBC სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 45 .

პასუხი: 20

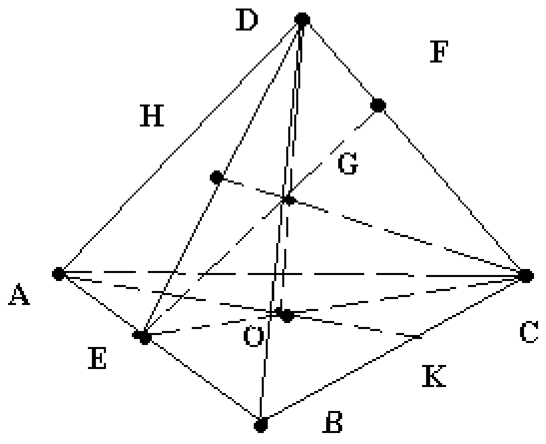
ამოცანა 10



ABC სამკუთხედში BD:DC=5:2 და AK=KC. ვიპოვოთ EO:OC.

პასუხი: 5 : 7

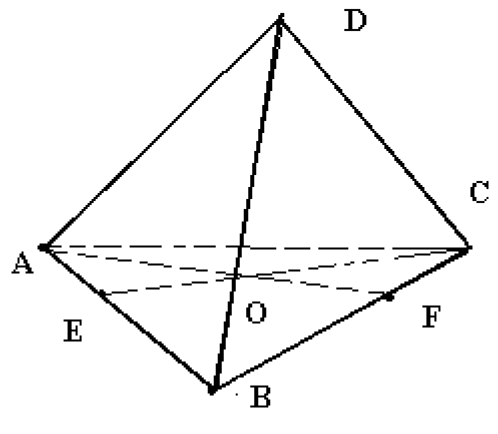
ამოცანა 11



ABCD პირამიდაში EO:OC=1:2, EH=HD. ვიპოვოთ DF:FC.

პასუხი: 1 : 2

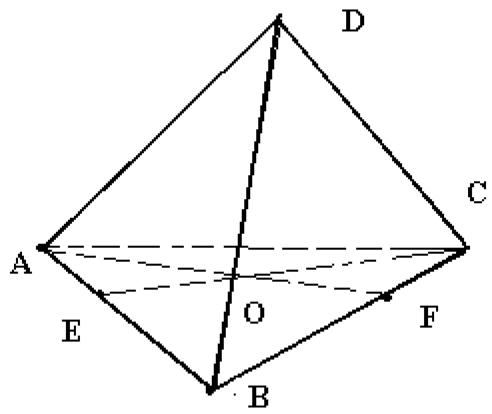
ამოცანა 12



ABCD პირამიდაში EO:OC=2:3, AE:EB=2:5; ვიპოვოთ ABFD პირამიდის მოცულობა, თუ ABCD პირამიდის მოცულობაა 100.

პასუხი: 70

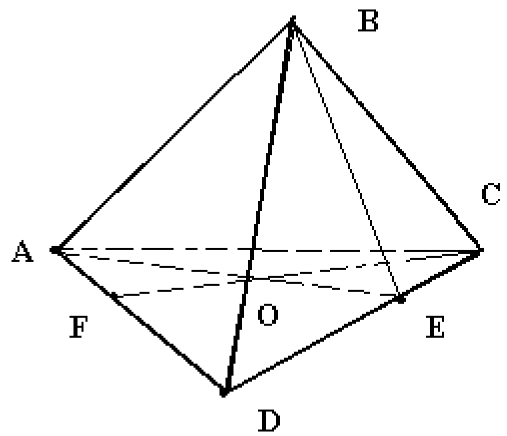
ამოცანა 13



ABCD პირამიდაში. BF=FC, AE:EB=2:3; ვიპოვოთ A0CD პირამიდის მოცულობა, თუ ABCD პირამიდის მოცულობაა 70.

პასუხი: 20

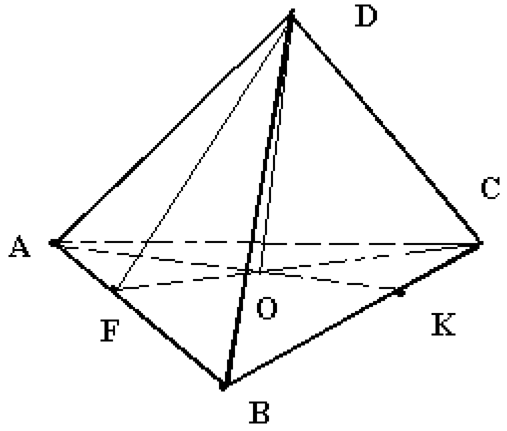
ამოცანა 14



ADCB პირამიდაში AO:OE=3:1, AF:FD=3:2; ვიპოვოთ AECB პირამიდის მოცულობა, თუ ABCD პირამიდის მოცულობაა 100.

პასუხი: 50

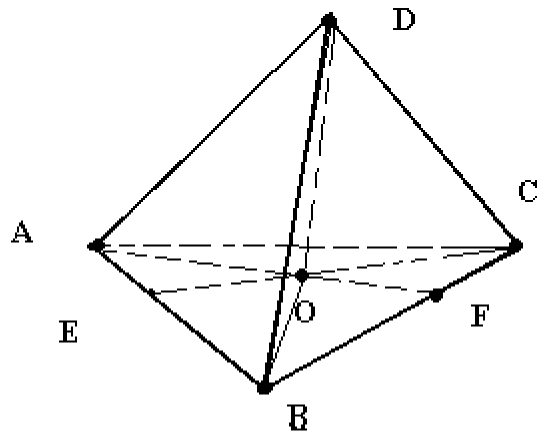
ამოცანა 15



ABCD პირამიდაში AO:OK=3:2, AF:FB=1:3; ვიპოვოთ ABCD პირამიდის მოცულობა, თუ ABKD პირამიდის მოცულობაა $\frac{70}{9}$.

პასუხი: 10

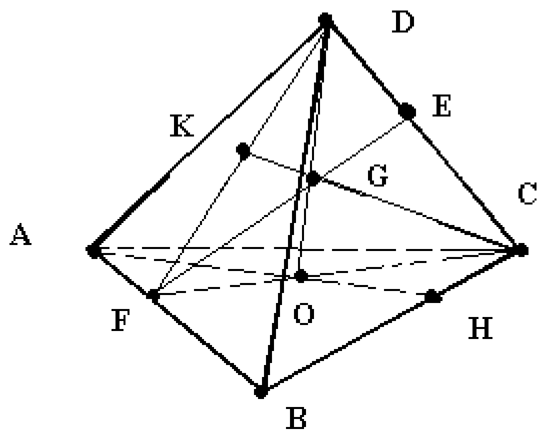
ამოცანა 16



ABCD პირამიდაში AE=EB, BF:FC=2:1; ვიპოვოთ ABCD პირამიდის მოცულობა, თუ AOCD პირამიდის მოცულობაა 40.

პასუხი: 160

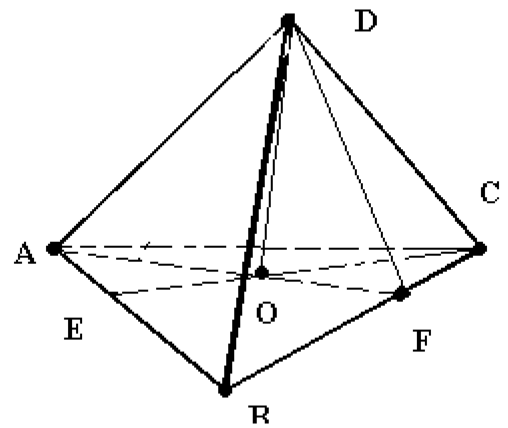
ამოცანა 17



ABCD პირამიდაში. AF:FB=1:2; BH:HC=2:1; DE:EC=1:2; ვიპოვოთ FG:GE.

პასუხი: 2 : 1

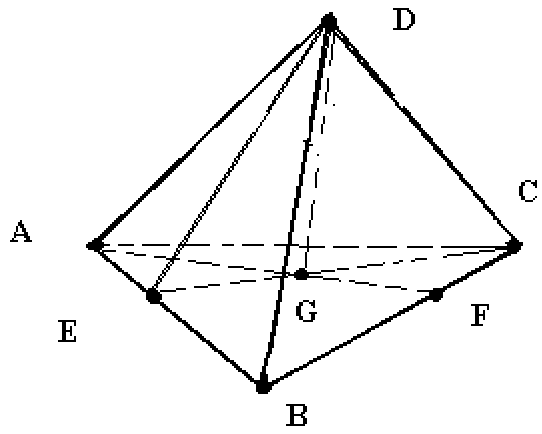
ამოცანა 18



ABCD პირამიდაში AE:EB=1:2, BF:FC=4:1; ვიპოვოთ ABOD პირამიდის მოცულობა თუ ABCD პირამიდის მოცულობაა 700.

პასუხი: 400

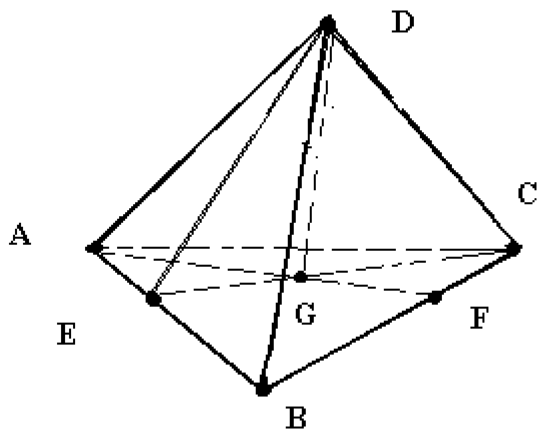
ამოცანა 19



ABCD პირამიდაში AE=EB, BF:FC=2:1; ვიპოვოთ ABCD პირამიდის მოცულობა თუ AEGD პირამიდის მოცულობაა 50.

პასუხი: 100

ამოცანა 20



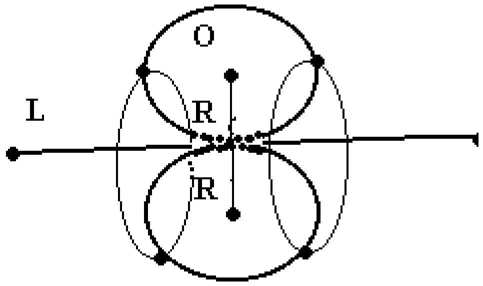
ABCD პირამიდაში AE:EB=2:5, AG:GF=5:1; ვიპოვოთ AGCD პირამიდის მოცულობა თუ ABCD პირამიდის მოცულობაა 75.

პასუხი: 5

§5. ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობის გამოთვლა გიულდენის I თეორემის გამოყენებით.

გიულდენის I თეორემა. თუ ზედაპირი მიღებულია რაიმე ბრტყელი წირის ამავე სიბრტყეში მდებარე იმ წრფის გარშემო ბრუნვით, რომლის მიერ წარმოქმნილ ერთ-ერთ ჩაკეტილ ნახევარსიბრტყეშიცაა განლაგებული აღნიშნული წირი, მაშინ მიღებული ზედაპირის ფართობი ტოლია ამ წირის სიგრძისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლისა, რომლის რადიუსიც ტოლია წირის სიმძიმის ცენტრიდან მოცემულ წრფემდე მანძილისა.

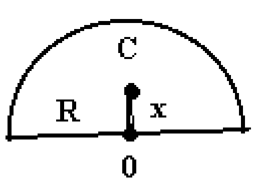
ამოცანა 1. ვიპოვოთ იმ ზედაპირის ფართობი, რომელიც მიიღება წრეწირის ბრუნვით მისი რომელიმე მხები წრფის გარშემო.



ამოხსნა. წრეწირის სიგრძეა $2\pi R$. მანძილი წრეწირის O ცენტრიდან L წრფემდე R-ის ტოლია. ამიტომ, გიულდენის I თეორემის თანახმად, იმ ზედაპირის ფართობი S, რომელიც მიიღება წრეწირის ბრუნვით მისი L მხები წრფის გარშემო გამოითვლება ფორმულით

$$S = 2\pi R \times 2\pi R = 4\pi^2 R^2 .$$

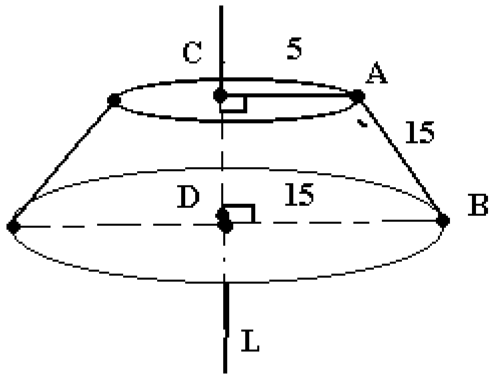
ამოცანა 2. ვიპოვოთ ნახევარწრეწირის სიმძიმის ცენტრის დაშორება დიამეტრიდან.



ამოხსნა. ნახევარწრეწირის სიგრძეა πR. ნახევარწრეწირის სიმძიმის C ცენტრიდან დიამეტრამდე დაშორება აღვნიშნოთ x-ით. შევნიშნოთ, რომ ნახევარწრეწირის მისი დიამეტრის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირი წარმოადგენს სფეროს, რომლის ზედაპირის ფართობი S გამოითვლება ფორმულით $S = 4\pi R^2$; მეორეს მხრივ, გიულდენის I თეორემის თანახმად, აღნიშნული ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = 2\pi x \times \pi R$; ამიტომ ვღებულობთ შემდეგ ტოლობას $4\pi R^2 = 2\pi^2 xR$, საიდანაც ვასკვნით, რომ $x = \dfrac{2R}{\pi}$.

სავარჯიშო ამოცანები

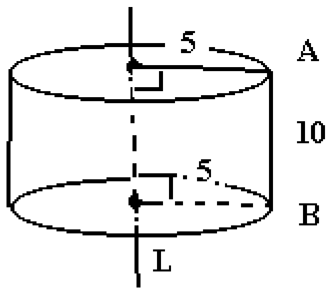
ამოცანა 1.



ვიპოვოთ AB მონაკვეთის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი.

პასუხი: 300π

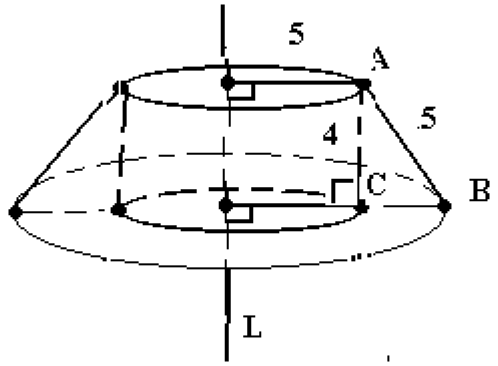
ამოცანა 2.



ვიპოვოთ AB მონაკვეთის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული ზედაპირის ფართობი .

პასუხი: 150π

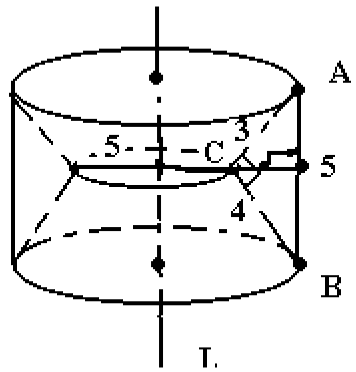
ამოცანა 3



ვიპოვოთ ABC სამკუთხედის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

პასუხი: 144π

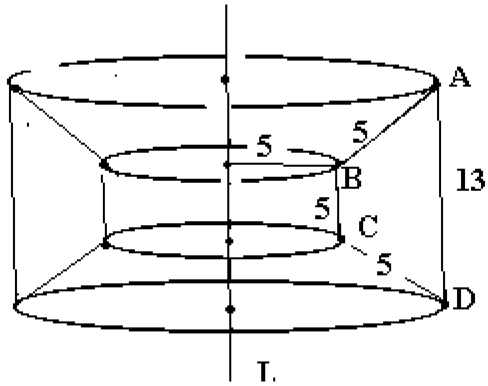
ამოცანა 4



ვიპოვოთ ABC მართკუთხა სამკუთხედის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

პასუხი: $106{,}8\pi$

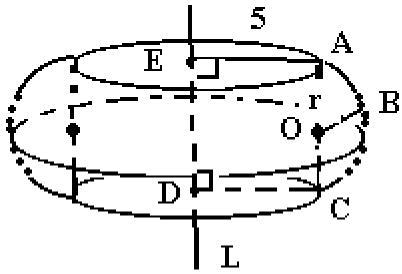
ამოცანა 5



ვიპოვოთ ABCD ტოლფერდა ტრაპეციის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

პასუხი: 388π

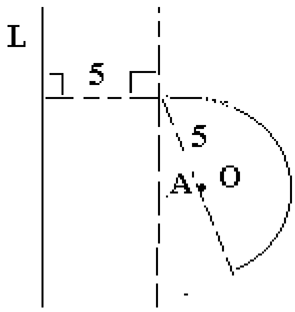
ამოცანა 6



ვიპოვოთ ABC ნახევარწრის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი, თუ $r=5$.

პასუხი: $50\pi^2+200\pi$

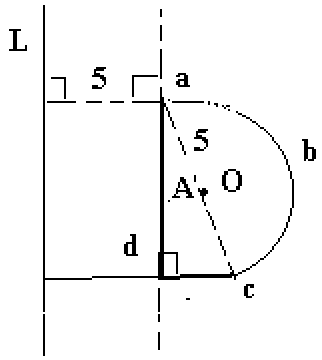
ამოცანა 7



ვიპოვოთ ნახევარწრის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი , თუ $A=30^0$

პასუხი: $25\pi(3\pi+2\sqrt{3}+6)$

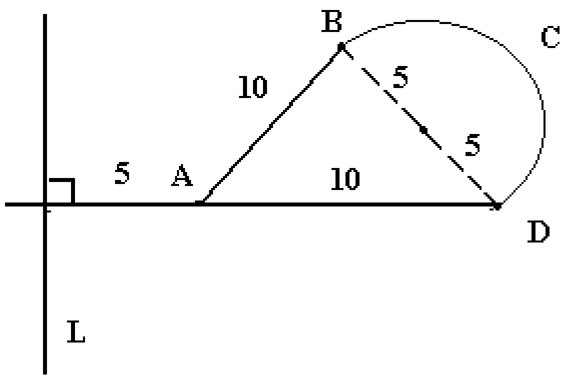
ამოცანა 8



ვიპოვოთ abcd ჩაკეტილი წირის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი , თუ $A = 30^0$

პასუხი: $25\pi(3\pi + 14 + 4\sqrt{3})$

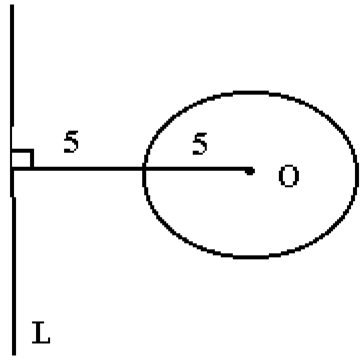
ამოცანა 9



ვიპოვოთ ABCD ჩაკეტილი წირის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

პასუხი: $25\pi(3\pi + 13 + 2\sqrt{3})$

ამოცანა 10



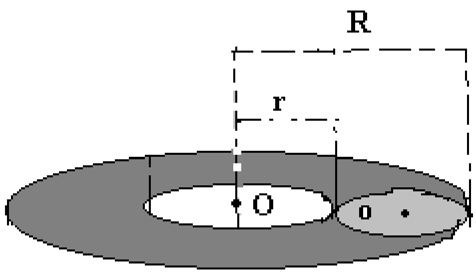
ვიპოვოთ წრეწირის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

პასუხი: $200\pi^2$

§6. ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობის გამოთვლა გიულდენის II თეორემის გამოყენებით

გიულდენის II თეორემა. იმ სხეულის მოცულობა, რომელიც მიიღება ბრტყელი ფირფიტის ამავე სიბრტყეში მდებარე იმ წრფის გარშემო ბრუ-ნვით, რომლის მიერ წარმოქმნილ ერთ-ერთ ჩაკეტილ ნახევარსიბ-რტყეშიცაა განლაგებული აღნიშნული ფირფიტა, ტოლია ბრტყელი ფირფიტის ფართობისა და იმ წრეწირის სიგრძის ნამრავლის, რომლის რადიუსი წარმოადგენს ამ ფირფიტის სიმძიმის ცენტრიდან წრფემდე მანძილს.

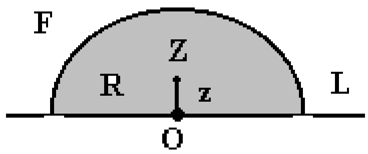
ამოცანა 1. ვიპოვოთ ტორის მოცულობა, თუ მისი გარე რადიუსია R
და შიდა რადიუსია r .



ამოხსნა. ტორი მიიღება $\frac{R-r}{2}$ რადიუსის მქონე F წრიული ფირფიტის ბრუნვით L წრფის გარშემო. $S(F)=\pi(\frac{R-r}{2})^2$. დაშორება F წრიული ფირფიტის o ცენტრიდან L წრფემდე ტოლია $\frac{R+r}{2}$.
ამიტომ ტორის
V მოცულობისთვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$V=\frac{2\pi(R+r)\pi(R-r)^2}{4}=\frac{\pi(R+r)(R-r)^2}{2} \quad ;$$

მოცანა 2. ვიპოვოთ ნახევარწრის სიმძიმის Z ცენტრიდან დიამეტრამდე მანძილი z.



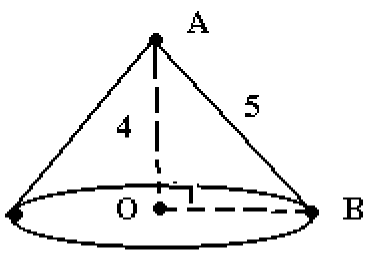
ამოხსნა. F ნახევარწრის მისი დიამეტრის გარშემო ბრუნვის შედეგად მიიღება ბირთვი, რომლის მოცულობაა $\frac{4}{3}\pi R^3$; მეორეს მხრივ, ნახევარ-წრის Z სიმძიმის ცენტრიდან L წრფემდე მანძილი აღვნიშნოთ z-ით. მაშინ მივიღებთ

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi z\frac{\pi R^2}{2},$$

საიდანაც $z=\frac{4R}{3\pi}$.

სავარჯიშო ამოცანები

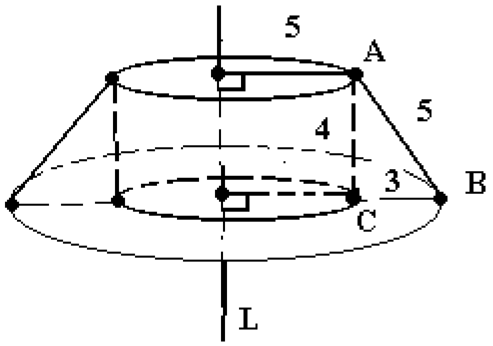
ამოცანა 1



ვიპოვოთ მართკუთხა AOB სამკუთხედის AO კათეტის გარშემო ბრუნ-ვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: 12π

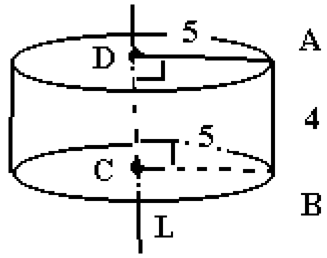
ამოცანა 2



ვიპოვოთ მართკუთხა ACB სამკუთხედის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: 72π

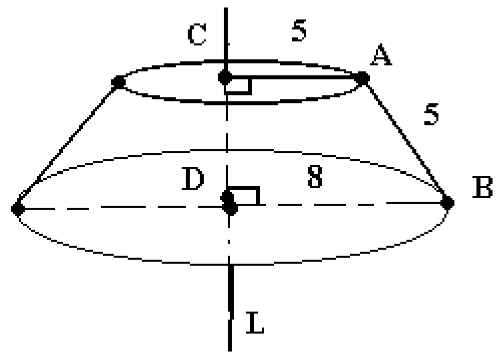
ამოცანა 3



ვიპოვოთ ABCD მართკუთხედის DC გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: 100π

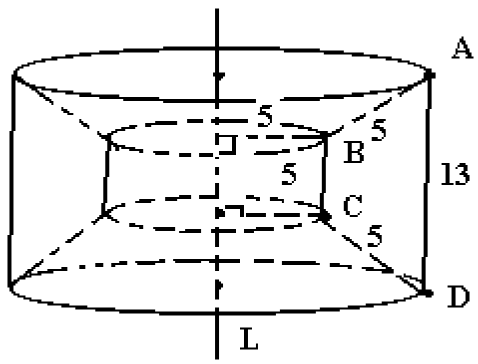
ამოცანა 4



ვიპოვოთ ABDC მართკუთხა ტრაპეციის DC ფერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: 169π

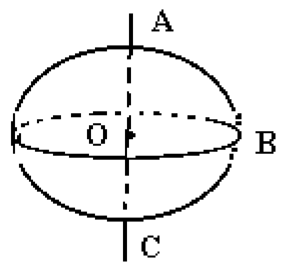
ამოცანა 5



ვიპოვოთ ABCD ტრაპეციის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: 351π

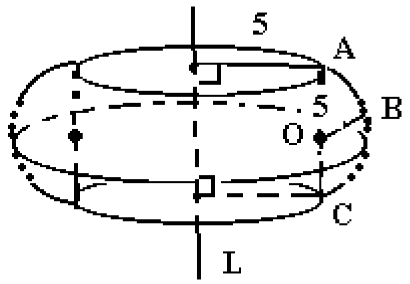
ამოცანა 6



ვიპოვოთ ABC ნახევარწრის AC დიამეტრის გარშემო ბრუნვით მიღე-ბული სხეულის მოცულობა, თუ ცნობილია რომ მისი სიმძიმის ცენტრი-დან AC დიამეტრამდე დაშორება $\frac{4}{3\pi}$ სიდიდის ტოლია.

პასუხი: $\frac{4\pi}{3}$.

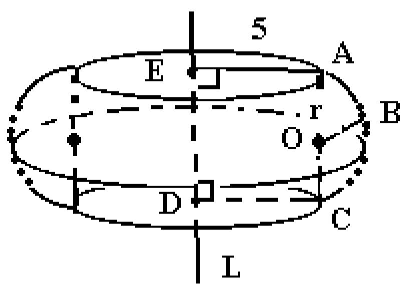
ამოცანა 7



ვიპოვოთ ABC ნახევარწრის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: $\frac{250(3\pi+4)}{3\pi}$

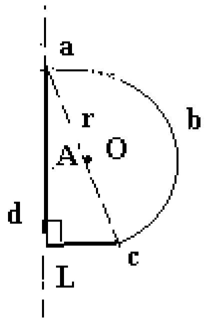
ამოცანა 8



ვიპოვოთ ABCDE ფირფიტის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ $r = 3\pi$.

პასუხი: $\frac{250\pi(7+3\pi)}{3}$

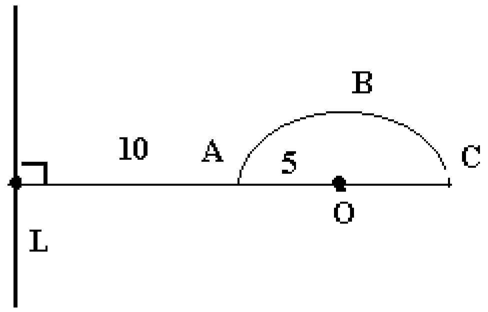
ამოცანა 9



ვიპოვოთ abc ნახევარწრის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ $A = 30^0$ და $r = 3\pi$.

პასუხი: $9\pi^4(3\pi + 4\sqrt{3})$

ამოცანა 10



ვიპოვოთ ABC ნახევარწრის L წრფის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა.

პასუხი: 750π

§ 7. მესერული მრავალკუთხედის ფართობის გამოთვლა ეილერის მახასიათებლების საშუალებით.

ვთქვათ, სიბრტყეზე მოცემულია კვადრატული ბადე, რომლის შემადგენელი თითოეული კვადრატის ფართობი ერთის ტოლია.

განსაზღვრება 1. M მრავალკუთხედს, რომლის წვეროები განლაგებულია კვადრატული ბადის კვანძებში, ეწოდება მესერული მრავალკუთხედი.

მართებულია შემდეგი

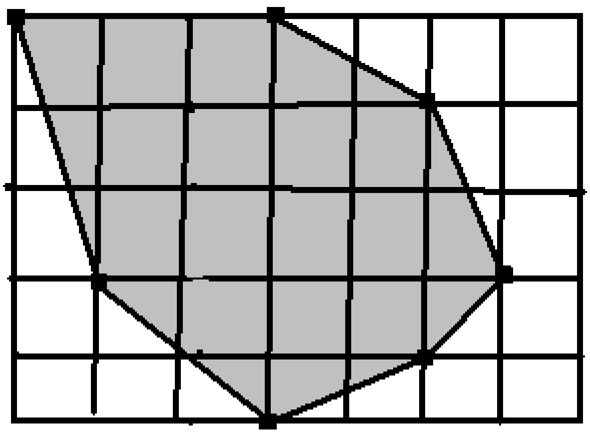
თეორემა 1. მესერული M მრავალკუთხედის $S(M)$ ფართობი გამოითვლება ფორმულით

$$S(M)=i+\frac{b}{2}-1,$$

სადაც i აღნიშნავს მრავალკუთხედის შიგა არეში მოხვედრილი კვანძების რაოდენობას, ხოლო b აღნიშნავს მრავალკუთხედის საზღვარზე განლაგებული კვანძების რაოდენობას.

განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 1. ვიპოვოთ შემდეგი მესერული მრავალკუთხედის ფართობი.

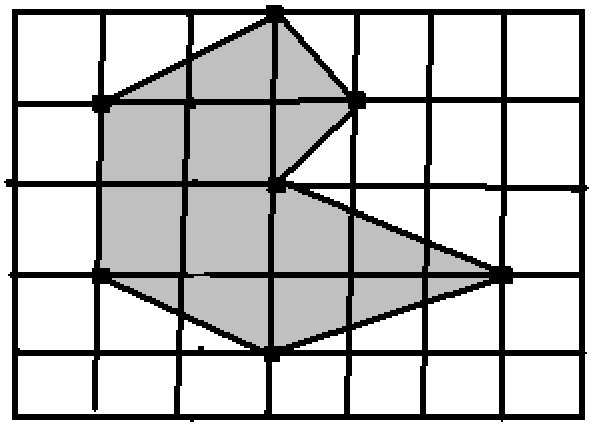


როგორც ნახაზიდან ჩანს, $i=15, b=10$. ამიტომ, თეორემა1-ის ძალით ვღებულობთ $S(M)=15+5-1=19$.

ამოცანები

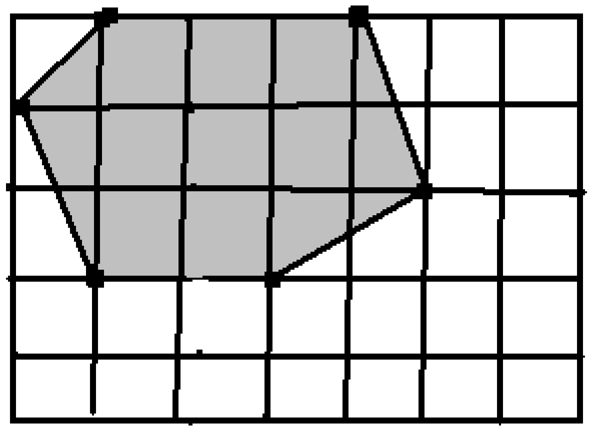
ვიპოვოთ შემდეგი მრავალკუთხედების ფართობები

ამოცანა 1.



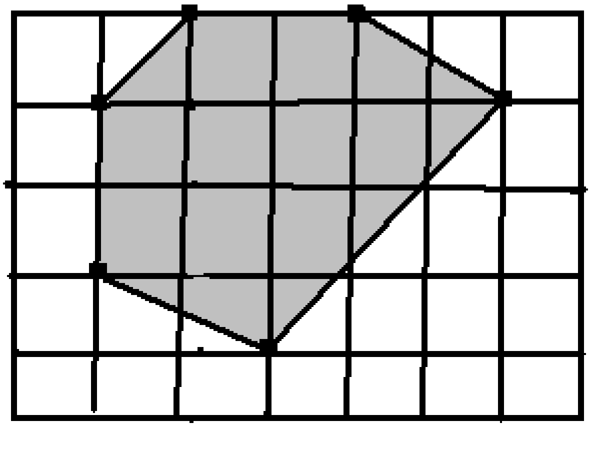
პასუხი: 10.

ამოცანა 2.



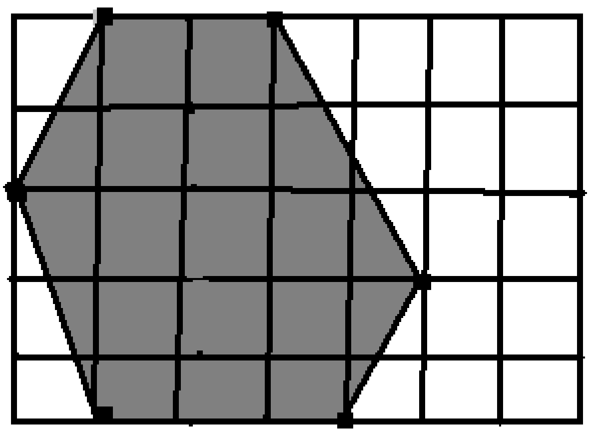
პასუხი: 11,5.

ამოცანა 3



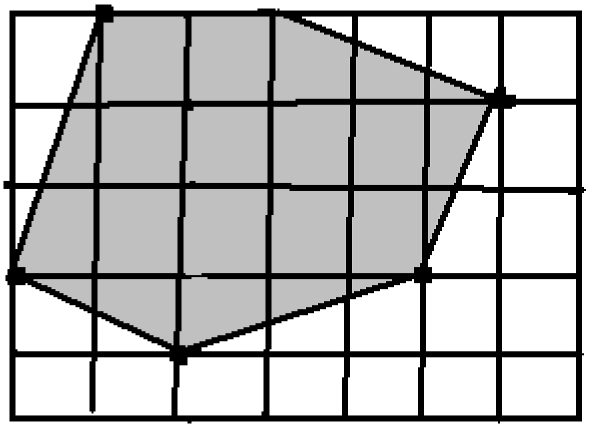
პასუხი: 14.

ამოცანა 4



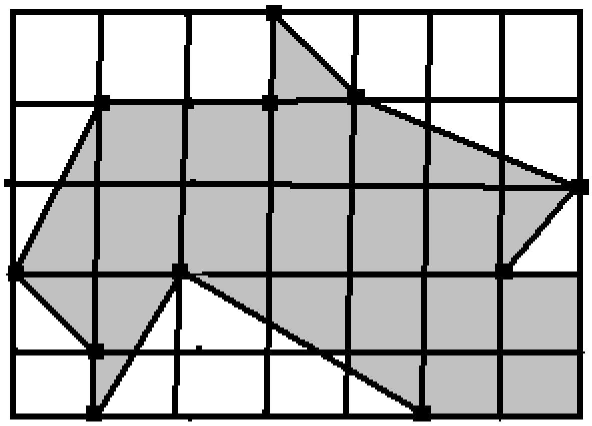
პასუხი: 18,5.

ამოცანა 5



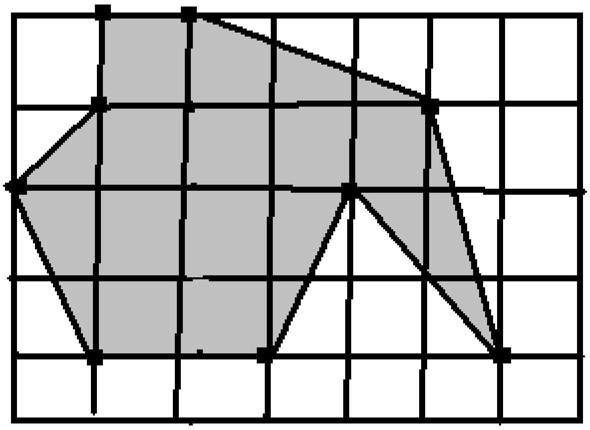
პასუხი: 16,5

ამოცანა 6.



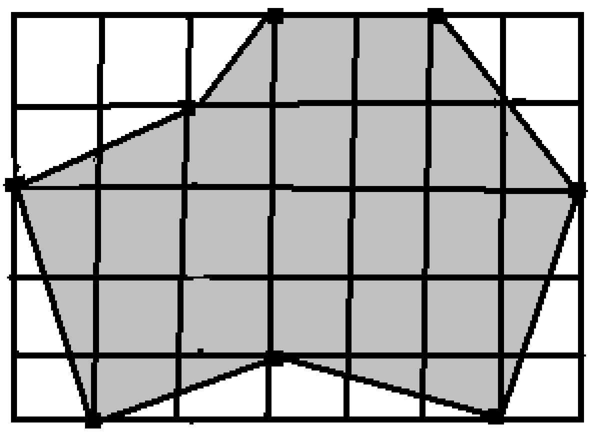
პასუხი: 20

ამოცანა 7.



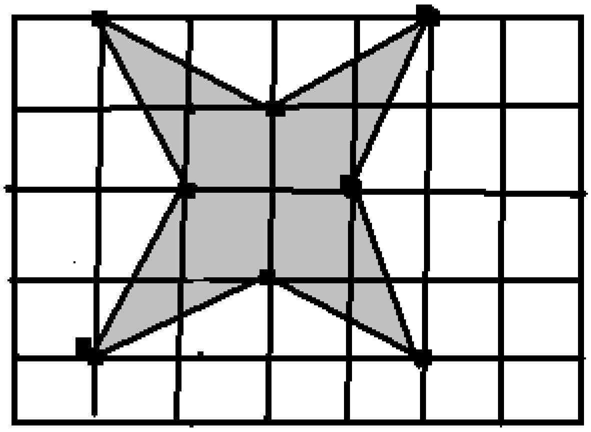
პასუხი: 14,5

ამოცანა 8.



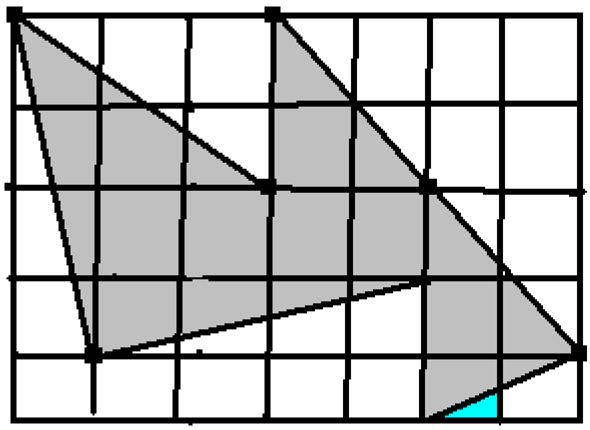
პასუხი: 24.

ამოცანა 9.



პასუხი: 8.

ამოცანა 10.



პასუხი: 14.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Б.И.Аргунов, М.Б.Балк, **Элементарная геометрия,** Изд. «Просвещение», Москва ,1966.

2 .Н.Б.Василиев,В.Л.Гутенмахер, **Прямые и кривые**, Изд. «Наука», Главная редакция физико-математической школы , Москва, 1978.

3. Ю.А. Шашкин, **Эйлерова характеристика,** Изд. «Наука», Главная редакция физико-математической школы , Москва, 1984.

4.Г.С.М.Коксетер ,С.Л.Греитцер, **Новые встречи с геометрией,** Главная редакция физико-математической школы , Москва, 1978.

სარჩევი