საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ნოდარ მახვილაძე, დავით გორ გიძე

დ ი ნ ა მ ი კ ი ს
ამოცანათა კრებული

(მეთოდური მითითებებით და ამოხსნებით)

თბილისი
2009

თეორიულ მექანიკას ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია იმ საგნებს შორის, რომელიც წარმოადგენს თეორიულ ბაზას ისეთი ტექნიკური საგნებისათვის, როგორიცაა მასალათა გამძლეობა, მანქანებისა და მექანიზმების თეორია, დრეკადობის თეორია, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდრავლიკა და მრავალი სხვ.

თეორიული მექანიკის შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს სტუდენტების მიერ თეორიის საკითხებთან ერთად პრაქტიკული ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნის ჩვევების დაუფლებას. სწორედ ამ ამოცანას ემსახურება ამ კრებულში შეტანილი მეთოდური მითითებები.

წინამდებარე კრებულში წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც საკმაოდ ასახავენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თანამედროვე სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინებულ თემატიკას. ყოველ თემაზე კრებულში მოყვანილია რამდენიმე ტიპიური ამოცანის დაწვრილებითი ამოხსნა საჭირო მეთოდური მითითებებით. იქვე მოცემულია გარკვეული რაოდენობის ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის, ხოლო ამ ამოცანების ამოხსნა მოცემულია წიგნის ბოლოში.

ყოველი თემის დასაწყისში მოკლედ ჩამოყალიბებულია თეორიის ძირითადი საკითხები და მოცემულია შესაბამისი ფორმულები. ამოცანის გარჩევისა და ამოხსნის დაწყებამდე საჭიროა სტუდენტმა აუცილებლად შეისწავლოს თეორიული კურსის შესაბამისი საკითხები, ვინაიდან ამ კრებულში მოყვანილი მოკლე თეორიული ცნობები ვერ შეცვლიან თეორიულ სახელმძღვანელოს. სასურველია ამოცანების ამოხსნა წარმოებდეს რეკომენდირებული მიმდევრობით და გათვალისწინებული იქნეს შესაბამისი მეთოდური მითითებები.

krebuli gankuTvnilia nebismieri umaRlesi teqnikuri saswavleblis studentebisaTvis.

რედაქტორი გ. ბაღათურია

რეცენზენტ: ლ. ჯიქიძე
მ. ლოსაბერიძე

§1. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

დინამიკის ძირითადი კანონიდან გამომდინარე, ნივთიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს სხვადასხვა სახით:

1) *ვექტორული სახით*: $m\vec{w} = \vec{F}$. (1.1)

სადაც m - წერტილის მასაა, $\vec{w}$ - მისი აჩქარება, $\vec{F}$ - წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი.

2) *დეკარტეს უძრავ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში*:

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z, \qquad (1.2)$$

სადაც x,y,z –M წერტილის კოორდინატებია, $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ - წერტილის $\vec{w}$ აჩქარების გეგმილებია, X.Y, Z - ტოლქმედი $\vec{F}$ ძალის გეგმილები.

3) *კოორდინატთა ბუნებრივ სისტემაში* (ბუნებრივი ტრიედრის ღერძებზე - $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$): $m dv_\tau/dt = F_\tau$, $mv^2/\rho = F_n$, $0 = F_b$, (1.3)

სადაც v_τ - წერტილის სიჩქარის გეგმილია ტრაექტორიის მხებზე, v - სიჩქარის სიდიდე, ρ - ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია წერტილის აღებულ მდებარეობაში, F_τ, F_n, F_b - ძალის გეგმილები შესაბამისად ტრაექტორიის მხებზე ($\vec{\tau}$), ნორმალზე ($\vec{n}$) და ბინორმალზე ($\vec{b}$).

ა) დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა

თუ მოცემულია m მასის ნივთიერი M(x,y,z) წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები დეკარტეს კოორდინატებში $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$, მაშინ ამ მოძრაობის გამომწვევი $\vec{F}$(X,Y,Z) ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.2) ფორმულებით, ხოლო თვით $\vec{F}$ ძალის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad (1.4)$$

$$\cos(x,\hat{\ }\vec{F}) = X/F, \ \cos(y,\hat{\ }\vec{F}) = Y/F, \ \cos(z,\hat{\ }\vec{F}) = Z/F. \qquad (1.5)$$

თუ მოცემულია m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლება ბუნებრივი სახით s=f(t), მაშინ $\vec{F}$(F_τ,F_n,F_b) ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.3) ფორმულებით, სადაც

$$v_\tau = ds/dt. \qquad (1.6)$$

ძალის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით :

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}; \qquad (1.7)$$

$$\cos(\vec{\tau},\hat{\ }\vec{F}) = F_\tau/F, \ \cos(\vec{n},\hat{\ }\vec{F}) = F_n/F, \ \cos(\vec{b},\hat{\ }\vec{F}) = 0;$$

აქ $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ - შესაბამისად ტრაექტორიის მხების, ნორმალის და ბინორმალის მგეზავებია.

მითითება: დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანის ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით: 1) გამოვსახოთ ნახაზზე (თუ ეს საჭიროა) ნივთიერი წერტილის მიმდინარე მდებარეობა და მასზე მოდებული, როგორც აქტიური, ასევე ბმის რეაქციის ძალები; 2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სათანადო სისტემა; 3) მოძრაობის მოცემული კანონის მიხედვით განვსაზღვროთ წერტილის აჩქარება და მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე; 4) კოორდინატთა არჩეული სისტემის შესაბამისად შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები (1.2) ან (1.3) სახით; 5) განტოლებათა მიღებული სისტემიდან განვსაზღვროთ უცნობი სიდიდეები.

ამოცანა 1.1. m=2 კგ მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის კანონი გამოისახება განტოლებებით: $x=3t^3-2t^2$ (სმ), $y=-4t^2+1$ (სმ), $z=5t+4$ (სმ),

სადაც t გამოსახულია წამებში.

განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე t=1 წმ მომენტში.

ამოხსნა. წერტილზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.2) ფორმულებით.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე: $\ddot{x}=18t-4$, $\ddot{y}=-8$, $\ddot{z}=0$. ამიტომ, (1.2)-ის თანახმად ნებისმიერ t მომენტში: X=2(18t-4), Y=-16, Z=0.

t=1 წმ მომენტში: X=28, Y=-16, Z=0.

$\vec{F}$ ძალის სიდიდე იქნება: $F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = 2\sqrt{255} = 31{,}9$ ნ.

ამოცანა 1.2. ნივთიერი წერტილი მოძრაობს R=8 მ რადიუსის წრეწირზე, $s=2t^2$ მ კანონით (t – წამებში). განსაზღვრეთ ამ წერტილის მასა, თუ ცნობილია, რომ, როცა s=2 მ-ს, მაშინ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდეა $F = \sqrt{5}$ ნ.

ამოხსნა. წერტილი მოძრაობს წრეწირზე, ამიტომ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა. წერტილზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.3) ფორმულებით. (1.6)–ის თანახმად $v_\tau=ds/dt= 4t$; წრეწირზე მოძრაობისას $v_\tau= v= 4t$; ამიტომ გვექნება:

$$F_\tau = m dv_\tau/dt = 4m; \quad F_n = mv^2/R = 2mt^2; \quad F_b = 0.$$

(1.7) - ის თანახმად $\vec{F}$ ძალის სიდიდე დროის ნებისმიერ t მომენტისათვის:

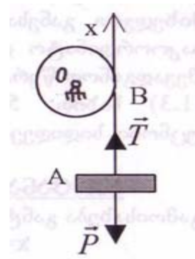
$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}, \text{ ანუ } F = \sqrt{16m^2 + 4m^2t^4}; \qquad (*)$$

პირობის თანახმად $s=2t^2$; ამიტომ, დროის ის მომენტი, როცა წერტილი გაივლის s=2 მ-ს, იქნება $2=2t^2$, ე.ი. t=1წმ. დროის ამ მომენტისათვის $F=\sqrt{5}$.

(*) ტოლობიდან მივიღებთ (t=1წმ, $F=\sqrt{5}$ ნ) :

$\sqrt{5}=\sqrt{16m^2+4m^2}$; ს ვ m = 0,5 ნ.

ამოცანა 1.3. უძრავი 0 ღერძ ემო მბრუნავ ბლოკზე დახვეული თოკის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდეიულია P = 1,2 კნ წონის ტვირთი, რომელიც მოძრაობს w=g/2 –ს ტოლი აჩქარებით. განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ხდება ტვირთის აწევა.



ნახ. 1.

ამოხსნა. ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: $\vec{P}$ -ტვირთის სიმძიმის ძალა და $\vec{T}$ - თოკის დაჭიმულობის ძალა. დინამიკის ძირითადი კანონის თანახმად ტვირთის მოძრაობის კანონი იქნება: $m\vec{w}=\vec{P}+\vec{T}$. (*)

მივმართოთ x ღერძი ტვირთის მოძრაობის მხარეს (ზემოთ) და დავაგეგმილოთ (*) ტოლობა ამ ღერძზე. მივიღებთ: mw = -P+T; აქედან T=mw+P = P/g · g/2 +P = 3P/2=1,8 კნ.

დავალება: განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ტვირთი მოძრაობს ქვევით. პასუხი: T = 0,6 კნ.

ამოცანა 1.4 m = 0,2 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კანონით $x = 8t^2+3$ (მ), y=3t - 4 (მ). განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის გეგმილები t = 1 წმ მომენტში. პასუხი X = 3,2 ნ, Y= 0.

ამოცანა 1.5. m = 1 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კანონით: $\vec{r}=\vec{i}\,e^{2t}+\vec{j}\,Cos^2t-\vec{k}\,t^2$, სადაც r - წერტილის რადიუს - ვექტორია ათვლის 0xyz ინერციული სისტემის მიმართ (r - მეტრებში, t - წამებში). განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე დროის საწყის t_o=0 მომენტში.

პასუხი: $F_o=2\sqrt{6}$

ამოცანა 1.6. სამი მუდმივი $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ ძალა, რომელთა სიდიდეები აკმაყოფილებს $F_1:F_2:F_3$= 1: 2: 3 თანაფარდობას, მოქმედებს m=3 კგ მასის წერტილზე ერთი და იმავე მიმართულებით და ანიჭებს მას w=3 მ/წმ^2 აჩქარებას. იპოვეთ თითოეული ამ ძალის სიდიდე.

პასუხი: F_1=1,5 ნ; F_2=3 ნ; F_3= 4,5 ნ.

ამოცანა 1.7. m = 1 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ათვლის ინერციული 0xyz სისტემი მიმართ ორი მუდმივი ძალის მოქმედებით: $\vec{F}_1=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ და $\vec{F}_2=3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ (ნ). როგორი აჩქარებით მოძრაობს წერტილი?

პასუხი: $w=4\sqrt{5}$ მ/ წმ^2.

ამოცანა 1.8. m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ათვლის ინერციული 0xyz სისტემის მიმართ სამი მუდმივი ძალის მოქმედებით:

$$\vec{F}_1=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\ \vec{F}_2=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{F}_3=3\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}\ (ნ).$$

როგორ α კუთხეს ადგენს წერტილის აჩქარების ვექტორი კოორდინატთა 0y ღერძთან?

პასუხი: α = π/2.

ამოცანა 1.9. P = 49 ნ წონის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მოთავსებული R=9 სმ რადიუსის წრეწირზე $s=8t^3$ სმ კანონით. განსაზღვრეთ ამ წერტილზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალის სიდიდე და მიმართულება t =1 წმ მომენტში. პასუხი: F = 4 ნ; tgα = 3/4;

(α არის კუთხე $\vec{F}$ ძალასა და შესაბამის რადიუსს შორის).

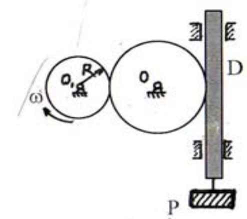
ამოცანა 1.10. m=1 კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს R=1მ რადიუსის წრეწირის რკალზე $s=t^2-t+1$ კანონით (s-მეტრებში, t - წამებში). განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი $\vec{F}$ ძალა დროის t=0,5 წმ მომენტში.

პასუხი: $\vec{F}=2\vec{\tau}$ ნ.

ამოცანა 1.11. R= 10 სმ რადიუსის ლილვზე დახვეული თოკის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულია P= 800 ნ წონის ტვირთი. ლილვი ბრუნავს ω= 30 წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ტვირთი: ა) აიწევა; ბ) ეშვება (იხ. ნახ.1). პასუხი: ა) 1045 ნ ბ) 555 ნ.

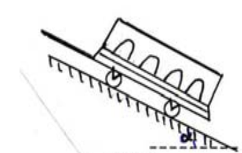
ამოცანა 1.12. P წონის ტვირთი, რომელიც დაკიდებულია უწონად და უჭიმად ბაგირზე, აიწევა კბილა გადაცემის საშუალებით. გადამცემი მექანიზმის ელემენტების მასები და წინაღობა უგულებელყავით.

განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობის $\vec{T}$ ძალა, თუ გადაცემის 0_1 თვალის რადიუსია R და მისი კუთხური სიჩქარე იცვლება ω=kt კანონით, სადაც k დადებითი მუდმივია. პასუხი: T = P(1+ Rk/g).



ნახ. 2.

ამოცანა 1.13. თბილისის ფუნიკულიორის ტრამვაის ვაგონი, რომლის მასა არის m = 8000კგ , ეშვება მთაწმინდის ფერდობზე საბაგირო რკინიგზით v = 1,6 მწმ სიჩქარით. ფერდობი დახრილია ჰორიზონტისადმი $α=30^0$ კუთხით. განსაზღვრეთბაგირის დაჭიმულობა ვაგონის



ნახ. 3.

თანაბარი დაშვებისას და დამუხრუჭებისას, თუ დამუხრუჭების დრო $t = 4$ წმ. მოძრაობის წინაღობის საერთო კოეფიციენტია $f = 0,15$.

დამუხრუჭებისას ვაგონი მოძრაობს თანაბრად შენელებულად.

პასუხი: $T_1 = 29,1$ კნ; $T_2 = 32,3$ კნ.

ბ) დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანა

მოცემულია ნივთიერი 6 *y,z) წერტილის მასა (m) და წერტილზე მოქმედი ძალა $\vec{F}(X,Y,Z)$. საჭიროა ვიპოვოთ წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები.*

ამ ამოცანის ამოსახსნელად წერტილის მასისა და მოქმედი ძალის გარდა საჭიროა აგრეთვე ვიცოდეთ მოძრაობის საწყისი პირობები, ანუ მოძრაობის საწყის t_o მომენტში წერტილის საწყისი მდებარეობა $M_o(x_o,y_o,z_o)$ და საწყისი სიჩქარე $\vec{v}_o\,(x'_o, y'_o, z'_o)$.

მითითება. დინამიკის მეორე ძირითადი ამოცანის ამოხსნა რეკომენდებულია შესრულდეს შემდეგი თანამიმდევრობით: 1) გამოვსახოთ ნახაზზე (თუ ეს საჭიროა) ნივთიერ წერტილზე მოქმედი, როგორც აქტიური, ასევე ბმის რეაქციის ძალები; 2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სათანადო სისტემა; 3) ჩავწეროთ წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობები; 4) შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები; 5) ვაინტეგროთ მიღებული განტოლებათა სისტემა და მოძრაობის საწყისი პირობების მიხედვით განვსაზღვროთ ინტეგრების მუდმივები; 6) ვისარგებლოთ ინტეგრების შედეგად მიღებული წერტილის მოძრაობის განტოლებებით და განვსაზღვროთ უცნობი სიდიდეები.

წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი $\vec{F}$ (და საკოორდინატო ღერძებზე მისი გეგმილები) საზოგადოდ შეიძლება იყოს მუდმივი ან დამოკიდებული იყოს წერტილის მდებარეობაზე ($\vec{r}$), მისი მოძრაობის სიჩქარეზე ($\vec{v}$) და დროზე (t): $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

მუდმივი ძალის მაგალითია სიმძიმის ძალა (დედამიწის მახლობლობაში); დროზე დამოკიდებული ძალის მაგალითია პერიოდულად ცვალებადი ძალები, რომლებიც იწვევენ წერტილის ან სხეულის რხევით მოძრაობებს; მდებარეობაზე დამოკიდებული ძალის მაგალითია ზამბარის გაჭიმვით ან შეკუმშვით წარმოქმნილი ძალა; ეს ძალა პროპორციულია ზამბარის დაგრძელების ან შეკუმშვისა. სიჩქარეზე დამოკიდებული ძალის მაგალითია ჰაერის ან წყლის წინაღობის ძალა; ეს ძალა პროპორციულია მოძრავი წერტილის (სხეულის) სიჩქარისა (მცირე სიჩქარისას) ან სიჩქარის კვადრატისა (დიდი სიჩქარისას).

კოორდინატთა სისტემის არჩევა ხდება წერტილის მოძრაობის ხასიათის (წრფივი, ბრტყელი ან მრუდწირული) და მასზე მოქმედი ძალების ბუნების მიხედვით. შესაბამისად ვიყენებთ მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს (1.2) ან (1.3) სახით.

ამოცანა 1.14. $m = 3$კგ მასის ნივთიერ წერტილზე მოქმედებს ძალა, რომლის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე არიან: $X = 9t^2$ ნ, $Y = 12$ ნ, $Z = 0$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ იგი გამოვიდა კოორდინატთა სისტემის სათავიდან სიჩქარით, რომლის გეგმილებია: $v_{ox} = 0$, $v_{oy} = 6$ მ/წმ, $v_{oz} = 5$ მ/წმ.

ამოხსნა: თანახმად (1.2) 7 ელებისა, წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები იყაყიას.

$$m\ddot{x} = 9t^2; \quad m\ddot{y} = 12; \quad m\ddot{z} = 0. \qquad (ა)$$

მოძრაობის საწყისი პირობებია:

როცა $t = t_0 = 0$, მაშინ $x_o = y_o = z_o = 0$, (ბ)

$$\dot{x}_o = v_{ox} = 0, \quad \dot{y}_o = v_{oy} = 6, \quad \dot{z}_o = v_{oz} = 5.$$

ვაინტეგროთ (ა) ტოლობები; მივიღებთ:

$$m\dot{x} = 3t^3 + c_1; \quad m\dot{y} = 12t + c_2; \quad m\dot{z} = c_3. \qquad (გ)$$

ეს ტოლობები კვლავ ვაინტეგროთ; მივიღებთ:

$$mx = 3/4\, t^4 + c_1 t + c_4; \quad my = 6t^2 + c_2 t + c_5; \quad mz = c_3 t + c_6. \qquad (დ)$$

(გ) და (დ) ტოლობებში გამოვიყენოთ მოძრაობის საწყისი (ბ) პირობები; როცა $t_o = 0$, მივიღებთ:

$$mv_{ox} = c_1; \quad mv_{oy} = c_2; \quad mv_{oz} = c_3; \quad mx_o = c_4; \quad my_o = c_5; \quad mz_o = c_6;$$

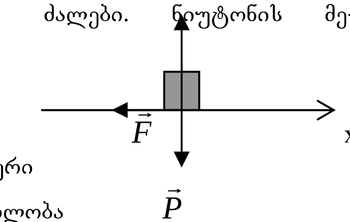
საიდანაც $c_1 = 0$, $c_2 = 18$, $c_3 = 15$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

ამ მნიშვნელობების (დ) ტოლობებში შეტანით მივიღებთ წერტილის მოძრაობის განტოლებებს ($m = 3$):

$\underline{x = 1/4 \cdot t^4}$ მ; $\underline{y = 2t^2 + 6t}$ მ; $\underline{z = 5t}$ მ.

ამოცანა 1.15. $m = 0,1$ კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალური წრფივი გზის გასწვრივ 5 მ/წმ სიჩქარით. დროის გარკვეული მომენტიდან დაიწყო წერტილზე წინაღობის მუდმივი $\vec{F}$ ძალის მოქმედება. რას უდრის ეს ძალა, თუ ძალის მოქმედების დაწყების მომენტიდან წერტილი გაჩერდა 1 მ-ის გავლის შემდეგ.

ამოხსნა დროის განსახილველ შუალედში, ე.ი. $\vec{F}$ ძალის მოდების მომენტიდან გაჩერებამდე, წერტილზე მოქმედებენ სიმძიმის $\vec{P}$, რეაქციის $\vec{N}$ და წინაღობის $\vec{F}$ ძალები. ნიუტონის მე-2 $\vec{N}$



კანონის თანახმად გვექნება:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}. \qquad (ა)$$

მივმართოთ x ღერძი ჰორიზონტალური გზის გასწვრივ და დავაგეგმილოთ (ა) ტოლობა

ამ ღერძზე, მივიღებთ: $m\ddot{x} = -F$.   ნახ. 4

გავაინტეგროთ ეს ტოლობა: $m\dot{x} = -Ft + c_1$.   (ბ)

მოძრაობის საწყისი პირობებია: $t=t_o=0$, მაშინ $\dot{x}_o=v_o=5$ მ/წმ, $x_o=0$.   (გ)

ამიტომ $t_o=0$ მომენტში (ბ)–დან გვექნება: $mv_o = c_1$; (ბ) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$m\dot{x} = -Ft + mv_o . \qquad (დ)$$

დაუშვათ წერტილი გაჩერ   ამის შემდეგ. ე.ი., როცა $t=\tau$, მაშინ $\dot{x}=v=0$. ამიტომ (დ)-დან მივ $=-F\tau+mv_o$, საიდანაც $\tau = mv_o/F$ წმ.

(დ) ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ: $mx= -1/2\cdot Ft^2+ mv_ot+c_2$.   (ე)

აქ c_2 განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი (გ) პირობებიდან: როცა $t=t_o=0$, მაშინ $x= x_o=0$ და გვექნება $c_2=0$. ამ მნიშვნელობის (ე) -ში შეტანით მივიღებთ: $mx= -1/2\cdot Ft^2+ mv_ot$.   (ვ)

τ წამში სხეულმა გაიარა $x= s = 1$ მ მანძილი და გაჩერდა; ამიტომ, როცა $t = \tau$, (ვ)-დან მივიღებთ: $ms= -1/2\cdot F\tau^2 + mv_o\tau$;

შევიტანოთ აქ τ -ს მნიშვნელობა: $ms = -1/2\cdot F(mv_o/F)^2 + mv_o(mv_o/F)$;

აქედან $F = mv_o^2/ 2s = 1,25$ ნ.   <u>F = 1,25 ნ.</u>

<u>ამოცანა 1.16</u>. მოთხილამურე ეშვება ჰორიზონტისადმი $\alpha=60^0$ კუთხით დახრილ $s=100$ მ სიგრძის ფერდობზე. თხილამურების თოვლზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია $f=0,1$. განსაზღვრეთ მოთხილამურის დაშვების დრო (τ) და სიჩქარე (v) ფერდობის ბოლოში, თუ დაშვების დასაწყისში სიჩქარე ნულის ტოლი იყო. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

<u>ამოხსნა</u>. კოორდინატთა მართკუთხა $0xy$ სისტემის სათავე მოვათავსოთ მოთხილამურის დაშვების საწყის 0 წერტილში და $0x$ ღერძი მივმართოთ ფერდობის გასწვრივ ქვევით.

მოძრაობის საწყისი პირობებია:

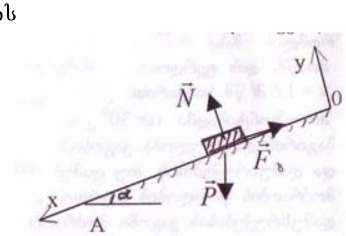
როცა $t = t_o= 0$, მაშინ $x = x_o = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_o = v_o = 0$.   (ა)

მოთხილამურეზე მოქმედებს სიმძიმის $\vec{P}=m\vec{g}$ ძალა, ფერდობის რეაქციის ძალა $\vec{N}$ და თოვლზე თხილამურების სრიალის ხახუნის ძალა $\vec{F}_ხ$, მიმართული მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ნიუტონის მე-2 კანონის თანახმად:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_ხ .$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა $0x$ და $0y$ ღერძებზე: $m\ddot{x} = mg\, Sin\alpha - F_ხ$,   (ბ)



ნახ. 5

$$0 = -mg\, Cos\alpha + N .$$

(ვინაიდან მოთხილამურე მოძრაობს $0x$ ღერძის გასწვრივ, ამიტომ $w_y= \ddot{y} =0$).

(ბ)-დან $N = mgCos\alpha$; ხახუნის ძალა $F_ხ= fN = fmgCos\alpha$. გვექნება:

$$m\ddot{x} = mg\, Sin\alpha - f\, mgCos\alpha ,$$

ანუ $\ddot{x} = g(Sin\alpha- f\, Cos\alpha)$.

ამ ტოლობის ორჯერ ინ   მივიღებთ:

$$\dot{x} = gt(Sin\alpha - f\, Cos \qquad (გ)$$

$$x = 1/2\, gt^2(Sin\alpha - f \quad c_1t + c_2.$$

აქ ინტეგრების c_1 და c_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი (ა) პირობებით: როცა $t = t_o = 0$, (გ)-დან მივიღებთ:

$c_1 = \dot{x}_o = 0$, $c_2 = x_o = 0$. (გ) ტოლობები ასე გადაიწერება

$$\dot{x} = gt(Sin\alpha - f\, Cos\alpha), \qquad (დ)$$

$$x = 1/2\, gt^2(Sin\alpha - f\, Cos\alpha).$$

ფერდობის გავლას მოთხილამურე ანდომებს τ წამს; ამიტომ, როცა $t=\tau$, მაშინ მოთხილამურე გაივლის $x = s$ მანძილს და ფერდობის ბოლოში სიჩქარე იქნება $\dot{x} = v_A$. (დ)-დან მივიღებთ:

$$v_A= g\tau\, (Sin\alpha - f\, Cos\alpha),$$

$$s = 1/2\, g\tau^2(Sin\alpha- f\, Cos\alpha).$$

ამ განტოლებებში შევიტანოთ ამოცანის პირობით მოცემული (s, f, α, $g=9,8$ მ/წმ^2) სიდიდეების მნიშვნელობები და ამოვხსნათ მიღებული სისტემა. გვექნება : <u>$\tau = 5$ წმ</u>, <u>$v_A = 40$ მ/წმ</u>.

<u>ამოცანა 1.17</u>. $P =10$ ნ წონის სხეული მოძრაობს ცვლადი $F=10(1- t)$ ნ ძალის მოქმედებით (t - წმ-ში). რა τ დროის შემდეგ გაჩერდება სხეული, თუ საწყის მომენტში $v_o= 20$ სმ/წმ და $\vec{F}$ ძალა ემთხვევა სიჩქარის მიმართულებას. რა s მანძილს გაივლის სხეული გაჩერებამდე ?

<u>ამოხსნა</u> . ამოცანის პირობის თანახმად ძალის მიმართულება ემთხვევა სიჩქარის მიმართულებას ამ მიმართულებას. დავამთხვიოთ საკოორდინატო $0x$ ღერძი, სათავით 0 წერტილში. მოძრაობის საწყისი პირობებია: $t_o=0$, $x_o=0$, $\dot{x}_o = v_o$.   (ა)

მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$m\ddot{x} = 10\, (1 – t).$$

ვინაიდან $m = P/g$, გვექნება: $\ddot{x} = g\, (1- t)$. ამ ტოლობის ინტეგრებით მივიღებთ: $\dot{x} = - 1/2\cdot g\, (1 – t)^2 + c_1$.   (ბ)

საწყისი (ა) პირობის თანახმად: როცა $t_o = 0$, $\dot{x}_o = v_0$; (ბ)-დან მივიღებთ: $v_o = -1/2\ g + c_1$; აქედან: $c_1 = v_o + 1/2\ g$. შევიტანოთ (ბ)-ში:

$$\dot{x} = -1/2\ g(1-t)^2 + v_o + 1/2\cdot g. \qquad (გ)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს სხეულის სიჩქარეს დროის ნებისმიერ t მომენტში.

სხეული ჩერდება τ წამის შემდეგ, ე.ი. $t = \tau$ მომენტში $\dot{x} = v = 0$. (გ)-დან გვექნება: $0 = -1/2\ g(1-\tau)^2 + v_o + 1/2\cdot g$, საიდანაც

$\tau = 2{,}02$ წმ-ს; (აქ $g = 980$ სმ/წმ²).

განვლილი s მანძილის გამ... ...ად ვაინტეგროთ (გ) ტოლობა; მივიღებთ: $x = 1/6\cdot g(1-t)^3$ ... $g)t + c_2$. (დ)

როცა $t = t_o = 0$, მაშინ $x = x_o = 0$; (დ)-დან გვექნება $c_2 = -1/6\cdot g$; მაშასადამე:

$$x = 1/6\cdot g(1-t)^3 + (v_o + 1/2\cdot g)t - 1/6\cdot g. \qquad (ე)$$

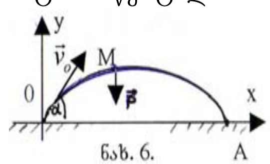
$t = \tau$ წამში სხეულმა გაიარა s მანძილი და გაჩერდა. ამიტომ (ე)–დან გვექნება $s = 1/6\cdot g(1-\tau)^3 + (v_o + 1/2\cdot g)\tau - 1/6\cdot g = 692$ სმ.

$s = 692$ სმ.

ამოცანა 1.18. 0 წერტილიდან ჰორიზონტისადმი α კუთხით და v_o საწყისი სიჩქარით გატყორცნილია m მასის ნივთიერი წერტილი.

განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, ტრაექტორიის სიმაღლე (H), ტყორცნის სიშორე (ℓ), ფრენის დრო (τ). ჰაერის წინაღობის ძალა უგულებელყავით.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობისას მასზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა – მისი სიმძიმის $\vec{P}$ ძალა. ვინაიდან საწყისი $\vec{v}_o$ სიჩქარე და $\vec{P}$ ძალა მდებარეობენ ვერტიკალურ სიბრტყეში, ამიტომ წერტილის მოძრაობაც ამ სიბრტყეში ხდება. გამოვიყვანოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები.



ნახ. 6.

კოორდინატთა 0xy სისტემის სათავედ ავირჩიოთ გატყორცნის 0 წერტილი და x ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტის გასწვრივ, y ღერძი მივმართოთ მის ვერტიკალურად. წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობებია: როცა $t = t_o = 0$, მაშინ:

$$x_o = 0,\ y_o = 0,\quad \dot{x}_o = V_x = V_o\cos\alpha,\quad \dot{y}_o = V_y = V_o\sin\alpha. \qquad (ა)$$

წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს გეგმილებში ასეთი სახე აქვთ: $m\ddot{x} = 0$, $m\ddot{y} = -P$. ვინაიდან $P = mg$, გვექნება: $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -g$.

ამ ტოლობების ინტეგრებით მივიღებთ: $\dot{x} = c_1$, $\dot{y} = -gt + c_2$. (ბ)

ინტეგრების c_1 და c_2 მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი (ა) პირობებით: როცა $t_o = 0$, გვექნება: $V_o\cos\alpha = c_1$, $V_o\sin\alpha = c_2$.

(ბ) ასე ჩაიწერება: $\dot{x} = V_o\cos\alpha$;

$$\dot{y} = -gt + V_o\sin\alpha. \qquad (გ)$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობები; მივიღებთ:

$$x = V_o t\cos\alpha + c_3; \qquad (დ)$$
$$y = -1/2\cdot gt^2 + V_o t\sin\alpha + c_4.$$

(ა) საწყისი პირობებიდან, როცა $t = t_o = 0$, (დ)-დან $x_o = c_3 = 0$, $y_o = c_4 = 0$; მაშასადამე (დ) ასე ჩაიწერება:

$$x = V_o t\cos\alpha; \qquad (ე)$$
$$y = \ldots V_o t\sin\alpha.$$

ეს ტოლობები წარმო... ...რტილის მოძრაობის განტოლებებს.

წერტილის ტრაექტოოიის დასადგენად მოძრაობის (ე) განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დროის t პარამეტრი; მივიღებთ:

$$y = -(g/2V_o^2\cos^2\alpha)x^2 + x\,\mathrm{tg}\alpha. \qquad (ვ)$$

ტრაექტორია არის პარაბოლა.

დაუშვათ წერტილის ჰორიზონტალური ტყორცნის სიშორეა $0A = \ell$ მანძილი და მოძრაობს τ წამის განმავლობაში.

A მდებარეობაში: $t = \tau$, $x = \ell$, $y = 0$; ამიტომ (ე)-დან მივიღებთ:

$$\ell = V_o\tau\cos\alpha;$$
$$0 = -1/2\cdot g\tau^2 + V_o\tau\sin\alpha.$$

აქედან მოძრაობის დრო $\tau = 2V_o/g\cdot\sin\alpha$, ხოლო წერტილის ჰორიზონტალური ტყორცნის სიშორე

$$\ell = V_o^2/g\cdot\sin2\alpha,$$

ფრენის სიმაღლის განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (ვ) ტოლობით მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმი; მივიღებთ:

$$y_{max} = H = V_o^2\sin^2\alpha/2g.$$

ამოცანა 1.19. $m = 200$ გ მასის ნივთიერი წერტილი მუდმივი $F = 2$ნ ძალის მოქმედებით მოძრაობს ჰორიზონტალური 0x ღერძის გასწვრივ. საწყის მომენტში $x_o = 3$ მ, $V_o = 4$ მ/წმ. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება. პასუხი: $x = (5t^2 + 4t + 3)$ მ.

ამოცანა 1.20. m მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ 0xy სიბრტყეში; მასზე მოქმედებს ძალა, რომლის გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე არიან: $F_x = am\sin\omega t$; $F_y = 0$ (a, ω- მოცემული მუდმივებია). განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები, თუ საწყის მომენტში: $x_o = y_o = 0$; $V_{ox} = -a/\omega$; $V_{oy} = 0$.

პასუხი: $x = -a/\omega\sin\omega t$; $y = 0$.

ამოცანა 1.21. ავტომანქანა მოძრაობს გზის ჰორიზონტალურ წრფივ უბანზე 90 კმ/სთ სიჩქარით. დროის რომელიღაც მომენტში ძრავა

გამორთეს. განსაზღვრეთ ძრავის გამორთვის მომენტიდან გაჩერებამდე ავტომანქანის მიერ განვლილი მანძილი და დრო, თუ მოძრაობისადმი წინაღობა მუდმივია და ავტომანქანის წონის 0,2–ის ტოლია. პასუხი: $s = 159$ მ; $t = 12,7$ წმ.

ამოცანა 1.22. ელექტრომატარებელი მოძრაობდა გზის ჰორიზონტალურ წრფივ უბანზე 72 კმ/სთ სიჩქარით. მემანქანემ შეამჩნია რკინისგზის ხაზზე გაჩერებული ტრაქტორი და დაიწყო მატარებლის დამუხრუჭება ძალით, რომელიც მატარებლის წონის 0,05 –ის ტოლია. რა მანძილზე ჩართო მემანქანემ მუხრუჭები, თუ მატარებელი გაჩერდა ტრაქტორიდან 5 მ მანძილზე. პასუხი: $s = 413$ მ.

ამოცანა 1.23. $m = 2$ ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კოორდინატთა სისტემის სათავიდან ჰორიზონტალური 0x ღერძის გასწვრივ და აქვს საწყისი სიჩქარე $V_o=1,5$ მ/წმ. წერტილზე მოქმედებს მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა $\vec{R} = -k\dot{x}\,\vec{i}$ (ნ), სადაც $k = 6$ ნწმ/ მ – დადებითი მუდმივია. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი.

პასუხი: $x = 1/2\cdot(1 – e^{-3t})$ მ.

ამოცანა 1.24. კატარღა მოძრაობს ტბაზე $V= 36$ კმ/სთ სიჩქარით. დროის გარკვეულ მომენტში ძრავა გამორთეს და ერთი წუთის შემდეგ კატარღის სიჩქარე 10 - ჯერ შემცირდა. განსაზღვრეთ კატარღის სიჩქარე ორი წუთის შემდეგ, თუ კატარღის მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა მისი სიჩქარის პროპორციულია. პასუხი: 0,36 კმ/სთ.

ამოცანა 1.25. ჰორიზონტისადმი $\alpha = 30^0$ კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე სხეული ეშვება თანაბრად. განსაზღვრეთ სხეულის აჩქარება, თუ სიბრტყე დახრილი იქნება ჰორიზონტისადმი $\beta= 45^0$ კუთხით.

პასუხი: $w = 2,93$ მ/წმ^2.

ამოცანა 1.26. ქვემეხი მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის სათავეში. ჰორიზონტისადმი როგორი α კუთხით უნდა გავისროლოთ ჭურვი, რომ მოვახვედროთ მიზანში, რომლის კოორდინატებია $x = 1$ კმ, $y = 0,5$ კმ, თუ გასროლისას ჭურვის საწყისი სიჩქარეა $V_o= 1000$ მ/წმ. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით. 0y ღერძი მიმართულია ზევით.

პასუხი: $\alpha = 26^o 50'$.

ამოცანა 1.27. მართვადი რაკეტა 20 კმ სიმაღლეზე ვერტიკალური ასვლის შემდეგ მოძრაობს ისე, როგორც უჰაერო სივრცეში ჰორიზონტისადმი $\alpha=50^0$ კუთხით და $V_o = 1700$ მ/წმ საწყისი სიჩქარით გასროლილი თავისუფალი სხეული. განსაზღვრეთ რაკეტის ფრენის დრო და სიშორე, აგრეთვე ფრენის სიმაღლე.

პასუხი: $T = 280$ წმ; $s = 306$ კმ; $H = 106,4$ კმ.

ამოცანა 1.28. ავტომანქანა, რომელიც მოძრაობდა $V_o=16$ მ/წმ სიჩქარით, ძრავის გამორთვის მომენტიდან იწყებს ასვლას ჰორიზონტისადმი $\alpha = 15^0$ კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია $f=0,2$. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ მანძილი, რომელსაც ავტომანქანა გადის გაჩერებამდე; რა დროა საჭირო ამ გზის გასავლელად? პასუხი: $s = 28,9$ მ. $T= 3,61$ წმ.

§ 2. წერტილის ნიული რხევა

m მასის ნივთიერი M წერტილის წრფივ მოძრაობას 0x ღერძის გასწვრივ ჰარმონიული (ანუ თავისუფალი) რხევა ეწოდება, თუ მასზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი ძალა $F = c\,x$. აქ $x= 0M$ (0– წერტილის წონასწორობის მდგომარეობაა) c - სიხისტის (დრეკადობის) კოეფიციენტი. გარემოს წინაღობა უგულებელყოფილია.

რხევის დიფერენციალური განტოლება: $\ddot{x} + k^2x = 0$, $(k^2= c/m)$ (2.1)


ნახ.7

რხევის საწყისი პირობები: როცა $t_o=0$, მაშინ $x=x_o$, $\dot{x} =V_o$. (2.2)

რხევის განტოლება: $x = x_o\mathrm{Cos}kt + V_o/k \cdot\mathrm{Sin}kt$; (2.3)

ან $x = a\mathrm{Sin}(kt + \alpha)$. (2.4)

a – რხევის ამპლიტუდაა: $a = \sqrt{x_o^2 + V_o^2/ k^2}$. (2.5)

$(kt + \alpha)$ – რხევის ფაზა. α - რხევის საწყისი ფაზა: $tg\alpha=kx_o/V_o$;

k – რხევის კუთხური სიხშირე;

$T = 2\pi / k = 2\pi \sqrt{m/c}$ (2.6) - რხევის პერიოდი.

$\nu = 1/T$ - რხევის სიხშირე, ანუ რხევათა რიცხვი ერთ წამში.

მითითება. ჰარმონიულ რხევაზე ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შესრულდეს შემდეგი თანამიმდევრობით:

1) ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით ნივთიერი წერტილის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში;

2) ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობები;

3) ნახაზზე გამოვსახოთ ნივთიერ წერტილზე მოქმედი აქტიური და ბმის რეაქციის ძალები;

4) შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება შესაბამის ღერძზე გეგმილებში;

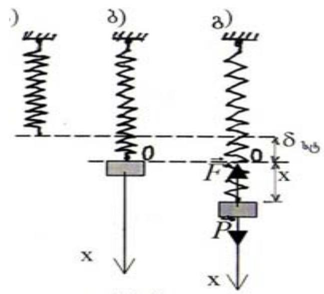
5) მოვახდინოთ ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება; ინტეგრების მუდმივების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ რხევის საწყისი პირობები.

ამოცანა 2.1. ვერტიკალური ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო ქვედა ბოლოზე დაკიდებული P წონის ტვირთის მოქმედებით ზამბარის სტატიკური დეფორმაცია $\delta_{სტ}= 10$ სმ. ტვირთი გადასწიეს სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან $x_o=15$

სმ მანძილზე და მიანიჭეს ვერტიკალურად ქვევით მიმართული სიჩქარე V_o= 99 სმ/წმ. შეადგინეთ ტვირთის რხევის განტოლება, თუ 0x ღერძი მიმართულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ქვევით.

ამოხსნა.გამოვხაზოთ ვერტიკალურად დაკიდებული ზამბარის სამი პოზიცია: ა) ზამბარას საწყისი არადეფორმირებული მდგომარეობა.

ბ) ზამბარის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა-ზამბარის ბოლოზე P წონის ტვირთის დაკიდების შედეგად ზამბარამ განიცადა დეფორმაცია და დაგრძელდა $\delta_{სტ}$ მანძილით. $P = c\delta_{სტ}$, სადაც c – ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტია.



ნახ.8

გ) ზამბარისა და მასზე დაკიდებული ტვირთის მდგომარეობა ტვირთის მოძრაობის მიმდინარე მდებარეობაში, როდესაც იგი გადაწეულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან x მანძილზე.

კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ ტვირთის დაკიდვის 0 წერტილში, როდესაც ტვირთი იმყოფება სტატიკურ წონასწორობაში. 0x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: ტვირთის P წონა, მიმართული ქვევით და ზამბარის დრეკადობის $\vec{F}$ ძალა, მიმართული ზევით. რადგანაც ზამბარა მთლიანად დაგრძელდა $(x+\delta_{სტ})$ მანძილზე, ამიტომ $F = c\,(x+\delta_{სტ})$.

ტვირთის მოძრაობის საწყისი პირობებია:

როცა $t = t_o = 0$, მაშინ $x = x_o$, $V = \dot{x}_o = V_o$. (ა)

ტვირთი მოძრაობს გადატანითად, ამიტომ იგი შეიძლება ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილად. ტვირთის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია: $m\vec{w} = \vec{P} + \vec{F}$.

ამ ტოლობის x ღერძზე დაგეგმილებით მივიღებთ: $m\ddot{x} = P - F$, ანუ $m\ddot{x} = c\delta_{სტ} - c(x+\delta_{სტ})$; აქედან, ტვირთის თავისუფალი რხევის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad სადაც \quad k^2 = c/m. \qquad (ბ)$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას (ა) საწყისი პირობებით ასეთი სახე აქვს (იხ. 2.3 ფორმულა): $x = x_o\text{Cos}kt + V_o/k\cdot\text{Sin}kt$;

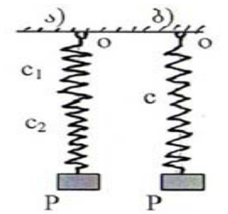
ამოცანის პირობის თანახმად:

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/\delta_{სტ}} = \sqrt{980/10} = 9{,}9; \quad V_o/k = 10.$$

რხევის განტოლება იქნება: <u>$x = (15\ \text{Cos}9{,}9t + 10\ \text{Sin}9{,}9t)$ სმ</u>.

<u>ამოცანა 2.2.</u> P წონის ტვირთი დაკიდებულია ერთმანეთთან მიმდევრობით შეერთებული სხვადასხვა c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტებიანი ორმაგი ზამბარის ბოლოზე (იხ. ნახ. 9 ა).

განსაზღვრეთ ამ ორმაგი ზამბარის ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის c კოეფიციენტი და P ტვირთის ვერტიკალური რხევის სიხშირე. 15 ..ს წონა უგულებელყოფილია.



ნახ. 9.

ამოხსნა. ვთქვათ P ტვირთის მოქმედებით c_1 სიხისტის ზამბარამ მიიღო δ_1, ხოლო c_2 სიხისტის ზამბარამ δ_2 სტატიკური დაგრძელება.

ზამბარების წონა უგულებელყოფილია, ამიტომ $\delta_1 = P/c_1$ და $\delta_2 = P/c_2$.

ამ ორმაგი ზამბარის ეკვივალენტური c სიხისტის ზამბარას სტატიკური დეფორმაცია იქნება $\delta = \delta_1+\delta_2$, სადაც $\delta = P/c$. მივიღებთ $P/c = P/c_1 + P/c_2$.

აქედან $c = c_1c_2/(c_1+c_2)$.

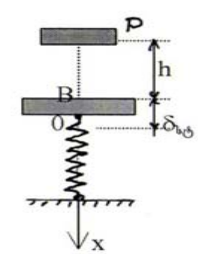
P ტვირთის რხევის პერიოდია: $T = 2\pi\sqrt{m/c} = 2\pi\sqrt{(c_1+c_2)P/g\,c_1c_2}$;

<u>რხევის სიხშირე: $\nu = 1/T = 1/2\pi\cdot\sqrt{g\,c_1c_2/(c_1+c_2)P}$</u>.

<u>ამოცანა 2.3.</u> P =10 ნ წონის ტვირთი საწყისი სიჩქარის გარეშე ვარდება h = 9 სმ სიმაღლიდან და ეცემა ვერტიკალურ ზამბარაზე მიმაგრებულ ჰორიზონტალურ ფირფიტაზე. ზამბარის ქვედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული და მისი სიხისტის კოეფიციენტია c = 5 ნ/სმ. განსაზღვრეთ ტვირთის შემდგომი მოძრაობის კანონი თუ ფირფიტისა და ზამბარის მასა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. ტვირთი ფირფიტაზე დაცემის შემდეგ იწყებს რხევით მოძრაობას. რხევის საწყისი სიჩქარე იქნება ტვირთის სიჩქარე ფირფიტაზე დაცემის მომენტში.

h სიმაღლიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე დაცემის B წერტილში გამოითვლება ფორმულით:



ნახ.10.

$$V_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 980\cdot 9} = 42\sqrt{10}\ \text{სმ/წმ}.$$

რხევა წარმოებს $\vec{P}$ ძალის მოქმედებით. ზამბარის სტატიკური გადაადგილება $\delta_{სტ} = P/c = 2$ სმ.

კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის 0 წერტილში და მივმართოთ 0x ღერძი ქვევით. რხევის საწყისი პირობებია:

როცა $t = t_o = 0$, მაშინ $x_o = -\delta_{სტ} = -2$ სმ; $V_o = V_B = 42\sqrt{10}$ სმ/ წმ.

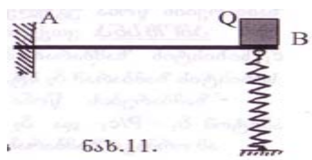
რხევის კუთხური სიხშირე

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{cg/P} = 7\sqrt{10}; \quad V_o / k = 6.$$

(2.3) ფორმულის თანახმად რხევის კანონი ასეთ სახეს იღებს:

$$x = (-2\cos 7\sqrt{10}t + 6\sin 7\sqrt{10}t) \text{ სმ.}$$

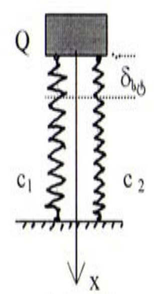
ამოცანა 2.4. არადეფორმირებული დრეკადი AB ღეროს A ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო B ბოლო მიმაგრებულია ზამბარაზე, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია $c_1 = 6$ ნ/ სმ. ღეროს B ბოლოზე ათავსებენ $Q = 30$ ნ წონის ტვირთს და უშვებენ საწყისი სიჩქარის გარეშე. ცნობილია, რომ $P = 12$ ნ ტვირთის სტატიკური მოქმედებისას ღეროს B ბოლო ზამბარის გარეშე დაიწევს $s = 1$ სმ-ზე. განსაზღვრეთ ზამბარის მაქსიმალური შეკუმშვა და ტვირთის რხევის პერიოდი. ღეროს და ზამბარის წონა უგულებელყავით.



ნახ.11.

ამოხსნა. დრეკადი AB ღერო შევცვალოთ B წერტილში დამაგრებული მეორე ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია c_2. ამოცანის პირობის თანახმად $P = c_2 s$, საიდანაც $c_2 = P/s = 12$ ნ/სმ. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ტვირთი ეყრდნობა ერთი და იმავე სიგრძის ორ პარალელურად ჩართულ c_1 და c_2 სიხისტის კოეფიციენტებიან ზამბარას (იხ. ნახ. 12). ეს ორმაგი ზამბარა შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური ერთი ზამბარით , რომლის სიხისტის კოეფიციენტია c.

c – ს განსაზღვრისათვის განვიხილოთ Q ტვირთის სტატიკური წონასწორობის პირობა. მხედველობაში მივიღოთ, რომ Q ტვირთის მოქმედებით ორივე ზამბარა და მაშასადამე მათი ეკვივალენტური ზამბარაც შეიკუმშება ერთი და იგივე x მანძილით ($x = x_1 = x_2$). ამასთანავე, ორმაგ ზამბარებში წარმოიქმნება დრეკადი აღმდგენი Q_1 და Q_2 ძალები, რომელთა სიდიდეების ჯამი ეკვივალენტური c სიხისტის ზამბარაში Q ტვირთით გამოწვეული დრეკადი აღმდგენი ძალის ტოლია. ცხადია:



ნახ. 12

$$Q = cx; \quad Q_1 = c_1 x; \quad Q_2 = c_2 x. \quad Q = Q_1 + Q_2.$$

მაშასადამე $cx = c_1 x + c_2 x$, საიდანაც $c = c_1 + c_2$ ნ/სმ.

Q ტვირთის სტატიკური გადაადგილება

$$\delta_{სტ} = x = Q/c = 5/3 \text{სმ.}$$

კოორდინატთა სისტემის სათავე მოვათავსოთ ზამბარის სტატიკური წონასწორობის 0 წერტილში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

c სიხისტის (ეკვივალენტური) ზამბარის რხევის საწყისი პირობებია

$$t = t_o = 0, \quad x_o = -\delta_{სტ} = -5/3, \quad V_o = 0.$$

რხევის კუთხური სიხშირე

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{c\,g/Q} = \sqrt{18\,980/30} = 24{,}25.$$

ტვირთის რხევის განტოლება ასეთია (იხ. (2.3) განტოლება):

$$x = -5/3 \cos 24{,}25t \text{ სმ.}$$

აქედან: $x_{max} = 5/3$ სმ. რხევის პერიოდი: $T = 2\pi / k = 0{,}259$ წმ.

ამოცანა 2.5. ზამბარაზე დაკიდებული $P = 9{,}8$ნ წონის ტვირთის ვერტიკალური რხევის პერიოდი[illegible] იპოვეთ ამ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი c. პასუხი: c = 25 ნ/ სმ.

ამოცანა 2.6. ზედა ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული ზამბარის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებული 4,9 ნ წონის ტვირთის თავისუფალი რხევის პერიოდია $\pi/4$ წმ. განსაზღვრეთ ძალა, რომლის მოქმედებითაც ზამბარა დაგრძელდება 1 სმ-ით. პასუხი: F = 0,32 ნ.

ამოცანა 2.7. ვერტიკალური ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო ქვედა ბოლოზე მიმაგრებული ტვირთი ასრულებს რხევით მოძრაობას $x = 10\sin 7t$ სმ კანონით. განსაზღვრეთ ზამბარის სტატიკური დეფორმაცია. პასუხი: $\delta_{სტ} = 20$ სმ.

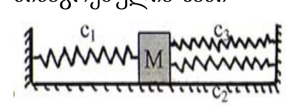
ამოცანა 2.8. $c = 4$ ნ/მ სიხისტის ვერტიკალურ ზამბარაზე დაკიდებულია $m = 16$კგ მასის ტვირთი. წონასწორობის მდგომარეობიდან ტვირთს გადაადგილებენ ქვევით 8 სმ მანძილზე და ანიჭებენ საწყის სიჩქარეს ვერტიკალის გასწვრივ. როგორი უნდა იყოს საწყისი V_o სიჩქარის სიდიდე, რომ ტვირთის შემდგომი ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა იყოს $a = 10$ სმ?

პასუხი: $V_o = 3$ სმ/წმ.

ამოცანა 2.9. ზამბარაზე დაკიდებული $m = 1$კგ მასის ნივთიერი წერტილი ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას კანონით: $x = 2\sin(kt + 1)$ სმ (t - წმ-ში). ცნობილია წერტილის მაქსიმალური სიჩქარე $V_{max} = 4$ სმ/წმ. განსაზღვრეთ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი c .

პასუხი: c = 4 ნ/ს მ.

ამოცანა2.10. m მასის M სხეულზე მიმაგრებულია სამი ჰორიზონტალური ზამბარა, რომელთა სიხისტეა შესაბამისად c_1, c_2, c_3. ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ტვირთის რხევის პერიოდი.



ნახ. 13.

პასუხი: $T = 2\pi\sqrt{m / (c_1 + 2c_2)}$ წმ.

§ 3. წერტილის მილევადი რხევა

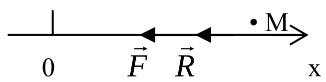
m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობას 0x ღერძის გასწვრივ ეწოდება *მილევადი რხევა*, თუ მასზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი ძალა F = cx და განიცდის გარემოს წინაღობას ძალით, რომელიც წერტილის მოძრაობის სიჩქარის წრფივი ფუნქციაა: $R = \mu V$ (μ - გარემოს წინაღობის კოეფიციენტია).

რხევის დიფერენციალური განტოლება:

$$m\ddot{x} = - cx - \mu\,\dot{x},$$

ანუ $\ddot{x} + 2b\,\dot{x} + k_2x = 0,$ (3.1)

სადაც $k^2 = c/ m$; $2b = \mu / m$. (3.2).



ნახ. 14.

რხევის საწყისი პირობები: როცა $t = t_o = 0$, მაშინ $x=x_o$, $\dot{x}=V_o$. (3.3)

შეიძლება განვიხილოთ მოძრაობის სამი შემთხვევა.

1) $b < k$ – გარემოს წინაღობა მცირეა. ამ შემთხვევაში ნივთიერი წერტილი ასრულებს მილევად რხევას და მოძრაობის (3.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს (რხევის განტოლებას) აქვს შემდეგი სახე:

$$x = e^{-bt}\,[x_o \,\mathrm{Cos}k_1t + (V_o+ bx_o)/ k_1 \cdot \mathrm{Sin}k_1t\,]. \quad (3.4)$$

ანუ ასეთი სახე: $x = a\, e^{-bt}\,\mathrm{Sin}\,(k_1t + \alpha)$, (3.5)

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$, $(b<k)$; (3.6)

რხევის ამპლიტუდა: $A =a\, e^{-bt}$, სადაც $a=\sqrt{x_o^2 +(V_o+bx_o)^2/ k_1^2}$; (3.7)

რხევის საწყისი ფაზა $-\alpha$, სადაც $\mathrm{tg}\alpha = k_1x_o/ (V_o+bx_o)$; (3.8)

რხევის პერიოდი: $T_1 = 2\pi / k_1$; (3.9)

როცა $t \to\infty$, მაშინ $x \to 0$. ამიტომ რხევას ეწოდება *მილევადი.*

დროის მომენტები, რომლებშიც წერტილი იღებს მაქსიმალურ გადახრას კოორდინატთა სათავიდან (წონასწორობის მდგომარეობიდან), შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას $T_1/2$ სხვაობით. მილევადი რხევის ამპლიტუდა ადგენს კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელს მილევადი რხევის დეკრემენტი ეწოდება და ასე აღინიშნება: $\lambda= e^{-bT1/2}$.

სიდიდეს $d=\ln\lambda=bT_1/2$ (3.10) - რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი ეწოდება; ეს არის ორი თანამიმდევრული ამპლიტუდის ფარდობის ლოგარითმი.

მილევადი რხევის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 15 –ზე.

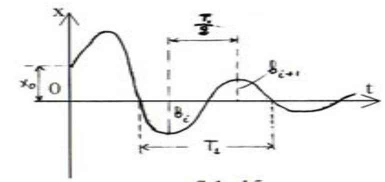
2) $b > k$ - გარემოს წინაღობა დიდია. მოძრაობის (3.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

$$x = e^{-bt}(c_1\, e^{\sqrt{b^2-k^2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{b^2-k^2}t}).$$

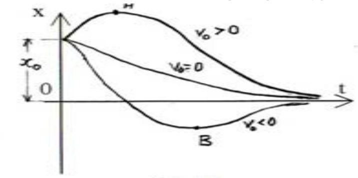
აქ c_1 და c_2 - ინტეგრების მუდმივებია.

წერტილი ასრულებს აპერიოდულ მილევად რხევას : როცა $t\to\infty$, მაშინ $x\to 0$.

3) $b = k$ - “ზღვრული“ შემთხვევა. მოძრაობის (3.1) განტოლების



ნახ. 15.



ნახ. 16.

ამონახსნს აქვს ასეთი სახე: $x = e^{-bt}\,(c_1 + c_2t)$.

ამ შემთხვევაში წერტილი ასრულებს აპერიოდულ მილევად რხევას.

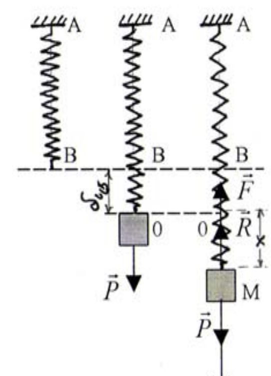
როგორც 2) , ასევე 3) შემთხვევაში მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია საწყის პირობებზე. საწყის V_o სიჩქარეზე დამოკიდებულებით მოძრაობის გრაფიკს აქვს ნახ. 16–ზე გამოსახული სახე; სამივე შემთხვევაში ($V_o > 0$, $V_o = 0$, $V_o < 0$) მოძრაობა მალე ქრება.

მითითება: მილევად რხევაზე ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია იგივე თანამიმდევრობით, როგორც ჰარმონიული (თავისუფალი) რხევის დროს.

ამოცანა 3.1. P = 4,9 კგ წონის სხეული ჩამოკიდებულია ერთი ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებულ ზამბარაზე, რომლის სტატიკური დაგრძელება ($\delta_{სტ}$) ამ სხეულის წონის მოქმედებით უდრის 1 სმ-ს. ტვირთის მოძრაობისას ჰაერის წინაღობის ძალა მისი V სიჩქარის პროპორციულია და V= 1 მ/წმ სიჩქარის დროს უდრის 0,1 კგ-ს. განსაზღვრეთ ტვირთის მოძრაობის კანონი, თუ დასაწყისში ზამბარა გაჭიმული იყო $2\delta_{სტ}$ მანძილზე და ტვირთი მიშვებული იყო ნებაზე.

ამოხსნა. სხეული მოძრაობს გადატანითად და შეგვიძლია იგი ჩავთვალოთ ნივთიერ M წერტილად. გამოვსახოთ წერტილის მიმდინარე მდებარეობა და მასზე მოქმედი ძალები: $\vec{P}$ - ტვირთის წონა, $\vec{F}$ -ზამბარის დრეკადობის ძალა, $\vec{R}$ - ჰაერის წინაღობის ძალა.

კოორდინატთა სისტემის სათავედ ავირჩიოთ ტვირთის (M წერტილის) სტატიკური



ნახ.17.

წონასწორობის 0 მდებარეობაში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

AB – არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძეა. $B0 = \delta_{სტ}$ – ზამბარას სტატიკური დაგრძელება. 0M= x - ტვირთის მიმდინარე მდებარეობა. M წერტილის მოძრაობის განტოლებას ნებისმიერ მდებარეობაში ასეთი სახე აქვს:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}.$$

დავაგეგმილოთ x ღერძზე: $m\ddot{x} = P_x + F_x + R_x$,

სადაც $P_x = P$; $F_x = -c\cdot BM = -c\,(x+\delta_{სტ})$;

$R_x = -\mu V_x = -\mu\dot{x}$.

გვექნება: $m\ddot{x} = P - c(x+\delta_{სტ}) - \mu\dot{x}$. (ა)

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის (0) მდებარეობაში $P = c\delta_{სტ}$, ამიტომ (ა) ასეთ სახეს მიიღებს: $m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$.

ეს არის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ასე ჩავწეროთ: $\ddot{x} + 2b\,\dot{x} +$ (ბ)

სადაც $b = \mu/2m$; $k^2 = c/m$.

(ბ) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით მივიღებთ [იხ. (3.1) განტოლების (3.4) ამოხსნა]:

$$x = e^{-bt}[x_o\cos k_1t + (V_o+bx_o)/k_1\cdot\sin k_1t]. \quad (გ)$$

სადაც $k_1 = \sqrt{k^2-b^2}$, (b<k).

განვსაზღვროთ (გ) ტოლობაში შემავალი სიდიდეები.

ამოცანის პირობის თანახმად $\delta_{სტ} = 1$სმ. წინაღობის ძალა $R = \mu V$ და როცა V= 1 მ/წმ = 100 სმ/წმ, მაშინ R = 0,1 კგ. ამიტომ

$\mu = R / V = 0,1 / 100 = 0,001$ კგ წმ/სმ;

$b = \mu / 2m = \mu g / 2P = 0,001\cdot 980 / 9,8 = 0,1$;

$k_1 = \sqrt{c/m - b^2} = \sqrt{4,9\cdot 980/4,9 - 0,01} = 31,3$.

საწყისი პირობების თანახმად: როცა $t_o = 0$, მაშინ $x_o = \delta_{სტ} = 1$, $V_o = 0$; ამიტომ $(V_o + bx_o)/k_1 = 0,1/31,3 = 0,32$.

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (გ) განტოლებაში, მივიღებთ M ტვირთის მოძრაობის კანონს :

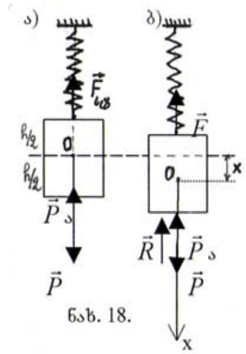
$$\underline{x = e^{-0,1t}(\cos 31,3t + 0,32\sin 31,3t)\ \text{სმ}.}$$

ამოცანა 3.2. P = 4,9ნ წონის, r = 6სმ რადიუსის და h = 8სმ სიმაღლის ცილინდრი ჩამოკიდებულიაA ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული AB ზამბარის თავისუფალ Bბოლოზე. ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტია c = 4ნ/სმ.

ცილინდრი ჩაშვებულია სითხეში და სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში ჩაყვინთულია თავისი სიმაღლის ნახევარზე.

Cილინდრი გამოიყვანეს სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან, ჩაძირეს თავისი სიმაღლის 2/3 ნაწილზე და გაუშვეს საწყისი სიჩქარის გარეშე. განსაზღვრეთ ცილინდრის ვერტიკალური მოძრაობის კანონი, თუ მასზე მოქმედებს სითხის წინაღობის ძალა (R), რომელიც ცილინდრის მოძრაობის სიჩქარის პროპორციულია, ე.ი. R = μ V; (μ = 0,02).

განსაზღვრეთ პირობა, როდესაც ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი.



ნახ. 18.

ამოხსნა. ცილინდრი ასრულებს ვერტიკალურ გადატანით მოძრაობას; მივიღოთ იგი ნივთიერ წერტილად. სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში (ნახ. 18. ა) ცილინდრზე მოქმედებს ცილინდრის P წონა, რომელიც გაწონასწორებულია ზამბარის დრეკადი აღმდგენი ძალით $F = c\delta_{სტ}$ (აქ $\delta_{სტ}=h/2$ – ზამბარის სტატიკური დაგრძელებაა) და სითხეში ჩაშვებული სხეულის ამომგდები არქიმედის ძალით $P_ა = \pi r^2\gamma/2$ (აქ γ - სითხის კუთრი წონაა) , ე.ი. $P = F + P_ა$,

ანუ $P = c\delta_{სტ} + \pi r^2\gamma/2$

ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით ცილინდრის 0 ცენტრში სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

განვიხილოთ დროის რაიმე t მომენტი, როდესაც ცილინდრი გადაადგილდება ქვევით x მანძილზე. ამ მდებარეობაში ცილინდრზე მოქმედებს: სიმძიმის $\vec{P}$ ძალა, ზამბარის დრეკადობის ძალა $F = c\,(x + \delta_{სტ})$, არქიმედეს ამომგდები ძალა $P_ა = \pi r^2\gamma(h/2 + x)$ და სითხის წინაღობის ძალა $\vec{R} = \mu\vec{v}$. ცილინდრის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{P}_ა + \vec{R}.$$

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x ღერძზე; მივიღებთ სითხეში ჩაშვებული ცილინდრის რხევის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$m\ddot{x} = P_x - F_x - P_ა - R_x,$$

ანუ $P/g\cdot\ddot{x} = c\delta_{სტ} + \pi r^2h\gamma/2 - c(x + \delta_{სტ}) - \pi r^2\gamma\,(h/2 + x) - \mu\,\dot{x}$;

ეს განტოლება ასე გადავწეროთ:

$$\ddot{x} + 2b\,\dot{x} + k^2x = 0, \quad (ბ)$$

აქ $b = \mu g/2P$; $k^2 = g(c + \pi r^2\gamma)/P$. (გ)

დავადგინოთ პირობა, როდესაც ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი; ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა: b< k , ანუ $b^2-k^2 < 0$. გვექნება:

$$(\mu g/2P)^2 - g(c + \pi r^2\gamma)/P < 0.$$

ამ პირობის შესრულებისას ცილინდრი შეასრულებს მილევად რხევას და მისი განტოლება იქნება (იხ. (3.1) განტოლების (3.5) ამოხსნა):

$\underline{x = a e^{-bt} \sin (k_1 t + \alpha)}$,

რხევის საწყისი პირობებია: როცა $t_o=0$, მაშინ $x_o=h/6$; $V_o=\dot{x}_o=0$.

ამ პირობების და (3.6) – (3.8) ფორმულების გამოყენებით განისაზღვრებიან a, b , k_1 და α სიდიდეები.

<u>ამოცანა 3.3.</u> ნივთიერი წერტილის მილევადი რხევა წარმოებს 0x ღერძის გასწვრივ. რხევის პერიოდი $T_1 = \pi/2$, ხოლო ლოგარითმული დეკრემენტი $d= \pi/10$. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის $t_o= 0$ მომენტში $x_o = 3$ სმ, $V_o = 0$.

<u>ამოხსნა</u>. მილევადი რხევის პერიოდი $T_1 = 2\pi/ k_1$; ამოცანის პირობის თანახმად $2\pi/ k_1= \pi/2$; აქედან $k_1= 4$. მილევადი რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი $d = bT_1 / 2$; მაშასადამე $bT_1/2=\pi/10$ და $b = 0{,}4$. მილევადი რხევის განტოლებას ასეთი სახე აქვს (იხ. (3.4) განტოლება)

$$x = e^{-bt} (x_o \cos k_1t + (V_o+ bx_o)/ k_1 \cdot \sin k_1t).$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები და გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები; მივიღებთ:

(Cos4t + 0,1 Sin4t) სმ.

<u>ამოცანა 3.4.</u> P = 9,8 ნ წონის სხეული ასრულებს მილევად რხევას წინაღობის ძალის მოქმედებით, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია. რხევის პერიოდია $T_1= 0{,}25$ წმ, ხოლო ლოგარითმული დეკრემენტი $d= 1/2$. განსაზღვრეთ გარემოს წინაღობის ძალა, როცაV=1ს მ /წმ.

<u>პასუხი: R = 0,08 ნ.</u>

<u>ამოცანა 3.5.</u> m = 2 კგ მასის და ℓ = 0,49 მ სიგრძის მათემატიკური ქანქარა ასრულებს მცირე მილევად რხევას გარემოში, რომლის წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია. რხევის პერიოდია $T_1=\pi/2$ წმ. განსაზღვრეთ გარემოს წინაღობის ძალასა და სიჩქარეს შორის დამოკიდებულების პროპორციულობის (წინაღობის) კოეფიციენტი. მიიღეთ, რომ g=9,8 მ/წმ^2. <u>პასუხი 8 ნწმ/ მ.</u>

<u>ამოცანა 3.6.</u> P = 1 ნ წონის ნივთიერი წერტილი ასრულებს მილევად რხევას, რომლის პერიოდია $T_1= 0{,}102$ წმ. რამდენჯერ შემცირდება რხევის ამპლიტუდა, როდესაც წერტილი შეასრულებს ორ სრულ რხევას, თუ 1 სმ/წმ სიჩქარის დროს წინაღობის ძალა R=0,02 ნიუტონს?

<u>პასუხი: e^2 .</u>

<u>ამოცანა 3.7</u>. წერტილის სამი სრული რხევის შედეგად მისი ამპლიტუდა შემცირდა 10-ჯერ. განსაზღვრეთ რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი. <u>პასუხი: d = 0,3838.</u>

<u>ამოცანა 3.8.</u> P = 49 ნ წონის სხეული დაკიდებულია ერთი ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული და c=1,25 ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარაზე. მოძრაობისას ზამბარა განიცდის გარემოს წინაღობას, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის 0,5 ნ-ს, როცა V=1 სმ/წმ. საწყის მომენტში ზამბარა გაჭიმულია წონასწორობის მდგომარეობიდან 3 სმ-ით და სხეულს მინიჭებული აქვს ქვევით მიმართული 6 სმ/წმ სიჩქარე. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის კანონი.

<u>პასუხი: $x = 3e^{-5t} (1+7t)$ სმ.</u>

<u>ამოცანა 3.9.</u> რამდენჯერ მეტია მილევადი რხევის პერიოდი (T_1) შესაბამისი ჰარმონიული რხევის პერიოდზე (T), თუ ლოგარითმული დეკრემენტი $d = 5\pi/12$? <u>პასუხი: $T_1 = 13/12\cdot T$.</u>

§ 4. წერტილის იძულებითი რხევა

ნივთიერი M წერტილის ძრაობას , როდესაც წერტილზე დრეკადი აღმდგენი (F = cx) ძალისა და გარემოს წინაღობის (R= μv) ძალის გარდა მოქმედებს რაიმე გარეშე შემაშფოთებელი პერიოდულად ცვალებადი (Q=Hsinpt) ძალა, ეწოდება *იძულებითი რხევა*.

თუ მოძრაობა ხდება 0x ღერძის გასწვრივ, მაშინ Q არის შემაშფოთებელი ძალის გეგმილი ამ ღერძზე; p - შემაშფოთებელი ძალის სიხშირეა, H - შემაშფოთებელი ძალის უდიდესი მნიშვნელობა.

M წერტილის მოძრაობის (იძულებითი რხევის) დიფერენციალური განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$m \ddot{x} = - cx - \mu \dot{x} + H\sin pt , \qquad (4.1ა)$$

ანუ $$\ddot{x} + 2b \dot{x} + k^2x = h \sin pt ; \qquad (4.1)$$

სადაც $b = \mu / 2m$; $k^2 = c/ m$; $h = H/ m$. (4.2)

1) გარემოს მცირე წინაღობის შემთხვევაში, როცა k > b, (4.1) დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ანუ იძულებითი რხევის განტოლება იქნება:

$$x = a e^{-bt} \sin (k_1t +\alpha)+h / \sqrt{(k^2-p^2)^2 +4b^2p^2} \cdot \sin(pt+\beta), \qquad (4.3)$$

სადაც β - იძულებითი რხევის საწყისი ფაზაა,

$$\mathrm{tg}\beta = - 2bp / (k^2-p^2). \qquad (4.4)$$

(4.3) ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები

$$x_1= a e^{-bt} \sin (k_1t + \alpha)$$

წარმოადგენს მილევად რხევას $k_1=\sqrt{k^2-b^2}$ სიხშირით, რომელიც დროის ზრდასთან ერთად მცირდება, ხოლო მეორე შესაკრები

$$x_2 = h / \sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4b^2p^2} \cdot \mathrm{Sin}(pt+\beta) \qquad (4.5)$$

განსაზღვრავს წერტილის რხევას შემაშფოთებელი ძალის გავლენით; მას *იძულებითი რხევა* ეწოდება.

a და α განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით.

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$A = h / \sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4b^2p^2} \,. \qquad (4.6)$$

2) თუ არ არსებობს გარემოს მცირე წინაღობა, $R = 0$ და, მაშასადამე $b = 0$. ამ შემთხვევაში იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს (იხ. (4.1)):

$$\ddot{x} + k^2x = h\ \mathrm{sin}pt\,, \qquad (4.7)$$

როცა $k \neq p$, მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება (იხ. (4.3))

$$x = a\ \mathrm{Sin}\,(kt + \alpha) + h / (k^2-p^2) \cdot \mathrm{Sin}pt. \qquad (4.8)$$

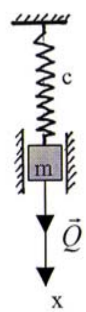
აქ $x_2 = h / (k^2-p^2) \cdot \mathrm{Sin}pt$ - იძულებითი რხევის კანონია, ხოლო იძულებითი რხევის ამპლიტუდა $A = h / (k^2-p^2)$. (4.9)

თუ შემაშფოთებელი ძალა ⁓ ⁓ობით ზრდის სიხშირეს, მაშინ კრიტიკულ მომენტში, როცა $p = k$ თი რხევის ამპლიტუდა ხდება უსასრულოდ დიდი ($A \to \infty$). აა ააკლენას *რეზონანსი* ეწოდება. რეზონანსის შემთხვევაში (4.7) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ასე წარმოიდგინება: $x = a\ \mathrm{Sin}\,(kt + \alpha) - ht/2k\ \mathrm{Cos}kt$. (4.10)

მაშასადამე, რეზონანსის შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუდა $A = - ht/2k$ დროის ფუნქციაა და t დროის ზრდასთან ერთად უსასრულოდ იზრდება.

სიდიდეს $\lambda = Ac/H$, რომელიც ახასიათებს შემაშფოთებელი ძალით გამოწვეუცლ დინამიურ ეფექტს, დინამიურობის კოეფიციენტი ეწოდება.□

ამოცანა 4.1. $c=16$ კნ/ მ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი განიცდის შემაშფოთებელი $Q=32\mathrm{Sin}10t$ ნ ძალის მოქმედებას. წინაღობა უგულებელყავით და დაადგინეთ ტვირთის იძულებითი რეზონანსული რხევის კანონი.



ნახ.19.

ამოხსნა. გარემოს წინაღობა უგულებელყოფილია (R=0), ამიტომ ტვირთის რხევის დიფერენციალური განტოლება იქნება

(იხ.(4.1ა) ფორმულა): $m\ddot{x} + cx = 32\mathrm{Sin}10t$.

თუ ამ განტოლებას შევადარებთ იძულებითი რხევის (4.7) დიფერენციალურ განტოლებას, მაშინ

$k^2 = c/m$, $h = 32/m$, $p = 10$; $c=16000$ ნ/ მ.

რადგანაც რხევა რეზონანსულია, ამიტომ

$P = k = 10$. მაშასადამე $m = c/k^2 = 16000/ 100$ ნ/ მ $= 160$ნ; $h = 32/m = 0{,}2$.

როდესაც არ არსებობს გარემოს წინაღობა, მაშინ იძულებითი რეზონანსული რხევის განტოლებას აქვს (4.10) სახე: $x = - ht/2k\ \mathrm{Cos}kt$.

ამპლიტუდა $A = ht / 2k = 0{,}2\ t / 20 = 0{,}01\ t$.

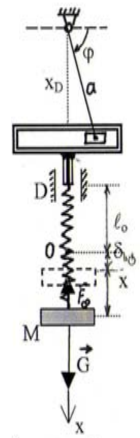
ტვირთის რეზონანსული რხევის კანონი იქნება:

$\underline{x = - 0{,}01t\ \mathrm{Cos}10t}$, ანუ $\underline{x = 0{,}01t\ \mathrm{Sin}(10t - \pi/2)}$.

ამოცანა 4.2. $G = 400$ გ წონის M ტვირთი დაკიდებულია ზამბარაზე, რომლის ზედა ბოლო ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას $a = 2$ სმ ამპლიტუდით და $p = 7$ წმ$^{-1}$ სიხშირით.

განსაზღვრეთ M ტვირთის იძულებითი რხევა, თუ ზამბარა $F_1 = 40$ გ ძალის მოქმედებით გადაადგილდება $x_1 = 1$ სმ მანძილზე.

ამოხსნა. ზამბარას ზედა D ბოლო ასრულებს ჰარმონიულ რხევას კანონით: $x_D = a\mathrm{Sin}pt = 2\mathrm{Sin}7t$. (ა)



ნახ. 20.

ვთქვათ არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძეა ℓ_o, ხოლო მისი სიხისტეა c: $c = F_1/ x_1 = 40$გ/1სმ = 40 გ/სმ.

დროის ნებისმიერ t მომენტში DB ზამბარა გაჭიმულია ($x_D + x + \delta_{სტ}$) სმ მანძილით, სადაც $\delta_{სტ}$ არის ზამბარის სტატიკური დაგრძელება G ტვირთის მოქმედებით ($G = c\delta_{სტ}$), ხოლო $x = BM$ არის M ტვირთის მიმდინარე გადაადგილება.

ზამბარის დაჭიმულობის ძალა $F_{დრ} = c\,(x_D + x + \delta_{სტ})$.

დროის ნებისმიერ მომენტში ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$m\ddot{x} = G - F_{დრ}\,,\ \text{ანუ}\ \ m\ddot{x} = G - c\,(x_D + x + \delta_{სტ}). \qquad (ბ)$$

ვინაიდან $G = c\delta_{სტ}$, ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\ddot{x} + k^2x = h\ \mathrm{Sin}7t\,, \qquad (გ)$$

სადაც $k^2 = c/m = cg/G = 40 \cdot 980 /400 = 98$; $h = 2\,k^2$.

(გ) არის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, საიდანაც ჩანს, რომ ზამბარის ზედა D ბოლოს მოძრაობა გამოწვეულია შემაშფოთებელი $2\,k^2\ \mathrm{Sin}7t$ ძალის მოქმედებით. (გ) განტოლების ზოგადი ამოხსნა იქნება (იხ. (4.8) ფორმულა): $x = a_1\ \mathrm{Sin}\,(kt + \alpha) + h / (k^2-p^2) \cdot \mathrm{Sin}pt$.

აქედან ტვირთის იძულებითი რხევის კანონი ასეთია:

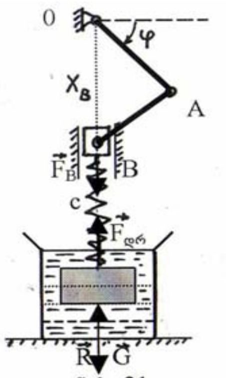
$$x_M = h / (k^2-p^2) \cdot \mathrm{Sin}pt.$$

აქ $p = 7$, ხოლო რხევის ამპლიტუდა $A = h / (k^2-p^2) = 4$.

M ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება ასეთია: $\underline{x = 4\ \mathrm{Sin}7t}$.

ამოცანა 4.3. $c = 0,5$ ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარას ზედა ბოლო მიმაგრებულია მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის B ცოციაზე, ხოლო ქვედა ბოლოზე დაკიდებულია $G=1,5$ ნ წონის M სხეული. $0A=AB=3$ სმ. 0A მრუდმხარა ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო $\omega = 4\pi$ წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით; ამასთანავე, M სხეული ასრულებს რხევით მოძრაობას გარემოში, რომლის წინაღობის ძალა ($\vec{R}$) სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის 0,02 ნ-ს, როცა სიჩქარე $V= 1$ სმ/წმ.

განსაზღვრეთ M სხეულის იძულებითი რხევის კანონი, თუ 0_1x ღერძი გავლებულია M სხეულის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით, როცა 0A მრუდმხარა ჰორიზონტალურია.



ნახ. 21.

ამოხსნა. M სხეული ასრულებს იძულებით რხევას წინაღობის მქონე გარემოში. რხევის განტოლება ზოგადი სახით მოცემულია (4.3) ფორმულით. გარემოს წინაღობის ძალა $R=\mu V$, საიდანაც წინაღობის კოეფიციენტი $\mu = R/V = 0,02$;

$$b = \mu/2m = \mu g / 2G = 0,02 \cdot 980 / 2 \cdot 1,5 = 6,53.$$

0A მრუდმხარა ბრუნავს $\varphi = \omega t = 4\pi t$ კანონით, ხოლო B ცოცია მოძრაობს კანონით:

$$x_B = 0B = 2 \cdot 0A \cdot \quad n4\pi t$$

ზამბარის B ბოლოზე მოქმედებს ძეძაძფოთებელი ძალა

$$F_B = cx_B = 0,5 \cdot 6 \cdot Sin4\pi t = 3 \cdot Sin4\pi t ;$$

ე.ი. $H = 3$; $p = 4\pi$; $h = H/m = 3g/G = 1960$.

ამასთანავე $k^2 = c/m = cg/G = 326,6$

β - რხევის საწყისი ფაზაა. (4.4)-ის თანახმად

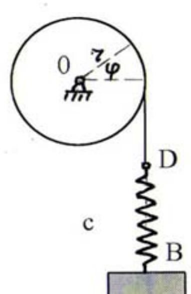
$$tg\beta = 2bp / (k^2 - b^2) = 0,9709; \quad \beta = 44^o10';$$

რადიანებში: $\beta=0,771$.

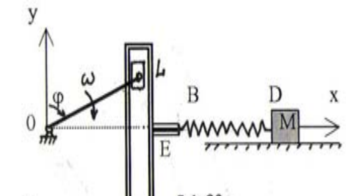
წინაღობის მქონე გარემოში M სხეულის იძულებითი რხევის განტოლება ასეთია (იხ. (4.5) ფორმულა):

$x = h / \sqrt{(k^2-p^2)^2 + 4b^2p^2} \cdot Sin(pt+\beta)$, ანუ <u>$x = 8,32\ Sin(4\pi t + 0,771)$ სმ</u>.

ამოცანა 4.4. $P = 2,45$ ნ წონის ტვირთი დაკიდებულია ზამბარაზე, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია $c=1$ ნ/სმ. ტვირთზე მოქმედებს ვერტიკალური ძალა $Q=1,8Sin16t$ ნ. განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის კანონი. პასუხი: $x = 5\ Sin16t$ სმ.



ნახ. 22.



ნახ.23.

ამოცანა 4.5. r რადიუსიან ლილვზე დახვეულია თოკი, რომლის თავისუფალ D ბოლოზე მიმაგრებულია c სიხისტის DB ზამბარა, ხოლო ზამბარის B ბოლოზე -m მასის M ტვირთი. ლილვის სიბრტყის მართობული 0 ღერძის გარშემო ლილვი განიცდის რხევას $\varphi = \varphi_o Sinpt$ კანონით. განსაზღვრეთ M ტვირთის იძულებითი რხევა იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გავლებულია ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით. ამოცანა ამოხსენით ორი შემთხვევისათვის: 1) $p \neq \sqrt{c/m}$; 2) $p = \sqrt{c/m}$.

პასუხი: 1) $x = c\, r\, \varphi_o / (c-mp^2) \cdot Sinpt$;

2) $x = - c\, r\, \varphi_o t / 2mp \cdot Cospt$.

ამოცანა 4.6. ვერტიკალური DB ზამბარის ქვედა D ბოლოზე დაკიდებული P წონის ტვირთის თავისუფალი (ჰარმონიული) რხევის პერიოდია $T = 0,8$ წმ. განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, თუ ზამბარის ზედა B ბოლო ირხევა ვერტიკალური მიმართულებით $T_1= 1,2$ წმ პერიოდით და $a= 3$ სმ ამპლიტუდით.

<u>პასუხი: 5,4 სმ</u>.

ამოცანა 4.7. კულისური მექანიზმის B ბოლოზე მიმაგრებულია ჰორიზონტალური BD ზამბარა, რომლის სიხისტის კოეფიციენტია $c = 5$ ნ/სმ. ზამბარის D ბოლოზე მიმაგრებულია $Q= 400$ ნ წონის M ტვირთი, რომელსაც შეუძლია ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ისრიალოს ხახუნის გარეშე.

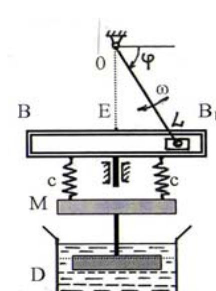
განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებ... რხევის კანონი, თუ $0L = 10$ სმ სი... ...უდმხარა ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო $\omega= 2$ რად/ წმ კუთხური სიჩქარით და როცა $\varphi= 0$, BD ზამბარა არადეფორმირებულია.

<u>პასუხი: $x = 14,15\ Sin2t$ სმ</u>.

ამოცანა 4.8. როგორი უნდა იყოს წინა {4.7} ამოცანაში 0L მრუდმხარას ბრუნვის კანონი, რომ m მასის ტვირთმა იმოძრაოს რეზონანსული რეჟიმით? <u>პასუხი: $\varphi = 3,5\ t$</u>

ამოცანა 4.9. $Q = 98$ ნ წონის M ტვირთი დაკიდებულია BB_1 კულისაზე მიმაგრებულ ორ პარალელურ ზამბარაზე; თითოეული ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია $c = 6,8$ ნ/სმ. D დემპფერი წარმოშობს წინაღობის ძალას, რომლისთვისაც წინაღობის კოეფიციენტი უდრის თავისუფალი (ჰარმონიული) რხევის სიხშირეს: $b= k$.

განსაზღვრეთ M ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება, თუ $0A = 7,5$ სმ მრუდმხარას



ნახ. 24.

თანაბარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა $\omega = 6$ რად/წმ

<u>პასუხი: $x = 5{,}93\ \mathrm{Sin}(6t - 0{,}95)$სმ.</u>

<u>ამოცანა 4.10.</u> წინა [4. 9] ამოცანაში ჩათვალეთ, რომ D დემპფერის მიერ წარმოშობილი წინაღობის ძალა არის $R = 1{,}2V$ ნ (V მ/წმ); იმავე ამოცანის პირობიდან აიღეთ საჭირო მონაცემები და განსაზღვრეთ 0A მრუდმხარას როგორი კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას იქნება იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქსიმალური? იძულებითი რხევის ამპლიტუდა განსაზღვრეთ აგრეთვე რეზონანსის შემთხვევაში და დაწერეთ ამ რხევების განტოლებები.

<u>პასუხი: $\omega = 8$ წმ$^{-1}$; $A_{max} = 8{,}5$სმ; $x = 8{,}5\ \mathrm{Sin}(8t - \mathrm{arctg}4/3)$სმ.</u>

<u>$A = 7{,}29$ სმ; $x = -7{,}29\ \mathrm{Cos}11{,}66t$ სმ.</u>

<u>ამოცანა 4.11.</u> m მასის ტვირთი დაკიდებულია c სიხისტის ზამბარაზე. მასზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $\vec{Q}$, რომელიც მიმართულია ვერტიკალური z ღერძის გასწვრივ, და გარემოს წინაღობის ძალა $\vec{R} = \mu\vec{V}$. განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, თუ $Q_z = H\ \mathrm{Sin}\sqrt{c/m}\,t$.

<u>პასუხი: $A = H/\mu \cdot \sqrt{m/c}$.</u>

§ 5. მასე[...]ნტრი. მყარი სხეულ[...]ციის მომენტი

ნივთიერ წერტილთა სისტემის ან მყარი სხეულის მოძრაობა არსებითად დამოკიდებულია მასში მასების განაწილების ხასიათზე; მასების განაწილების შეცვლით იცვლება სხეულის (სისტემის) ინერციულობის მახასიათებლებიც. სხეულში მასების განაწილების მახასიათებლებია მასათა ცენტრი და ინერციის მომენტები.

ნივთიერი წერტილის ან სხეულის ინერციულობის საზომი გადატანითი მოძრაობის დროს არის მისი მასა.

სხეულის (სისტემის) ბრუნვითი მოძრაობისას ინერციულობის მახასიათებლები განისაზღვრებიან ამ სხეულის (სისტემის) *ინერციის მომენტებით.*

ნივთიერ წერტილთა $\{M_k(x_k,y_k,z_k)\}$ *სისტემის მასების ცენტრი, ანუ ინერციის ცენტრი* ეწოდება გეომეტრიულ $C\,(x_c,y_c,z_c)$ წერტილს, რომლის მდებარეობა კოორდინატთა 0xyz სისტემაში განისაზღვრება რადიუს – ვექტორით: $\vec{r}_c = \sum m_k\,\vec{r}_k / M$ (5.1)

გეგმილებში: $x_c = \sum m_k x_k/M$; $y_c = \sum m_k y_k/M$; $z_c = \sum m_k z_k/M$. (5.2)

აქ m_k- სისტემის M_k წერტილის მასაა, $\vec{r}_k$ – მისი რადიუს–ვექტორი. M - მთელი სისტემი (სხეულის) მასა: $M = \sum m_k$.

თუ წერტილთა სისტემა წარმოადგენს აბსოლუტურად მყარ სხეულს, მაშინ: $\vec{r}_c = 1/M \cdot \int_M \vec{r}\,dm$;

(5.3)

$$x_c = 1/M \cdot \int_M x\,dm;\quad y_c = 1/M \cdot \int_M y\,dm;\quad z_c = 1/M \cdot \int_M z\,dm\,. \qquad (5.4)$$

მექანიკური სისტემის ინერციის მომენტი რაიმე ცენტრის (ღერძის ან სიბრტყის) მიმართ არის სიდიდე, რომელიც ტოლია სისტემაში შემავალი წერტილების m_k მასებისა და აღებულ ცენტრამდე (ღერძამდე ან სიბრტყემდე) მათი r_k მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამისა. აღინიშნება ასოთი J, შესაბამისი ინდექსით: $J = \sum m_k r_k^2$. (5.5)

კოორდინატთა სისტემის 0 სათავის მიმართ:

$$J_o = \sum m_k\,(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)\,; \qquad (5.6)$$

საკოორდინატო ღერძების მიმართ:

$$J_x = \sum m_k(y_k^2 + z_k^2),\ \ J_y = \sum m_k(x_k^2 + z_k^2),\ \ J_z = \sum m_k(x_k^2 + y_k^2); \qquad (5.7)$$

საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ:

$$J_{xoy} = \sum m_k z_k^2;\ \ J_{xoz} = \sum m_k y_k^2;\ \ J_{yoz} = \sum m_k x_k^2. \qquad (5.8)$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტები:

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k;\ \ J_{xz} = \sum m_k x_k z_k;\ \ J_{yz} = \sum m_k y_k z_k. \qquad (5.9)$$

ამ ინერციის მომენტებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$J_x + J_y + J_z = 2J_o;\qquad J_{xoy} + J_{xoz} + J_{yoz} = J_o. \qquad (5.10)$$

ერთ სიბრტყეში მოთავსებულ[...]თა სისტემისათვის:

$$J_o = \sum m_k\,(x_k^2 + y_k^2);\ \ J_x = \sum r[...]\ \ \sum m_k x_k^2,$$

$$J_x + J_y = J_o. \qquad (5.11)$$

თუ საკოორდინატო ღერძები ინერციის მთავრი ღერძებია, მაშინ

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

ერთგვაროვანი მყარი სხეულებისათვის: $J = \int_M r^2 dm$. (5.12)

სიდიდეს $r = \sqrt{J/M}$ - ინერციის რადიუსი ეწოდება.

ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა:

1) წვრილი წრფივი ღერო: $J_o = 1/3 \cdot M\ell^2$; $J_c = 1/12 \cdot M\ell^2$ (ℓ - 0B ღეროს სიგრძეა, M - ღეროს მასა);

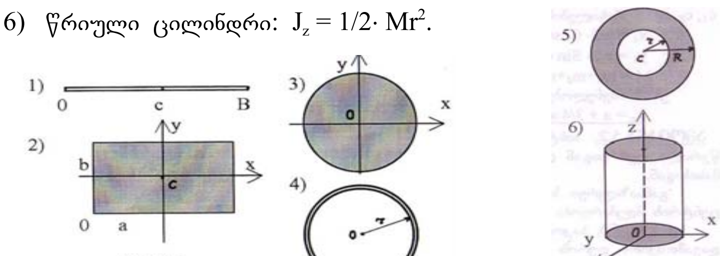
2) მართკუთხა ფირფიტის: $J_o = 1/3 \cdot M(a^2+b^2)$; $J_a = 1/3 \cdot Mb^2$; $J_b = 1/3 \cdot Ma^2$; $J_x = 1/12 \cdot Mb^2$; $J_y = 1/12 \cdot Ma^2$; $J_c = 1/12 \cdot M(a^2+b^2)$;

3) თხელი წრიული ფირფიტა (დისკო): $J_o = 1/2 \cdot Mr^2$; $J_x = J_y = 1/4 \cdot Mr^2$ (r- დისკოს რადიუსია);

4) წვრილი წრიული რგოლი: $J_o = Mr^2$ (r – რგოლის რადიუსია);

5) წრიული რგოლი: $J_c = 1/2 \cdot M(R^2+r^2)$, აქ r და R რგოლის შიგა და გარე რადიუსებია);

6) წრიული ცილინდრი: $J_z = 1/2\cdot Mr^2$.



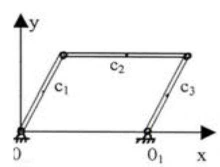
ნახ. 26.

მოცემული სხეულის ინერციის მომენტი სხვადასხვა ღერძის მიმართ ზოგადად სხვადასხვაა, მაგრამ არსებობს კავშირი პარალელური ღერძების მიმართ სხეულის ინერციის მომენტებს შორის, რომელსაც გამოხატავს *ჰიუგენს – შტაინერის თეორემა*: *მყარი სხეულის ინერციის მომენტი რაიმე მოცემული z ღერძის მიმართ ტოლია ამ ღერძის პარალელური და სხეულის მასების ცენტრზე გამავალი z_c ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს დამატებული სხეულის M მასისა და ამ ღერძებს შორის d მანძილის კვადრატის ნამრავლი.* ეს თეორემა გამოსახულია ტოლობით:

$$J_z = J_{zc} + Md^2 . \qquad (5.13)$$

ამოცანა 5.1. განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი სახსროვანი $0AB0_1$ პარალელოგრამის მასების ცენტრის კოორდინატები იმ მომენტში, როდესაც 0A მრუდმხარა ჰორიზონტალურ ღერძთან ადგენს φ კუთხეს, თუ

$$0A = 0_1B = 1/2\cdot AB = a.$$



ამოხსნა. დაუშვათ ღეროების სიმკვრივეა ρ; მაშინ 0A და 0_1B ღეროების მასებია $m_1 = m_3 = \rho a$, ხოლო AB ღეროს მასა $m_2=2a\rho$. ერთგვაროვანი ღეროების მასების c_1, c_2, c_3 ცენტრები მათ შუა წერტილებში მდებარეობენ. ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სისტემა სათავით 0 წერტილში და x ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტალურად.(5.2) ფორმულების თანახმად:

$$x_c= 1/M\cdot(m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3) \qquad y_c = 1/M\cdot (m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3) \qquad (ა)$$

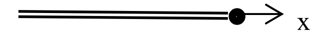
აქ (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) - არიან შესაბამისად c_1, c_2, c_3 წერტილების კოორდინატები: $x_1 = a/2\cdot \cos\varphi$; $x_2 = a+a\cos\varphi$; $x_3 = 2a+a/2\cdot\cos\varphi$;

$y_1 = a/2\cdot \sin\varphi$; $y_2 = a \sin\varphi$; $y_3 = a/2\cdot \sin\varphi$.

$M = m_1+m_2+m_3 = 4a\rho$. ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (ა) ტოლობებში; მივიღებთ: $\underline{x_c = a + 3/4\cdot a \cos\varphi}$; $\underline{y_c = 3/4\cdot a \sin\varphi}$.

ამოცანა 5.2. სისტემა შედგება m მასის AB = ℓ სიგრძის ერთგვაროვან წვრილი ღეროსგან და ღეროს B ბოლოში მოთავსებული 2m წერტილოვანი მასისაგან.

განსაზღვრეთ სისტემის მასების ცენტრის მდებარეობა A წერტილის მიმართ.



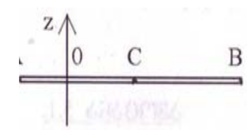
ნახ. 28.

ამოხსნა. საკოორდინატო Ax ღერძი დავამთხვიოთ ღეროს სათავით A წერტილში.
ღერო ერთგვაროვანია; ამიტომ მისი მასების ცენტრი C მოთავსებულია ღეროს შუაში: AC = CB = ℓ/2. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან. სისტემის მასა M=m+2m=3m. მასების ცენტრის აბსცისა:

$$x_c=1/M\cdot\sum m_kx_k= (m_{AB}\cdot AC+m_B\cdot AB)/ 3m= (m\ell/2+2m\ell)/ 3m = 5\ell/ 6.$$

$\underline{x_c = 5\ell/ 6}$.

ამოცანა 5.3. იპოვეთ M მასის ერთგვაროვანი წვრილი AB=ℓ სიგრძის ღეროს ინერციის მომენტი იმ z ღერძის მიმართ, რომელიც გადის 0 წერტილში ღეროს პერპენდიკულარულად, თუ A0 = ℓ / 4
A



ნახ. 29.

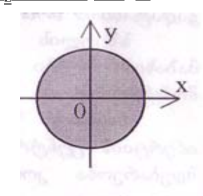
ამოხსნა. ჰიუგენს – შტაინერის თეორემის თანახმად (იხ. (5.13)ფორმულა):

$$J_z = J_c + M\cdot 0C^2 .$$

ვინაიდან $J_c = 1/12 \cdot M\ell^2$, ხოლო $0C = \ell /4$. ამიტომ

$J_z = 1/12\cdot M\ell^2 + 1/16\cdot M\ell^2 = 7/48\cdot M\ell^2$. პასუხი: $\underline{J_z = 7/48\cdot M\ell^2}$.

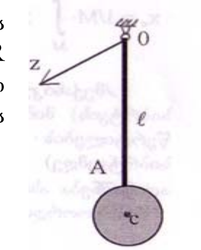
ამოცანა 5.4. გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიუ ს ინერციის მომენტი მისი დიამეტრის მიმარ



ნახ. 30.

ამოხსნა. ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით დისკოს ცენტრში. ბრტყელი სიმეტრიული ნაკვთისათვის საკოორდინატო ღერძების მიმართ ინერციის მომენტებს შორის ადგილი აქვს (5.11) ტოლობას $J_x+ J_y = J_c$. (*); ვინაიდან ერთგვაროვანი დისკოს ინერციის მომენტი მისი ყოველი დიამეტრის მიმართ ერთი და იგივეა, ამიტომ $J_x= J_y$. მეორეს მხრივ $J_c=1/2\cdot MR^2$. (*) ტოლობიდან: $2J_x=1/2\cdot MR^2$, საიდანაც $J_x=1/4\cdot MR^2$. ასევე $J_y=1/4\cdot MR^2$. პასუხი: $\underline{J_x= J_y= 1/4\cdot MR^2}$.

ამოცანა 5.5. 0 წერტილში დაკიდებული ქანქარა შედგება წვრილი ერთგვაროვანი ℓ სიგრძის და M_1 მასის ღეროსგან, რომლის A ბოლოზე მიმაგრებულია R რადიუსის და M_2 მასის წრიული დისკო. გამოთვალეთ ქანქარას ინერციის მომენტი მისი დაკიდების 0z ღერძის მიმართ, რომელიც ქანქარას სიბრტყის მართობია.



ახ. 31.

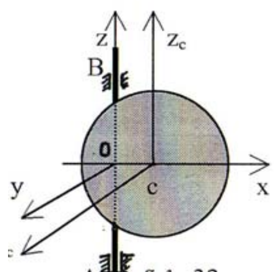
ამოხსნა. ქანქარა შედგება ორი სხეულისაგან: ღერო და დისკო. ამიტომ $J_z = J_z^{ღერ} + J_z^{დისკ}$. (*)

ღეროს ინერციის მომენტი $J_z^{ღერ} = 1/3 \cdot M_1\ell^2$.

0z ღერძის მიმართ დისკოს ინერციის მომენტის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ჰიუგენს – შტაინერის თეორემა: $J_z^{დ} = J_c^{დ} + M_2d^2$, სადაც $J_c^{დ} = 1/2 \cdot M_2R^2$ არის დისკოს ინერციი მომენტი მისი მასების C ცენტრზე და 0z ღერძის პარალელურად გამავალი ღერძის მიმართ, ხოლო d - მანძილი დისკოს ცენტრიდან 0z ღერძამდე: $d=0C=\ell + R$. გვექნება: $J_z^{დ} = 1/2 \cdot M_2R^2 + M_2(\ell + R)^2$.

(*) –დან მივიღებთ: $\underline{J_z = 1/3 \cdot M_1\ell^2 + M_2(3R^2/2 + 2r\ell + \ell^2)}$.

<u>ამოცანა 5.6.</u> M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო მიმაგრებულია AB ღეროზე, რომელიც მასების C ცენტრიდან დაშორებულია 0C = R/2 მანძილით. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტები x , y , z ღერძების მიმართ; აგრეთვე ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.



ნახ. 32.

<u>ამოხსნა.</u> ერთგვაროვანი დისკოსთვის

$$J_c = 1/2 \cdot MR^2 .$$

0y ღერძი გავლებულია დისკოს სიბრტყის მართობულად; ამიტომ, თუ გავავლებთ მასების C ცენტრზე 0y -ის პარალელურ Cy_c ღერძს, მაშინ ამ ღერძის მიმართ $J_{yc} = J_c = 1/2 \cdot MR^2$.

გამოვიყენოთ ჰიუგენს – შტაინერის თეორემა; გვექნება:

$$J_y = J_{yc} + M \cdot 0C^2 = 3/4 \cdot MR^2.$$

C წერტილში გავავლოთ 0z – ის პარალელური Cz_c ღერძი. ვინაიდან, როგორც x, ასევე z_c ღერძი დისკოს დიამეტრების თანამთხვეულია, ამიტომ

$$J_x = J_{zc} = 1/4 \cdot MR^2.$$

ჰიუგენს – შტაინერის თეორემის თანახმად: $J_z = J_{zc} + M \cdot 0C^2 = 1/2 \cdot MR^2$.

რადგანაც დისკო სიმეტრიულია, როგორც x, ასევე y ღერძის მიმართ, ამიტომ $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J_x = 1/4 \cdot MR^2}$; $\underline{J_y = 3/4 \cdot MR^2}$; $\underline{J_z = 1/2 \cdot MR^2}$; $\underline{J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0}$.

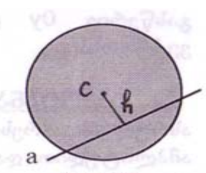
<u>ამოცანა5.7.</u> გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკოს ინერციის მომენტი მისი მხები წრფის მიმართ.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J_d = 5/4 \cdot MR^2}$.

<u>ამოცანა 5.8.</u> გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი მსახველის მიმართ.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J = 3/2 \cdot MR^2}$.

<u>ამოცანა 5.9.</u> გამოთვალეთ P წონის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკოს ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც მდებარეობს მის სიბრტყეში და სიმძიმის ცენტრიდან დაშორებულია რადიუსის მეოთხედი მანძილით (h = R/4).

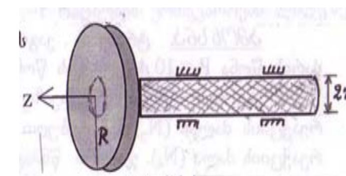


ნახ. 33.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J_a = 5PR^2/16g}$.

<u>ამოცანა 5.10.</u> P_1 წონის r რადიუსის ერთგვაროვან ლილვზე ჩამოცმულია P_2 წონის და R რადიუსის მქნევარა.

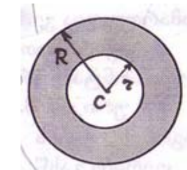
გამოთვალეთ ლილვის ინერციის მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ, თუ მქნევარა წარმოადგენს ერთგვაროვან წრიულ დისკოს.



ნახ. 34.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J_a = 1/2g \cdot (P_1r^2 + P_2R^2)}$.

<u>ამოცანა 5.11.</u> თხელ ერთგვაროვან R რადიუსის წრიულ დისკოში ამოჭრილულია r რადიუსის კონცენტრიული ხვრელი. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტი იმ z ღერძის მიმართ, რომელიც გადის მის სიმძიმის ცენტრში დისკოს სიბრტყის პერპენდიკულარულად, თუ დისკოს წონა არის P.

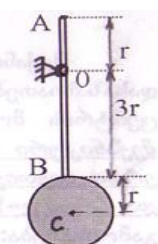


ნახ.35.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J_{cz} = P/2g \cdot (R^2 + r^2)}$.

<u>ამოცანა 5.12.</u> ქანქარა შედგება ერთგვაროვანი M_1 მასის წვრილ AB ღეროსაგან, რომლის ბოლოზე მიმაგრებულია M_2 მასის ერთგვაროვანი C დისკო. ღეროს სიგრძე უდრის 4r, სადაც r - დისკოს რადიუსია.

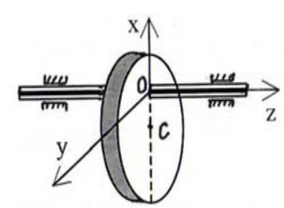
გამოთვალეთ ქანქარას ინერციის მომენტი მისი დაკიდების 0 ღერძის მიმართ, რომელიც ქანქარას სიბრტყის მართობია და ღეროს A ბოლოდან დაშორებულია r მანძილით.



ნახ. 36.

<u>პასუხი:</u> $\underline{J_{0z} = 1/6 \cdot (14M_1 + 99M_2)r^2}$.

<u>ამოცანა 5.13.</u> M მასის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ექსცენტრულად ჩამოცმულია მისი სიბრტყის მართობ z ღერძზე. დისკოს რადიუსია r, ხოლო ექსცენტრისიტეტი 0C = a , სადაც C არის



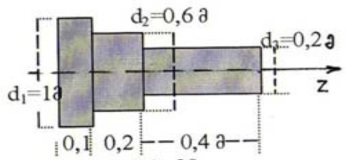
ნახ. 37

დისკოს მასების ცენტრი. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტები 37-ე ნახაზზე მითითებული ღერძების მიმართ, აგრეთვე ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.

პასუხი: $J_x = 1/4\cdot Mr^2$; $J_y = M(1/4\cdot r^2+a^2)$; $J_z = M(1/2\cdot r^2+a^2)$. $J_{xy}=J_{xz}=J_{yz}=0$.

ამოცანა 5.14. გამოთვალეთ მთლიანი თუჯის საფეხუროვანი ბორბალის ინერციის მომენტი მისი z ღერძის მიმართ (სიმკვრივე = 7800 კგ/მ^3).

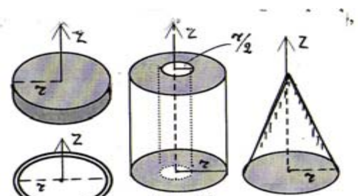
პასუხი: $J_x = 97$ კგმ^3.



ნახ. 38.

ამოცანა 5.15. როგორ შეეფარდებიან ერთმანეთს მთლიანი დისკოს, წრიული რგოლის, ღრუ ცილინდრის და წრიული კონუსის ინერციის რადიუსები ვერტიკალური ღერძის მიმართ, თუ ყველა მათგანს აქვთ ერთი და იგივე მასა?

პასუხი: $\sqrt{1/2} : 1 : \sqrt{5/8} : \sqrt{3/10}$.


ნახ. 39.

§ 6. მასების ცენტრის მოძრაობა

მექანიკური სისტემის (უ მყარი სხეულის) მოძრაობის დასახასიათებლად ხშირ შემთხვევაში საკმარისია ვიცოდეთ მისი მასების ცენტრის მოძრაობის ხასიათი, რომელსაც გამოსახავს შემდეგი *თეორემა: მექანიკური სისტემის (სხეულის) მასების ცენტრი მოძრაობს ისე, როგორც ერთი ნივთიერი წერტილი, რომელშიც თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა და რომელზეც მოქმედებს გარე ძალების ნაკრები ვექტორი.* ეს ასე გამოისახება: $M\vec{w}_c = \vec{F}^{გ}$. (6.1)

აქ M - მთელი სისტემის (სხეულის) მასაა, $\vec{w}_c$ - მასების ცენტრის აჩქარება, $\vec{F}^{გ}$ -სისტემაზე (სხეულზე) მოდებული გარე ძალების ნაკრები ვექტორი.

მასების C (x_c, y_c, z_c) ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებებია:

$$Md^2x_c/dt^2 = X^{გ},\quad Md^2y_c/dt^2 = Y^{გ},\quad Md^2z_c/dt^2 = Z^{გ}. \qquad (6.2)$$

შენიშვნა. მასების ცენტრი გეომეტრიული წერტილია და გარე ძალები ფაქტიურად მოდებულია არა მასების ცენტრზე, არამედ სისტემის (სხეულის) წერტილებზე.

შედეგი: თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ($\vec{F}^{გ}$) ან მისი გეგმილი მოცემულ უძრავ ღერძზე ($F_x^{გ}$) ნულის ტოლია $\vec{F}^{გ}= 0$ (ან $F_x^{გ} = 0$), მაშინ სისტემის მასების ცენტრის სიჩქარე ან მისი გეგმილი აღებულ ღერძზე მუდმივია $\vec{v}_c = const$ (ან $v_{cx}= const$). ეს ნიშნავს, რომ მასების ცენტრი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად, ან უძრავია ($\vec{v}_c = 0$, ან $v_{cx}= 0$). ამ შემთხვევას ეწოდება *მასების ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონი* (ან მასების ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონი ამ x ღერძის მიმართ). როდესაც $\vec{v}_c = 0$ (ან $v_{cx}= 0$) , მაშინ სისტემის მასების ცენტრის კოორდინატები დროის საწყის და მოცემულ მომენტებში ერთმანეთის ტოლია: $x_c^o =x_c^t$; $y_c^o = y_c^t$; $z_c^o = z_c^t$; (ან $x_c^o =x_c^t$). (6.3)

მითითება. მასების ცენტრის თეორემის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით:

1) ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალა.

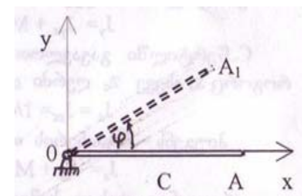
2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა;

3) მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა ჩავწეროთ გეგმილებში ((6.2) ტოლობების სახით);

4) გამოვთვალოთ ყველა გარე ძალის გეგმილი კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე;

5) მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (6.2) განტოლებებში.

ამოცანა 6.1. 0A = 40 სმ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო $\varphi=\pi t^2/2$ კანონით ბრუნავს 0 ბოლოზე ღეროს მართობულად გამავალი უძრავი ღერძის გარშემო. t = 0 მომენტისათვის განსაზღვრეთ მასების C ცენტრი ის სიდიდე და ღეროზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის მიმართულება.



ნახ. 40.

ამოხსნა. t = 0 მომენტში φ = 0; ღეროს უკავია 0A მდებარეობა. ღეროს მასების C ცენტრი მოძრაობს კანონით: $M\vec{w}_c = \vec{F}^{გ}$.

C წერტილი შემოწერს R = 0A/ 2 = 20 სმ რადიუსის წრეწირს. მისი აჩქარება $\vec{w}_c = \overline{\vec{w}_\tau + \vec{w}_n}$; სიდიდით $w_c=\sqrt{w_\tau^2+w_n^2}$; აქ $w_\tau= \varepsilon R$; $w_n=\omega^2R$. ვინაიდან $\omega= \dot{\varphi}=\pi t$, ხოლო $\varepsilon = \ddot{\varphi}=\pi$; ამიტომ t = 0 მომენტში ω= 0, ε=π. მაშასადამე $w_\tau=\pi R$; $w_n= 0$. მივიღებთ $w_c = w_\tau= 20\pi$ სმ/წმ^2. აჩქარება $\vec{w}_c$ მიმართულია ტრაექტორიის (წრეწირის) მხების

გასწვრივ 0y ღერძის პარალელურად. იგივე მიმართულება აქვს $\vec{F}_ბ$ ვექტორსაც.

ამოცანა 6.2. ჰორიზონტალურ გზაზე მოძრაობისას ტრამვაის ვაგონი ასრულებს რესორებზე ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას a=2,5 სმ ამპლიტუდით და T= 0,5 წმ პერიოდით. ვაგონის ძარა ტვირთით იწონის 10 ტ-ს, ურიკა თვლებთან ერთად 1 ტ-ს. განსაზღვრეთ ვაგონის წნევა რელსებზე.

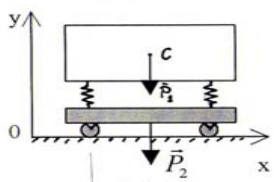
ამოხსნა. ტრამვაის ვაგონზე მოქმედი გარე ძალებია: ვაგონის ძარის წონა P_1= 10 ტ , ურიკას წონა თვლებთან ერთად P_2 = 1 ტ,

ვაგონის წნევა რელსებზე ტოლია ურიკას წონით გამოწვეულ რეაქციის ძალას ($N_უ$) დამატებული ძარის რხევითი მოძრაობით გამოწვეული რეაქციის ძალა ($N_ძ$). ჯამური წნევის რეაქციის ძალა $N=N_უ+N_ძ$. ეს ძალები მიმართულია ვერტიკალურად ;ამასთანავე, $N_უ = P_2$. განვსაზღვროთ $N_ძ$.

ავირჩიოთ კოორდინატთა 0xy სიტემა და 0x ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტალურად.

ურიკას მასების ცენტრი არ იცვლის მდებარეობას y ღერძის გასწვრივ. ვაგონის ძარის მასების C ცენტრი (ძარის ვერტიკალური რხევის გამო) y ღერძის გასწვრივ ასრულებს ჰარმონიულ რხევას და მოძრაობს კანონით:

$$y_c = a\text{Sin}kt .$$



ნახ . 41.

პირობის თანახმად რხევის პერიოდი $T = 2\pi/k$, საიდანაც $k = 2\pi/T = 4\pi$;

მაშასადამე $y_c = 2,5\ \text{Sin}4\pi t$. (ა)

ძარას მასების C ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება

$$m_1 d^2y_c/\ dt^2 = -\ P_1 + N_ძ \ . \quad (ბ)$$

თუ გავითვალისწინებთ (ა) ტოლობას, მაშინ (ბ) -დან გვექნება:

$$N_ძ = P_1 - P_1/\ g \cdot 2,5 \cdot 16\ \pi^2\ \text{Sin}4\pi t = P_1 - P_1/\ g \cdot 40\ \pi^2\ \text{Sin}4\pi t .$$

საბოლოოდ, ვაგონის მოძრაობისას ჯამური წნევის ძალა იქნება:

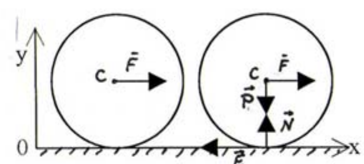
$$N = P_2 + P_1 - P_1/\ g \cdot 40\ \pi^2\ \text{Sin}4\pi t .$$

ამ ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ:

1) $N = N_{max}$, როცა $\text{Sin}4\pi t = -1$, ე.ი.
$N_{max} = P_2 + P_1 + P_1/\ g \cdot 40\ \pi^2 = 10+1+10\ /\ 980 \cdot 40 \cdot 3,14^2 \cong 15$ტ;

2) $N = N_{min}$, როცა $\text{Sin}4\pi t = +1$, ე.ი. $N_{min} = P_2 + P_1 - P_1/\ g \cdot 40\ \pi^2 \cong 7$ტ.

პასუხი: ვაგონის წნევა რელსებზე იცვლება 7 ტონიდან 15 ტონამდე.



ნახ. 42.

ამოცანა 6.3. ავტომანქანის ამყოლი თვალი F ძალის მოქმედებით სრიალით გორავს ჰორიზონტალურ წრფეზე (ნახ.42). განსაზღვრეთ თვალის სიმძიმის C ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f, ხოლო F = 5fP, სადაც P - თვლის წონაა. საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო.

ამოხსნა. თვალზე მოქმედებს ოთხი ძალა: F - მამოძრავებელი ძალა, P - სიმძიმის ძალა, $F_ხ$ - სრიალის ხახუნის ძალა,N -საყრდენის ნორმალური რეაქციის ძალა. მასების C ცენტრის მოძრაობის განტოლება $M\vec{w}_c = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_ხ + \vec{N}$.

დავაგეგმილოთ ეს ტოლობა x და y ღერძებზე: $M\ddot{x}_c = F - F_ხ$,

$0 = -P + N$. (ა)

აქ y_c= R= const და $\ddot{y}_c = 0$; N = P; სრიალის ხახუნის ძალა: $F_ხ=fN=fP$. (ა) –დან გვექნება: $P/\ g\ \ddot{x}_c = 5fP - fP$; აქედან $\ddot{x}_c = 4fP$.

ვაინტეგროთ ეს ტოლობა: $\dot{x}_c = 4fgt + c_1$. (ბ)

საწყის მომენტში თვალი უძრავია, ე.ი. როცა $t_o = 0$, მაშინ $\dot{x}_c = V_{ox} = 0$; მათი (ბ)-ში შეტანით მივიღებთ $c_1 = 0$; ამიტომ (ბ) ასეთ სახეს იღებს: $\dot{x}_c = 4fgt$; ვაინტეგროთ ეს ტოლობა: $x_c = 2fgt^2 + c_2$. (გ)

განვლილი მანძილი ავითვალოთ მოძრაობის დაწყების მომენტიდან, ე.ი., როცა $t_o = 0$, მაშინ $x_c = 0$ და მაშასადამე (გ) – დან $c_2 = 0$.

მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება იქნება: $\underline{x_c = 2fgt^2}$.

ამოცანა 6.4. გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოთავსებულია P_1=16 ნ წონის სამკუთხა პრიზმა. პრიზმის დახრილი AE წახნაგის გასწვრივ საწყისი D მდებარეობიდან უსრიალოდ მიგორავს P_2= 8 ნ წონის და r = 6,5 სმ რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრი და შეასრულა ორი ბრუნი. ამ დროის განმავლობაში რა x მანძილზე გადაადგილდება პრიზმა ჰორიზონტალური სიბრტყის გასწვრივ? მოცემულია: AB=50 სმ; BE=120სმ.

ამოხსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: ცილინდრისა და პრიზმისაგან. სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გეგმილი x ღერძზე $F_x = 0$. ე.ი. ადგილი აქვს x ღერძის მიმართ მასების ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონს :

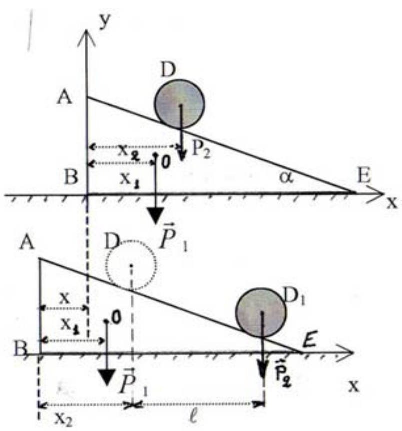
$$x_c^o = x_c^t . \quad (ა)$$

მანძილი ავთვალოთ AB წიბოს საწყისი მდებარეობიდან. საწყის t_o=0 მომენტში მასების ცენტრის აბსცისა

$x_c = (m_1 x_1 + m_2 x_2)/M$ (ბ)

სადაც $M = m_1 + m_2$, ხოლო x_1 და x_2 არიან პრიზმისა და ცილინდრის სიმძიმის ცენტრის აბსცისები.

ვთქვათ t დროის შემდეგ D ცილინდრმა გააკეთა ორი სრული ბრუნი, ე. ი. გაიარა $DD_1 = 4\pi r$ სმ მანძილი, ხოლო ამავე დროში პრიზმა გადაადგილდა მარცხნივ x სმ მანძილით. მაშინ პრიზმას და ცილინდრის D_1 მდებარეობის აბსცისები შესაბამისად იქნებიან



ნახ. 43.

$(x_1 - x)$ და $(x_2 + \ell - x)$, სადაც $\ell = DD_1 \cos\alpha = 4\pi r \cos\alpha$.

($tg\alpha = AB/BE = 5/12$; $\cos\alpha = 12/13$).

დროის t მომენტისათვის სისტემის მასების ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება ტოლობით: $x_c^t = [m_1(x_1 - x) + m_2(x_2 + \ell - x)] / M$.   (გ)

(ა) ტოლობის თანახმად (ბ) და (გ) – დან გვექნება:

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2)/M = [m_1(x_1 - x) + m_2(x_2 + \ell - x)] / M$$

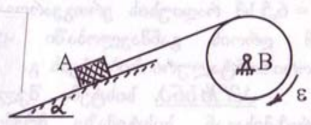
ანუ $(m_1 + m_2)\, x = m_2 \ell$;

საიდანაც $x = m_2 \ell / (m_1 + m_2) = 4\pi r P_2 \cos\alpha / (P_1 + P_2) = 25{,}12$ სმ.

$x = 25{,}12$ სმ (მარცხნივ).

<u>ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 6.5.</u> m = 50 კგ მასის A ტვირთი ადის დახრილ სიბრტყეზე ბაგირის საშუალებით, რომელიც დახვეულია $R = 0{,}4$ მ რადიუსის B დოლზე.

განსაზღვრეთ A სხეულზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის სიდიდე, თუ დოლის კუთხური აჩქარება 38 წმ$^{-2}$.

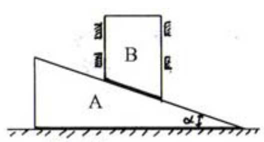


ნახ. 44.

<u>პასუხი: $F^{(გ)} = 100$ ნ.</u>

<u>ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 6.6.</u> P_1 წონის A სოლი მოთავსებულია გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, ხოლო P_2 წონის B სხეულს შეუძლიან ვერტიკალური მოძრაობა. კუთხე α ცნობილია.

განსაზღვრეთ სისტემის მასების ცენტრის აჩქარება, თუ სოლის აჩქარება არის w.

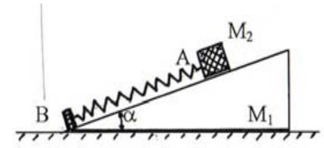


ნახ. 45.

<u>პასუხი: $w_c = \sqrt{P_1^2 + P_2^2\, tg^2\alpha}\; / (P_1 + P_2) \cdot w$.</u>

<u>ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 6.7.</u> 70 ნ წონის M_1 სოლი მოთავსებულია გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. 30 ნ წონის M_2 სხეულზე მიმაგრებული ზამბარა შეკუმშეს და უძრავი მდგომარეობიდან სხეული გაუშვეს.

განსაზღვრეთ მანძილი, რომელზეც გადაადგილდება სოლი, თუ $\alpha = 30^0$ და M_2 სხეულმა სოლის დახრილ წახნაგზე გაიარა 40 სმ მანძილი.

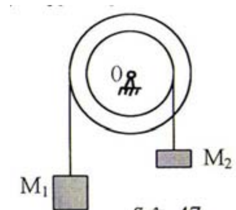


ნახ. 46.

<u>პასუხი: s = 10,4 სმ (მარცხნივ)</u>

<u>ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 6.8.</u> r_1 და r_2 ($r_1 > r_2$) რადიუსების ერთგვაროვანი ბლოკები ერთმანეთთან ხისტად არიან შეერთებულნი და ჩამოცმულნი არიან ბრუნვის საერთო 0 ღერძზე.

განსაზღვრეთ წნევა ამ ღერძზე, თუ ბლოკების საერთო წონა არის Q. M_1 და M_2 ტვირთების წონებია შესაბამისად P_1 და P_2. M_1 ტვირთის აჩქარება w_1-ს ტოლია.

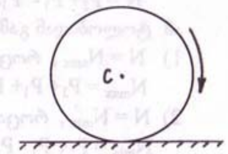


ნახ. 47.

<u>პასუხი: $N = P_1 + P_2 + Q - (P_1 r_1 - P_2 r_2) \cdot w_1 / g r_1$.</u>

<u>ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 6.9</u>. ავტომანქანის წამყვანი თვალი მასზე მოდებული მაბრუნი მომენტის მოქმედებით სრიალით გორავს ჰორიზონტალურ წრფეზე.

განსაზღვრეთ თვალის სიმძიმის C ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f. საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო. <u>პასუხი: $x_c = f\, g t^2 / 2$.</u>



ნახ. 48.

.

§ 7. ᲛᲝᲫᲠᲐᲝᲑᲘᲡ ᲠᲐᲝᲓᲔᲜᲝᲑᲘᲡ ᲪᲕᲚᲘᲚᲔᲑᲘᲡ ᲗᲔᲝᲠᲔᲛᲐ

$\vec{V}$ სიჩქარით მოძრავი m მასის ნივთიერი წერტილის *მოძრაობის რაოდენობა* ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს: $\vec{Q} = m\vec{V}$,   (7.1)

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა: $\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k$.

აქ m_k – სისტემის k - ური წერტილის მასაა, $\vec{V}_k$ – ამ წერტილის სიჩქარე.

ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის : $\vec{Q} = M\vec{V}_c$,   (7.2)

სადაც M - სისტემის მასაა, $\vec{V}_c$ – სისტემის მასების ცენტრის სიჩქარე.

წერტილის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა: $d\vec{Q} / dt = \vec{F}$;   (7.3)

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა: $d\vec{Q}/dt = \vec{F}^{\text{გ}}$.

მოძრაობის რაოდენობის ნაზრდის თეორემა:

წერტილისათვის : $m\vec{v} - m\vec{v}_o = \int_0^{\tau} \vec{F}\, dt$; (7.4)

აქ $\vec{v}_0$ და $\vec{v}$ - წერტილის მოძრაობის საწყისი და საბოლოო სიჩქარეა , ხოლო τ - მოძრაობის დროის შუალედი.

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა უძრავი სისტემის ღერძებზე (7.4) ტოლობის დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$mv_x - mv_{ox} = \int_0^{\tau} F_x dt; \quad mv_y - mv_{oy} = \int_0^{\tau} F_y dt; \quad mv_z - mv_{oz} = \int_0^{\tau} F_z dt; \quad (7.5)$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის : $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^{\tau} \vec{F}^{\text{გ}} dt$; (7.6)

სიდიდეს $\vec{S} = \int_0^{\tau} \vec{F}\, dt$ - ეწოდება ძალის სრული იმპულსი; სიდიდეს $d\vec{S} = \vec{F}\, dt$ - ძალის ელემენტარული იმპულსი ეწოდება.

თუ $\vec{F} = \text{const}$, მაშინ (7.3) ასე ჩაიწერება: $m\vec{v} - m\vec{v}_o = \vec{F} \cdot \tau$; (7.7)

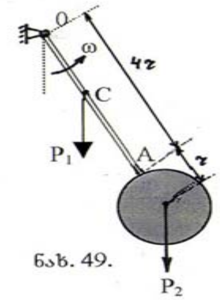
თუ $\vec{F} = 0$, მაშინ (7.3) –დან $\vec{Q} = \text{const}$; ე.ი. ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს : $\vec{Q}_0 = \vec{Q}_t$. (7.8)

თუ $F_x = 0$, მაშინ Q_x ადგილი აქვს x ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის შენ : $mv_{0x} = mv_{tx} = \text{const.}$ (7.9)

მითითება. მოძრა ნობის ცვლილების თეორემის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით: 1) ნახაზზე გამოვსახოთ წერტილზე მოქმედი ყველა აქტიური და რეაქციის ძალა (სისტემის შემთხვევაში - ყველა გარე ძალა); 2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა; 3) მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა (როგორც წერტილისათვის, ასევე – სისტემისათვის) ჩავწეროთ საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში; 4) მიღებული განტოლებებიდან განვსაზღვროთ უცნობი სიდიდე (მოძრაობის საწყისი ან საბოლოო სიჩქარე, მოძრაობის დრო, რომელიმე უცნობი ძალა ან მისი გეგმილი).

შენიშვნა. 1) თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ან მისი გეგმილი რომელიმე ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ გამოვიყენებთ მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს (7.8) ან (7.9) ტოლობის სახით და განვსაზღვრავთ საძებნ სიდიდეს.

2) (7.2) ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ სისტემა (ან სხეული) ისე მოძრაობს, რომ მისი მასების ცენტრი უძრავია ($\vec{V}_c = 0$), მაშინ სისტემის (ან სხეულის) მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია. მაგალითად, თუ სხეული ბრუნავს მასების ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო, მაშინ მისი მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია.


ნახ. 49.

<u>ამოცანა 7.1</u> განსაზღვრეთ ქანქარას მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი, თუ იგი შედგება P_1 წონის 0A=4r სიგრძის ერთგვაროვანი ღეროსა და P_2 წონის r რადიუსის B დისკოსაგან; აღებულ მომენტში ქანქარას კუთხური სიჩქარე ω - ს ტოლია.

<u>ამოხსნა</u>. ღეროს სიმძიმის ცენტრი შუა C წერტილშია მოთავსებული, ხოლო დისკოსი – B ცენტრში. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი გამოითვლება ფორმულით:

$\vec{Q} = m_{0A} \cdot \vec{v}_c + m_B \cdot \vec{v}_B$; (ა) აქ $m_{0A} = P_1/g$; $m_B = P_2/g$.

ქანქარას მოძრაობის დროს მისი C და B წერტილები მოძრაობენ წრეწირებზე ω კუთხური სიჩქარით, ამიტომ $v_c = \omega \cdot 0C = 2r\,\omega$;

$v_B = \omega \cdot 0B = 5r\,\omega$.

სიჩქარის $\vec{v}_c$ და $\vec{v}_B$ ვექტორები მიმართულნი არიან ნახაზის სიბრტყეში 0B წრფის მართობულად და მაშასადამე $\vec{Q}$ ვექტორიც 0B -ს მართობულია.

თუ (ა) ტოლობას დავაგეგმილებთ ნახაზის სიბრტყეში მდებარე 0B წრფის მართობულ ღერძზე, მივიღებთ:

$$Q = m_{0A} v_c + m_B v_B = P_1/g \cdot 2r\,\omega + P_2/g \cdot 5r\,\omega = (2P_1 + 5P_2) r\,\omega/g \,.$$

<u>პასუხი:</u> <u>$Q = (2P_1 + 5P_2) r\,\omega/g$</u> ; ($Q$ მიმართულია 0B-ს მართობულად მოძრაობის მხარეს).

<u>ამოცანა 7.2</u> P = 12 კგ წონის გრანატა, რომელიც მიფრინავდა 15 მ/წმ სიჩქარით, ჰაერში გასკდა ორ ნაწილად. P_1=8კგ წონის ნამსხვრევის სიჩქარე გრანატის მოძრაობის მიმართულებით გაიზარდა 25 მ/წმ-დე. იპოვეთ მეორე ნაწილის სიჩქარე.

<u>ამოხსნა.</u> გრანატის მასა $m = P/g = 12/g$, ხოლო გასკდომის შედეგად მიღებული ნამსხვრევების მასებია: $m_1 = P_1/g = 8/g$; $m_2 = P_2/g = 4/g$.

გრანატის სიჩქარეა v=15 მ/წმ, ხოლო ნამსხვრევებისა: v_1=25მ/წმ და v_2. უნდა განვსაზღვროთ v_2.

გრანატის გასკდომამდე მოძრაობის რაოდენობასა და გასკდომის შემდეგ მიღებული ორი სხეულის სისტემის მოძრაობის რაოდენობას შორის არსებობს დამოკიდებულება:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \quad \text{ანუ} \quad m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \qquad (ა)$$

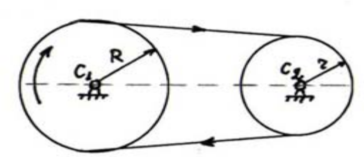
ამოცანის პირობის თანახმად, ერთ-ერთი ნამსხვრევის სიჩქარე გრანატის მოძრაობის მიმართულებას ემთხვევა, ე.ი. $\vec{v}_1 \,||\, \vec{v}$; ამის გამო, (ა) ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, თუ აგრეთვე $\vec{v}_2 \,||\, \vec{v}$; ეს კი გვიჩვენებს, რომ თუ (ა) ტოლობას დავაგეგმილებთ მოძრაობის ამ მიმართულებაზე, მივიღებთ: $mv = m_1v_1 + m_2v_2$.

შევიტანოთ აქ მიღებული მნიშვნელობები: $12 \cdot 15 = 8 \cdot 25 + 4\, v_2$;

აქედან: $v_2 = -5$ მ/წმ. ნიშანი “ - “ გვიჩვენებს, რომ მეორე ნამსხვრევის სიჩქარე მიმართულია პირველის საწინააღმდეგოდ.

პასუხი: $v_2 = 5$ მ/წმ.

ამოცანა 7.3. გამოთვალეთ ნახაზზე გამოსახული ღვედური გადაცემის მოძრაობის რაოდენობა, თუ მხედველობაში მიღებულია ორივე ბორბლისა და ღვედის მასა. ბორბლების სიმძიმის ცენტრები მათი ბრუნვის ღერძებზე მდებარეობს.



ნახ. 50.

ამოხსნა. სისტემა შედგება სამი სხეულისაგან: ორი ბორბლისა და ღვედისაგან; ამიტომ, სისტემის მოძრაობის რაოდენობა იქნება:

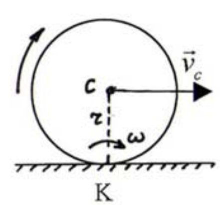
$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3$$

ორივე ბორბალის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მათი ბრუნვის ღერძებზე, რომლებიც უძრავია, ამიტომ $v_{c1} = 0$, $v_{c2} = 0$, და მივიღებთ:

$$Q_1 = m_1 v_{c1} = 0,$$
$$Q_2 = m_2\, v_{c2} = 0\,.$$

Q_3 წარმოადგენს ღვედის მოძრაობის რაოდენობას. ღვედი განლაგებულია ჰორიზონტალური [illegible]ის მიმართ სიმეტრიულად. ღვედის ნაწილაკების მასებიც [illegible]ის სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი, ხოლო ამ ნაწილაკების სიჩქარეები ყველანი ერთმანეთის ტოლია და სიმეტრიულ ნაწილებში ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ამიტომ, ღვედის ყოველი m მასის ნაწილაკის mv მოძრაობის რაოდენობისათვის მოიძებნება იმავე m მასის სიმეტრიული ნაწილაკის -mv მოძრაობის რაოდენობა და მათი ჯამი 0–ის ტოლი იქნება. მაშასადამე, მთლიანი ღვედის მოძრაობის რაოდენობა $Q_3 = 0$.

მივიღეთ, რომ ღვედური გადაცემის მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია: $Q = 0$.



ნახ. 51.

ამოცანა 7.4. P=100 კგ წონის და r =50 სმ რადიუსის ბორბალი რელსზე გორავს სრიალის გარეშე და აკეთებს 60 ბრ/წთ-ს. გამოთვალეთ ბორბლის მოძრაობის რაოდენობა.

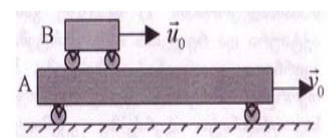
ამოხსნა. ბორბალი ასრულებს ბრტყელ თანაბარ ბრუნვას (n = 60 ბრ/წთ). ბრუნვის მყისი ცენტრია K წერტილი. ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იქნება $\omega = \pi n/30$. ეს არის ბრუნვის მყისი K ცენტრის გარშემო შემობრუნების კუთხური სიჩქარე. ბორბალი ერთგვაროვანია. მისი სიმძიმის C ცენტრი მოძრაობს $v_c = \omega r$ სიჩქარით.

ბორბლის წერტილები ბრუნვის K ცენტრის მიმართ მოძრაობენ სხვადასხვა რადიუსიან წრეწირებზე. ამ წერტილების სიჩქარეების ვექტორები მიმართულია ამ წრეწირების მხებების გასწვრივ; ამიტომ სხვადასხვა წერტილის მოძრაობის რაოდენობას აქვს სხვადასხვა მიმართულება. მათი ნაკრები ვექტორი $\vec{Q}$ მიმართულია მასების ცენტრის სიჩქარის მიმართულებით და სიდიდით იქნება :

$$Q = mv_c = P/g \cdot \pi r n/30 = 100 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 50/980 \cdot 30 = 10{,}2\pi \text{ კგ/ წმ.}$$

პასუხი: $Q = 10{,}2\pi$ კგ/ წმ.

ამოცანა 7.5 . ჰორიზონტალურ A ბაქანზე, რომელიც მოძრაობს v_0 სიჩქარით, მოძრაობს B ურიკა ფარდობითი u_0 სიჩქარით. გარკვეულ მომენტში ურიკა დაამუხრუჭეს. განსაზღვრეთ ურიკას გაჩერების შემდეგ ბაქანის ურიკასთან ერთად მოძრაობის საერთო v სიჩქარე, თუ M - ბაქანის მასაა, ხოლო m - ურიკას მასა. ურიკას და ბაქანის ბორბლების მასები უგულებელყავით.



ნახ. 52

ამოხსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან (ბაქანი და ურიკა). ბაქანი და ურიკა მოძრაობენ წრფივად, მუდმივი სიჩქარით, ანუ ინერციულად; ეს ნიშნავს, რომ სისტემაზე გარე ძალები არ მოქმედებენ. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს, ე.ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს:

$$\vec{Q}_o = \vec{Q} = \text{const}\,. \qquad (ა)$$

$\vec{Q}_0$ არის სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ურიკას გაჩერებამდე:

$$\vec{Q}_0 = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B\,.$$

ვინაიდან $\vec{v}_0 \,||\, \vec{u}_0$, ე.ი. $\vec{Q}_A \,||\, \vec{Q}_B$, ამიტომ $Q_0 = Q_A + Q_B$. (ბ)

ბაქანის სიჩქარის სიდიდეა v_0, მაშასადამე $Q_A = Mv_0$;

ურიკას აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდეა $v_0 + u_0$, ამიტომ

$Q_B = m (v_0 + u_0)$.

ამ მნიშვნელობების შეტანით (ბ) - ში, მივიღებთ

$Q_0 = Mv_0 + m (v_0 + u_0)$. (გ)

(ა) ტოლობაში $\vec{Q}$ არის სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ურიკას გაჩერების შემდეგ; ე.ი. ურიკა და ბაქანი შეგვიძლიან განვიხილოთ, როგორც ერთი მთლიანი სხეული მასით (M+m), რომელიც მოძრაობს გადატანითად v სიჩქარით; მაშასადამე $Q = (M+m) v$. (დ)

(ა) ტოლობის თანახმად $Q_0 = Q$. შევიტანოთ აქ (გ) და (დ) მნიშვნელობები, მივიღებთ: $Mv_0 + m (v_0 + u_0) = (M+m) v$;

აქედან: $v = v_0 + m / (M+m) \cdot u_0$. პასუხი: $v = v_0 + m / (M+m) \cdot u_0$.

ამოცანა 7.6. m= 2 კგ მასის თავისუფალი ნივთიერი წერტილი მოძრაობს წრფეზე; t = 6 წმ-ის განმავლობაში მოძრაობის მიმართულებით მასზე მოქმედებს მუდმივი ძალა F=10 ნ. განსაზღვრეთ ამ წერტილის სიჩქარის ნაზრდი ძალის მოქმედების დროის შუალედში.

პასუხი: Δv = 30 მ/წმ.

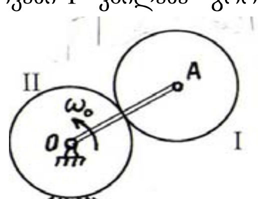
ამოცანა 7.7. ჰორიზონტისადმი $\alpha=30^0$ კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე მდებარე სხეულს მიანიჭეს საწყისი v_0= 4 მ/წმ სიჩქარე ზევით. განსაზღვრეთ, რა დროის შემდეგ მიაღწევს სხეული უდიდეს სიმაღლეს აღმართზე? პასუხი: t = 0,815 წმ.

ამოცანა 7.8 ბავშვი ეშვება მარხილით ჰორიზონტისადმი $\alpha= 30^0$ კუთხით დახრილ ფერდობზე საწყისი სიჩქარის გარეშე. განსაზღვრეთ მარხილის სიჩქარე 4 წმ-ის შემდეგ, თუ მოძრაობისას მარხილის თოვლზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია 0,04. პასუხი: $v \approx 18$ მ/წმ.

ამოცანა 7.9. ავტომანქანა "ნივა" მოძრაობს თანაბრად წრფივ ჰორიზონტალურ გზაზე 72 კმ/სთ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ავტომანქანის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი და მანქანაზე მოდებული გარე ძალების სრული იმპულსი დროის ნებისმიერ სასრულ შუალედში, თუ ავტომანქანის ძარის მასა მძღ[illegible]რთად არის 1300 კგ, ხოლო თითოეული ბორბალის მასა 20 კ[illegible]

პასუხი: [illegible] 2[illegible]00 კგმ/წმ. გარე ძალების იმპულსების ჯამი დროის ნებისმიერ სასრულ შუალედში = 0.

ამოცანა 7.10. r რადიუსის ერთგვაროვანი I კბილანა გორავს იმავე რადიუსის უძრავ II კბილანაზე 0A მრუდმხარას საშუალებით, რომელიც ბრუნავს 0 წერტილის გარშემო მუდმივი ω_0 კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა, თუ I კბილანის მასაა m_1, ხოლო მრუდმხარა წარმოადგენს m_2 მასის ერთგვაროვან ღეროს.

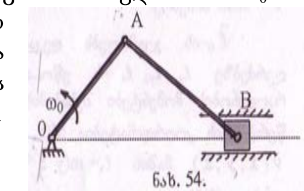


ნახ. 53.

პასუხი: $Q = \omega_0 r (2m_1+m_2)$; $\vec{Q} \perp 0A$.

ამოცანა 7.11. P_1 წონის და 0A= a სიგრძის მრუდმხარა ω_0 კუთხური სიჩქარით ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო და მოძრაობაში მოჰყავს P_2 წონის AB ბარბაცა და P_3 წონის B ცოცია. განსაზღვრეთ მექანიზმის მოძრაობის რაოდენობა იმ შემთხვევებში, როცა 0A მრუდმხარა: 1) 0B წრფის მართობულია;

2) მიმართულია 0B-ს გასწვრივ.

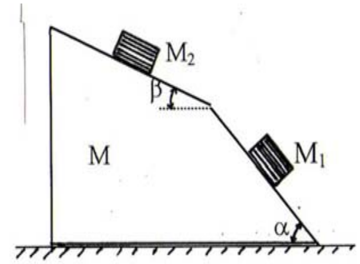


ნახ. 54.

პასუხი: 1) $Q_1= Q_3= a\ \omega_0(P_1+2P_2+2P_3)/2g$;

2) $Q_2= Q_4 = a\ \omega_0(P_1+P_2)/ 2g$.

ამოცანა 7.12. გლუვ, ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოთავსებული P წონის M პრიზმის წახნაგებზე ერთდროულად ქვევით იწყებს მოძრაობას ორი M_1 და M_2 სხეული, რომელთა წონებია შესაბამისად P_1 და P_2. ჩათვალეთ, რომ α და β კუთხეები ცნობილია და განსაზღვრეთ M პრიზმის v სიჩქარე M_1 და M_2 სხეულების ფარდობითი v_1 და v_2 სიჩქარეებზე დამოკიდებულებით.



ნახ. 55.

პასუხი: $v = (P_1v_1Cos\alpha + P_2v_2Cos\beta) / (P+P_1+P_2)$

§ 8. მოძრაობის [illegible]ოენობის მომენტის თ[illegible]ა

ნივთიერი წერტილის ან წერტილთა სისტემის (სხეულის) ბრუნვითი მოძრაობის დასახასიათებლად შემოაქვთ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცნება.

m მასის ნივთიერი M *წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი* 0 ცენტრის მიმართ ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს: $\vec{\ell}_0 = \vec{r} \times m\vec{v}$. (8.1)

აქ $\vec{r}$ - მოძრავი წერტილის რადიუს – ვექტორია 0 ცენტრის მიმართ; $\vec{v}$ - მისი სიჩქარე.

$\vec{\ell}_0$–ის გეგმილებს დეკარტის კოორდინატთა 0xyz სისტემის ღერძებზე ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z –ს ეწოდება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტები შესაბამისად x, y, z ღერძების მიმართ. თუ M წერტილის კოორდინატებია M(x, y, z) , ხოლო $\vec{v}$ სიჩქარის გეგმილებია $\vec{v}\,(\dot{x}\ \dot{y}, \dot{z})$, მაშინ

$$\ell_x = m(y\dot{z} - z\dot{y});\quad \ell_y = m(z\dot{x} - x\dot{z});\quad \ell_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (8.2)$$

ნივთიერ წერტილთა $\{M_k\}$ *სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი (კინეტიკური მომენტი)* 0 ცენტრის მიმართ :

$$\vec{\ell}_0 = \sum(\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k); \qquad (8.3)$$

აქ $\vec{r}_k$ - სისტემის M_k წერტილის რადიუს – ვექტორია 0 ცენტრის მიმართ, $\vec{v}_k$- მისი სიჩქარე .

მყარი სხეულის უძრავი 0z ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას მისი კინეტიკური მომენტი ამ ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით: $\ell_z = J_z\,\omega$, (8.4)

სადაც J_z - სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის 0z ღერძის მიმართ.

კინეტიკური მომენტის თეორემა:

წერტილისათვის: $d\vec{\ell}_0/dt = \vec{L}_0$; (8,5)

სისტემისათვის: $d\vec{\ell}_0/dt = \vec{L}_0^{გ}$; (8.6)

აქ $\vec{L}_0^{გ}$ არის სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი 0 ცენტრის მიმართ: $\vec{L}_0^{გ} = \sum მომ_0\, \vec{F}_k^{გ} = \sum(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{გ})$. (8.7)

საკოორდინატო ღერძებზე (8.5) ტოლობის დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$d\ell_x/dt = L_x^{გ};\quad d\ell_y/dt = L_y^{გ};\quad d\ell_z/dt = L_z^{გ}. \qquad (8.8)$$

$L_x^{გ}$, $L_y^{გ}$, $L_z^{გ}$ - გარე ძალების ნაკრები მომენტებია შესაბამისად x,y,z ღერძების მიმართ.

თუ რაიმე 0 ცენტრის (ან [illegible]) მიმართ $\vec{L}_0^{გ} = 0$ ($L_z^{გ} = 0$) ,

მაშინ იმავე ცენტრის (ან ღერძ [illegible] თ $\vec{\ell}_0$ = const (ℓ_z = const) და ადგილი აქვს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის (კინეტიკური მომენტის) შენახვის კანონს; ეს ნიშნავს, რომ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, როგორც სიდიდით, ასევე მიმართულებით რჩება მუდმივი:

$$\ell_0^{0} = \ell_0^{t} \quad (\ell_z^{0} = \ell_z^{t}). \qquad (8.9)$$

უძრავი 0z ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

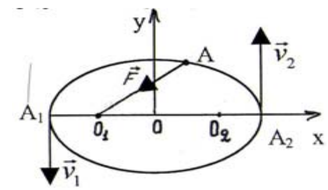
$$J_z\, d^2\varphi/dt^2 = L_z^{გ}, \quad ანუ \quad J_z\,\varepsilon = L_z^{გ}. \qquad (8.10)$$

ε - სხეულის ბრუნვის კუთხური აჩქარებაა.

ამოცანა 8.1. ნივთიერი A წერტილი მოძრაობს ელიფსურ ტრაექტორიაზე მიზიდულობის $\vec{F}$ ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია ელიფსის ერთ-ერთ ფოკუსზე თანამთხვეულ 0_1 ცენტრისაკენ. ელიფსის ნახევარღერძებია a =5 სმ და b = 3 სმ. განსაზღვრეთ ამ წერტილის v_2 სიჩქარე A_2 მდებარეობაში, თუ A_1 მდებარეობაში მისი სიჩქარეა v_1 – 27 სმ/წმ.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობისას მიზიდულობის $\vec{F}$ ძალის ფუძე ყოველთვის გადის ერთ და იმავე 0_1 წერტილში, ამიტომ L_0 = მომ$_0\vec{F}$ = 0. ეს ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონს: $\ell_0^{A1} = \ell_0^{A2}$,

ანუ $mv_1.A_10_1 = mv_2 \cdot A_20_1$. (*)

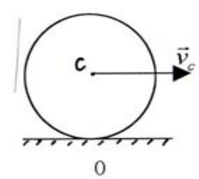


ნახ. 56.

მოცემულობის თანახმად $A_10 = a = 5$, $B0 = b = 3$. ელიფსის თვისების თანახმად $00_1 = c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. ამიტომ $A_10_1 = a - c = 1$; $A_20_1 = a + c = 9$.

თუ გავითვალისწინებთ მიღებულ მნიშვნელობებს, (*) ტოლობიდან მივიღებთ: $v_2 = v_1 \cdot A_10_1 / A_20_1 = 9$. პასუხი: $v_2 = 9$ სმ/წმ.

ამოცანა 8.2. M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი დისკო უსრიალოდ მიგორავს წრფივ ჰორიზონტალურ რელსზე. განსაზღვრეთ დისკოს კინეტიკური მომენტი მისი ბრუნვის მყისი ცენტრის მიმართ, თუ დისკოს C ცენტრის $\vec{V}_c$ სიჩქარე მუდმივია.



ნახ. 57.

ამოხსნა. დისკოს ბრუნვის მყისი ცენტრია რელსთან შეხების 0 წერტილი. გავავლოთ 0 წერტილზე ნახაზის სიბრტყის მართობული 0z ღერძი, რომელიც იქნება ბრუნვის მყისი ღერძი. ამ ღერძის მიმართ დისკოს კინეტიკური მომენტი იქნება (იხ. (8.4) ფორმულა): $\ell_o = J_o\,\omega_o$. (*)

სადაც J_o არის დისკოს ინერციის მომენტი 0z ღერძის მიმართ, ხოლო ω_0 – ამ ღერძის გარშემო დისკოს ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე. თუ ჩავთვლით, რომ დისკოს C ცენტრზე გავლებულია 0z-ის პარალელური Cz_1 ღერძი, მაშინ ჰიუგენს-შტაინერის თეორემის თანახმად:

$$J_0 = J_c + MR^2 = 1/2\cdot MR^2 + MR^2 = 3/2\cdot MR^2.$$

ამოცანის პირობის თანახმად $\vec{V}_c$ = const; ამასთანავე $v_c = \omega_0 R$. აქედან

$\omega_0 = v_c/R$. შევიტანოთ J_0-ის და ω_0 -ის მნიშვნელობები (ა) ტოლობაში; გვექნება: $\ell_o = J_o\,\omega_o = 3/2\cdot MR^2 \cdot v_c/R = 3/2\cdot MR\,v_c$.

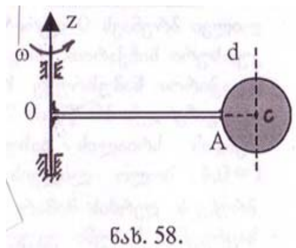
პასუხი: $\ell_o = 3/2\cdot MR\,v_c$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 8.3. a სიგრძის და P წონის ერთგვაროვანი წვრილი ჰორიზონტალური $0A$ ღეროს ბოლოში მიმაგრებულია $AC = r$ რადიუსის და Q წონის ერთგვაროვანი დისკო, რომლის სიბრტყე ვერტიკალურია, ხოლო AC რადიუსი წარმოადგენს $0A$-ს გაგრძელებას. სხეული ბრუნავს ვერტიკალური $0z$ ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ სხეულის კინეტიკური მომენტი ამ ღერძის მიმართ. საკისარში ხახუნი უგულებელყავით.

ᲐᲛᲝᲮᲡᲜᲐ. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: $0A$ ღეროსა და C დისკოსაგან.

ამ სისტემის კინეტიკური მომენტი $0z$ ღერძის მიმართ მოიცემა ტოლობით:

$$\ell_z = \ell_z^{0A} + \ell_z^{c} \quad . \qquad (ა)$$



ნახ. 58.

$0A$ ღეროს კინეტიკური მომენტი:

$$\ell_z^{0A} = J_z^{0A}\,\omega = Pa^2\omega/\,3g \;. \qquad (ბ)$$

C დისკოს კინეტიკური მომენტი $0z$ ღერძის მიმართ: $\ell_z^c = J_z^c\omega$. (გ)

აქ $J_z^c = J_d + m_c{\cdot}0C^2$; d – დისკოს დიამეტრია; $0C = a + r$; $m_c = Q/g$; $J_d = Qr^2/4g$;

ამიტომ: $J_z^c = Q\,r^2/4g + Q\,(a+r)^2/\,g$.

ამ მნიშვნელობის შეტანით (გ) ტოლობაში, გვექნება:

$$\ell_z^{c} = Q\,/4g \cdot [\, r^2 + 4(a+r)^2 \,]\,\omega \;. \qquad (დ)$$

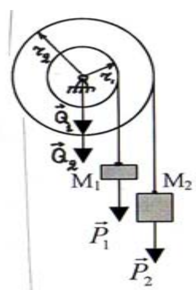
(ბ) და (დ) მნიშვნელობები შევიტანოთ (ა) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$\ell_z = Pa^2\omega/\,3g + Q\,/4g \cdot [\, r^2 + 4(a+r)^2 \,]\,\omega \;.$$

საბოლოოდ $\underline{\ell_z = \omega/\,12\,g \cdot [\,4Pa^2 + 3Qr^2 + 12\,Q\,(a+r)^2]}$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 8.4. საერთო 0 ღერძზე ჩამოცმულია ორი ერთმანეთთან ხისტად შეერთებული r_1 და r_2 ($r_1 < r_2$) რადიუსის ბლოკები, რომლებიც წარმოადგენენ ერთგვაროვან, შესაბამისად Q_1 და Q_2 წონის დისკოებს. ბლოკებზე დახვეული თოკების ბოლოებში დაკიდებული P_1 და P_2 წონის M_1 და M_2 ტვირთ[ებით] ბლოკები იწყებენ ბრუნვას.

განსაზღვრეთ ბლოკების ბრუხვის კუთხური აჩქარება. საკისარში ხახუნი უგულებელყავით.



ნახ. 59.

ᲐᲛᲝᲮᲡᲜᲐ. ბლოკების ბრუნვის კუთხური ε აჩქარების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ უძრავი 0 ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის (8.10) განტოლება: $J_0\,\varepsilon = L_0^{გ}$. (ა)

სისტემა შედგება ოთხი სხეულისაგან: ორი ბლოკისა და ორი ტვირთისაგან. ბრუნვის $0z$ ღერძი გავავლოთ 0 ცენტრში ნახაზის სიბრტყის მართობულად. მაშინ სისტემის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ

იქნება:

$$J_0 = Q_1r_1^{\,2}/2g + Q_2r_2^{\,2}/2g + P_1r_1^{\,2}/g + P_2r_2^{\,2}/g = \qquad .$$
$$= [\,(Q_1 + 2P_1)\,r_1^{\,2} + (Q_2 + 2P_2)\,r_2^{\,2}]\,/\,2g. \qquad (ბ)$$

სისტემაზე მოქმედებს ოთხი ძალა: Q_1, Q_2, P_1, P_2: აქედან, ორი ძალა- Q_1 და Q_2 მოდებულნი არიან ბრუნვის 0 ცენტრში; ამიტომ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი 0 ცენტრის მიმართ იქნება:

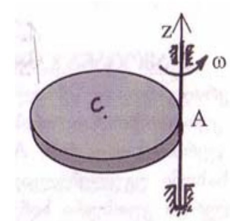
$$L_0^{გ} = P_1\,r_1 + P_2\,r_2 \,. \qquad (გ)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (ბ) და (გ) გამოსახულებებს, მაშინ (ა) ტოლობიდან განისაზღვრება ბლოკების ბრუნვის კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon\, \underline{= L_0^{გ}\,/\,J_0 = \; 2g(P_1\,r_1 + P_2\,r_2)\,/\,[\,(Q_1 + 2P_1)\,r_1^{\,2} + (Q_2 + 2P_2)\,r_2^{\,2}]} \;.$$

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 8.5. R რადიუსის და P წონის ერთგვაროვანი დისკო ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ვერტიკალური z ღერძის გარშემო, რომელიც გადის დისკოს ფერსოზე მდებარე A წერტილზე და დისკოს სიბრტყის მართობულია.

გამოთვალეთ დისკოს კინეტიკური მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ.

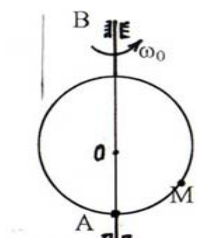


ნახ. 60.

პასუხი: $\underline{\lambda = 3P/2g \cdot R^2\omega}$.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 8.6. P წონის ერთგვაროვანი დისკო ბრუნავს ვერტიკალური AB დიამეტრის გარშემო მუდმივი ω_0 კუთხური სიჩქარით. A მდებარეობიდან დისკოს ფერსოს გასწვრივ დაიწყო მოძრაობა Q წონის M წერტილმა.

განსაზღვრეთ დისკოს ბრუნვის კუთხური ω სიჩქარე იმ მომენტში, როცა M წერტილი ბრუნვის AB ღერძიდან დაშორებული იქნება უდიდესი მანძილით. საკისრებში ხახუნი უგულებელყავით.



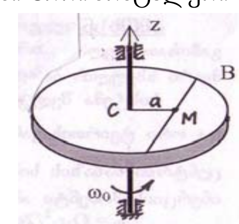
ნახ. 61.

პასუხი: $\underline{\omega = P\omega_0/\;(P + 4Q)}$.

.

ᲐᲛᲝᲪᲐᲜᲐ 8.7. P წონის და r [რადიუსის] ერთგვაროვანი ჰორიზონტალური დისკო ბრუნავს მის გამავალი ვერტიკალური Cz ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური ω_0 სიჩქარით. დისკოს ფერსოზე მდებარე A წერტილიდან ქორდის გასწვრივ A -დან B-კენ უსაწყისო ფარდობითი სიჩქარით მოძრაობს Q წონის M წერტილი.

განსაზღვრეთ დისკოს კუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა წერტილი იმყოფება დისკოს ცენტრიდან უმოკლეს a მანძილზე, თუ ამ მომენტში აქვს ფარდობითი u სიჩქარე. საკისრებში ხახუნი

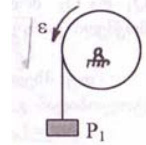


ნახ. 62

უგულებელყავით.

პასუხი: $\omega = [(P + 2Q)\, r^2\omega_0 - 2Qau] / (Pr^2 + 2Qa^2)$.

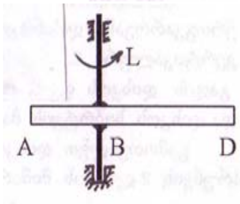
ამოცანა 8.8. P_2 წონის და r რადიუსის ცილინდრულ დოლზე დახვეული თოკის ბოლოზე დაკიდებულია P_1 წონის ტვირთი. ხახუნი და თოკის მასა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ დოლის ბრუნვის კუთხური აჩქარება ε.



ნახ. 63.

პასუხი: $\varepsilon = 2P_1 g / r\,(2P_1 + P_2)$.

ამოცანა 8.9. m = 1 კგ მასის და a = 2 მ სიგრძის ერთგვაროვანი წვრილი წრფივი AD ღერო მართი კუთხით ხისტად არის მიმაგრებული ვერტიკალურ ღერძთან, ისე, რომ AB = a/3. საკისრებშიხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე, თუ ღეროზე მოქმედებს მაბრუნებელი მომენტი L= 4 ნ მ.

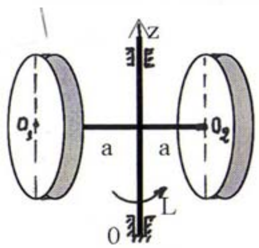


ნახ. 64.

პასუხი: $\varepsilon = 9$ წმ$^{-2}$.

ამოცანა 8.10. ორი ერთგვაროვანი, თითოეული P წონის და R რადიუსის დისკო, რომლებიც მოთავსებულია 2a სიგრძის უწონად $0_1 0_2$ ღეროს პერპენდიკულარულად ვერტიკალურ სიბრტყეში, ბრუნავენ ვერტიკალური 0z ღერძის გარშემო მაბრუნებელი L მომენტის მოქმედებით.

საკისრებში ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ დისკოების ბრუნვის კუთხური აჩქარება. პასუხი: $\varepsilon = 2gL / P(R2 + 4a2)$.

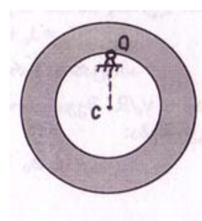


ნახ. 66.

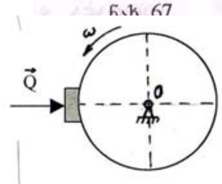
ამოცანა 8.11. ერთ[illegible] რგოლი შემოსაზღვრულია ორი კ[illegible]ლი r და R (r < R) რადიუსებიანი წრეწირებით. იგი ირხევა ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო, რომელიც გადის r რადიუსიანი წრეწირის 0 წერტილში რგოლის სიბრტყის მართობულად (ე.ი. რგოლი წარმოადგენს ფიზიკურ ქანქარას).

წინაღობის ძალები უგულებელყავით და განსაზღვრეთ რგოლის მცირე რხევის პერიოდი.

პასუხი: $T = 2\pi\sqrt{(R^2 + 3r^2)/2gr}$.



ნახ 67



ნახ. 68

ამოცანა 8.12. m= 10 კგ მასის და R= 0,1 მ რადიუსის ცილინდრული ლილვი ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო n = 600 ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით. როგორი Q ძალით უნდა მივაჭიროთ სამუხრუჭე ხუნდი ლილვს, რომ იგი გაჩერდეს 10 წმ-ის შემდეგ, თუ ლილვზე ხუნდის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f = 0,4 , ხოლო ლილვის ინერციის რადიუსი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის ρ= 0,3 მ. ლილვის საყრდენში ხახუნი უგულებელყავით. განსაზღვრეთ აგრეთვე ლილვის სრული ბრუნვათა N რიცხვი დამუხრუჭების დაწყების მომენტიდან გაჩერებამდე.

პასუხი: Q = 45π ნ ; N = 50.

§ 9. კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა

კინეტიკური ენერგია არის სკალარული დადებითი სიდიდე და წარმოადგენს სხეულის როგორც გადატანითი, ასევე ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკურ მახასიათებელს; იგი ახასიათებს მექანიკური მოძრაობის შესაძლებლობას გარდაიქმნას სხვა სახის მოძრაობის ექვივალენტური რაოდენობის ენერგიაში (პოტენციურ ენერგიაში, სითბოში და სხვ.).

v სიჩქარით მოძრავი m მასის *ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერგია*: $T = mv^2/2$; (9.1)

ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$$T = \sum m_k v_k^2/2; \qquad (9.2)$$

თუ სისტემა ასრულებს რთულ მოძრაობას, მაშინ კინეტიკური ენერგია განისაზღვრება კენიგის ფორმულით:

$$T = Mv_c^2/2 + T_ფ; \qquad (9.3)$$

აქ M – სისტემის მასაა, v_c – სისტემის მასების ცენტრის სიჩქარე; $T_ფ$ – წერტილთა სისტემის ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერგიაა იმ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც ასრულებს წარმტან-გადატანით მოძრაობას მის მასების ცენტრთან ერთად.

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობისას: $T = Mv_c^2/2$; (9.4)

უძრავი 0z ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას: $T = J_z\,\omega^2/2$; (9.5)

აქ J_z - სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის 0z ღერძის მიმართ; ω - ბრუნვის კუთხური სიჩქარე .

სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას: $T = Mv_c^2/2 + J_c\,\omega^2/2$; (9.6)

აქ J_c არის სხეულის ინერციის მომენტი მასების C ცენტრზე გამავალი ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ.

წერტილზე მოდებული ძალის ელემენტარული მუშაობა:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = Xdx + Y\,dy + Zdz; \qquad (9.10)$$

ძალის სრული მუშაობა წერტილის სასრულ s გადაადგილებაზე:

$$A = \int_s \vec F\cdot d\vec r = \int_s (Xdx + Y\,dy + Zdz)\,; \qquad (9.11)$$

სხეულის სიმძიმის ძალის მუშაობა: $A = \pm P\cdot h_c$, (9.12)
P – სხეულის სიმძიმის ძალაა, h_c – სხეულის მასების ცენტრის ვერტიკალური გადაადგილება.

0z ღერძის გარშემო *მბრუნავ სხეულზე მოდებული ძალების მუშაობა*:

$$A = L_z\,\varphi\,; \qquad (9.13)$$

L_z – მაბრუნებელი მომენტია, φ - სხეულის შემობრუნების კუთხე.

დრეკადი F = - c x *ძალის მუშაობა* წრფივი გადაადგილებისას:

$$A = c\,(x_1^2 - x_2^2)/2. \qquad (9.14)$$

გორვისადმი წინაღობის ძალის მუშაობა: A = - δ N φ; (9.15)
δ - გორვის ხახუნის კოეფიციენტია, N - ნორმალური რეაქციის ძალა, φ - სხეულის შემობრუნების კუთხე.

კინეტიკური ენერგიის ნაზრდის თეორემა:

წერტილისათვის: $mv^2/2 - mv_0^2/2 = A = \int_s \vec F\cdot d\vec r$. (9.16)

აქ v_0 და v - შესაბამისად წერტილის საწყისი და საბოლოო სიჩქარეა s გზაზე.
A - F ძალის მიერ s გზაზე შესრულებული მუშაობა.

სისტემისათვის: $T - T_0 = A^{შ} + A^{გ}$. (9.17)
უცვლადი სისტემისათვის $A^{შ} = 0$.

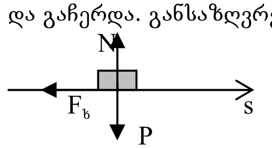
სხეულის თანაბარი მოძრაობისას მამოძრავებელი ძალის მუშაობა ტოლია წინაღობის ძალების მუშაობისა.

წერტილზე მოდებული ძალის სიმძლავრე:

$$N = dA/dt = \vec F\cdot\vec v = X\,\dot x + Y\,\dot y + Z\,\dot z\,. \qquad (9.18)$$

მბრუნავ სხეულზე მოდებული ძალისათვის: $N = L_z\,\omega$. (9.19)

ამოცანა 9.1. არაგლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე სხეულმა მიიღო საწყისი v_0 სიჩქარე, გაიარა s=1 მ მანძილი და გაჩერდა. განსაზღვრეთ სხეულის საწყისი სიჩქარე, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი f = 0,1 .



ნახ. 69.

ამოხსნა. გამოვიყენოთ წერტილის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდის ფორმულა:

$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A$. (*)

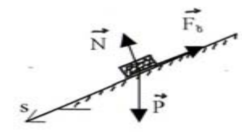
აქ v – წერტილის საბოლოო სიჩქარეა: v = 0. A – წერტილზე მოდებული ძალების მუშაობა s გზაზე. წერტილზე მოქმედებს სამი ძალა: სხეულის სიმძიმის ძალა- P, სრიალის ხახუნის ძალა- $F_ხ$, ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალა - N . ამ ძალების s გზაზე დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ, რომ $A = - F_ხ\, s$. ხახუნის ძალა $F_ხ = f\,N = fP$.

მაშასადამე A = - f P s = - fmgs . თუ გავითვალისწინებთ მღებულ მნიშვნელობებს, (*) ტოლობიდან გვექნება: $v_0 = \sqrt{2fgs} = 1,4$ მ/წმ .

ამოცანა 9.2. ჰორიზონტისადმი $\alpha = 30^0$ კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე სხეული. ხახუნის კოეფიციენტი უდრის 0,2 –ს. როგორი სიჩქარე ექნება სხეულს მოძრაობის დაწყებიდან 2 მ-ის გავლის შემდეგ.

ამოხსნა. პირობის თანახმად: $v_0 = 0$; f = 0,2; s = 2; v =? გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერგიის ნაზრდის თეორემა: $mv^2/2 - mv_0^2/2 = A$. (*)

ამოვთვალოთ სხეულზე მოქმედი ძალების მუშაობა დახრილ სიბრტყეზე s მანძილზე გადაადგილებისას. სხეულზე მოქმედებს სამი ძალა: სხეულის სიმძიმის ძალა- P, სრიალის ხახუნის ძალა- $F_ხ$, ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალა - N . ამ ძალების s გზაზე



ნახ. 70.

დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ, რომ $A = (P\,Sin\alpha - F_ხ)\,s$. ხახუნის ძალა $F_ხ = f\,N = fPCos\alpha$. მაშასადამე $A = (PSin\alpha - fPCos\alpha)s$. თუ გავითვალისწინებთ მღებულ მნიშვნელობებს, (*) ტოლობიდან გვექნება (P = mg):

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = mg\,(Sin\alpha - f\,Cos\alpha)\,s\,.$$

აქედან $v = \sqrt{2\,g\,(Sin\alpha - f\,Cos\alpha)\,s} = 3,58$. $v = 3,58$ მ/წმ.

ამოცანა 9.3 ბურთულა, რომელსაც აქვს საწყისი v_0=14 მ/წმ სიჩქარე, ვარდება h_1 =1,8 მ სიმაღლიდან ვერტიკალურად ქვევით ჰორიზონტალურ იატაკზე და აირეკლება მისგან ზევით .

განსაზღვრეთ ბურთულას სიჩქარე იატაკიდან h_2= 6,8 მ სიმაღლეზე, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ ჰაერის წინაღობას და მექანიკური ენერგიის სხვა დანაკარგებს.

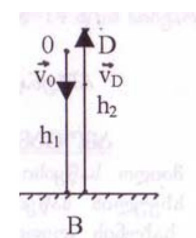
ამოხსნა. ბურთულაზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა P = mg .

ბურთულის ვარდნისას ვერტიკალის 0B მონაკვეთზე:

$$mv_B^2/2 - mv_0^2/2 = mgh_1\,;$$

აქედან: $v_B = \sqrt{v_0^2 + 2\,gh_1} = 15,2$ მ/წმ;

იატაკიდან არეკვლისას ვერტიკალის $BD = h_2$ მონაკვეთზე მოძრაობისას v_B წარმოადგენს საწყის სიჩქარეს, ხოლო საბოლოო სიჩქარეა v_D.



ნახ.71.

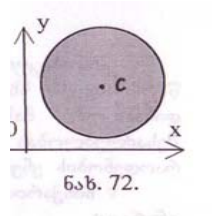
გზის $BD = h_2$ მონაკვეთზე მოძრაობისას:

$mv_D^2/2 - mv_B^2/2 = - mgh_2$;

აქედან: $v_D = \sqrt{v_B^2 - 2gh_2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$. პასუხი: $v_D = 7\sqrt{2}$ მ/წმ.

ამოცანა 9.4. R= 0,2 მ რადიუსის და M = 20კგ მასის ერთგვაროვანი დისკო ჰორიზონტალურ 0xy სიბრტყეში ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას კანონით: $x_c = t$, $y_c = t^2$, $\varphi = t^3$ (x_c, y_c - დისკოს C ცენტრის კოორდინატებია მეტრებში, t - წამებში, φ - რადიანებში). განსაზღვრეთ დისკოს კინეტიკური ენერგია დროის t = 1 წმ მომენტში.

ამოხსნა. დისკო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას;



ნახ. 72.

მისი კინეტიკური ენერგია ასე გამოისახება (იხ. (9.6) ფორმულა): $T = Mv_c^2/2 + J_c\omega^2/2$; (*)

v_c - დისკოს მასების ცენტრის სიჩქარეა: $v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2}$;

$v_{cx} = dx_c/dt = 1$; $v_{cy} = dy_c/dt = 2t$; $v_c = \sqrt{1 + 4t^2}$;

t = 1 წმ მომენტში $v_c = \sqrt{5}$

დისკოს ინერციის მომენტი მისი მასების C ცენტრის მიმართ

$J_c = 1/2\cdot MR^2 = 0,4$ კგმ² .

ω არის C ცენტრის გარშემო დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე: $\omega = d\varphi/dt = 3t^2$; t = 1 წმ მომენტში $\omega = 3$ წმ$^{-1}$.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (*) ტოლობაში, გვექნება:

$T = 1/2\cdot 20\cdot 5 + 1/2\cdot 0,4\cdot 3^2 = 51,8$. T = 51,8 ჯოული.

ამოცანა 9.5. Q წონის ლილვზე დახვეული თოკის ბოლოში მიბმულია P წონის ტვირთი, რომელიც ეშვება ქვევით და თან აბრუნებს ლილვს ω კუთხური სიჩქარით. ლილვის რადიუსია r. განსაზღვრეთ ტვირთისა და ლილვისაგან შედგენილი სისტემის კინეტიკური ენერგია.

ამოხსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან; მისი კინეტიკური ენერგია $T = T_1 + T_2$; (*)

აქ T_1 - ტვირთის კინეტიკური ენერგ

T_2 – ლილვის კინეტიკური ენერგ

ტვირთი ასრულებს გადატანით

სიჩქარით: $v_p = v_k = \omega r$.

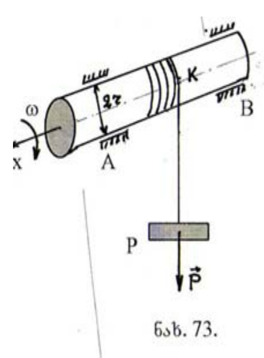
(k არის ლილვის ფერსოზე მდებარე წერტილი, რომელიც მოძრაობს r რადიუსიან წრეწირზე);

$T_1 = T_{ტვ} = 1/2\cdot m_1 v_p^2 = P/2g\cdot(\omega r)^2 = P\omega^2 r^2/2g$.

ლილვი წარმოადგენს უძრავი x ღერძის გარშემო მბრუნავ წრიულ ცილინდრულ სხეულს; ამიტომ: $T_2 = T_{ლილვ} = 1/2\cdot J_x\omega^2$. (**)

აქ J_x არის ლილვის ინერციის მომენტი ბრუნვის x ღერძის მიმართ:

$J_x = 1/2\cdot m_2 r^2 = Qr^2/2g$.



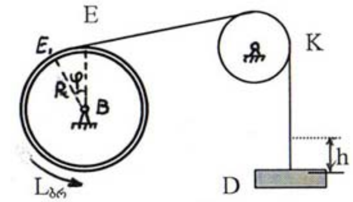
ნახ. 73.

(**) – დან გვექნება: $T_2 = 1/2\cdot Qr^2\omega^2/2g = Q/4g\cdot r^2\omega^2$.

(*) – დან მივიღებთ: $T = T_1 + T_2 = P\omega^2 r^2/2g + Q r^2\omega^2/4g = \omega^2 r^2/4g\cdot(2P + Q)$.

პასუხი: $T = \omega^2 r^2/4g\cdot(2P + Q)$.

ამოცანა 9.6. 74-ე ნახაზზე გამოსახულია ჯალამბრის ამწე მექანიზმი. m_1 მასის D ტვირთი აიწევა ზევით C ბლოკზე გადაკიდებული R რადიუსის და m_2 მასის B დოლზე დახვეული გვარლის საშუალებით. დოლზე მოდებულია მაბრუნი $L_{ბრ}$ მომენტი, რომელიც ჩართვის მომენტიდან დოლის მობრუნების φ კუთხის კვადრატის პროპორციულია: $L_{ბრ} = a\varphi^2$, სადაც a მუდმივი კოეფიციენტია. განსაზღვრეთ D ტვირთის სიჩქარე (v_D) იმ მომენტში, როცა იგი ავა h სიმაღლეზე. B დოლის მასა ჩათვალეთ თანაბრად განაწილებულად მის ფერსოზე. C ბლოკი m_3 მასის მთლიანი დისკოა. ჩათვალეთ, რომ გვარლი უჭიმადი და უწონადია. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.



ნახ.74.

ამოხსნა. D ტვირთის სიჩქარის განსასაზღვრად გამოვიყენოთ ნივთიერი სისტემის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდის თეორემა (იხ. (9.17) ფორმულა):

$T - T_0 = A^{შ} + A^{გ}$. (1)

რადგანაც საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია, ამიტომ $T_0 = 0$.

სისტემაში შემავალი სხეულები აბსოლუტურად მყარი სხეულებია; გვარლი უჭიმადი და უწონადია; ამიტომ შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი $A^{შ} = 0$. (1) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს : $T = A^{გ}$. (2)

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია (T) იმ მომენტში, როცა D ტვირთი ავა h სიმაღლეზე.

სისტემა შედგება B დოლის, C ბლოკისა და D ტვირთისაგან; ამიტომ

სისტემის კინეტიკური ენერგია $+ T_C + T_B$. (3)

D ტვირთი მოძრაობს გად, მისი კინეტიკური ენერგია

$T_D = 1/2\cdot m_D v_D^2 = 1/2\cdot m_1 v_D^2$. (4)

C ბლოკი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო, მისი კინეტიკური ენერგია

$T_C = 1/2\cdot J_C\,\omega_C^2$; (5)

აქ J_C არის დისკოს (ბლოკის) ინერციის მომენტი C წერტილის მიმართ:

$J_C = 1/2\cdot m_3 r^2$, (r – ბლოკის რადიუსია). ω_C არის C დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. როგორც ნახაზიდან ჩანს, D ტვირთისა და C ბლოკის ფერსოზე მდებარე K წერტილს აქვთ ერთი და იგივე სიჩქარე: $v_D = v_K$

$=\omega_C r$. იგივე ხაზოვანი სიჩქარე აქვს B დოლის ფერსოზე მდებარე E წერტილსაც:

$v_E = v_D = v_K$. $\omega_C = v_K/ r = v_D/ r$.

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (5) ფორმულაში, მივიღებთ

$$T_C = 1/2 \cdot 1/2 \cdot m_3 r^2 \cdot v_D^2/r^2 = 1/4 \cdot m_3 v_D^2 . \quad (6)$$

B დოლი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო; მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_B = 1/2 \cdot J_B \omega_B^2 . \quad (7)$$

J_B – დოლის ინერციის მომენტია მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ.

ვინაიდან დოლის მასა თანაბრად განაწილებულია მის ფერსოზე, ამიტომ დოლის ინერციის მომენტი გამოითვლება წვრილი წრიული რგოლის ინერციის მომენტის საანგარიშო ფორმულით: $J_B = m_3 R^2$.

ω_B – დოლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა: $\omega_B = v_E/R = v_D/R$ ($v_E = v_K = v_D$)..

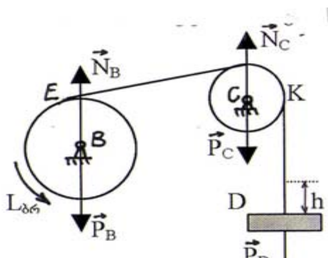
(7) – დან მივიღებთ: $T_B = 1/2 \cdot m_2 R^2 \cdot (v_D/R)^2 = m_2 v_D^2/ 2$. (8)

შევიტანოთ (4), (6) და (8) მნიშვნელობები სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელ (3) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$T=1/2 \cdot m_1 v_D^2+1/4 \cdot m_3 v_D^2+1/2 \cdot m_2 v_D^2;$$

ანუ $\underline{T = 1/4 \cdot (2m_1 + 2m_2 + m_3)\, v_D^2}$. (9)

ახლა გამოვთვალოთ სისტემაზე მოდებული ყველა გარე ძალის მუშაობათა ჯამი ($A^{\text{გ}}$) მოცემულ გადაადგილებაზე (როცა D ტვირთი ავა h სიმაღლეზე). ცხადია $A^{\text{გ}} = A_D + A_C + A_B$. (10)



ნახ. 75.

ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა... (ნახ.75). D ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა $A_D = - P_D h = - m_1 gh$.

C ბლოკის სიმძიმის ძალა და რეაქციის ძალა მოდებულნი არიან უძრავ C საკისარში; ამიტომ $A_C=0$. B დოლზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა,
საკისარის რეაქცია და მაბრუნებელი მომენტი $L_{\text{ბრ}}$. სიმძიმისა და რეაქციის ძალები მოდებულნი არიან უძრავ საკისარში და მათი მუშაობა ნულის ტოლია; მაბრუნებელი მომენტის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება:

$$A_B = A_{\text{ბრ}} = \int_0^{\varphi} L_{\text{ბრ}}\, d\varphi = \int_0^{\varphi} a\varphi^2 d\varphi = a/3 \cdot \varphi^3 ; \quad (11)$$

აქ φ არის დოლის შემობრუნების კუთხე. როცა D ტვირთი აიწევს ზევით h მანძილზე, B დოლი შემობრუნდება φ კუთხით, რომელსაც შეესაბამება h სიგრძის EE_1 რკალი ; ამიტომ $EE_1 = h = R\varphi$, საიდანაც $\varphi = h/ R$
შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (11) –ში, მივიღებთ: $A_B = ah^3/ 3R^3$.

A_D, A_C და A_B–ს მიღებული მნიშვნელობების გათვალისწინებით სისტემაზე მოქმედი ძალების სრული მუშაობა (10) ასე გამოისახება:

$A^{\text{გ}} = - m_1 gh + ah_3/3R_3$. (12)

(2) ტოლობის თანახმად, (9) და (12) მნიშვნელობათა გატოლებით მივიღებთ: $1/4 \cdot (2m_1 + 2m_2 + m_3)\, v_D^2 =- m_1 gh + ah_3/3R_3$;
საიდანაც

$$\underline{v_D = \sqrt{4h(ah^2 - 3m_1R^3 g) / 3R^3 (2m_1 + 2m_2 + m_3)}\ .}$$

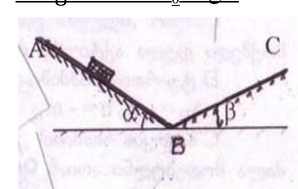
ამოცანა 9.7. ნივთიერი წერტილი $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (ნ) ძალის მოქმედებით გადაადგილდება B_0(2;2;2მ) მდებარეობიდან B(3;3;3მ) მდებარეობაში. რა სიდიდით შეიცვლება წერტილის კინეტიკური ენერგია ასეთი გადაადგილებისას? პასუხი: ΔT = 3ჯ.

ამოცანა 9.8 . ჰორიზონტალური წრფივი გზის უბანზე მოძრავი მატარებლის დამუხრუჭებისას წარმოქმნილი წინაღობის ძალა მატარებლის წონის 0,1 ნაწილის ტოლია. დამუხრუჭების დაწყების მომენტში მატარებლის სიჩქარე იყო 72 კმ/სთ. იპოვეთ სამუხრუჭო გზა. პასუხი: s = 204 მ.

ამოცანა 9.9. როგორი უნდა იყოს დამუხრუჭებული ავტომობილის თვლების გზაზე ხახუნის კოეფიციენტი f, თუ v კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას დამუხრუჭების მომენტიდან იგი გაჩერდა s მეტრის გავლის შემდეგ.

პასუხი: $f = v_0^2/2gs$.

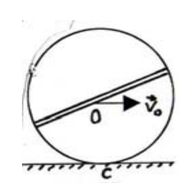
ამოცანა 9.10. ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ AB სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე სხეული; A სხეულმა B წერტილამდე გაიარა s_1 მანძილი და იწყო ასვლა ჰორიზონტისადმი β კუთხით დახრილ BC სიბრტყეზე.



ნახ. 76.

ჩათვალეთ, რომ B წერტილში მცირე მომრგვალების გამო არ ხდება სიჩქარის დაკარგვა და განსაზღვრეთ s_2 მანძილი, რომელსაც სხეული .BC სიბრტყეზე გაივლის გაჩერებამდე. ხოლო ხახუნის კუთხეები AB და BC სიბრტყეებზე შესაბამისად არის φ_1 და φ_2; ამასთანავე $\varphi_1<\alpha$. პასუხი: $\underline{s_2 = s_1 \cos\varphi_2 \cdot \sin(\alpha-\varphi_1) / \cos\varphi_1 \sin(\beta+\varphi_2)}$
.

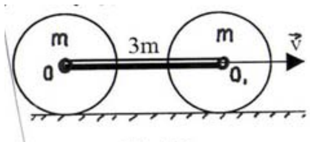
ამოცანა 9.11. R რადიუსის და P წონის ერთგვაროვანი დისკოს დიამეტრის გასწვრივ დამაგრებულია 2R სიგრძის და Q წონის წვრილი ერთგვაროვანი ღერო. დისკო ღეროსთან ერთად უსრიალოდ მიგორავს ჰორიზონტალურ წრფივ გზაზე. განსაზღვრეთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, თუ დისკოს ცენტრის სიჩქარეა v_0.



ნახ. 77.

პასუხი: $T= (9P + 8Q) v_0^2 / 12g$.

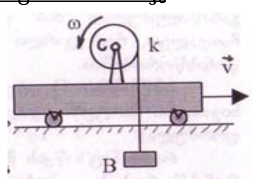
ამოცანა 9.12. მექანიკური სისტემა შედგება ორი ერთნაირი, თითოეული m მასის თვლისაგან და 3m მასის წრფივი ერთგვაროვანი 00_1 ღეროსაგან, რომელიც აერთებს ამ თვლებს. თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან მთლიან დისკოებად, მათი სრიალი ჰორიზონტალურ გზაზე უგულებელყავით და განსაზღვრეთ მთელი სისტემის კინეტიკური ენერგია, თუ თვალის ცენტრის სიჩქარეა v . პასუხიT= $3mv^2$.



ნახ. 78.

ამოცანა 9.13 . m=1 კგ მასის და ℓ = 1 მ სიგრძის წვრილი ერთგვაროვანი წრფივი ღერო 0xy სიბრტყეში მოძრაობს კანონით: $x_c = t^2$; $y_c = 2t$; $\varphi = 4t^3$ (x_c, y_c - ღეროს მასების ცენტრის კოორდინატებია მეტრებში; t- წამებში; φ– რადიანებში). განსაზღვრეთ ღეროს კინეტიკური ენერგია დროის t = 1 წმ მომენტში. პასუხი: T= 10 ჯ.

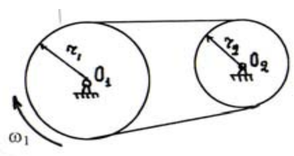
ამოცანა 9.14. ურიკაზე, რომელიც მოძრაობს ჰორიზონტალურ ლიანდაგზე v=2 მ/წმ მუდმივი სიჩქარით, დადგმულია ჯალამბარი, რომლის დოლის რადიუსია r =0,5 მ და რომელიც ბრუნავს თანაბრად $\omega = 2$ წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. დოლზე დახვეულია თოკი, რომლის საშუალებითაც აიწევა ტვირთი. დაადგინეთ, რამდენჯერ მეტია გზის მიმართ ამ ტვირთის კინეტიკური ენერგია ურიკას მიმართ კინეტიკურ ენერგიაზე.



ნახ. 79.

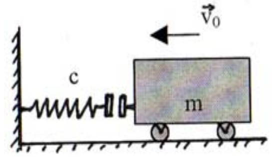
პასუხი: 5 – ჯერ.

ამოცანა 9.15 ავტომანქანის კომპრესორის ბორბალი, რომლის რადიუსია $r_1= 0,1$ მ და ინერციის მომენტი ცენტრის მიმართ $J_1= 0,04$ კგმ^2, ბრუნავს $\omega_1=120$ წმ$^{-1}$ კუთხური სიჩქარით. მასთან უსასრულო ღვედით შეერთებულია $r_2 = 0,07$ მ რადიუსის ბორბალი, რომლის მომენტი ცენტრის მიმართ არის $J_2=0,01$კგმ^2. განსაზღვრ ემის კინეტიკური ენერგია, რომელიც შედგება ორი ბორბლისა და ღვედისგან, თუ ღვედის მასა m= 0,5 კგ. 0_1 და 0_2 ღერძები უძრავია.



ნახ. 80.

პასუხი: $T = 1/2\cdot(J_1 +J_2 r_1^2/ r_2^2 + mr_1^2)\, \omega_1^2$; T = 471 ჯ.

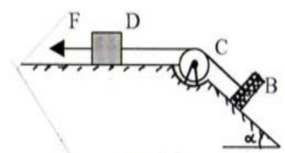


ნახ. 81.

ამოცანა 9.16. m მასის ვაგონი ეჯახება c სიხისტის ზამბარიან ამორტიზატორს v_0 სიჩქარით. განსაზღვრეთ ამორტიზატორის უდიდესი დეფორმაცია, თუ უგულებელყოფთ მის მასას და ჩათვლით, რომ დაჯახებამდე იგი არ იყო დეფორმირებული.
პასუხი: $s = v_0\sqrt{m/c}$

ამოცანა 9.17. ავტომანქანა მოძრაობს გზის ჰორიზონტალურ წრფივ უბანზე საწყისი სიჩქარის გარეშე. პირველი 10 წამის განმავლობაში იგი მოძრაობს მუდმივი 1,2 მ/წმ^2 აჩქარებით, ხოლო შემდგომ 8 წმ-ის განმავლობაში მუდმივი 0,9 მ/წმ^2 აჩქარებით. გზის რომელ უბანზე ასრულებს მეტ მუშაობას და რამდენჯერ?
პასუხი: მეორეზე, 1,56 – ჯერ.

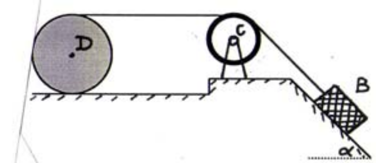
ამოცანა 9.18. P_1 წონის D სხეულზე, რომელზეც DCB თოკის საშუალებით მიმაგრებულია P_2 წონის B სხეული, მოქმედებს მუდმივი ჰორიზონტალური ძალა $\vec F$. უგულებელყავით ხახუნი, ბლოკის და თოკის წონა; ჩათვალეთ, რომ თოკი უჭიმადია, კუთხე α ცნობილია და განსაზღვრეთ D სხეულის სიჩქარე და აჩქარება მის მიერ განვლილ s მანძილზე დამოკიდებულებაში. სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.



ნახ. 82.

პასუხი: $v^2=2gs\, (F- P_2 \sin\alpha)/ (P_1+P_2)$;
$w =g(F- P_2 \sin\alpha)/ (P_1+P_2)$.

ამოცანა 9.19. ჰორიზონტისადმი $\alpha = 30^0$ კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე სრიალებს $m_1= 40$ კგ მასის B ტვირთი, რომელიც მიბმულია $m_2= 4$ კგ მასის C ბლოკზე გადადებული და D საგორავზე დახვეული უჭიმადი თოკის ბოლოში. D საგორავი წარმოადგენს ერთგვაროვან $m_3 = 80$ კგ მასის მთლიან ცილინდრს, რომელიც უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. უგულებელყავით თოკის მასა, გორვის ხახუნი, ბლოკის ღერძში ხახუნი და განსაზღვრეთ B ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტისათვის, როცა იგი დახრილ სიბრტყეზე გაივლის s=1 მ მანძილს. საწყის მომენტში სისტემა უძ C ბლოკის მასა თანაბრადაა განაწილებული ფერსოზე.



ნახ. 83.

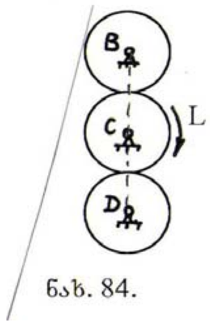
პასუხი: $v_B = 4\sqrt{m_1 g s \sin\alpha / (8m_1 + 8m_2 + 3m_3)} = 2,3$ მ/წმ.

ამოცანა 9.20 . ამოხსენით წინა (9.19) ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მხედველობაშია მიღებული D საგორავის

ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე გორვის ხახუნი, თუ გორვის ხახუნის δ კოეფიციენტის ფარდობა საგორავის R რადიუსთან უდრის 0,05.

პასუხი: $v_B = 4\sqrt{(m_1 R \sin\alpha - 0{,}05 m_3 \delta)\, gs / R\, (8m_1 + 8m_2 + 3m_3)} = 2{,}18$ მ/წმ.

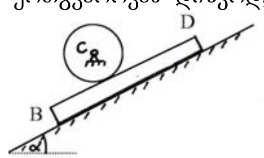
ამოცანა 9.21. უძრავ პარალელურ ღერძებზე ჩამოცმული სამი ერთნაირი კბილანასგან შედგენილი სისტემა მოძრაობაში მოდის C თვალზე მოდებული მუდმივი მაბრუნებელი L მომენტით. ჩათვალეთ, რომ თითოეული თვალი წარმოადგენს r რადიუსის და P წონის ერთგვაროვან დისკოს. ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ თვლების ბრუნვის კუთხური ω სიჩქარე მობრუნების φ კუთხეზე დამოკიდებულებაში. განსაზღვრეთ აგრეთვე თვლების კუთხური აჩქარება.



ნახ. 84.

პასუხი: $\omega = 2/r\cdot\sqrt{Lg\varphi/3P}$; $\varepsilon = 2Lg / 3Pr^2$.

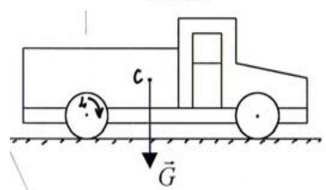
ამოცანა 9.22. ℓ სიგრძის და P წონის BD კბილანა ლარტყა მოთავსებულია ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სრიალის დროს ლარტყა აბრუნებს უძრავი C ღერძის გარშემო მბრუნავ Q წონის კბილანა თვალს. კბილანა თვალი ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოდ, ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ლარტყას სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც შეხების წერტილში იმყოფება ლარტყას D ბოლო, თუ საწყის მომენტში შეხების წერტილში იმყოფებოდა B ბოლო და ამასთანავე ლარტყას სიჩქარე იყო ნულის ტოლი.



ნახ. 85.

პასუხი: $v^2 = 4g\ell\, P\sin\alpha/ (2P + Q)$.

ამოცანა 9.23. G წონის ორღერძა ავტომანქანა უსრიალოდ მოძრაობს გზის ჰორიზონტალურ წრფივ უბანზე და მოძრაობის დაწყებიდან (v_0=0) გადის s მანძილს. ავტომანქანას აქვს ორი წამყვანი ბორბალი, რომელთაგან თითოეულზე მოდებულია მაბრუნებელი L მომენტი. წამყვანი და ამყოლი თვლების რადიუსებია R. თითოეული წამყვანი ბორბალის ღერძის მიმართ მბრუნავი მასის ინერციის მომენტია J_2, ხოლო ყოველი ამყოლი ბორბალის ინერციის მომენტია J_1. განსაზღვრეთ ავტომანქანის საბოლოო სიჩქარე, თუ ბორბალის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი მუდმივია და უდრის δ-ს.



ნახ. 86.

პასუხი: $v^2 = 2gsR\, (2L - \delta G) / [GR^2 + 2(J_1 + J_2)g]$.

ამოცანა 9.24. წინა (9.23) ამოცანაში ჩათვალეთ, რომ ავტომანქანა მოძრაობდა v_0 სიჩქარით. გარკვეულ მომენტში უკანა ბორბლებზე მოსდეს მუდმივი დამამუხრუჭებელი მომენტი L, რის შედეგადაც ავტომანქანა გაჩერდა. განსაზღვრეთ დამუხრუჭების გზა, თუ ჩათვლით, რომ გორვისას სრიალს ადგილი არა აქვს ; (G, R, J_1, J_2, δ - მოცემულია).

პასუხი: $s = v_0^2[GR^2 + (J_1 + J_2)g\,]/ 2gR(L + \delta G)$.

§ 10. შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი

ნივთიერ წერტილთა სისტემის შესაძლო გადაადგილება ეწოდება სისტემის წერტილების ისეთ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებს, როდესაც არ ირღვევა სისტემაზე დადებული ბმები.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. იგი შემდეგში მდგომარეობს: *გეომეტრიული, სტაციონარული და იდეალური ბმების მქონე სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალის მუშაობათა ჯამი ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე იყოს ნულის ტოლი,* ე.ი.

$$\sum (F_k \cdot\delta \vec{r}_k) = 0, \qquad (10.1)$$

ანუ გეგმილებში $\sum (X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0.$ (10.2)

აქ $F_k(X_k,Y_k,Z_k)$ – სისტემის k-ურ წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია, ხოლო $\delta\vec{r}_k(\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k)$ - იმავე წერტილის შესაძლო გადაადგილება.

თუ სისტემაზე დადებული ბმა არ არის იდეალური, მაშინ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპში აქტიური ძალების მუშაობასთან ერთად აიღება აგრეთვე ბმის რეაქციის ძალების მუშაობათა ჯამიც; ე.ი. (10.1) განტოლებაში შევლენ ბმის რეაქციის ძალებიც და განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\sum (F_k + \vec{R}_k)\, \delta\, \vec{r}_k = 0, \qquad (10.3)$$

ეს პრინციპი განზოგადებულ კოორდინატებში ასე გამოისახება:

$$Q_j = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,s), \qquad (10.4)$$

სადაც Q_j არის q_j განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა; s - სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა შეიძლება გაიყოს შემდეგ ძირითადი ტიპის ამოცანებად:

I. ამოცანები, რომლებშიც მოცემული სისტემის წონასწორობისათვის მოთხოვნილია ამ სისტემაზე მოქმედი ძალების განსაზღვრა, ან ამ ძალებს შორის დამოკიდებულების განსაზღვრა.

II. ამოცანები, რომლებშიც სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალებისათვის მოთხოვნილია სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის განსაზღვრა.

III. ამოცანები, რომლებშიც მოთხოვნილია ბმის რეაქციების განსაზღვრა.

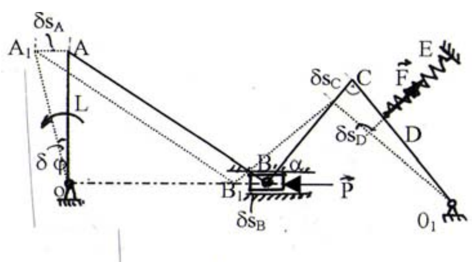
ამოცანები ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობაზე შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის გამოყენებით მიზანშეწონილია ამოიხსნას შემდეგი თანმიმდევრობით:

1) გამოვყოთ სისტემა, რომლის წონასწორობასაც ვიხილავთ;
2) გამოვსახოთ მოცემულ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა;
3) თუ ბმა არაიდეალურია, გამოვსახოთ შესაბამისი ბმის რეაქციები;
4) სისტემის ერთ-ერთ წერტილს მივცეთ რაიმე შესაძლო გადაადგილება და სისტემის დანარჩენი წერტილების შესაძლო გადაადგილებები გამოვსახოთ აღებული შესაძლო გადაადგილების საშუალებით;
5) გამოვთვალოთ ყველა ძალის მუშაობა მათი მოდების წერტილების შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე და მათი ჯამი გაუტოლოთ ნულს;
6) ამოვხსნათ მიღებული წონასწორობის განტოლება.

ამოცანა 10.1 ნახაზზე მოცემული მექანიზმის 0A მრუდმხარაზე მოდებულია მაბრუნებელი მომენტი L, ხოლო B ცოციაზე მოქმედებს P ძალა. მექანიზმი გაწონასწორებულია DE ზამბარის დაჭიმულობის ძალით. განსაზღვრეთ ზამბარის სიხისტის (დრეკადობის) კოეფიციენტი, თუ ზამბარის დეფორმაციაა h. მოცემულია: $0A = \ell$; $0_1D = 2\,CD$; $BC \perp 0_1C$; $DE \perp 0_1C$.

ამოხსნა. მექანიზმზე მოქმედი მაბრუნებელი L მომენტი და P ძალა გაწონასწორებულნი არიან ზამბარის დრეკადი აღმდგენი ძალით F = ch (მოცემული სქემის მიხედვით ზამბარა დაჭიმულია).

მივანიჭოთ მექანიზმის 0A მრუდმხარას რაიმე შესაძლო მობრუნება δφ. მაშინ A, B, C, D წერტილები შესაბამისად მიიღებენ შესაძლო გადაადგილებებს:



ნახ. 87.

$AA_1 = \delta s_A$, $BB_1 = \delta s_B$, C $DD_1 = \delta s_D$.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი ასე გამოისახება (აქ საყრდენების რეაქციებს მხედველობაში არ ვიღებთ, რადგანაც ისინი არავითარ მუშაობას არ ასრულებენ):

$$L\delta\varphi + P\delta s_B - F\delta s_D = 0,$$

ანუ $L\delta\varphi + P\delta s_B - ch\delta s_D = 0$.

აქედან $c = (L\delta\varphi + P\delta s_B) / h\,\delta s_D$. (*)

დავამყაროთ დამოკიდებულება δφ, δs_B და δs_D შესაძლო გადაადგილებებს შორის. როგორც ნახაზიდან ჩანს $\delta s_A = 0A\cdot\delta\varphi$. AB ღეროს შესაძლო გადაადგილება გადატანითი მოძრაობაა, ამიტომ

$$\delta s_B = \delta s_A = 0A\cdot\delta\varphi = \ell\,\delta\varphi. \qquad (**)$$

BC ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. B და C წერტილების შესაძლო გადაადგილებები ამ წერტილების შესაძლო სიჩქარეების პროპორციულია. ვინაიდან მყარი სხეულის მოძრაობისას მისი ყოველი ორი წერტილის სიჩქარის გეგმილი ამ წერტილების შემაერთებელ წრფეზე ტოლია, ამიტომ გვექნება: გეგმ$_{BC}\,\delta s_B$ = გეგმ$_{BC}\,\delta s_C$, ანუ $\delta s_B \cos\alpha = \delta s_C$; ე.ი. $\delta s_C = \ell \cos\alpha\,\delta\varphi$.

(δs_B და δs_C შესაძლო გადაადგილებებს შორის დამოკიდებულება შეიძლება დამყარდეს აგრეთვე BC ღეროს ბრუნვის მყისი ცენტრის მოძებნითაც – გამოთვალეთ !!).

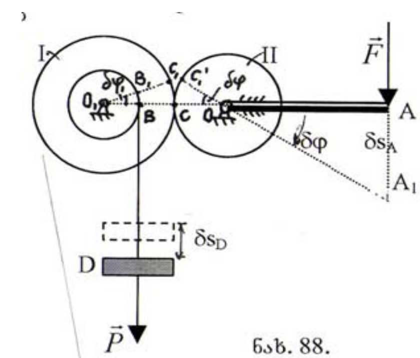
მოცემულობის თანახმად $0_1C / 0_1D = 3/2$; ამიტომ $\delta s_C / \delta s_D = 3/2$; აქედან $\delta s_D = 2/3\cdot\delta s_C$, ანუ $\delta s_D = 2/3\cdot\ell\cos\alpha\,\delta\varphi$.

ეს და (**) მნიშვნელობები ჩავსვათ (*) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$c = (L\delta\varphi + P\ell\,\delta\varphi) / (2h/3\ell\cdot\cos\alpha\,\delta\varphi),$$

საიდანაც $\underline{c = 3(L + P\ell) / 2h\,\ell\cos\alpha}$.

ამოცანა 10.2 ჯალამბარი შედგება დოლისაგან, ამ დოლზე ხისტად მიმაგრებული I კბილანასაგან, I კბილანასთან ჩაბმაში მყოფი II კბილანასაგან და 0A სახელურისაგან, რომელიც II კბილანაზეა მიდუღებული. განსაზღვრეთ $\vec{F}$ ძალის მინიმალური სიდიდე, რომელიც უნდა მოვდოთ 0A სახელურის ბოლოში მისდამი მართობულად, რომ ავწიოთ ბაგირზე დაკიდებული P წონის D ტვირთი, თუ თვლების კბილანების რიცხვი



ნახ. 88.

შესაბამისად არიან z_1 და z_2. სახელურის სიგრძეა ℓ, ხოლო დოლის რადიუსი $0_1B = r$. ბაგირი ჩათვალეთ უჭიმადად დაუწონადად; ხახუნი უგულებელყავით.

ამოხსნა. განვიხილოთ $\vec{F}$ ძალის ის ზღვრული მინიმალური მნიშვნელობა, რომელზე მეტი მნიშვნელობისათვისაც ჯალამბარი მოძრაობას დაიწყებს. ე. ი. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\vec{F}$ ძალისა და P წონის D ტვირთის მოქმედებით .ჯალამბარი წონასწორობაშია.

მივანიჭოთ მექანიზმს რაიმე შესაძლო გადაადგილება. მაგალითად დოლი მოვაბრუნოთ 0_1 ღერძის გარშემო საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ შესაძლო $\delta\varphi_1$ კუთხით. იმავე $\delta\varphi_1$ კუთხით შემობრუნდება I კბილანაც. დოლზე გადაკიდებული ბაგირი აიწევს დოლის ფერსოზე მდებარე B წერტილის გადაადგილების ტოლი δs_B=BB_1 მანძილით. ვინაიდან ბაგირი უჭიმადია, D ტვირთიც გადაადგილდება $\delta s_D=\delta s_B$ მანძილით. I კბილანასთან ჩაბმაში მყოფი II კბილანა შემობრუნდება 0 ღერძის გარშემო რაღაც $\delta\varphi$ შესაძლო კუთხით. II კბილანასთან ერთად იმავე $\delta\varphi$ კუთხით შემობრუნდება 0A სახელურიც, რომლის ბოლო A წერტილი მიიღებს შესაძლო $\delta s_A = AA_1$ გადაადგილებას $(AA_1 \perp 0A)$.

ბრუნვის 0 და 0_1 ღერძების რეაქციის ძალები მოდებულნი არიან უძრავ წერტილებში, ამიტომ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვექნება: $- P\,\delta s_D + F\,\delta s_A = 0;$

საიდანაც $F = P\,\delta s_D /\ \delta s_A$. (*)

დავამყაროთ დამოკიდებულება δs_D და δs_Aშესაძლო გადაადგილებებს შორის.

როგორც ვნახეთ $\delta s_D=\delta s_B$.

დოლის მობრუნების კუთხე $\delta\varphi_1=1/r\cdot\delta s_B$, ანუ $\delta\varphi_1=1/r\cdot\delta s_D$.

დოლთან ერთად I კბილანაც შემობრუნდა იმავე $\delta\varphi_1$ კუთხით და I კბილანას ფერსოზე მდებარე C წერტილმა მიიღო $\delta s_C=CC_1$ შესაძლო გადაადგილება:

$$\delta s_C = 0_1C\cdot \delta\varphi_1 = 0_1C/ r\cdot\delta s_D.$$

I კბილანასთან ერთად იმავე δs_C მანძილით გადაადგილდება მასთან ჩაბმაში მყოფი II კბილანას ფერსოზე მდებარე წერტილიც $CC_1' = \delta s_C$ და თუ ამავე დროს II კბილანა შემობრუნდა $\delta\varphi$ კუთხით, მაშინ ცხადია

$\delta s_C = 0C\,\delta\varphi$, საიდანაც $\delta\varphi = 1/ 0C \cdot\delta s_C = 1/r\cdot 0_1C/ 0C\cdot\delta s_D$.

II კბილანასთან ერთად სახელურიც შემობრუნდება $\delta\varphi$ კუთხით და სახელურის ბოლო წერტილი მიიღებს შესაძლო გადაადგილებას

$$\delta s_A = 0A\cdot \delta\varphi = \ell/r \cdot 0_1C/0C\cdot\delta s_D.$$

შევიტანოთ δs_A -ს ეს მნიშვნელობა (*) გამოსახულებაში. გვექნება:

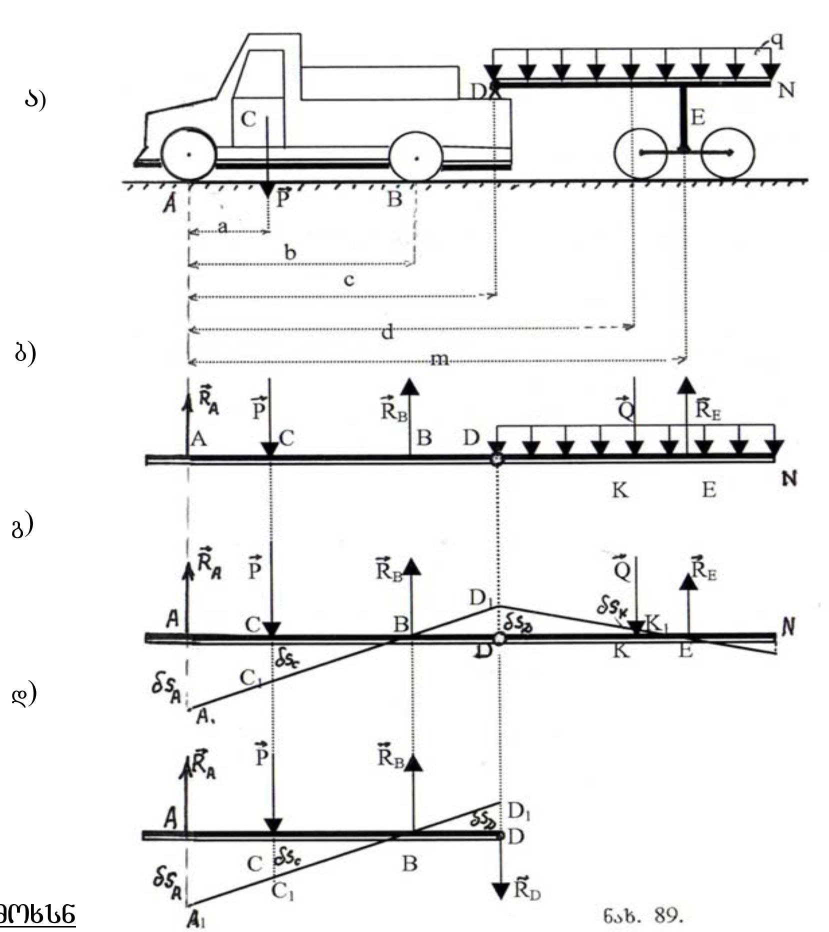
$$F = P\,\delta s_D / (\ell/r \cdot 0_1C/ 0C\cdot\delta s_D)$$

თუ აქ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ერთმანეთთან ჩაბმაში მყოფი კბილანების რადიუსები მათი კბილანების რიცხვის პირდაპირპროპორციულია,

ე. ი. $0_1C/ 0C = z_1/z_2$,

მაშინ საბოლოოდ გვექნება: $F = Pr\, z_2 / \ell\, z_1$.

ამოცანა 10.3. P = 1400 კნ წონის სატვირთო ავტომანქანას აქვს DN=ℓ =5 მ სიგრძის მისაბმელი, რომელზეც ძევს თანაბრად განაწილებულq=150 კნ/მ ინტენსივობის ტვირთი. განსაზღვრეთ სატვირთო ავტომანქანის და მისაბმელის ღერძებზე დატვირთვა, აგრეთვე ძაბვა ავტომანქანის და მისაბმელის შეერთების D სახსარში, თუ ცნობილია, რომ a= 1 მ, b = 3 მ, c= 4 მ, d= 6 მ, m= 7 მ.



ნახ. 89.

ამოხსნა. პირველყოვლისა წარმოვადგინოთ ამოცანის პირობაში მოცემული სატვირთო ავტომანქანისა და მისი მისაბმელის მოდელი, როგორც ორი ღეროსაგან

შედგენილი სისტემა, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებულნი არიან D სახსრით (ნახ. ა, ბ).

ღეროვან სისტემას აქვს სამი გლუვი საყრდენი A, B და E წერტილებში (ავტომანქანა და მისაბმელი ეყრდნობა სამ ღერძს).

სისტემაზე მოქმედებს ორი აქტიური ძალა $\vec{P}$ და $\vec{Q}$, სადაც $\vec{Q}$ არის მისაბმელზე თანაბრად განაწილებული q ინტენსივობის დატვირთვის ტოლქმედი ძალა, რომელიც მოქმედებს მისაბმელის შუა K წერტილში და

$$Q = \ell\, q = 5\cdot 150 = 750 \text{ კნ}.$$

ამოცანის პირობის თანახმად უნდა განისაზღვროს A, B და E ღერძებზე წნევის (რეაქციის) ძალები $\vec{R}_A$, $\vec{R}_B$, $\vec{R}_E$, აგრეთვე ძაბვა D სახსარში. ყველა აქტიური და რეაქციის ძალის მიმართულება ნაჩვენებია (ბ) ნახაზზე.

გვაქვს პარალელურ ძალთა სისტემა; ამიტომ D სახსარში ღეროთა ურთიერთქმედების რეაქციის ძალები მიმართულნი იქნებიან ასევე მოცემული ძალების პარალელურად.

ძალთა ეს სისტემა (ანუ მანქანა თავისი მისაბმელით) წონასწორობაშია (ეს ნიშნავს, რომ მანქანა ან უძრავია, ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად; აქ განვიხილავთ უძრავ მდგომარეობას).

ღერძებზე დატვირთვის (ანუ რეაქციის) ძალების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ სისტემის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი.

მივცთ სისტემას რაიმე შესაძლო გადაადგილება. მანქანა შეიძლება გადაადგილდეს გზის გასწვრივ წინ ან უკან; ვინაიდან სისტემაზე მოქმედი ძალები ამ გადაადგილების მართობულნი არიან, ამიტომ ამ გადაადგილებებზე სისტემაზე მოქმედი ყოველი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. ამიტომ მივცეთ სისტემას სხვა შესაძლო გადაადგილება; მაგალითად, შევამციროთ ატმოსფერული წნევა მანქანის წინა საბურავში. ეს ნიშნავს, რომ (ბ) მოდელზე A წერტილი მცირედით გადაადგილდება ვერტიკალურად ქვევით, ხოლო B და E წერტილები დარჩებიან უძრავნი. D წერტილი გადაადგილდება ზევით. ღეროვანი სისტემა სქემატურად მიიღებს (გ) ნახაზის სახეს.

A, C, D, K წერტილები მიიღებენ შესაძლო გადაადგილებებს:

$$AA_1 = \delta s_A,\quad CC_1 = \delta s_C,\quad KK_1 = \delta s_K,\quad DD_1 = \delta s_D .$$

ამ შემთხვევისათვის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვექნება:

$$- R_A\delta s_A + P\,\delta s_C - Q\,\delta s_K = 0;$$

აქედან

$$R_A = (P\,\delta s_C - Q\,\delta s_K) / \delta s_A. \qquad (*)$$

ახლა დავამყაროთ დამოკიდებულება (*) ტოლობაში შემავალ შესაძლო გადაადგილებებს შორის

$$\Delta AA_1B \sim \Delta CC_1B \Rightarrow \delta s_A/\delta s_C = AB /\ldots\ \ldots_C = 3/2; \Rightarrow \delta s_C = 2/3\cdot\delta s_A .$$

$$\Delta AA_1B \sim \Delta DD_1B \Rightarrow \delta s_A/\delta s_D = AB /BD;\ \ \delta s_A/\delta s_D = 3/1; \Rightarrow \delta s_D = 1/3\cdot\delta s_A. \qquad (**)$$

$$\Delta DD_1E \sim \Delta KK_1E \Rightarrow \delta s_D/\delta s_K = DE /KE;$$

$$\delta s_D/\delta s_K = 3/1;\quad \Rightarrow \delta s_K = 1/3\cdot\delta s_D = 1/9\cdot\delta s_A.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (*) ტოლობაში; მივიღებთ:

$$R_A = (P\cdot 2/3\cdot\delta s_A - Q\cdot 1/9\cdot\delta s_A) / \delta s_A = 2/3\cdot P - 1/9\cdot Q = 850 \text{ კნ}.$$

<u>**დავალება:** ანალოგიური გზით გამოთვალეთ $\vec{R}_B$ და $\vec{R}_E$ რეაქციის ძალები.</u>

<u>**მითითება**</u>: 1) $\vec{R}_B$ რეაქციის ძალის გამოსათვლელად (ბ) ნახაზზე მივცეთ შესაძლო გადაადგილება B საყრდენს (მაგალითისათვის შევამციროთ ატმოსფერული წნევა მანქანის უკანა საბურავში); A და E საყრდენები უძრავნი დარჩებიან.

2) $\vec{R}_E$ რეაქციის ძალის გამოსათვლელად მივცეთ შესაძლო გადაადგილება E საყრდენს (შევამციროთ ატმოსფერული წნევა მისაბმელის საბურავებში); A და B საყრდენები უძრავნი დარჩებიან.

ორივე შემთხვევისათვის ცალ-ცალკე ააგეთ (გ) –ს ანალოგიური ნახაზი.

D სახსარში ძაბვის გამოსათვლელად განვიხილოთ ცალკე ავტომანქანის წონასწორობის მდგომარეობა. მისი მოდელი გამოვსახოთ AD ღეროს საშუალებით (ნახ. დ) , რომელზეც მოქმედებენ: აქტიური $\vec{P}$ ძალა, A და B ღერძებზე წნევის რეაქციის $\vec{R}_A$ და $\vec{R}_B$ ძალები და D სახსრის რეაქციის $\vec{R}_D$ ძალა, რომელიც დანარჩენი ძალების პარალელურია.

მივცეთ A სახსარს შესაძლო გადაადგილება $AA_1 = \delta s_A$. მაშინ B უძრავია, ხოლო C და D წერტილები მიიღებენ შესაძლო გადაადგილებებს:
$CC_1 = \cdot\delta s_C$;
$DD_1 = \delta s_D$. შესაბამის მოდელს აქვს (დ) სახე.

AD ღეროს წონასწორობისათვის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვექნება:

$$-R_A\delta s_A + P\,\delta s_C - R_D\,\delta s_D = 0;$$

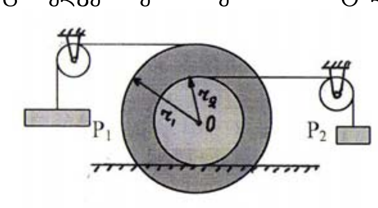
აქედან $$R_D = (P\,\delta s_C - R_A\,\delta s_A) / \delta s_D.$$

თუ ვისარგებლებთ (**) ტოლობებით, მივიღებთ:

$$R_D = (P\cdot 2/3\cdot\delta s_A - R_A\ \cdot\delta s_A) /(1/3\cdot \delta s_A) = 2\ P - 3R_A = 250 \text{ კნ} .$$

<u>პასუხი: $R_A = 850$ კნ ; $R_B = 800$ კნ ;</u>
<u>$R_E = 500$ კნ ; $R_D = 250$ კნ.</u>

<u>**ამოცანა 10.4.**</u> საგორავი, რომელიც შედგება ერთმანეთთან ხისტად შეერთებული r_1 და r_2 რადიუსების მქონე ცილინდრებისგან, ჰორიზო… სიბრტყეზე შეკ…



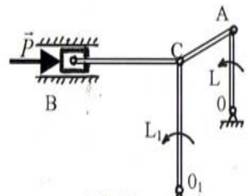
ნახ. 90.

წონასწორობაში ორი P_1 და P_2 ტვირთების საშუალებით.

უგულებელყავით საყრდენ სიბრტყეზე საგორავის სრიალი და იპოვეთ დამოკიდებულება ამ ტვირთების შესაძლო δs_1 და δs_2 გადაადგილებებს შორის.

პასუხი: $\delta s_1/\delta s_2 = (r_1+r_2)/2r_2$.

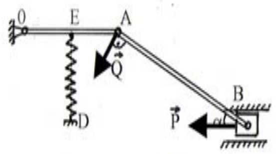
ამოცანა 10. 5. რუდმხარა მექანიზმის ძრავის დგუშზე მოქმედებს $\vec{P}$ ძალა. 0_1C მხარზე მოდებულია მაბრუნებელი მომენტი $L_1=3/2\cdot Ph$. სახსრებში ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ L მომენტი, რომელიც უნდა მოვდოთ 0A მრუდმხარას, რათა მექანიზმი დარჩეს წონასწორობაში, თუ $0A = h$, $0_1C = 3h$ და ორივე მხარი ვერტიკალურია.



ნახ. 91.

პასუხი: $L = Ph/2$.

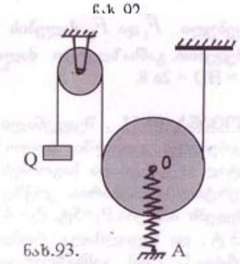
ამოცანა 10.6. მრუდმხარა - ცოცია მექანიზმი იმყოფება წონასწორობაში ნახაზზე გამოსახულ მდგომარეობაში. განსაზღვრეთ ED ზამბარის დეფორმაცია h, თუ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტია $c = 20$ ნ/სმ; $0E = AE$; $P = 200$ ნ; $Q = 100$ნ ; $\alpha = 30^0$; ზამბარა გაჭიმულია.



ნახ.92

პასუხი: $h = 2,88$ სმ.

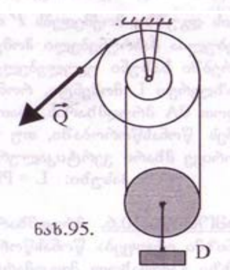
ამოცანა 10.7. ნახაზზე გამოსახული მექანიზმი იმყოფება წონასწორობაში. განსაზღვრეთ Q ტვირთის წონა, თუ მოძრავი 0 ბლოკის წონა $P = 200$ ნ, ხოლო $c = 50$ ნ/სმ სიხისტის ზამბარა გაჭიმულია $h = 4$ სმ სიგრძით. პასუხი: $Q = 200$ ნ.



ნახ.93.

ამოცანა 10.8 . ნახაზზე მოცემული დიფერენციალური პოლისპასტი იმყოფება წონასწორობაში. განსაზღვრეთ დამოკიდებულება Q ძალასა და D ტვირთის წონას შორის, თუ ზედა დიდი ბლოკის რადიუსია R, ხოლო ზედა მცირე ბლოკის რადიუსი r .

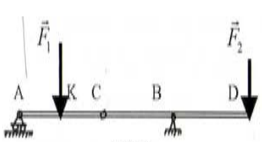
ბლოკების წონები და ღერძებში ხახუნი უგულებელყავით.



ნახ.95.

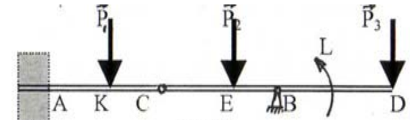
პასუხი: $Q = (R - r) P / 2R$.

ამოცანა 10.9 . AD კოჭი შედგება AC და CD უწონადი ძელებისაგან, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებულია C სახსრით. კოჭი ძევს A და B საყრდენებზე. კოჭი წონასწორობაშია მასზე მოდებული $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების მოქმედებით. განსაზღვრეთ $\vec{F}_2$ ძალის სიდიდე, თუ $F_1 = 2$ტ , $AK = KC = a$ მ, $BC = BD = 2a$ მ. პასუხი: $F_2 = 1$ ტ.



ნახ.96.

ამოცანა 10.10 . შედგენილი უწონადი AD კოჭი A ბოლოთი ხისტადაა ჩამაგრებული კედელში, ხოლო B წერტილში ეყრდნობა საგორავს. C წერტილში სახსარია. კოჭზე მოქმედებს ძალები $P_1=5$ტ, $P_2= 4$ ტ, $P_3=3$ ტ , და წყვილძალა, რომლის მომენტია $L=2$ ტმ. განსაზღვრეთ ჩამაგრების რეაქციები, თუ $AC=CB=BD=3$მ, $KC=EB=1$ მ.



ნახ.97.

პასუხი: $R_A=4$ ტ; $L_A=7$ტმ; $R_B=8$ტ.

§11. დინამიკის ზოგადი განტოლება (დალამბერ - ლაგრანჟის განტოლება)

დინამიკის ზოგადი განტოლება არის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის ანალოგია მოძრავი სისტემისათვის. იგი შემდეგში მდგომარეობს:

გეომეტრიული, იდეალური ბმების მქონე სისტემის მოძრაობისას მისი ყოველი მდებარეობისათვის სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალის და ინერციის ძალის მიერ შესრულებული ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ნებისმიერ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია.

დინამიკის ზოგადი განტოლება: $\sum(\vec{F}_k + \vec{\Phi}_k)\,\delta\vec{r}_k = 0$;

ანუ
$$\sum(\vec{F}_k - m_k\vec{w}_k)\delta\vec{r}_k = 0 . \qquad (11.1)$$

აქ $\vec{\Phi}_k = - m_k\vec{w}_k$ - სისტემის k - ურ წერტილზე მოქმედი ინერციის ძალაა.

გეგმილებში:
$$\sum[(F_{kx}- m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+ (F_{ky}- m_k\ddot{y}_k)\delta y_k + (F_{kz}- m_k\ddot{z}_k)\delta z_k] = 0. \qquad (11.2)$$

ინერციის ძალების მუშაობათა გამოთვლა მყარი სხეულის წერტილების შესაძლო გადაადგილებისას გამოითვლება ფორმულებით:

1) *გადატანითი მოძრაობა* 69 $\vec{\Phi}\cdot\delta\vec{r}$; (11.3)

$\vec{\Phi} = - M\,\vec{w}$ - ინერციის ძალების ტოლქმედია.

2) *უძრავი 0z ღერძის გარშემო ბრუნვისას*: $\delta A = - J_z\cdot\varepsilon_z\cdot\delta\varphi$; (11.4)

J_z - სხეულის ინარციის მომენტია ბრუნვის 0z ღერძის მიმართ; ε_z – ბრუნვის კუთხური აჩქარება.

3) *ბრტყელი მოძრაობისას*: $\delta A = M\,\vec{w}_c\,\delta\vec{r}_c + J_c\cdot\varepsilon_z\cdot\delta\varphi$; (11.5)

$\vec{w}_c$ - სხეულის სიმძიმის ცენტრის აჩქარებაა; $\delta\vec{r}_c$ - სხეულის სიმძიმის ცენტრის შესაძლო გადაადგილება; δφ - სხეულის შესაძლო მობრუნება.

ხახუნის ძალების არსებობისას, ისინი მიეკუთვნებიან აქტიურ ძალებს.

დინამიკის ზოგადი განტოლების დახმარებით შეიძლება ამოიხსნას სისტემის დინამიკის ამოცანები, რომლებშიც შედიან: ინერციულობის მახასიათებლები (მასები და ინერციის მომენტები), სისტემის წერტილების აჩქარებები, აქტიური ძალები ან მომენტები, სრიალის ან გორვის ხახუნის კოეფიციენტები, ზამბარების დრეკადობის კოეფიციენტები.

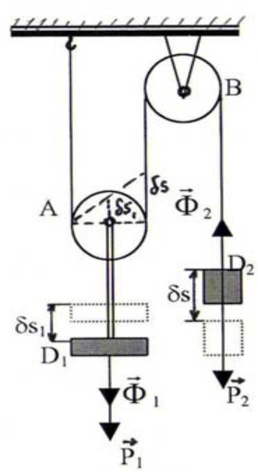
ამოცანები დინამიკის ზოგადი განტოლების დახმარებით რეკომენდებულია ამოიხსნას შემდეგი თანამიმდევრობით:

1) ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემის მდგომარეობა დროის განსახილველ მომენტში;
2) გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალები;
3) გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი რეაქციის (არა იდეალური ბმების) ძალები;
4) მოვდოთ სისტემის წერტილებს ინერციის ძალები;
5) მივცეთ სისტემის ერთ-ერთ წერტილს შესაძლო გადაადგილება და მისი საშუალებით გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალის მოდების წერტილის შესაძლო გადაადგილება;
6) გამოვთვალოთ ყველა ძალის შესაძლო მუშაობა და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება;
7) ამოვხსნათ ეს განტოლება.

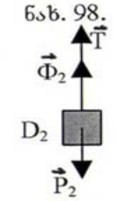
ამოცანა 11.1. ნახაზზე ნაჩვენები ბლოკების სისტემაზე ჩამოკიდებულია D_1 და D_2 ტვირთი, რომელთა წონებია შესაბამისად $P_1 = 10$ ნ და $P_2 = 8$ ნ. განსაზღვრეთ D_2 ტვირთის w_2 აჩქარება და თოკის T დაჭიმულობა, თუ ბლოკების მასებს უგულებელვყოფთ. D_1 და D_2 ტვირთების აჩქარებების ფარდობა უდრის 0,5 – ს ($w_1/w_2 = 0{,}5$).

ამოხსნა. სისტემა შედ... D_1 და D_2 სხეულისაგან და უწო... ა B ბლოკებისაგან.

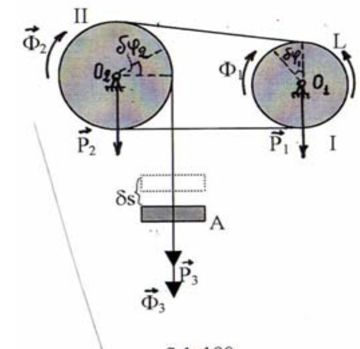
დაუშვათ D_2 ტვირთი მოძრაობს ქვევით.



ნახ. 98.



ნახ. 99.



ნახ.100.

სისტემაზე მოქმედებენ აქტიური $\vec{P}_1$ და $\vec{P}_2$ ძალები და ინერციისძალები $\vec{\Phi}_1$ და $\vec{\Phi}_2$, სადაც $\vec{\Phi}_1 = -m_1\vec{w}_1$ და $\vec{\Phi}_2 = -m_2\vec{w}_2$. (*)

აქტიურ და ინერციის ძალებს ექნებათ ნახაზზე მითითებული მიმართულებანი.

მივცეთ D_2 ტვირთს ქვევით რაიმე შესაძლო δs გადაადგილება; მაშინ D_1 ტვირთი მიიღებს ზევით $\delta s_1 = 0{,}5\cdot\delta s$ შესაძლო გადაადგილებას. მექანიკის ზოგადი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$-P_1\delta s_1 - \Phi_1\delta s_1 + P_2\delta s - \Phi_2\delta s = 0.$$

შევიტანოთ აქ δs_1 – ის მნიშვნელობა, Φ_1 და Φ_2 – ის მნიშვნელობები (*) – დან, სადაც $m_1 = P_1/g$, $m_2 = P_2/g$, ამასთანავე $w_1 = 0{,}5w_2$; ტოლობა შევკვეცოთ δs–ზე, მივიღებთ: $-0{,}5P_1 - 0{,}5\,P_1/2g\cdot w_2 + P_2 - P_2/g\cdot w_2 = 0$, საიდანაც $w_2 = 2g(2P_2 - P_1)/(P_1 + 4P_2)$. შევიტანოთ რიცხვითი მნიშვნელობები:

$w_2 = 2\cdot 9{,}8\,(2\cdot 8 - 10)/(10+32) = 2{,}8$ მ/წმ².

$\underline{w_2 = 2{,}8}$ მ/წმ².

ახლა განვსაზღვროთ თოკის დაჭიმულობა T.

წარმოვიდგინოთ, რომ თოკი გადაჭრილია და მისი მოქმედება ტვირთზე შევცვალოთ რეაქციის ძალით. თუ D_2 ტვირთს მოვდებთ აგრეთვე ინერციის Φ_2 ძალას და ტვირთს მივანიჭებთ შესაძლო δs გადაადგილებას, შეგვიძლია შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$P_2\delta s - \Phi_2\delta s - T\delta s = 0.$$

აქედან $T = P_2 - \Phi_2$, ანუ $T = P_2 - P_2/g\cdot w_2$.

რიცხვითი მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ: $\underline{T = 5{,}712}$ ნ.

ამოცანა 11.2. ორი მთლიანი ერთგვაროვანი I და II ლილვი, რომელთა მასებია m_1 და m_2, ხახუნის გარეშე ბრუნავენ პარალელური 0_1 და 0_2 ღერძების გარშემო უსასრულო ღვედის საშუალებით, ისე, რომ სრიალს ადგილი არა აქვს. r_1 რადიუსის I ლილვზე მოდებულია მაბრუნებელი მომენტი L, ხოლო II ლილვზე ეხვევა ბაგირი, რომლის ბოლოშიც მიბმულია m_3 მასის ტვირთი. განსაზღვრეთ ტვირთის w აჩქარება, თუ ღვედისა და ბაგირის მასა უგულებელყოფილია.

ამოხსნა. სისტემა შედგება I და II ლილვებისაგან, A ტვირთისაგან, უწონადი ღვედისა და ბაგირისგან.

ამოცანის პირობის თანახმად ლილვები ბრუნავენ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ტვირთი მოძრაობს ზევით.

სისტემაზე მოქმედებენ აქტიური

ძალები: ლილვების წონები P_1 და P_2, ტვირთის წონა P_3, მაბრუნებელი მომენტი L. ინერციის ძალებია: $\Phi_1=J_1\varepsilon_1$, $\Phi_2=J_2\varepsilon_2$, $\Phi_3=m_3w$. ყველა ამ ძალის მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.

მივცეთ A ტვირთს რაიმე შესაძლო δs გადაადგილება ზევით. მაშინ II ლილვი შემობრუნდება 0_2 ღერძის გარშემო შესაძლო $\delta\varphi_2$ კუთხით, ხოლო I ლილვი შემობრუნდება 0_1 ღერძის გარშემო შესაძლო $\delta\varphi_1$ კუთხით. დინამიკის ზოგადი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$-P_3\delta s - \Phi_3\,\delta s - \Phi_2\,\delta\varphi_2 - \Phi_1\delta\varphi_1 + L\delta\varphi_1 = 0\ ;$$

ანუ $-m_3g\delta s - m_3\, w\,\delta s - J_2\,\varepsilon_2\delta\varphi_2 - J_1\,\varepsilon_1\delta\varphi_1 + L\delta\varphi_1 = 0.$ (*)

აქ ε_1 და ε_2 შესაბამისად I და II ლილვის ბრუნვის კუთხური აჩქარებაა.

სისტემის მიერ მიღებულ შესაძლო გადაადგილებებს შორის მყარდება შემდეგი დამოკიდებულებები (შეამოწმეთ!!):

$$\delta s = r_2\,\delta\varphi_2\ ; \qquad \delta\varphi_2 = 1/r_2\cdot\delta s;$$

$$r_2\,\delta\varphi_2 = r_1\,\delta\varphi_1\ ; \qquad \delta\varphi_1 = r_2/r_1\cdot\delta\varphi_2 = 1/r_1\cdot\delta s;$$

აქ r_1 და r_2 შესაბამისად I და II ლილვების რადიუსებია.

გარდა ამ მნიშვნელობებისა, (*) ტოლობაში საჭიროა შევიტანოთ შემდეგი სიდიდეები: $J_1 = 1/2\cdot m_1r_1^2$; $J_2 = 1/2\cdot m_2r_2^2$; $\varepsilon_2 = w / r_2$; $\varepsilon_1 = w / r_1$.

ყველა მიღებული მნიშვნელობის შეტანით (*) ტოლობაში და მისი δs –ზე შეკვეცით მივიღებთ:

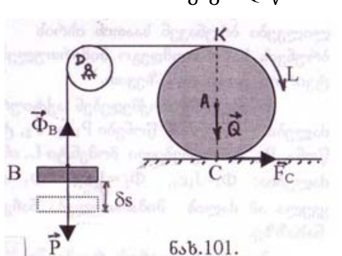
$$-m_3g - m_3w - 1/2\cdot m_2r_2^2\cdot w/r_2\cdot 1/r_2 - 1/2\cdot m_1r_1^2\cdot w/r_1\cdot 1/r_1 + L\cdot 1/r_1 = 0;$$

აქედან $(m_3 + 1/2\cdot m_2 = 1/2\cdot m_1)\ w = 1/r_1\cdot L - m_3g$;

საიდანაც $\underline{w = 2(L - m_3r_1g)/\ r_1(m_1 + m_2 + 2m_3)}$.

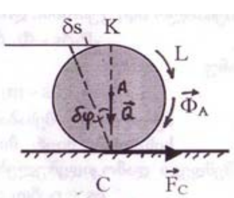
დავალება: გამოთვალეთ ბაგირის დაჭიმულობა! [პასუხი: $T=m_3(g+w)$].

ამოცანა 11.3. P წონის B ტვირთს მოძრაობაში მოჰყავს Q წონის R რადიუსიანი ერთ ცილინდრული A საგორავი დახვეული თოკის საშუალებით. განსაზღვრეთ B ტვირთის აჩქარება, თუ საგორავი უსრიალოდ გორავს, ხოლო გორვის ხახუნის კოეფიციენტია f . უძრავი D ბლოკის მასა უგულებელყოფილია.



ნახ.101.

ამოხსნა. განსახილველი სისტემა შედგებაP წონის B ტვირთისაგან და Q წონის ერთგვაროვანი A ცილინდრისაგან. D ბლოკი და ბაგირი უწონადი სხეულებია და მხედველობაში არ მიიღებიან. სისტემაზე მოქმედებენ აქტიური ძალები P და Q. აგრეთვე სიბრტყესთან ცილინდრის შეხების C წერტილში შეჭიდების F_C ძალა, რომელიც ეწინააღმდეგება სრიალს . ცილინდრზე მოქმედებს გორვისადმი წინაღობის წყვილძალა, რომლის მომენტია L= f N = f Q .



ნახ.102.

მოვდოთ სისტემას ინერციის ძალები (იხ.ნახაზი): გადატანითად ქვევით მოძრავი B ტვირთის ინერციის ძალა

$$\Phi_B = m_Bw_B\ ;$$

აგრეთვე ცილინდრის ინერციის ძალა Φ_A. ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას; მისი ბრუნვის მყისი ცენტრია C წერტილი. ამიტომ, ცილინდრის ინერციის ძალა იქნება $\Phi_A = J_C\,\varepsilon_C$, სადაც J_C - ცილინდრის ინერციის მომენტია C წერტილის მიმართ, ხოლო ε_C არის ცილინდრის მყისი კუთხური აჩქარება C - ს მიმართ ბრუნვისას.

მივანიჭოთ B ტვირთს რაიმე შესაძლო δs გადაადგილება. მაშინ ცილინდრი შემობრუნდება C წერტილის გარშემო $\delta\varphi$ კუთხით. რადგანაც K წერტილიც მიიღებს შესაძლო δs გადაადგილებას, ამიტომ $\delta s = 2\,R\,\delta\varphi$.

შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$P\delta s - \Phi_B\,\delta s - \Phi_A\ \delta\varphi - L\cdot\delta\varphi = 0\ ; \qquad (*)$$

აქ მხედველობაშია მიღებული, რომ სიბრტყესთან ცილინდრის შეჭიდების F_C ძალის შესაძლო მუშაობა ნულის ტოლია, რადგანაც იგი მოდებულია ბრუნვის მყის ცენტრში.

ჰიუგენს – შტაინერის თეორემის თანახმად:

$$J_C = J_A + m_AR^2 = 1/2\cdot Q/g\cdot R^2 + Q/g\cdot = 3/2\cdot Q/g\cdot R^2\ ;$$

აღებულ მდებარეობაში K წერტილი ბრუნავს C-ს გარშემო 2R რადიუსის წრეწირის რკალზე ε_C მყისი კუთხური აჩქარებით, ამიტომ: $w_B = w_K = 2R\,\varepsilon_C$, საიდანაც $\varepsilon_C = w_B/2R$.

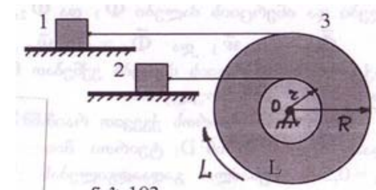
თუ გავითვალისწინებთ ყველა მიღებულ მნიშვნელობას, მაშინ (*) ტოლობა ჩაიწერება ასე :

$$P\cdot 2R\delta\varphi - P/g\cdot w_B\cdot 2R\delta\varphi - 3/2\cdot Q/g\cdot R^2\cdot w_B/2R\cdot\delta\varphi - f\,Q\delta\varphi = 0,$$

საიდანაც $\underline{w_B = 4g\,(2PR - f\,Q)\,/\,R(8P + 3Q).}$

დავალება: გამოთვალეთ ბაგირის დაჭიმულობა.

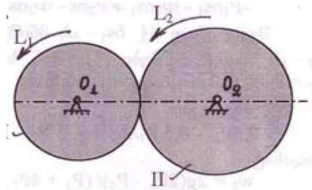
ამოცანა 11.4. განსაზღვრეთ მე-3 ღოლის კუთხური აჩქარება, თუ მისი ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ $J_3 = 0{,}1$ კგმ^2. ღოლზე მოქმედი წყვილძალის მომენტი L=0,6 ნმ. ტვირთების მასებია $m_1 = m_2 = 10$ კგ; რადიუსებია R =0,2 მ, r = 0,1 მ.



ნახ.103.

პასუხი: $\varepsilon = 1$ წმ$^{-2}$.

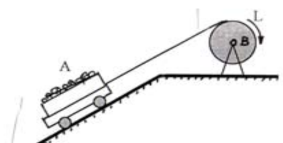
ამოცანა 11.5. ნახაზზე მოცემულია ერთმანეთთან ჩაბმაში მყოფი ორი კბილა თვალი. r რადიუსის და m_1 მასის I კბილა თვალი მოძრაობაში მოდის მაბრუნებელი L_1 მომენტის მოქმედებით. R რადიუსის და m_2 მასის II კბილა თვალზე მოდებულია წინაღობის მომენტი L_2. კბილა თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოებად და გამოთვალეთ I თვალის ბრუნვის კუთხური აჩქარება.



ნახ. 104.

პასუხი: $\varepsilon = 2(RL_1 - r L_2)/ Rr^2(m_1 + m_2)$..

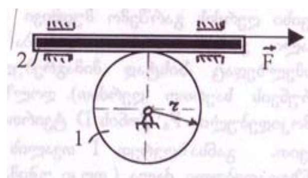
ამოცანა 11.6. P წონის A ვაგონეტი იწყებს ასვლას ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე B ჯალამბარის საშუალებით. განსაზღვრეთ ვაგონეტის აჩქარება იმ შემთხვევაში, როცა ჯალამბარის B დოლზე მოდებულია მუდმივი მაბრუნებელი მომენტი L, თუ ბორბლებიანი წყვილთვალასინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმარ არის J_1. ბორბალის რადიუსია r, ხახუნის კოეთიციენტი f, დოლის რადიუსი R, ხოლო დოლის ინერციის მომენტია J_2.



ნახ.105.

პასუხი: $w = [L - PR(\sin\alpha + f \cos\alpha)]/ R(P/g +$
$+ 2J_1/ r^2 + J_2/ R^2)$.

ამოცანა 11.7. m=2,5 [illegible] ილა ლარტყაზე (2) მოდებულია [illegible] ალა $F = 9t^2$. განსაზღვრეთ 1 კბი[illegible] [illegible]ვის კუთხური აჩქარება t = 1 წმ მომენტში, თუ მისი რადიუსი r = 0,4 მ, ხოლო ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ J_1=2 კგმ^2.

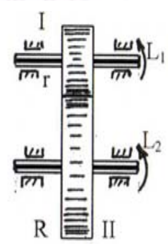


ნახ.106.

პასუხი: $\varepsilon = 1,5$ წმ$^{-2}$.

ამოცანა 11.8 კბილანა რედუქტორი შედგება ორი, I და II კბილა თვალისაგან, რომელთა მასებია შესაბამისად m_1 და m_2, ხოლო რადიუსები r და R.

I თვალზე მოქმედებს L_1 მაბრუნებელი L_1 მომენტი, რომელსაც იგი მოძრაობაში მოჰყავს, ხოლო მეორე

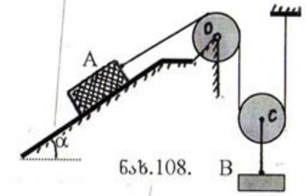


ნახ.107

თვალზე მოქმედებს დამმუხრუჭებელი მომენტი L_2=3/4·L_1. განსაზღვრეთ თვლების ε_1 და ε_2 კუთხური აჩქარებები, თუ თვლებს ჩათვლით ერთგვაროვან დისკოებად და R = 12 r . საკისრებში ხახუნი უგულებელყავით.

პასუხი: ε_1=$15L_1/ 8r^2(m_1+m_2)$;
ε_2=$5L_1/ 32r^2(m_1+m_2)$.

ამოცანა 11.9 განსაზღვრეთ m_1 მასის A სხეულის w აჩქარება, რომელიც ეშვება ქვევით ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე. ხახუნის კოეფიციენტია f. თითოეული ბლოკი წარმოადგენს r რადიუსიან m_2 მასის მთლიან წრიულ დისკოს. B ტვირთის მასა არის m_3 .



ნახ.108.

პასუხი $w = 4g[2m_1(\sin\alpha - f \cos\alpha) - m_2 - m_3]/ (8m_1+7m_2+2m_3)$.

§ 12. განზოგადებული კოორდინატები. განზოგადებული ძალა

მექანიკური სისტემის განზოგადებული კოორდინატები ეწოდება იმ დამოუკიდებელ პარამეტრებს, რომელთა მოცემითაც ცალსახად განისაზღვრება სისტემის ყველა წერტილის მდებარეობა.

იდეალური და ჰოლონომური ბმების მქონე მექანიკური სისტემის დამოუკიდებელ განზოგადებულ კოორდინატთა რიცხვს ეწოდება სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი.

s თავისუფლების ხარისხის მქონე n ნივთიერი წერტილისაგან შედგენილი არათავისუფალი მექანიკური $M_k(x_k,y_k,z_k)$ (k=1,2,…,n) სისტემის განზოგადებული კოორდინატები აღინიშნება დამოუკიდებელი q_1, q_2, …, q_s პარამეტრებით.

სიდიდეებს δq_1, δq_2, …,δq_s - ეწოდება განზოგადებული შესაძლო გადაადგილებები (ანუ განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციები), ხოლო სიდიდეებს $\dot{q}_j = dq_j/dt$ (j=1, 2,…,s) - განზოგადებული სიჩქარეები.

q_j *განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა* Q_j *ეწოდება სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების მიერ შესაძლო* δq_j *გადაადგილებაზე შესრულებულ ელემენტარულ მუშაობათა ჯამის კოეფიციენტებს:* $\delta A = Q_j\delta q_j$. (12.1)

განზოგადებული Q_j ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$Q_j = \partial \vec{r}_k/\partial q_j$; (12.2)

ანუ $$Q_j = \sum_{k=1}^{n} (X_k \partial x_k/\partial q_j + Y_k \partial y_k/\partial q_j + Z_k \partial z_k/\partial q_j)\,. \qquad (12.3)$$

სადაც $\vec{F}_k (X_k, Y_k, Z_k)$ - სისტემის M_k წერტილზე მოქმედი ძალაა.

თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციურია, მაშინ საჭიროა გამოვთვალოთ სისტემის პოტენციური ენერგია Π და გამოვსახოთ ის არჩეულ განზოგადებულ კოორდინატებში. მაშინ, q_j განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული Q_j ძალა განისაზღვრება ტოლობით: $Q_j = - \partial\Pi/\partial q_j$ ($j = 1,2,\ldots,s$). (12.4)

ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის განზოგადებული ძალის მოძებნა წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საფეხურს ლაგრანჟის II გვარის განტოლებების დახმარებით ამოცანების ამოხსნის დროს.

განზოგადებული ძალების განსაზღვრის ყველაზე გავრცელებული ხერხს წარმოადგენს სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების მიერ შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე შესრულებული ელემენტარული მუშაობების ჯამის გამოსახულების კოეფიციენტების განსაზღვრა: განზოგადებული Q_j ძალა ტოლია δq_j შესაძლო გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობის კოეფიციენტისა (იხ. (12.1) ფორმულა). ამისათვის საჭიროა:

1) დავადგინოთ მოცემული სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი და ავირჩიოთ შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატი;

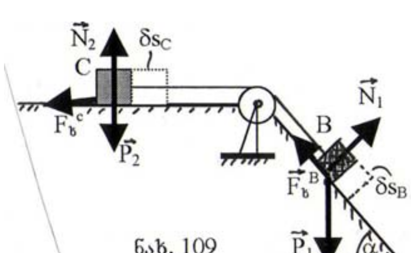
2) გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური და არაიდეალური ბმების რეაქციის (მაგალითად, ხახუნის) ძალა;

3) მივცეთ სისტემას დამოუკიდებელი განზოგადებული შესაძლო გადაადგილებები;

4) ვისარგებლოთ (12.1) ტოლობით და Q_j განზოგადებული ძალის განსასაზღვრავად გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალის მუშაობა δq_j შესაძლო გადაადგი... მასთანავე ყველა დანარჩენი შესაძლო გადაადგილება უნდა ჩავ... ულის ტოლი: $\delta q_I = 0$ ($i \neq j$, $i=1, 2, \ldots, s$).

5) თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციურია, ვისარგებლებთ (12.4) ფორმულით.

<u>**ამოცანა 12.1.**</u> P_1 წონის B ტვირთი და P_2 წონის C ტვირთი ერთმანეთთან დაკავშირებულნი არიან უძრავ ბლოკზე გადაკიდებული უწონადი და უჭიმადი ბაგირით. B ტვირთი სიმძიმის ძალის გავლენით გადაადგილდება ქვევით ჰორიზონტისადმი α კუთხით



ნახ. 109

დახრილ სიბრტყეზე და მას მოძრაობაში მოჰყავს C ტვირთი, რომელიც გადადგილდება ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f. ბლოკის მასა უგულებელყავით. განსაზღვრეთ განზოგადებული ძალა.

<u>*ამოხსნა.*</u> სისტემა შედგება ორი B და C სხეულისაგან. სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი – B სხეულის (ან C სხეულის) გადაადგილება.

მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატად B სხეულის გადაადგილება ქვევით $q_1 = s_B$. მივცეთ სისტემის B სხეულს რაიმე შესაძლო δs_B გადაადგილება. მაშინ სისტემის C სხეული მიიღებს შესაძლო δs_C გადაადგილებას. როგორც ნახაზიდან ჩანს $\delta s_B = \delta s_C$. (12.1) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\delta A = Q_s \delta s_B\,. \qquad (*)$$

განზოგადებული Q ძალის ინდექსი s მიუთითებს, რომ ეს ძალა შეესაბამება განზოგადებულ s კოორდინატს.

გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობა δA.

როგორც B, ასევე C სხეულზეც მოქმედებენ სიმძიმის ძალები, ხახუნის ძალები და ზედაპირის რეაქციის ძალები. ჩვენს მიერ არჩეული განზოგადებული კოორდინატის შესაბამის შესაძლო გადაადგილებაზე სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობა იქნება:

$$\delta A = (P_1 \sin\alpha - F_ხ^B)\,\delta s_B - F_ხ^C \cdot \delta s_C\,.$$

რადგანაც $F_ხ^B = f P_1 \cos\alpha$, $F_ხ^C = f P_2$, $\delta s_B = \delta s_C$, ამიტომ

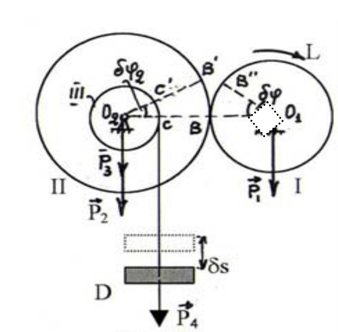
$$\delta A = (P_1 \sin\alpha - f P_1 \cos\alpha - f P_2)\,\delta s_B\,.$$

შევიტანოთ δA –ს ეს მნიშვნელობა (*) ტოლობაში და განვსაზღვროთ განზოგადებული Q_s ძალა; მივიღებთ:

$$\underline{Q_s = P_1(\sin\alpha - f \cos\alpha) - f P_2}\,.$$

განზოგადებულ ძალას აქვს ძალის განზომილება.

<u>**ამოცანა 12.2.**</u> P_1 წონის და r_1 რადიუსის I კბილა თვალი ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო მუდმივი მაბრუნებელი L მომენტის მოქმედებით. I თვალი გარე ჩაბმაში იმყოფება P_2 წონის და r_2 რადიუსის II თვალთან, რომელზედაც ხისტად მიმაგრებულია P_3 წონისა და r_3 რადიუსის დოლი (ბრუნვის საერთო ღერძით). დოლზე დახვეულია ძაფი, რომლის ბოლოზე ჩამოკიდებულია P_4 წონის D ტვირთი. I თვალის ბრუნვისას P_4 ტვირთი ადის ზევით. განსაზღვრეთ I თვალის მობრუნების φ კუთხის შესაბამისი განზოგადებული ძალა (თოკი უჭიმადია).



ნახ.110.

<u>**ამოხსნა.**</u> სისტემა შედგება ოთხი სხეულისაგან: I, II, III თვლებისა და D ტვირთისაგან .სისტემას აქვს ერთი

თავისუფლების ხარისხი - I თვალის მობრუნების φ კუთხე. მივიღოთ იგი განზოგადებულ კოორდინატად ($q_1 = \varphi$).

სისტემაზე მოქმედებენ: P_1 და P_2 ძალები – შესაბამისად I და II თვლების წონები, P_3 ძალა – დოლის წონა, P_4 ძალა –D ტვირთის წონა და L მომენტის მქონე წყვილძალა.

მივანიჭოთ სისტემის I თვალს რაიმე შესაძლო $\delta\varphi$ მობრუნება თვალის ბრუნვის მიმართულებით. მასთან ჩაბმაში მყოფი II თვალი შემობრუნდება გარკვეული $\delta\varphi_2$ კუთხით და მაშასადამე დოლიც შემობრუნდება იგივე $\delta\varphi_2$ კუთხით. დოლი დაიხვევს ძაფს და ტვირთი აიწევს ზევით; ე.ი. D ტვირთიც მიიღებს რაღაც δs შესაძლო გადაადგილებას.

განზოგადებული φ კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული Q_φ ძალა გამოითვლება ტოლობიდან (იხ. (12.1) ფორმულა):

$$\delta A = Q_\varphi \delta\varphi. \qquad (*)$$

გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა მოცემული ძალის მუშაობა შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე. კბილა თვლებისა და დოლის წონის P_1, P_2, P_3 ძალების მოდების წერტილები უძრავნი არიან, ამიტომ ამ ძალების მუშაობები ნულის ტოლია. მაშასადამე მუშაობას ასრულებენ L მომენტის წყვილძალა და ტვირთის P_4 წონა; გვექნება: $\delta A = L\,\delta\varphi - P_4\,\delta s$. (**)

გამოვსახოთ δs შესაძლო გადაადგილება $\delta\varphi$ შესაძლო მობრუნების კუთხით. როგორც ნახაზიდან ჩანს $BB'' = r_1\delta\varphi$, ხოლო $BB' = r_2\delta\varphi_2$. ვინაიდან $BB' = BB''$, ამიტომ $r_2\delta\varphi_2 = r_1\delta\varphi$; საიდანაც $\delta\varphi_2 = r_1/r_2 \cdot \delta\varphi$. ამასთანავე $\delta s = CC' = r_3\delta\varphi_2$; თუ აქ შევიტანთ $\delta\varphi_2$ –ის გამოსახულებას, გვექნება: $\delta s = r_1 r_3/r_2 \cdot \delta\varphi$.

შესაძლო მუშაობის გამოსათვლელი (**) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს: $\delta A = L\,\delta\varphi - P_4 \cdot r_1 r_3/r_2 \cdot \delta\varphi$.

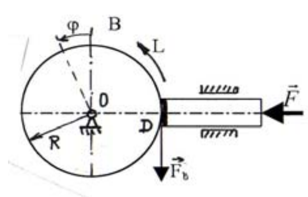
შევიტანოთ δA-ს მიღებული მნიშვნელობა (*) ტოლობაში, საიდანაც განზოგადებული ძალისა ... ვებთ

$Q_\varphi = L$ ... .

განზოგადებულ ძალას აქვს ძოძეხტის განზომილება.

დავალება. ამოხსენით იგივე ამოცანა, როცა განზოგადებულ კოორდინატად აღებულია D ტვირთის s გადაადგილება.

ამოცანა 12.3. ცილინდრი ბრუნავს ღერძის გარშემო L=20 ნმ მომენტის მქონე წყვილძალის მოქმედებით. ცილინდრს აწვება სამუხრუჭე ხუნდი F=100 ნ ძალით. განსაზღვრეთ განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა, თუ ხუნდსა და ცილინდრს შორის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი f = 0,4. ცილინდრის რადიუსი R= 0,4 მ.



ნახ.111.

ამოხსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: ცილინდრისა და ხუნდისაგან. ცილინდრზე მოქმედებს მაბრუნებელი L მომენტი და დამმუხრუჭებელი ძალა $\vec{F}_{ხ}$:

$F_{ხ} = f\,F = 0{,}4 \cdot 100 = 40$ ნ.

ცილინდრს გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი – ცილინდრის მობრუნების φ კუთხე.

მივიღოთ იგი განზოგადებულ კოორდინატად $q_1 = \varphi$. როდესაც ცილინდრი შემობრუნდება φ კუთხით, მაშინ ცილინდრისა და ხუნდის შეხების D წერტილი შემოწერს $s_D = R\varphi$ რკალს. მივცეთ ცილინდრს რაიმე შესაძლო $\delta\varphi$ შემობრუნება. მაშინ D წერტილი მიიღებს შესაძლო გადაადგილებას: $\delta s_D = R\delta\varphi$.

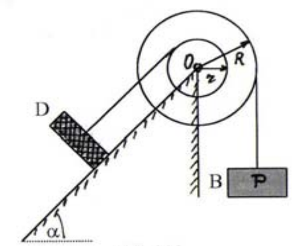
განზოგადებული Q_φ ძალა გამოითვლება ტოლობიდან: $\delta A = Q_\varphi\,\delta\varphi$. (*)

სისტემის შესაძლო δA მუშაობას ასრულებს წყვილძალა, რომლის მომენტია L და ხახუნის ძალა $F_{ხ}$. გვექნება: $\delta A = L\delta\varphi - F_{ხ}\delta s_D = L\delta\varphi - f\,FR\delta\varphi$.

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (*) ტოლობაში; მივიღებთ:

$Q_\varphi = L - f\,FR = 20 - 0{,}4\ 100\ 0{,}4 = 4$ ნმ; $\underline{Q_\varphi = 4 \text{ ნმ}}$.

ამოცანა 12.4.. P წონის B და G წონის D ტვირთები მიბმულნი არიან უწონადი და უჭიმადი თოკის ბოლოებზე. თოკი გადაკიდებულია საერთო ღერძის მქონე r და R რადიუსებიან შეწყვილებულ დოლზე. B ტვირთი სიმძიმის ძალით გადაადგილდება ქვევით, ხოლო D ტვირთი ზევით გადაადგილდება ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეთიციენტია f.



ნახ.112.

განსაზღვრეთ B ტვირთის s გადაადგილების შესაბამისი განზოგადებული ძალა.

პასუხი: $\underline{Q_s = [P - r/R \cdot G(\sin\alpha + f\cos\alpha)]}$ ნ.

§13. ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები

ნივთიერ წერტილთა (სხეულთა) სისტემის მოძრაობის შესასწავლად ხშირ შემთხვევაში სარგებლობენ დინამიკის ზოგადი განტოლებიდან გამომდინარე, ეგრეთ წოდებულ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებებით .

დაუშვათ n ნივთიერ წერტილთა სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვია s. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს s განზოგადებული კოორდნატი $q_1, q_2, \ldots, q_s$, რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის მდებარეობას სივრცეში. მაშინ დინამიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k)\delta \vec{r}_k = 0$$

განზოგადებულ კოორდინატებში მიიღებს ასეთ სახეს:

$$d(\partial T/\partial \dot{q}_j)/dt - \partial T/\partial q_j = Q_j, \quad (j = 1,2,\ldots,s), \qquad (13.1)$$

ამ განტოლებებს *ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები* ეწოდებათ.

აქ T გამოსახავს სისტემის კინეტიკურ ენერგიას, ხოლო Q_j - განზოგადებული q_j კოორდინატის შესაბამის განზოგადებულ ძალას; $\dot{q}_j$ - განზოგადებული სიჩქარეა ($\dot{q}_j = dq_j/dt$).

თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტნციურია, მაშინ

$$Q_j = - \partial \Pi/\partial q_j, \qquad (13.2)$$

სადაც Π - სისტემის პოტენციური ენერგიაა. ლაგრანჟის II გვარის (13.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$d(\partial L/\partial \dot{q}_j)/dt - \partial L/\partial q_j = 0, \quad (j = 1,2,\ldots,s), \qquad (13.3)$$

აქ $L=T-\Pi$ ფუნქციას ეწოდება *ლაგრანჟის ფუნქცია* (ან კინეტიკური პოტენციალი).

(13.1) ან (13.3) განტოლებები წარმოადგენენ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას q_j-ს მიმართ. ეს სისტემა იმდენ უცნობს შეიცავს, რისი ტოლიც არის სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. თუ მოვახდენთ ამ განტოლებების ინტეგრებას, მივიღებთ განზოგადებულ კოორდინატებს, როგორც t დროის ფუნქციებს. ინტეგრების მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით.

ლაგრანჟის მეორე გვარის ...ების დახმარებით დინამიკის ამოცანების ამოხსნა სასურველია ჩატარდეს შემდეგი თანამიმდევრობით:

1) პირველ ყოვლისა საჭიროა დადგინდეს განსახილველი სხეულის ან სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. თავისუფლების ხარისხის წინასწარი დადგენა საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ საძიებელ განზოგადებულ კოორდინატთა რაოდენობა, ე.ი. დავადგინოთ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებათა რაოდენობა;

2) ავირჩიოთ სისტემის თავისუფლების ხარისხის ტოლი რაოდენობის განზოგადებული კოორდინატები (q_j). ამოცანის ამოხსნის სიმარტივე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად მარჯვედ ავირჩევთ განზოგადებულ კოორდინატებს; ეს კი შესაძლებელია გარკვეული პრაქტიკის შედეგად.

3) დავწეროთ არჩეული განზოგადებული კოორდინატებისათვის ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები;

4) გამოვთვალოთ არჩეული განზოგადებული კოორდინატების შესაბამისი სისტემის განზოგადებული ძალები (Q_j).

5) გამოვთვალოთ განსახილველი სისტემის კინეტიკური ენერგია (T) და გამოვსახოთ იგი არჩეული განზოგადებული q_j კოორდინატების და განზოგადებული $\dot{q}_j$ სიჩქარეების საშუალებით;

6) მოვძებნოთ კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\partial T/\partial q_j; \qquad \partial T/\partial \dot{q}_j; \qquad d(\partial T/\partial \dot{q}_j)/dt.$$

7) მიუთითოთ საწყისი პირობები (განზოგადებული კოორდინატებისა და განზოგადებული სიჩქარეების საწყისი მნიშვნელობები), როცა წერტილთა სისტემა იწყებს მოძრაობას.

8) მიღებული სიდიდეები ჩავსვათ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებებში და ამოვხსნათ ისინი, ისე, რომ დაკმაყოფილდეს საწყისი პირობები.

თუ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციურია, მაშინ, სისტემის პოტენციურ ენერგიას (Π) გამოვსახავთ განზოგადებული კოორდინატებით, შევადგენთ ლაგრანჟის ფუნქციას (L) და გამოვიყენებთ (13.3) განტოლებებს.

ამოცანა 13.1. P_2 წონის და r რადიუსის მთლიანი წრიული დოლი, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ჰორიზონტალური 0 ღერძის გარშემო, მოძრაობაში მოდის მასზე დახვეული უწონადი და უჭიმადი თოკის ბოლოში მიბმული P_1 წონის B ტვირთის საშუალებით. განსაზღვრეთ ტვირთის აჩქარება, თუ ხახუნს უგულებელვყოფთ.

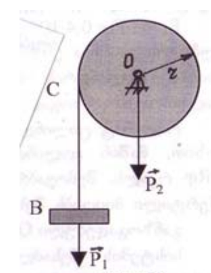
ამოხსნა. მოცემულია ორი სხეულისაგან შედგენილი სისტემა: B ტვირთი და 0 ცილინდრული დოლი. სისტემას გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი. სისტემის მოძრაობა სავსებით ხასიათდება თოკის CB= s სიგრძის ცვალებადობით. მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატად s მანძილი: $q_1 = s$

ლაგრანჟის II გვარის განტ... შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

$$d(\partial T/\partial \dot{s})/dt - \partial T/\partial s = Q_s. \qquad (1)$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული s კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული Q_s ძალა. გამოვიყენოთ ტოლობა:

$$\delta A = Q_s\, \delta s, \qquad (2)$$



ნახ.116.

სადაც δA – სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობაა, δs – B სხეულის შესაძლო გადაადგილება.

B სხეულის შესაძლო δs გადაადგილებისას დოლი შემობრუნდება შესაძლო δφ კუთხით, ხოლო

სისტემაზე მოქმედი და ძალების მიერ შესრულებული ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი იქნება $\delta A = P_1\,\delta s$,
(P_2 მოდებულია უძრავ 0 წერტილში). მაშასადამე (2) ტოლობიდან გვექნება: $P_1\delta s = Q_s\,\delta s$

საიდანაც $\underline{Q_s = P_1}$. (3)

განსახილველი სისტემის კინეტიკური ენერგია შედგება B ტვირთისა და ცილინდრული დოლის კინეტიკური ენერგიებისაგან: $T = T_1 + T_2$.

B ტვირთი ასრულებს გადატანით მოძრაობას $v_B=\dot s$ ($\dot s = ds/dt$) სიჩქარით, ამიტომ $T_1 = 1/2\cdot m_B v_B^2$, ანუ $T_1 = P_1/2g\cdot\dot s^2$.

დოლი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას 0 ღერძის გარშემო, ამიტომ

$$T_2 = 1/2\cdot J_0\,\omega^2,$$

სადაც $J_0 = P_2/2g\cdot r^2$, ხოლო ω - დოლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა. ვინაიდან $v_C=v_B=\dot s$, ხოლო $v_C=\omega r$, ამიტომ $\omega=\dot s/r$; მაშასადამე გვექნება: $T_2 = 1/2\cdot P_2/2g\cdot r^2\cdot(\dot s/r)^2$, ანუ $T_2= P_2/4g\cdot\dot s^2$.

თუ მხედველობაში მივიღებთ T_1 და T_2-ს მნიშვნელობებს, მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$T = P_1/2g\cdot\dot s^2 + P_2/4g\cdot\dot s^2, \quad ანუ \quad \underline{T = (2P_1+P_2)/4g\cdot\dot s^2}.$$

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\partial T/\partial s = 0;$$
$$\partial T/\partial\dot s = (2P_1+P_2)/2g\cdot\dot s$$
$$d(\partial T/\partial\dot s)/dt = (2P_1+P_2)/2g\cdot\ddot s.$$

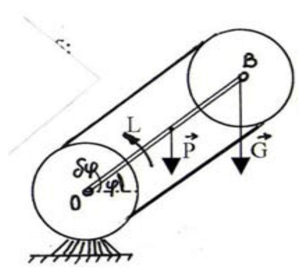
თუ ამ მნიშვნელობებს და Q_s-ის მნიშვნელობას (3) –დან შევიტანთ ლაგრანჟის II გვარის (1) განტოლებაში, მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას განზოგადებული s კოორდინატის მიმართ:

$$(2P_1+P_2)/2g\cdot\ddot s = P_1,$$

საიდანაც განისაზღვრება B ტვირთის აჩქარება: $w = \ddot s = 2P_1 g/(2P_1+P_2)$.

დავალება: მიიღეთ მხედველობაში, რომ სისტემაზე მოქმედებენ მხოლოდ სიმძიმის ძალები. გამოთვალეთ სისტემის პოტენციური ენერგია Π, გამოსახეთ ის არჩეულ განზოგადებულ კოორდინატში და განზოგადებული Q_s ძალა განსაზღვრეთ (13.2) ტოლობიდან: $Q_s = -\partial\Pi/\partial q_j$.

ამოცანა 13.2. იპოვეთ ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებული მექანიზმის 0B=ℓ მრუდმხარას კუთხური აჩქარება, თუ იგი B ბოლოთი ატარებს r რადიუსის მოძრავ ბორბალს და ბრუნავს უძრავი ბორბლის 0 ცენტრის გარშემო მბრუნავი L მომენტის მოქმედებით. უძრავი და



ნახ.117.

მოძრავი ბორბლები შეერთებულია უსასრულო გაჭიმული ღვედით ისე, რომ სისტემის მოძრაობისას ღვედის სრიალს ბორბლების ფერსოზე ადგილი არა აქვს. მრუდმხარა წარმოადგენს ერთგვაროვან ღეროს და მისი წონა არის P, ხოლო ბორბლის წონა არის G.

ამოხსნა. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან:ღეროსა და მოძრავი B ბორბალისაგან (0 ცენტრის მქონე უძრავი ბორბალი მხედველობაში არ მიიღება).

სისტემას გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი – 0 წერტილის გარშემო 0B ღეროს შემობრუნების φ კუთხე. მივიღოთ იგი განზოგადებულ კოორდინატად: $q_1 = \varphi$.

სისტემის მოძრაობის შესასწავლად ლაგრანჟის II გვარის განტოლებას ექნება ასეთი სახე: $d(\partial T/\partial\dot\varphi)/dt - \partial T/\partial\varphi = Q_\varphi$. (1)

პირველყოვლისა განვსაზღვროთ სისტემაზე მოქმედი განზოგადებული ძალა Q_φ. ამისათვის გამოვიყენოთ ტოლობა: $\delta A = Q_\varphi\,\delta\varphi$,

სადაც δφ არის 0B ღეროს შესაძლო მობრუნების კუთხე. δA არის სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობა ჯამი.

სისტემაზე მოქმედებენ: მაბრუნებელი L მომენტი, 0B ღეროს P წონა და B ბორბლის G წონა. ამიტომ სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამი δφ-ს შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე იქნება

$$\delta A = L\delta\varphi - P\cos\varphi\cdot\ell/2\cdot\delta\varphi - G\cos\varphi\cdot\ell\,\delta\varphi;$$

მაშასადამე მივიღებთ, რომ $L\delta\varphi - P\cos\varphi\cdot\ell/2\cdot\delta\varphi - G\cos\varphi\cdot\ell\,\delta\varphi = Q_\varphi\,\delta\varphi$,

საიდანაც $\underline{Q_\varphi = L - 1/2\cdot\ell\,(P+2G)\cos\varphi}$.

ახლა გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია; გვექნება:

$$T = T_1 + T_2.$$

T_1 - ღეროს კინეტიკური ენერგიაა. ვინაიდან ღერო ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო, ამიტომ $T_1 = 1/2\cdot J_0\omega^2$;

აქ J_0 არის ღეროს ინერციი 0 წერტილის მიმართ: $J_0 = P/3g\cdot\ell^2$. ამასთანავე $\omega=\dot\varphi$; მაშასადაე $T_1 = 1/2\cdot P/3g\cdot\ell^2\,\dot\varphi^2 = P/6g\cdot\ell^2\,\dot\varphi^2$.

T_2 არის B ბორბლის კინეტიკური ენერგია. მოძრაობის ხასიათის მიხედვით B ბორბალი ასრულებს ბრტყელ გადატანით მოძრაობას და ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია მასათა B ცენტრის კინეტიკური ენერგიის ტოლია:

$$T_2 = G/2g\cdot v_B^2 = G/2g\cdot\ell^2\,\dot\varphi^2.$$

საბოლოოდ, მთელი მექანიზმის კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$\underline{T = \ell^2/6g\cdot(P+3G)\,\dot\varphi^2}.$$

გამოვთვალოთ კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$\partial T/\partial\varphi = 0;$

$\partial T/\partial\dot{\varphi} = \ell^2/3g\cdot(P+3G)\,\dot{\varphi}\,;$

$d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt = \ell^2/3g\cdot(P+3G)\,\ddot{\varphi}.$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები ლაგრანჟის II გვარის (1) განტოლებაში; მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას განზოგადებულ φ კოორდინატის მიმართ :

$$\ell^2/3g\cdot(P+3G)\,\ddot{\varphi} = L - 1/2\cdot\ell\,(P+2G)\,\mathrm{Cos}\varphi,$$

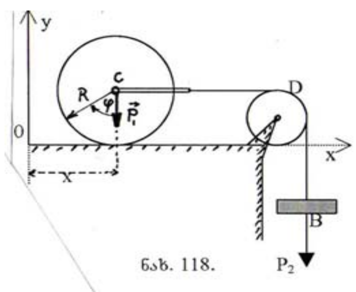
საიდანაც განისაზღვრება მრუდმხარას (ღეროს) კუთხური აჩქარება:

$$\underline{\varepsilon = \ddot{\varphi} = 3g/2\cdot[2L - \ell\,(P+2G)\,\mathrm{Cos}\varphi]/\,\ell^2(P+3G)\,.}$$

დავალება: <u>ამოხსენით იგივე ამოცანა, როცა მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში .</u>

პასუხი: $\underline{\varepsilon = 3\,L\,g\,/\,\ell^2(P+3G)\,.}$

<u>ამოცანა 13.3.</u> იპოვეთ სისტემის მოძრაობის განტოლება, თუ იგი შედგება P_1 წონის და R რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრისაგან, რომელიც უსრიალოდ გორავს უძრავ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. და P_2 წონის B ტვირთისაგან, რომელიც დაკიდებულია უწონად D ბლოკზე გადაკიდებული უჭიმადი და უწონადი თოკის ბოლოში. თოკის მეორე ბოლო მიმაგრებულია ცილინდრის C ცენტრზე. საწყის მომენტში სისტემა უძრავია.



ნახ. 118.

<u>ამოხსნა.</u> მოცემულია ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა, რომელიც შედგება ორი სხეულისაგან. სისტემის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ერთი პარამეტრით (მაგალითად: მასების C ცენტრის კოორდინატით, ან ცილინდრის შემობრუნების φ კუთხით, 84 ტვირთის გადაადგილების y კოორდინატით).

განზოგადებულ კოორდინატად ავირჩიოთ ერთ-ერთი მათგანი, ვთქვათ C წერტილის კოორდინატი q_1= x . ლაგრანჟის II გვარის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$d(\partial T/\partial\dot{x})/dt - \partial T/\partial x = Q_x\,. \qquad (1)$$

კოორდინატთა სისტემის 0 სათავე შეუსაბამოთ ცილინდრის საწყის მდებარეობას. ცილინდრი მიგორავს უსრიალოდ, ამიტომ x=Rφ, საიდანაც $\dot{x} = R\,\dot{\varphi}$.

გამოვთვალოთ სისტემის განზოგადებული ძალა Q_x, რომელიც შეესაბამება განზოგადებულ x კოორდინატს. ამისათვის გამოვიყენოთ ტოლობა: $\delta A = Q_x\,\delta x$. (2)

აქ δx არის ცილინდრის C წერტილის შესაძლო გადაადგილება. δA არის სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, მუშაობას ასრულებს მხოლოდ ტვირთის სიმძიმის P_2 ძალა: $\delta A = P_2\delta x$; ამიტომ (2)– ში ჩასმით მივიღებთ:

$P_2\,\delta x = Q_x\,\delta x$, საიდანაც $\underline{Q_x = P_2}$.

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია: $T = T_C + T_B$.

C სხეული (ცილინდრი) ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, ამიტომ კენიგის თეორემის თანახმად: $T_C = 1/2\cdot m_C v_C^2 + 1/2\cdot J_C\,\omega^2$; სადაც $m_C = P_1/g$ - ცილინდრის მასაა, $v_C = \dot{x}$ - ცილინდრის მასების ცენტრის სიჩქარე, $\omega = \dot{\varphi} = \dot{x}/R$ - ცილინდრის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე, $J_C = 1/2\cdot m_C R^2 = P_1/2g\cdot R^2$ - ცილინდრის ინერციის მომენტი. მივიღებთ:

$$T_C = P_1/2g\cdot\dot{x}^2 + 1/2\cdot P_1/2g\cdot R^2\cdot(\dot{x}/R)^2 = 3P_1/4g\cdot\dot{x}^2$$

B სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას; $v_B = v_C = \dot{x}$. გვექნება:

$$T_B = 1/2\cdot m_2 v_B^2 = P_2/2g\cdot\dot{x}^2.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება $T = (3P_1 + 2P_2)/4g\cdot\dot{x}^2$. აქედან:

$\partial T/\partial x = 0;$ $\partial T/\partial\dot{x} = (3P_1+2P_2)/\,2g\cdot\dot{x}\,;$ $d(\partial T/\partial\dot{x})/dt = (3P_1+2P_2)/\,2g\cdot\ddot{x}$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, გვექნება:

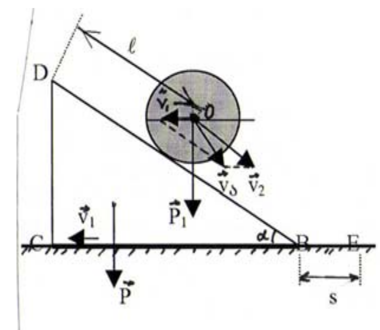
$$(3P_1+2P_2)/\,2g\cdot\ddot{x} = P_2\,;$$

აქედან: $\ddot{x} = 2gP_2\,/\,(3P_1+2P_2)$.

გავაინტეგროთ ეს უკანასკნელი გამოსახულება ორჯერ:

$\dot{x} = 2gP_2\;t\;/\;(3P_1+2P_2) + C_1;$

$x = gP_2\,t^2/\,(3P_1+2P_2) + C_1 t + C_2$.



ნახ.119.

ინტეგრების C_1 და C_2 მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა t = 0, მაშინ $x = x_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

მივიღებთ, რომ $C_1 = C_2 = 0$. მოძრაობის განტოლებას საბოლოოდ ექნება ასეთი სახე: $\underline{x = gP_2/\,(3P_1+2P_2)\cdot t^2}$.

<u>ამოცანა 13.4</u>. P წონის ABD პრიზმა მოთავსებულია გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. პრიზმის გვერდით წახნაგზე უსრიალოდ მიგორავს P_1 წონის და r რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრი. პრიზმის ფუძესთან მდებარე მახვილი კუთხეა α.

განსაზღვრეთ ცილინდრისა და პრიზმის მოძრაობის კანონი.

<u>ამოხსნა.</u> მოცემულია სისტემა, რომელიც შედგება ორი სხეულისაგან: პრიზმისა და ცილინდრისაგან. სისტემის თავისუფლების ხარისხი ტოლია ორის: პრიზმის მდებარეობა განისაზღვრება $s = BE$ მანძილით, ხოლო ცილინდრისა ℓ-ით. მივიღოთ s და ℓ განზოგადებულ კოორდინატებად. ისინი დამოუკიდებელნი არიან.

პრიზმის და ცილინდრის მოძრაობის განტოლებების დასადგენად გამოვიყენოთ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები, რომლებსაც ჩვენს მიერ არჩეულ განზოგადებულ კოორდინატების შესაბამისად ექნებათ ასეთი სახე:

$$d(\partial T/\partial \dot{s})/dt - \partial T/\partial s = Q_s; \quad (1)$$

$$d(\partial T/\partial \dot{\ell})/dt - \partial T/\partial \ell = Q_\ell \quad (2)$$

აქ T არის სისტემის კინეტიკური ენერგია, ხოლო Q_s და Q_ℓ არიან განზოგადებული ძალები.

განვსაზღვროთ არჩეული განზოგადებული s და ℓ კოორდინატების შესაბამისი განზოგადებული ძალები Q_s და Q_ℓ. ამისათვის მივცეთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, როცა ℓ ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას (ℓ=const), ხოლო s შეიცვლება δs-ით. ე.ი. პრიზმა და ცილინდრი, როგორც ერთი მთლიანი სხეული, გადაადგილდება ჰორიზონტალური სიბრტყის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში P და P_1 ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა δs გადაადგილებაზე იქნება ნულის ტოლი, ე.ი. $\delta A = Q_s \delta s = 0$,

საიდანაც $\underline{Q_s = 0}$.

ახლა განვსაზღვროთ Q_ℓ. გამოვიყენოთ ტოლობა

$$\delta A = Q_\ell \delta \ell . \quad (3)$$

ამისათვის მივცეთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, როცა ℓ შეიცვლება $\delta\ell$–ით, ხოლო s უცვლელი დარჩება (s=const); ე.ი. ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე პრიზმა არ გადაადგილდება, ხოლო ცილინდრი გადაადგილდება პრიზმაზე. ცილინდრის სიმძიმის 0 ცენტრი დაეშვება პრიზმის გასწვრივ $\delta\ell$ მანძილით. მაშასადამე იგი მიიღებს ვერტიკალურ გადაადგილებას ; ამიტომ, სიმძიმის P_1 ძალის მუშაობა ამ შესაძლო გადაად იქნება $\delta A = P_1 \sin\alpha\, \delta\ell$,

თუ გავითვალისწინებთ (3) ტოლობას, გვექნება

$$\underline{Q_\ell = P_1 \sin\alpha} \quad (4)$$

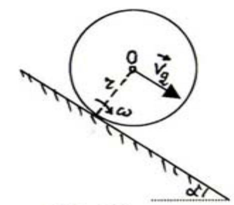
განვსაზღვროთ განსახილველი სისტემის კინეტიკური ენერგია.

სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან (პრიზმისა და ცილინდრისაგან), ამიტომ $T = T_1 + T_2$. (5)

პრიზმი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$T_1 = 1/2 \cdot m_1 v_1^2 ; \quad (6)$$

აქ $m_1 = P/g$ - პრიზმის მასაა, ხოლო v_1 - პრიზმის სიჩქარე: $v_1 = ds/dt = \dot{s}$.



ნახ.120.

ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას და მისი კინეტიკური ენერგია კენიგის თეორემის თანახმად გამოითვლება ფორმულით:

$$T_2 = 1/2 \cdot m_2 v_2^2 + 1/2 \cdot J_0 \omega^2 , \quad (7)$$

სადაც $m_2 = P_1/g$ - ცილინდრის მასაა; $J_0 = 1/2 \cdot m_2 r^2$ - ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი 0 ღერძის მიმართ; v_2 - ცილინდრის მასათა 0 ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარეა ($v_2 = v_ა$) ; ω - ცილინდრის კუთხური სიჩქარე.

წერტილის რთული მოძრაობისას სიჩქარეთა შეკრების თეორემის თანახმად $v_ა = v_ფ + v_წ$,

სადაც $v_წ = v_1 = ds/dt = \dot{s}$; $v_ფ = v_2 = d\ell/dt = \dot{\ell}$

ვინაიდან $v^2 = v_ფ^2 + v_წ^2 - 2 v_ფ v_წ \cos\alpha$,

შეგვიძლია დავწეროთ $v^2 = \dot{s}^2 + \dot{\ell}^2 - 2\dot{s}\dot{\ell}\cos\alpha$.

გარდა ამისა $v_2 = \omega r$, ანუ $\omega r = \dot{\ell}$.

ამიტომ $1/2 \cdot J_0 \omega^2 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot m_2 r^2 \omega^2 = 1/4 \cdot m_2 \dot{\ell}^2$;

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (7) ტოლობაში:

$$T_2 = 1/2 \cdot m2(\dot{s}^2 + \dot{\ell}^2 - 2\dot{s}\dot{\ell}\cos\alpha) + 1/4 \cdot m_2 \dot{\ell}^2 . \quad (8)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ და -ის მიღებულ (7) და (8) მნიშვნელობებს, მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგიისათვის გვექნება:

$$T = T_1 + T_2 = 1/2 \cdot (m_1 + m_2)\dot{s}^2 + 3/4 \cdot m_2 \dot{\ell}^2 - m_2 \dot{s}\dot{\ell}\cos\alpha .$$

ახლა განვსაზღვროთ (1) და (2) განტოლებებში შემავალი სისტემის კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\partial T/\partial s = 0;$$

$$\partial T/\partial \dot{s} = (m_1 + m_2)\dot{s} - m_2 \dot{\ell}\cos\alpha;$$

$$d(\partial T/\partial \dot{s})/dt = (m_1+r \quad \cos\alpha;$$

$$\partial T/\partial \ell = 0;$$

$$\partial T/\partial \dot{\ell} = 3/2 \cdot m_2 \dot{\ell} - m_2 \dot{s}\cos\alpha;$$

$$d(\partial T/\partial \dot{\ell})/dt = 3/2 m_2 \ddot{\ell} - m_2 \ddot{s}\cos\alpha..$$

აქ მიღებული გამოსახულებების და Q_s და Q_ℓ -ის მნიშვნელობების გათვალისწინებით ლაგრანჟის II გვარის (1) და (2) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს: $(m_1 + m_2)\ddot{s} - m_2 \ddot{\ell}\cos\alpha = 0$;

$$-m_2 \ddot{s}\cos\alpha + 3/2 m_2 \ddot{\ell} = P1 \sin\alpha .$$

ამოვხსნათ ეს სისტემა $\ddot{s}$ - ის და $\ddot{\ell}$ - ის მიმართ, მივიღებთ:

$\ddot{s}$ = P_1 Sin2α / [3(P + P_1) – 2P_1 $Cos^2α$] ;

$\ddot{\ell}$ = P_1(P + P_1) Sinα/ [3(P + P_1) – 2P_1 $Cos^2α$] .

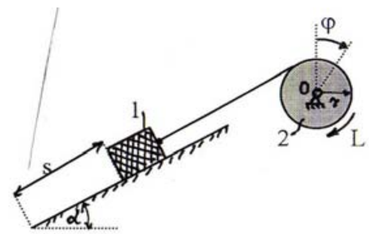
ამ გამოსახულებების მარჯვენა მხარეს მუდმივი სიდიდეები გვაქვს. აქედან ჩანს, რომ პრიზმა და ცილინდრი თანაბრად აჩქარებულად მოძრაობენ.

ამოცანა 13.5. I და II ბორბლების წონებია შესაბამისად P_1 და P_2, ხოლო ტვირთის წონაა P.

შვეულად ვარდნისას B ტვირთი შლის ბორბალზე დახვეულ თოკს და უსრიალოდ აბრუნებს ორივე ბორბალს. ბორბლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან მთლიან ცილინდრებად. განსაზღვრეთ B ტვირთის აჩქარება.

პასუხი: w = 2Pg / (P1 + P2 + 2P) .

ამოცანა 13.6. მექანიკური სისტემა შედგება m = 20 კგ მასის 1 სხეულისაგან და 2 ცილინდრისაგან, რომლის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ J_0=2 კგ$მ^2$. სისტემას აქვს კინეტიკური ენერგია T = 35 $\dot{s}^2$.

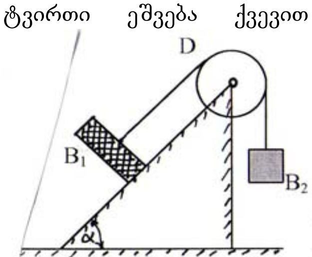


ნახ.122.

განსაზღვრეთ 1 სხეულის აჩქარება, თუ ცილინდრზე მოქმედი წყვილძალის მომენტი L= 20 ნმ, რადიუსი r = 0,2 მ; α = 20^0.

პასუხი: w_1 = 0,47 მ/$წმ^2$.

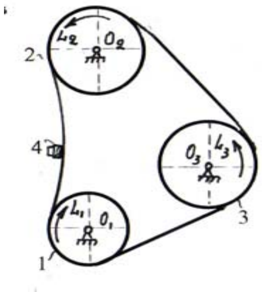
ამოცანა 13.7. m_1 მასის B_1 ტვირთი ეშვება ქვევით ჰორიზონტისადმი α კუთხით დახრილ გლუვ უძრავ სიბრტყეზე . უწონადი და უჭიმადი თოკის საშუალებით მას მოძრაობაში მოჰყავს m_3 მასის და r რადიუსის A ბლოკი და m_2 მასის B_2 ტვირთი. ბლოკი ჩათვალეთ მთლიან ერთგვაროვან დისკოდ და განსაზღვრეთ მისი კუთხური ε აჩქარება.



ნახ.123.

პასუხი: ε = 2g(m_1 Sinα - m_2) / r (2m_1 + 2m_2+ m_3) .

ამოცანა 13.8. ავტომანქანა "□□□–2107’’–ის განმანაწილებელი მექანიზმის ჯაჭვური გადამცემი შედგება 1-ლი მუხლა ლილვის წამყვანი კბილანასგან, მე-2 განმანაწილებელი ლილვის ამყოლი კბილანასგან და მე-3 ზეთის ტუმბოს ამყოლი კბილანააგან. ჯაჭვის დაჭიმვა ხდება დამჭიმავი მე-4 ბუნიკით. ძრავის მუხლა ლილვისაგან 1 კბილანაზე გადაეცემა მაბრუნებელი მომენტი L_1= 30 ნმ, ხოლო მე-2 და მე-3 ამყოლ კბილანებზე მოდებულია წინაღობის მომენტები, შესაბამისად L_2 = 4 ნმ და L_3 = 2 ნმ.

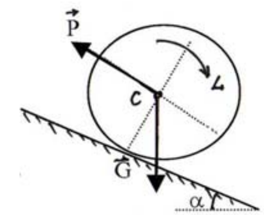


ნახ.124.

განსაზღვრეთ, როგორი კუთხური აჩქარებით ბრუნავს წამყვანი 1 კბილანა, თუ ყველა კბილანას ჩავთვლით ერთგვაროვან წრიულ დისკებად, რომელთა რადიუსებია r_1= 0,08 მ, r_2=r_3 = 0,16 მ, ხოლო მასებია m_1 = 6 კგ, m_2= m_3=12 კგ. ჯაჭვისა და ბუნიკის მასები უგულებელყავით.

პასუხი: ε = 2(L_1 – L_2·r_1/r_2 – L_3: r_1/r_3)/ (m_1+m_2+m_3) r_1^2 = 281,2 $წმ^{-2}$.

ამოცანა 13.9 ავტომანქანის r = 0,5 მ რადიუსის და m= 120 კგ მასის წამყვანი თვალი, რომლის ინერციის რადიუსია ρ = 0,3მ, უსრიალოდ მიგორავს ჰორიზონტისადმი α=10^0 კუთხით დახრილ ფერდობზე L=180 ნმ მაბრუნებელი მომენტის მოქმედებით. ამასთანავე, ავტომანქანის ჩარჩოს მხრიდან თვალზე მოქმედებს წინაღობის ძალა P = 100 ნ.



ნახ.125.

უგულებელჰყავით გორვის ხახუნი და განსაზღვრეთ თვალის კუთხური აჩქარება.

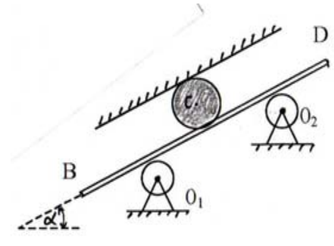
პასუხი: ε = [L +(mg Sinα - P) r] / m(r^2 + $ρ^2$) = 3,48 $წმ^{-1}$.

ამოცანა 13.10. წინა (13.9) ამოცანაში განსაზღვრეთ თვალის C ცენტრის აჩქარება (w_C) და 89 თ იგი ჰორიზონტალურ გზაზე მგორავ თვალის აჩქარებას.

პასუხი: w_C = [L +(mg Sinα - P) r] r / m(r^2 + $ρ^2$) =1,74 მ/$წმ^2$;

w_C^3 = (L - P r) r / m(r^2 + $ρ^2$) = 1,59 მ/$წმ^2$.

ამოცანა 13.11. P_1 წონის BD ღერო მოძრაობს გადატანითად ქვემოთ,



ნახ.126.

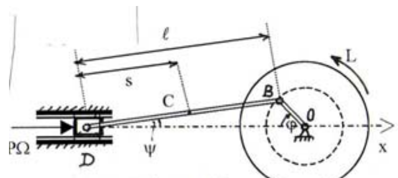
ჰორიზონტალური 0_1 და 0_2 ღერძების გარშემო აბრუნებს ორ ერთნაირ, თითოეული P_2 წონის ლილვაკს და აიძულებს უსრიალოდ იგოროლს P_3 წონის C დისკომ, რომელიც ჩაჭერილია ღეროსა და უძრავ სიბრტყეს შორის. განსაზღვრეთ დისკოს C ცენტრის აჩქარება, თუ BD ღერო და უძრავი სიბრტყე დახრილნი არიან ჰორიზონტისადმი α კუთხით.

პასუხი: $w_C = 2g(2P_1 + P_3) \sin\alpha / (8P_1+8P_2+3P_3)$.

ამოცანა 13.12. მრუდმხარა მექანიზმი შედგება m_1 მასის დგუშის, m_2 მასის AB ბარბაცას, 0B მრუდმხარას, ლილვისა და მქნევარა თვალისაგან. ბარბაცას ინერციის მომენტი მისი მასების C ცენტრის მიმართ არის J_2; 0B მრუდმხარას მქნევარა თვალისა და ლილვის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ არის J_3; დგუშის ფართობია Ω, ხოლო ზ - დგუშზე მოქმედი წნევაა; ℓ- ბარბაცას სიგრძე; s- მანძილი ბარბაცას სიმძიმის ცენტრსა და A წერტილს შორის. r - 0B მრუდმხარას სიგრძე, L - ლილვზე მოქმედი წინაღობათა მომენტი. შეადგინეთ მექანიზმის მოძრაობის განტოლება, თუ ბარბაცას მობრუნების ψ კუთხე იმდენად მცირეა, რომ

$\sin\psi \approx \psi$ და $\cos\psi=1$.

განზოგადებულ კოორდინატად მიიღეთ მრუდმხარას მობრუნების φ კუთხე. მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში.



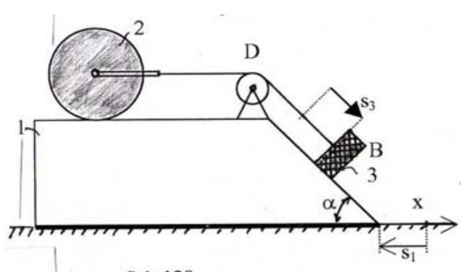
ნახ.127.

მითითება. გამარტივების მიზნით შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ φ კუთხით მობრუნების დროს, რომელსაც ქმნის მრუდმხარა ჰორიზონტალურ მიმართულებასთან, დგუშის გადაადგილება არის $x = r\cos\varphi$.

პასუხი: $[(m_1+m_2)r^2 \sin^2\varphi + (J_2+m_2s^2)\cdot(r\cos\varphi)^2/\ell^2+J_3]\, \ddot{\varphi}$ +

$+ 1/2\cdot[(m_1+m_2) - (J_2 + m_2s^2)/\ell^2]\, r^2 \sin2\varphi \cdot \dot{\varphi} = P\Omega r \sin\varphi - L$.

ამოცანა 13.13 . m_1 მასის 1 პრიზმა მოძრაობს გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე . პრიზმის ზედა წახნაგზე, რომელიც საყრდენი სიბრტყის პარალელურია, უსრიალოდ გორავს m_2 მასის ერთგვაროვანი წრიული C ცილინდრი (2) . პრიზმის დახრილ გლუვ წახნაგზე. რომელიც ჰორიზონტთან ადგენს $\alpha=60^0$ კუთხეს, სრიალებს m_3 მასის B ტვირთი (3). ცილინდრის ღერძი და ტვირთი დაკავშირებულია D ბლოკზე გადადებული უჭიმადი და უწონადი თოკის საშუალებით. D ბლოკის მასა უგულებელყავით.

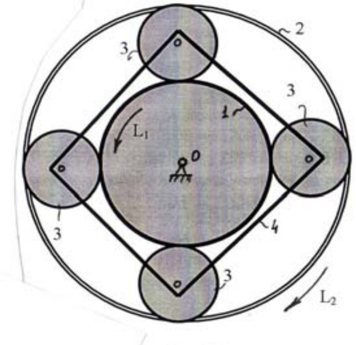


ნახ.128.

განსაზღვრეთ პრიზმის აჩქარება და ტვირთის აჩქარება პრიზმის მიმართ . მოცემულია m_1=10 კგ; m_2= 0,6m_1 ; m_3= 0,4m_1.

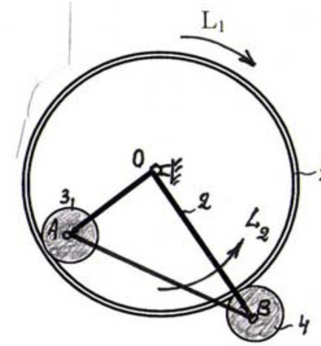
პასუხი: პრიზმის აჩქარება: $w_1 = \ddot{s}_1 = - 0,722$ მ/წმ^2;

ტვირთის აჩქარება: $w_3 = \ddot{s}_3 = 2,89$ მ/წმ^2.



ნახ.130.

ამოცანა 13.14 . ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მოთავსებულ მექანიზმში M მასის 1 კბილანას და ხისტ სამკუთხა მე-2 ჩარჩოს შეუძლიათ დამოუკიდებლად ბრუნვა ვერტიკალური 0 ღერძის გარშემო. 1-ლ კბილანაზე მოდებულია L_1 მომენტის წყვილძალა, ხოლო ჩარჩოზე – L_2 მომენტის წყვილძალა. ჩარჩოს A და B წვეროებში სახსრებით დამაგრებულია ორი ერთნაირი მე-3 და მე-4 კბილანების ცენტრები, კბილანები ჩაბმაში იმყოფებიან 1 კბილანასთან. თითოეული A და B კბილანის მასა არის m.



ნახ.129.

სისტემა მოძრაობაში მოდის უძრავი მდგომარეობიდან. იპოვეთ 1 კბილანის კუთხური სიჩქარის დამოკიდებულება t დროზე. მე-3 და მე-4 კბილანები განიხილეთ, როგორც r რადიუსის ერთგვაროვანი მთლიანი დისკოები, 1 კბილანა – როგორც R რადიუსის ერთგვაროვანი რგოლი. გამოთვლისას მიიღეთ, რომ M =2m; R=3r . ჩარჩოს მასა უგულებელყავით.

პასუხი: $\omega_1 = [(10 L_1 – 3L_2) / 243\, m\, r^2]t$.

ამოცანა13.15. ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მოთავსებულ პლანეტარულ მექანიზმში 1 და 2 კბილანები ბრუნავენ სიმეტრიის საერთო ვერტიკალური 0 ღერძის გარშემო. 1-ლ კბილანაზე მოდებულია L_1 მომენტის წყვილძალა, ხოლო მე-2 კბილანაზე – L_2 მომენტის წყვილძალა. ოთხი ერთნაირი კბილანა (3) ჩაბმაში იმყოფება 1 და 2 კბილანასთან. მათი ცენტრები შეერთებულნი არიან მე-4 კვადრატული ჩარჩოთი ისე, რომ ამ კბილანებს შეუძლიათ ბრუნვა ჩარჩოს წვეროებში გამავალი ვერტიკალური ღერძების გარშემო. 1, 2 და 3 კბილანების მასებია შესაბამისად m_1, m_2 და m_3. საწყის t_0= 0 მომენტში სისტემა იყო უძრავ მდგომარეობაში.

განსაზღვრეთ 1 და 2 კბილანების კუთხური სიჩქარეები, როგორც დროის ფუნქციები, თუ მათი რადიუსები შესაბამისად არის r_1 და r_2. 1 და 3 კბილანები განიხილეთ, როგორც ერთგვაროვანი მთლიანი დისკები, ხოლო 2 კბილანა – როგორც ერთგვაროვანი რგოლი. გამოთვლისას მიიღეთ, რომ $m_1=m_2=4m_3$; მე-4 ჩარჩოს მასა უგულებელყავით.

<u>პასუხი: $\omega_1= [2(L_1 r_2 + 7L_2 r_1) / 19 m_1 r_1^2 r_2]\, t$;</u>

<u>$\omega_2= [2(11L_1 r_2 + L_2 r_1) / 19 m_2 r_1 r_2^2]\, t$</u> .

§ 14. დარტყმა

დარტყმა არის სხეულთა ხანმოკლე ურთიერთქმედება, რომლის დროსაც მათი მოძრაობის რაოდენობა იცვლება სასრული სიდიდით. ე.ი. სხეულის წერტილების სიჩქარეები დროის საკ4მაოდ მცირე შუალედში იცვლებიან სასრული სიდიდით.

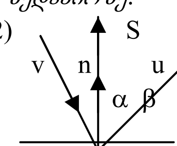
1) *დარტყმის ძირითადი განტოლება*: $mu - mv = S$; (14.1)

აქ - მასის ნივთიერი წერტილის სიჩქარე დარტყმამდე - იმავე წერტილის სიჩქარე დარტყმის შემდეგ. – დარტყმის იმპულსი.

2*) ნივთიერი წერტილის დარტყმა უძრავ გლუვ ზედაპირზე*:

აღდგენის კოეფიციენტი: $k = |u_n| / |v_n|$; $0 \le k \le 1$; (14.2)

$k = tg\alpha / tg\beta$



ნახ.131

α - დარტყმის კუთხე, β - არეკვლის კუთხე .

თუ $k = 1$ - სავსებით დრეკადი დარტყმა;

თუ $k = 0$ - სავსებით ... ადი დარტყმა

თუ $0< k < 1$ - დრე... ყმა

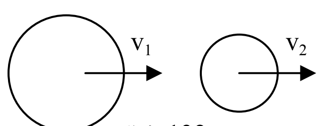
$u_\tau = v_\tau$; $u = v\, Sin\alpha Sin\beta$, ანუ $u = v\, Sin\alpha \sqrt{1 + k^2 ctg^2\alpha}$. (14.3)

პირდაპირი დარტყმისას $\alpha = 0$: $u = k\, v$; $S = m\, (1+k)v$. (14.4)

დარტყმის ორი ფაზა: I ფაზა – იმპულსი: $S_1= mv_n$;

II ფაზა – იმპულსი: $S_2= mu_n$; $S_2 = - k\, S_1$.

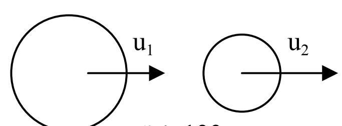
3) ორი ბირთვის პირდაპირი ცენტრალური დარტყმა:



ნახ.132.

დარტყმამდე

$v_1 > v_2$



ნახ.133.

დარტყმის შემდეგ

$u_1 \le u_2$

$k = | (u_1 – u_2) / (v_1 – v_2) | = - (u_1 – u_2) / (v_1 – v_2)$;

$u_1 – u_2= - k\, (v_1 – v_2)$. (14.5)

$S_1 = m_1\, (u_1 – v_1)$; $S_2 = - S_1$.

ა) სავსებით არადრეკადი დარტყმისას ($k = 0$):

$u_1 = u_2 =(m_1 v_1+m_2 v_2) / (m_1+m_2)$; (14.6)

$S_2 = - S_1 = m_1 m_2\, (v_1 – v_2) / (m_1+m_2)$

ბ) დრეკადი დარტყმისას ($k \le 1$):

$u_1 = v_1 – (1+k)\, m_2(v_1 – v_2)/ (m_1+m_2)$;

$u_2 = v_2 + (1+k)\, m_1(v_1 – v_2)/ (m_1+m_2)$ (14.7)

$S_2 = - S_1 = (1+k)m_1\, m_2(v_1 – v_2)/ (m_1+m_2)$.

ორი სხეულის დარტყმის დროს ხდება სხეულების კინეტიკური ენერგიების დაკარგვა (ნარჩენი დეფორმაციისა და სხეულების გათბობის ხარჯზე). ეს დანაკარგი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს აბსოლუტურად არადრეკადი დარტყმისას. სამართლიანია კარნოს თეორემა, რომლის თანახმადაც კინეტიკური ენერგიის დანაკარგი დარტყმის დროს გამოისახება ფორმულით:

$\Delta T = T_0 – T_1 = (1-k)/ 2(1+k) \cdot[m_1(v_1 – u_1)^2 + m_2\, (v_2 – u_2)^2]$;

ანუ

$\Delta T = (1-k^2)m_1\, m_2(v_1 – v_2)^2/ 2(m_1+m_2)$.

<u>*კერძო შემთხვევა*</u> : დარტყმა უძრავ სხეულზე ($v_2 = 0$):

$T_0 = 1/2 \cdot m_1 v_1^2$; $u = m_1 v_1/ (m_1+m_2)$;

$T_1 = (m_1+m_2)u^2 / 2 = m_1^2 v_1^2/2(m_1+m_2)$.;

$T_1 = m_1 T_0/ (m_1+m_2)$.

<u>ამოცანა 14.1</u>. გ... ით ორი ერთნაირი ბურთულას სიჩქარე არადრეკადი დარტ... დეგ, თუ დარტყმამდე ერთ-ერთი ბურთულა უძრავი იყო, ხოლო ძეოოე ბურთულა მოძრაობდა $v = 6$ მ/წმ სიჩქარით.

პასუხი: $u= 3$ მ/წმ.

<u>ამოცანა 14.2</u>. 12 ტ წონის ვაგონი, რომელიც მოძრაობს 2 მ/წმ სიჩქარით, ეჯახება 14 ტ წონის უძრავ ვაგონს. განსაზღვრეთ ვაგონების სიჩქარე დაჯახების შემდეგ და დარტყმის იმპულსი, თუ ჩათვლით რომ დარტყმა არადრეკადია.

პასუხი: $u = 0,92$ მ/წმ; $S= 12,92$ ტწმ.

<u>ამოცანა 14.3</u>. ორი ბურთულა, რომლებიც მოძრაობდნენ ერთმანეთის შესახვედრად $v_1= 10$ მ/წმ და $v_2= 4$ მ/წმ სიჩქარეებით, არადრეკადი დაჯახების შემდეგ გაჩერდნენ. განსაზღვრეთ პირველი ბურთულას წონა, თუ მეორე ბურთულას წონა არის 10 კგ.

პასუხი: $P_1 = 4$ კგ.

<u>**ამოცანა 14.4.**</u> რა სიმაღლიდან ვარდება 200 კგ წონის დამრტყმელი ურნალის კუტი, თუ 100 კგ წონის გრდემლზე დარტყმისას ურნალის კუტი მოძრაობს გრდემლთან ერთად 6 მ/წმ სიჩქარით.

პასუხი : $h = 4{,}1$ მ.

<u>**ამოცანა 14.5.**</u> განსაზღვრეთ ორი ერთნაირი ბურთულას სიჩქარე დრეკადი ცენტრალური დარტყმის შემდეგ, თუ ბურთულები მოძრაობენ ერთი მიმართულებით $v_1=4$ მ/წმ და $v_2= 2$ მ/წმ სიჩქარეებით. აღდგენის კოეფიციენტი $k = 0{,}8$.

პასუხი: ბურთულები მოძრაობენ იმავე მიმართულებით. $u_1= 2{,}2$ მ/წმ ; $u_2= 3{,}8$ მ/წმ.

<u>**ამოცანა 14.6.**</u> ამოხსენით წინა (14.5) ამოცანა, როცა ბურთულები მოძრაობენ ერთმანეთის შესახვედრად.

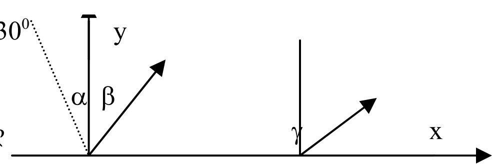
პასუხი: ბურთულები მოძრაობენ ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ

$u_1= 1{,}4$ მ/წმ; $u_2= 3{,}4$ მ/წმ.

<u>**ამოცანა 14.7.**</u> ჰორიზონტისადმი $\alpha= 30^0$ კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე, $h = 3{,}6$ მ სიმაღლიდან უსაწყისო სიჩქარით ვარდება $P=$ 20 ნ წონის ბურთულა. განსაზღვრეთ ბურთულას სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება დარტყმის შემდეგ, აგრეთვე დარტყმის იმპულსის სიდიდე, თუ აღდგენის კოეფიციენტი $k= 1/ 3$.

პასუხი: $u = 4{,}85$ მ/წმ და მიმართულია ჰორიზონტალურად. $S = 19{,}795$ ნწმ.

<u>**ამოცანა 14.8.**</u> უძრავი მდგ[illegible]ნ ბურთულა ეცემა გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ვერტიკალისადმი $\alpha = 30^0$ კუთხით. ბურთულა აისხლიტება $\beta= 45^0$ კუთხით და პარაბოლზე მოძრაობის შემდეგ კიდევ ერთხელ აისხლიტება იმავე სიბრტყიდან. განსაზღვრეთ ასხლეტის γ კუთხე და აღდგენის k კოეფიციენტი.



ნახ.134.

პასუხი: $k = 0{,}577$; $\gamma = 60^0$.

<u>**ამოცანა 14.9.**</u> ჰორიზონტალურ იატაკზე h სიმაღლიდან ვერტიკალურად ისროლეს ხის ბურთულა, რომელიც აისხლიტება $2h$ სიმაღლეზე. განსაზღვრეთ, როგორი საწყისი სიჩქარით ისროლეს ბურთულა, თუ აღდგენის კოეფიციენტი $k = 0{,}5$.

პასუხი: $v_0 = \sqrt{14\, gh}$.

<u>**ამოცანა 14.10.**</u> დამრტყმელი ურნალის კუტის წონა ორჯერ მეტია ხიმინჯის წონაზე და უდრის 2 კნ. კუტი ვარდება 1,225 მ სიმაღლიდან. როგორი სიჩქარით დაიწყებს მოძრაობას ხიმინჯი კუტთან ერთად არადრეკადი დარტყმის შემდეგ და რამდენ სანტიმეტრზე ჩაერჭობა ხიმინჯი, თუ გრუნტის წინაღობა 23 კნ ტოლია და იგი შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივად.

პასუხი: $u = 3{,}27$ მ/წმ. $h = 7{,}1$ სმ.

<u>**ამოცანა 14.11.**</u> წინა (14.10) ამოცანის პირობების მიხედვით განსაზღვრეთ ურნალის კუტის მიერ დაკარგული კინეტიკური ენერგია.

პასუხი: $T_1 – T_2= 816{,}7$ ნმ.

<u>ამოხსნები, მი[illegible]ბი</u>

§ 1. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

1.4. $\ddot{x} =16$; $\ddot{y} =0$; $X = m\ddot{x} = 3{,}2$; $Y = m\ddot{y} = 0$.

1.5. $\vec{r} = \vec{i}\, e^{2t} + \vec{j}\, \mathrm{Cos}^2 t - \vec{k}\, t^2$;

მოძრაობის განტოლებებია: $x = e^{2t}$; $y = \mathrm{Cos}^2 t$; $z = - t^2$.

ძალის გეგმილები: $X = m\ddot{x} = 4 e^{2t}$; $Y = m\ddot{y} = - 2\, \mathrm{Cos}2t$; $Z = m\ddot{z} = \underline{- 2}$.

$t_0 = 0$ მომენტში: $X = 4$; $Y = - 2$; $Z = -2$. $\underline{F =\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = 2\sqrt{6}}$.

1.6 $F_1/1 = F_2/2 = F_3/ 3$; $(F_1+ F_2+ F_3) / (1+2+3) = F_1/1$;

ვთქვათ სამივე ძალის ტოლქმედი ძალაა F; მაშინ:

$F/6 = F_1/1 = F_2/2 = F_3/ 3$; $\underline{F_1 = 1{,}5}$ ნ. $\underline{F_2 = 3}$ნ. $\underline{F_3 = 4{,}5}$ ნ.

1.7. $\vec{F}_1$ და $\vec{F}_2$ ძალების ტოლქმედი ძალაა $\vec{F} = \vec{F}_1+ \vec{F}_2$, ანუ

$\vec{F} = 4\vec{i} +4\vec{j} +4\vec{k}$; $F=4\sqrt{3}$. $Mw = F$; $\underline{w = F/m = 4\sqrt{3}}$.

1.8 ტოლქმედი ძალა: $\vec{F} = \vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3 = 6\vec{i} +0\vec{j} +8\vec{k}$;

$X=6$; $Y=0$; $Z=8$; $F=10$>

$\cos(\vec{w}, \hat{} y) = \cos(\vec{F}, \hat{} y) = Y/F = 0$; $\underline{\alpha = (\vec{w}, \hat{} y) = \pi/2}$.

1.9. $s = 8t^3$; $v = \dot{S} = 24t^2$; $w = \dot{V} = 48t$;
$t = 1$ წმ მომენტისათვის $v = 24$ სმ/წმ; $w = w_\tau = 48$ სმ/წმ^2.
ავირჩიოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა. გვექნება:
$F_\tau = mw_\tau = 2{,}4$; $F_n = mv^2/R = 3{,}2$. $F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 4$.

თუ α არის კუთხე $\vec{F}$ ძალასა და შესაბამის რადიუსს შორის, მაშინ $\underline{\operatorname{tg}\alpha = F_\tau / F_n = 3/4}$.

1.10. $s = t^2 - t + 1$. $v = \dot{S} = 2t - 1$; $w = \dot{V} = 2$. $t = 0{,}5$ წმ, $v = 0$, $w = \dot{V} = 2$.

$F_\tau = mw_\tau = m\dot{V} = 2$; $F_n = mw_n = \underline{mv^2/R} = 0$.

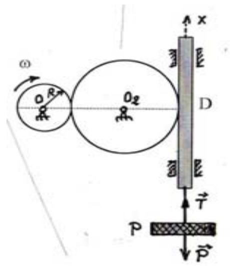
$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = 2$. $\underline{\vec{F} = 2\vec{\tau}}$ ნ.

1.11. ლილვის ფერსოზე მდებარე B წერტილისა და მაშასადამე ტვირთის სიჩქარე:
$v = \omega R = 300t$; აჩქარება: $w = \dot{V} = 300$.
ამოხსნის გაგრძელება იხილეთ 1.3 ამოცანაში.

1.12 0_1 და 0_2 დისკოს ფერსოებზე მდებარე წერტილებს აქვთ ერთი და იგივე ხაზოვანი სიჩქარე: $v = \omega R = Rkt$. იგივე სიჩქარე აქვს ლარტყას D წერტილსაც და მაშასადამე მთლიან ლარტყასაც. P ტვირთიც მოძრაობს იმავე v სიჩქარით,

ამიტომ მისი აჩქარება $w = \dot{V} = Rk$.

P ტვირთის მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე: $mw = T - P$. აქედან:
$T = P + mw = P + PRk/g$; $\underline{T = P(1 + Rk/g)}$.



1.13. $m\vec{w} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{T}$; $\vec{R}$ - წინაღობის ძალაა, $\vec{T}$ - ბაგირის დაჭიმულობა. საკოორდინატო ღერძებზე დაგეგმილებით მივიღებთ.

(x) $mw = mg\sin\alpha - R - T$; (1)

(y) $0 = -mg\cos\alpha + N$. (2)

(2)-დან: $N = mg\cos\alpha$; $R = fN = f\,mg\cos\alpha$.
(1)-დან: $mw = mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha - T$;
აქედან: $T = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - mw$. (3)

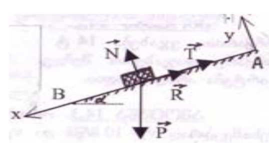
<u>*ვაგონის თანაბარი დაშვებისას*</u> $w=0$.

(3) –დან: $\underline{T = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) = 29086{,}4}$ ნ.

<u>*დამუხრუჭებისას ვაგონი მოძრაობს თანაბრადშენელებულად*</u>, სადაც: $v_0 = 1{,}6$ მ/წმ, $v = 0$, $t = 4$ წმ.

ცნობილია, რომ $v = v_0 + wt$; აქედან $w = (v - v_0)/t = -0{,}4$ მ/წმ^2.

(3) –დან: $\underline{T = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - mw = 32286{,}4}$ ნ.



1.19. $m\ddot{X} = F$; $\dot{X} = 1/m \cdot F t + c_1$; $x = 1/2m \cdot F t^2 + c_1 t + c_2$.

$t = 0$, $c_2 = x_0 = 3$; $v_0 = \dot{X}_0 = c_1$; $c_1 = 4$.
$x = 1/2m \cdot F t^2 + 4t + 3$; $x = (5t^2 + 4t + 3)$ მ.

1.20 $F_x = am\sin\omega t$; $m\ddot{X} = am\sin\omega t$; $\dot{X} = -a/\omega \cdot \cos\omega t + c_1$; (1)

$F_y = 0$; $m\ddot{y} = 0$; $\dot{y} = c_2$;

$x = -a/\omega_2 \cdot \sin\omega t + c_1 t + c_3$; (2)
$y = c_2 t + c_4$.

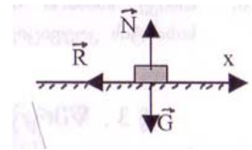
$t = 0$ მომენტში (1) - დან: $c_1 = 0$; $c_2 = 0$.
(2) - დან: $c_3 = 0$; $c_4 = 0$.

შევიტანოთ (2) –ში: $\underline{x = -a/\omega^2 \cdot \sin\omega t}$; $\underline{y = 0}$.

1.21. ავტომანქანის წონა $G = mg$; წინაღობის ძალა $R = 0{,}2\,mg$ საწყისი სიჩქარე

$v_0 = 90$ კმ/სთ $= 25$ მ/წმ ; საბოლოო სიჩქარე $v = 0$

.



$$m\vec{w} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{R} ;$$

დავაგეგმილოთ x ღერძზე: $m\ddot{X} = -R$;
$m\ddot{X} = -0{,}2\,mg$; $\ddot{X} = -0{,}2g$. გავაინტეგროთ 2-ჯერ:
$\dot{X} = -0{,}2\,gt + c_1$; (1) $x = -0{,}1\,g t^2 + c_1 t + c_2$.(2)
საწყის $t = 0$ მომენტში : $\dot{X} = v_0$; $x_0 = 0$; (1) –დან: $c_1 = v_0$; (2) –დან: $c_2 - 0$.
ავტომანქანის გაჩერების მომენტისათვის $t = t_1$ წმ-ს: $\dot{X} = v = 0$; $x = s$.
(1) – დან: $0 = -0{,}2\,g t_1 + v_0$. აქედან $\underline{t_1 = 12{,}7}$ წმ .
(2) – დან: $s - -0{,}1\,g t_1^2 + v_0 t_1 = 159$ მ. $\underline{s = 159}$ მ .

1.22. (იხ. ამოცანა 1.21.). $R = 0{,}05\,mg$; $v_0 = 72$ კმ/სთ $=20$ მ/წმ; $v = 0$.

$$m\ddot{X} = -0{,}05\,mg ;\ \ddot{X} = -0{,}05g .$$

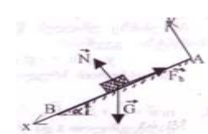
გავაინტეგროთ 2-ჯერ: $\dot{X} = -0{,}05\,gt + c_1$; (1) $x = -0{,}025\,g t^2 + c_1 t + c_2$. (2)
საწყის $t = 0$ მომენტში : $\dot{X} = v_0$; $x_0 = 0$; (1) –დან: $c_1 = v_0$; (2) –დან: $c_2 - 0$
მატარებლის გაჩერების მომენტისათვის $t = t_1$ წმ-ს: $\dot{X} = v = 0$; $x = s$.
(1) – დან: $0 = -0{,}05\,g t_1 + v_0$. აქედან $\underline{t_1 = 40{,}8}$ წმ .
(2) – დან: $s - -0{,}025\,g t_1^2 + v_0 t_1 = 408$ მ. $\underline{s = 408}$ მ .
დამუხრუჭების დაწყების მომენტში მატარებელსა და ტრაქტორს შორის მანძილი $\underline{\ell = s + 5 = 413}$ მ.

1.23 მოძრაობის დიფერენციალური ... $\ddot{X} = -k\dot{X}$. ასე ჩავწეროთ:

$m\dot{V} = -kv$, ანუ $dv/dt = -kv/m$; გახვაცალოთ ცვლადები:
$dv/v = -k/m \cdot dt$; გავაინტეგროთ: $\ell nv = -k/m \cdot t + c_1$; (1)
საწყისი პირობა: $t_0 = 0$, $v = v_0$; მაშასადამე $c_1 = \ell n v_0$. შევიტანოთ (1) ტოლობაში: $\ell n(v/v_0) = -k/m \cdot t$; აქედან $v = v_0 e^{-k/m \cdot t}$, ანუ $dx/dt = v_0 e^{-k/m \cdot t}$; გავაინტეგროთ: $x = -v_0 m/k \cdot e^{-k/m \cdot t} + c_2$; (2) როცა $t_0 = 0$, მაშინ $x_0 = 0$. (2) –დან $c_2 = v_0 m/k = 1/2$.
(2) –ში შეტანით მივიღებთ: $\underline{x = 1/2 \cdot (1 - e^{-3t})}$.

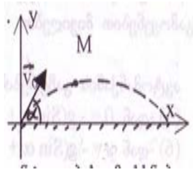
1.24 ვთქვათ კატარღის წინაღობის ძალაა $R = kmv$ (km- პროპორციულობის კოეფიციენტია). მაშინ, მოძრაობის განტოლება იქნება: $mw = -kmv$, ანუ $dv/dt = -kv$; აქედან $dv/v = -kdt$; გავაინტეგროთ: $\ell nv = -kt + c_1$; (1)
საწყისი პირობებია:$t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v = v_0 = 36$კმ/სთ$=600$ მ/წთ . (1)-დან $c_1 = \ell n v_0$; გვექნება $\ell nv = -kt + \ell n v_0$, (2). ანუ $kt = \ell n(v/v_0)$ (3). პირობის თანახმად, როცა $t_1 = 1$ წთ, მაშინ $v = 0{,}1\,v_0$; ამიტომ (3)-დან $k = \ell n(v_0/0{,}1v_0) = \ell n10$.
ჩავსვათ k-ს მნიშვნელობა (2) ტოლობაში: $\ell nv = -t\ell n10 + \ell n v_0$, საიდანაც $v = v_0 \cdot 10^{-t}$.$t = 2$ წთ-ის ბოლოს $v = v_0 \cdot 10^{-2} = 6$მ/წთ$=0{,}36$კმ/სთ. $\underline{v = 0{,}36}$ კმ/სთ.

1.25 $m\vec{w} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}$ ხგეგმილებში:
(x) $mw = mg\sin\alpha - F_ხ$; (1) (y) $0 = -mg\cos\alpha + N$. (2)



როცა $\alpha=30^0$ - მოძრაობა თანაბარია: $w=0$ (2) – დან:
$N = mg\,Cos\alpha$. ხახუნის ძალა $F_ხ = fN = f\,mg\,Cos\alpha$;
f -ხახუნის კოეფიციენტია. (1)-დან: $0 = mg\,Sin\alpha - f\,mg\,Cos\alpha$
აქედან: $f = tg\alpha = \sqrt{3}/3$.
$\beta = 45^0$ კუთხით დაშვების შემთხვევაში (1)-ის ანალოგიურად:
$mw = mg\,Sin\beta - f\,mg\,Cos\beta$; $w = g\,(Sin\beta - f\,Cos\beta) = \underline{2.93\ \text{მ/წმ}^2}$.

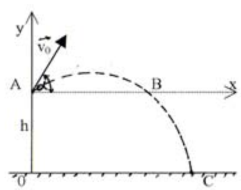
1.26. სამიზნე M წერტილის კოორდინატებია: $x=1$კმ$=1000$მ; $y=0,5$ კმ$=500$მ. ჭურვი მოძრაობს კანონით (იხ. ამოცანა 1.18, ფორმულა (ე)):



$$x = v_o t\,Cos\alpha, \quad y = -gt^2/2 + v_0 t\,Sin\alpha .$$

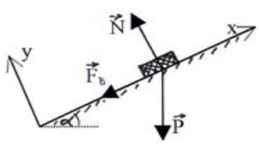
სამიზნეში მოხვედრის t_1 მომენტში: $1000=1000\,t_1\,Cos\alpha$;
აქედან $t_1 = 1/Cos\alpha$; $500 = -9,8\,t_1^2/2 + 1000\,t_1\,Sin\alpha$;
$500 = -4,9/Cos^2\alpha + 1000\,tg\alpha$;
ანუ $4,9\,tg^2\alpha - 1000\,tg\alpha + 504,9 = 0$; ამ განტოლების ამოხსნებია: $tg\alpha_1 = 203,57$, $\underline{\alpha_1=89^045'}$; $tg\alpha_2 = 0,5102$, $\underline{\alpha_2=26^050'}$ .M სამიზნეს მდებარეობის მიხედვით α_1 კუთხით გასროლა მიზანშეუწონელია. <u>პასუხი: $\alpha = 26^050'$</u> .

1.27. $0A = h = 20$კმ ; $v_0=1700$ მ$=1,7$კმ. ABC ტრაექტორიაზე მოძრაობის განტოლებებია $x=v_o t\,Cos\alpha$, (1)
$y = -gt^2/2 + v_0 t Sin\alpha$;
რაკეტის C წერტილში დაცემისას $x=0C=s$კმ; $y=-h$კმ ;



$t = T$ წმ . (1) სისტემიდან მივიღებთ $s=v_o T Cos\alpha$,
$-h = -gT^2/2 + v_0 T Sin\alpha$;
ამოვხსნათ ეს სისტემა T და s -ის მიმართ, მივიღებთ:
$\underline{T = 280,3}$ <u>წმ</u>; $\underline{s = 306,3}$ <u>კმ</u>. (აქ $g = 9,8$ მწმ$^2 = 0,0098$კმწმ^2).
განვიხილოთ მოძრაობა AB უბანზე. B წერტილში $y=0$. ვთქვათ ეს მონაკვეთი რაკეტამ გაიარა t_1 წამში. გვექნება: $0 = -gt_1^2/2 + v_0 t_1 Sin\alpha$; საიდანაც
$t_1 = 265,75$ წმ.
AB უბანზე უმაღლეს წერტილს ($y=h_1$) რაკეტა მიაღწევს $t_2=t_1/2=132,88$ წმ მომენტში.
გვექნება: $y_{max}=h_1 = -gt_2^2/2 + v_0 t_2\,Sin\alpha = 86,5$ კმ.
ტრაექტორიის სრული სიმაღლე $\underline{H = h+h_1 = 106,5}$ <u>კმ</u>.

1.28. $m\vec{w} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_ხ$. დავაგეგმილოთ ღერძებზე



(x) $mw = mg\,Sin\alpha - F_ხ$; (1)
(y) $0 = -mg\,Cos\alpha + N$. (2)
(2) – დან: $N = mg\,Cos\alpha$.
ხახუნის ძალა $F_ხ = fN = f\,mg\,Cos\alpha$;
შევიტანოთ (1)-ში, მივიღებთ: $w = g\,(Sin\alpha - f\,Cos\alpha)$. (3)
მოძრაობის საწყისი პირობები: $t = 0$: $x=x_0=0$; $v = v_0$. (4)
(3) ტოლობის ორჯერ ინტეგრებით და (4) საწყისი პირობების გამოყენებით მივიღებთ: $v = -g(Sin\,\alpha + f\,Cos\alpha)\,t + v_0$; (5) $x = -g(Sin\,\alpha + f\,Cos\alpha)\,t^2/2 + v_0 t$; (6)
ავტომანქანის გაჩერების მომენტში: $t = T$: $v = 0$; $x = s$.
(5) -დან $0 = -g(Sin\,\alpha + f\,Cos\alpha)\,T + v_0$. აქედან $\underline{T = 3,61}$ <u>წმ.</u>
(6) -დან $s = -g(Sin\,\alpha + f\,Cos\alpha)\,T^2/2 + v_0 T = 28,9$ მ. $\underline{s = 28,9}$ <u>მ</u>.

§ 2 . წერტილის ჰარმონიული რხევა

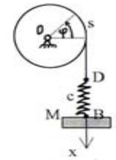
2.5. $T=\pi/5$; $P=mg=9,8$ ნ. $T=2\pi/k$; $k=2\pi/T=50$. $c=mk^2=Pk^2/g=$<u>25 ნ\სმ</u>
2.6. $T = \pi/4$; $P=mg=4,9$ნ. $k=2\pi/T=8$. $c=mk^2=Pk^2/g=4,9\cdot8^2/980=0,32$ ნ\სმ.
$F = cx$; როცა $x=1$ სმ, $F = cx =$ <u>0,32 ნ.</u>
2.7. $x = 10\,Sin7t$; ამპლიტუდა $a = 10$სმ ; $k = 7$; $c = mk^2$. $mg = c\,\delta_{სტ}$.
$mg = mk^2\delta_{სტ}$; $\delta_{სტ} = g/k^2 = 980/49 = 20$. $\underline{\delta_{სტ} = 20}$ <u>სმ</u>.
2.8. იხ. ნახ. 8. $c = 4$ ნ/სმ; $x_0 = 8$ სმ ; $a =$<u>10სმ; m</u>$=16$ კგ. $k=\sqrt{c/m} = 1/2$.
(2.5) ფორმულის თანახმად: $v_0 = k\sqrt{a^2 - x_0^2} = 3$; $\underline{v_0 = 3}$ <u>სმ/წმ</u>.
2.9. $x = 2\,Sin(kt+1)$ სმ ; $v = dx/dt = 2kCos(kt+1)$; $v_{max} = 2k$; $4 = 2k$; $k=2$. $c = mk^2 =$ <u>4 ნ/სმ</u>.
2.10. სამივე ზამბარა შეიძლება შეი~~ცვალო~~ს ერ~~თი ზამბარ~~ით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტი $c = c_1 + 2c_2$; $T=2\pi\sqrt{m/c} = \underline{2\pi\sqrt{m/(c_1+2c_2)}}$.

§ 3 . წერტილის მილევადი რხევა

3.4 $R=2mbv$; $m=P/g=9,8/980=0,01$ნ .$bT_1/2=1/2$; $b=4$; $v=1$; <u>R=0,08ნ.</u>
3.5. რხევის დიფერენციალური განტოლება: $\ddot{\varphi} + 2b\,\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$; $k^2 = g/\ell = 9,8/0,49 = 20$.
$T_1 = 2\pi/k_1$; $\pi/2 == 2\pi/k_1$; $k_1 = 4$. (3.6) ფორმულის თანახმად $k_1^2 = k^2 - b^2$. $b = 2$.
წინაღობის ძალა $R=2mbv$; პროპორციულობის კოეფიციენტი $\underline{\mu=2mb=8.}$
3.6. წინაღობის ძალა $R=2mbv$. როცა $v=1$ სმ/წმ, მაშინ $R = 0,02$ ნ; გვექნება $b=R/2mv=Rg/2Pv=9,81$. დროის რაღაც t მომენტისათვის რხევის ამპლიტუდა იყოს $A=ae^{-bt}$. ორი სრული რხევისათვის საჭიროა $2T_1$წმ. ამიტომ დროის $t_1=t+2T_1$ წმ მომენტისათვის რხევის ამპლიტუდა იქნება: $A_1 = a\,e^{-bt1} = a\,e^{-b(t+T}1^{)}$; ($bT_1 = 1$). განვიხილოთ შეფარდება: $A/A_1=e^{2bT}1 = e^2$; ამპლიტუდა შემცირდა <u>e^2 -ჯერ.</u>
3.7. იხილეთ წინა ამოცანა; t მომენტს შეესაბამება ამპლიტუდა $A=ae^{-bt}$;
$t_1=t+3T_1$ მომენტს $A1=ae^{-b(t+3T}1^{)}$; პირობის თანახმად: $A=10\,A_1$;
$10\,e^{-3bT}1 = 1$; $e^{3bT}1 = 10$; $3bT_1=\ell n10$; $\delta=bT_1/2 = \ell n10/6$ <u>= 0,3838.</u>
3.8. $R=2mbv$; $v=1$სმ/წმ , $R=0,5$ნ . $b=5$. მოძრაობის საწყისი პირობებია: $t_0 = 0$, $x_0 = 3$სმ;
$v_0 = 6$ სმ/წმ $k^2 = c/m=25$; $k_1^2=k^2 - b^2=0$. $k_1 = 0$.
რხევის დიფერენციალური განტ[illegible] $10\dot{X} + 25 = 0$. მის შესაბამის მახასიათებელ $s^2+10s+25=0$ განტ[illegible]ს ჯერადი ფესვები:
$s_1=s_2 = -5$; ამიტომ ზოგად ამონახსნს აქვს ასეთი სახე: $x=e^{-5t}(C_1+C_2t)$.
საწყისი პირობების გამოყენებით: $C_1 = 3$; $C_2 = 21$.
ამოხსნის საბოლოო სახეა: $\underline{x=e^{-5t}(3+21t)}$.
3.9. $\delta=5\pi/12$; $bT_1/2 = 5\pi/12$; $bT_1 = 5\pi/6$. $T_1 = 2\pi/k_1$; $T = 2\pi/k$.
$k^2 - k_1^2 = b^2$; $(k^2 - k_1^2)\,T_1^2 = (bT_1)^2$; $[(2\pi/T)^2 - (2\pi/T_1)^2]\,T_1^2 = (5\pi/6)^2$.
$4\pi^2(T_1/T)^2 - 4\pi^2 = 25\pi^2/36$. $(T_1/T)^2 = (13/12)^2$; $\underline{T_1 = 13/12\cdot T.}$

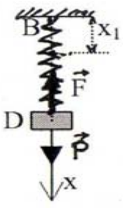
§ 4 . წერტილის იძულებითი რხევა

4.4. ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი უძრავია. F ძალის მობმედებით იწყებს იძულებით რხევას. რხევის საწყისი პირობებია: $t_0=0$; $x_0=0$; $v_0=0$. რხევის განტოლებას ექნება ასეთი სახე (იხ. (4.8) ფორმულა): $x = h/(k^2-p^2)\cdot Sinpt$. მოცემულია: $H=1,8$; $p=16$; გვექნება $h=H/m=720$, $k^2 = c/m = cg/p = 400$. $A = h/(k^2-p^2) = 5\cdot$
რხევის განტოლება: <u>$x = 5\,Sin16t$ სმ</u>.
4.5. ზამბარის D ბოლო ირხევა კანონით: $x_D=s=r\varphi=r\varphi_0 Sinpt$. M ტვირთზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა: $F=c\,x_D=c\,r\,\varphi_0\,Sinpt$. $H = c\,r\,\varphi_0$;



(4.2) ფორმულის თანახმად: $h = H/m = c\,r\,\varphi_0/m$. $k^2=c/m$.
1) $p \neq \sqrt{c/m}$; ამპლიტუდა $A=h/(k^2-p^2) = c\,r\,\varphi_0/(c-mp^2)$.
(4.8) ფორმულის თანახმად: $\underline{x = c\,r\,\varphi_0/(c-mp^2)\,Sinpt}$ . .
2) $p = k = \sqrt{c/m}$; $A=h/2k\cdot t$;
(4.10) ფორმულის თანახმად: $\underline{x = c\,r\,\varphi_0/2mp\cdot t\,Cospt}$.

4.6. ზამბარის D ბოლოს ჰარმონიული რხევის პერიოდი T= 0,8 წმ. $T=2\pi /k$; $k=5\pi/2$. ზამბარის B ბოლოზე მოქმედებს შემაშფოთებელი $Q=H \sin pt$ ძალა, რომლის რხევის პერიოდი $T_1=1{,}2$ წმ. $T_1= 2\pi/ p$; $p = 5\pi / 3$. B ბოლოს რხევის ამპლიტუდა H =3. მაშასადამე $x_1=3 \sin(5\pi t/3)$.



D ტვირთზე მოქმედებს სიმძიმის P ძალა და ზამბარის დაჭიმულობის ძალა $F=c(x_1 + \delta_{\text{სტ}}+x)$. ზამბარის სტატიკური წონასწორობისას $P=c\, \delta_{\text{სტ}}$. ტვირთის რხევის დიფერენციალური განტოლება ასეთია: $m \ddot{X} = P – F$, ანუ $m \ddot{X} = c\, \delta_{\text{სტ}} - c(x_1 + \delta_{\text{სტ}}+x)$.

აქედან $\ddot{X} + k^2x =h \sin(5\pi t/3)$., სადაც $k^2 =c / m$; $h= 3c/m=3k^2=75\pi^2/4$.

D ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლებაა: $x=h/ (k^2-p^2)\cdot \sin(5\pi t/3)$.
იძულებითი რხევის ამპლიტუდა: $A= h/ (k^2-p^2) =5{,}4$.. $\underline{A=5{,}4 \text{ სმ}}$.

4.7. $\varphi = \omega t = 2t$. $0E = x = 0A \sin\varphi=10 \sin 2t$. $k^2 = c / m= 12{,}25$.
კულისა ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ამიტომ ზამბარის B ბოლოც მოძრაობს კანონით $x=10\sin 2t$; M ტვირთზე იმოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $F= cx = 50 \sin 2t$; $p=\omega=2$; $H=50$; $m= Q/g$;
$h = H/ m = HQ / g = 50\cdot 980 / 400 = 122{,}5$; ამპლიტუდა:
$A= h/ (k^2-p^2) = 14{,}848$; რხევის განტოლება: $\underline{x=14{,}848 \sin 2t \text{ სმ}}$.

4.8. იხ. წინა 4.7 ამოცანის ამოხსნა: $\varphi=\omega t$; B წერტილი და მაშასადამე E წერტილი მოძრაობს კანონით: $x = 10 \underline{\sin\omega t}$; $\omega=p$; $k_2=12{,}25$.
რეზონანსის შემთხვევაში: $p = k = \sqrt{12{,}25} = 3{,}5$; $\underline{\varphi = 3{,}5 t}$.

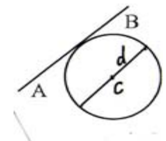
4.9. $\varphi=\omega t=6t$ რად. პარალელური ზამბარები შევცვალოთ მათი ტოლფასი c_1 სიხისტის ზამბარით: $c_1 = 2c = 13{,}6$. BD კულისა მოძრაობს გადატანითად.
$X_E = 0E = 0A \cdot\sin\varphi = 7{,}5 \sin 6t$.. M ტვირთზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა $F=c_1x=102 \sin 6t$; $H=102$; $p =6$; $k^2 = c_1/m=c_1g / Q=136$. $k =11{,}66$. $h = H/m =1020$.
წინაღობის კოეფიციენტი $b = k =11{,}66$. რხევის საწყისი ფაზაა β;
(4 .4) ფორმულის თანახმად: $tg\beta= - 2bp/(k^2-p^2) =- 1{,}3992$; $\beta=-54^0 25'$;
რადიანებში $\beta=-0{,}95$. (4.6) ფორმულის თანახმად, იძულებითი რხევის ამპლიტუდა
$A = h/ \sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2} = 5{,}93$.
(4.5) ტოლობის თანახმად, იძულებითი რხევის განტოლება იქნება:
$\underline{x = 5{,}93 \sin(6t – 0{,}95) \text{ სმ}}$.

4.10. $R= 2mbv$. $2mb=1{,}2$; $b=6$. იძულებითი რხევის კუთხური სიხშირე $p=\omega_{0A}=\omega$. წინა, 4.9 ამოცანის პირობის თანახმად, შემაშფოთებელი ძალა $F=c_1x=102 \sin 6t$; $H=102$; $\underline{p =6;\ k^2 = c_1/m} = c_1g / Q =\underline{136 .\ \ k=11{,}66}$.
$h = H/m =1020$. ამპლიტუდა: $A =h/\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2} = 1020/ \sqrt{(136^2-\omega^2)^2+144\omega^2}$
იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს ($A=A_{max}$), როცა გამოსახულება $f(\omega) = (136^2-\omega^2)^2+144\omega^2$ იღებს უმცირეს მნიშვნელობას (min-ს). ვიპოვოთ $f(\omega)$ –ს min – ი: $f'(\omega)=0$ განტოლებიდან $\underline{\omega = 8}$ წმ$^{-1}$. ე.ი. $p=\omega=8$;
$f(8) =14400$; გვექნება $A_{max} = 1020/ \sqrt{14400} = 8{,}5$ სმ. $\underline{A_{max} = 8{,}5 \text{ სმ}}$.
$tg\beta=- 2bp/(k^2-p^2) =- 4/ 3$.$\beta=- arctg(4/ 3)$; რხევის განტოლება: $\underline{x=8{,}5 \sin[8t- arctg(4/ 3)]}$;
<u>რეზონანსის შემთხვევაში</u>: $k=p =11{,}66$. ამპლიტუდა: $\underline{A=h/2bk=7{,}289}$;
რხევის განტოლება: $\underline{x = - 7{,}289 \cos 11{,}66t \text{ სმ}}$.

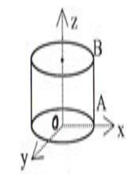
4.11. $h = H/m$; $p=\sqrt{c/m}$; $k^2 = c/m$. წინაღობის ძალა $R=2mbv$; $2mb=\mu$; $b=\mu/2m$; იძულებითი რხევის ამპლიტუდა წინაღობის მქონე გარემოში გამოისახება (4.6) ფორმულით: $A = h/ \sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2} = (H/m) / \sqrt{(c/m – c/m)^2 +4\cdot(\mu^2/4m^2) \cdot c/m}$;
$\underline{A = H/\mu \cdot\sqrt{m/c}}$.

§ 5. მასების ცენტრი. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი

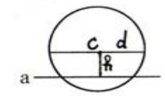
5.7. $J_{AB} = J_d + MR^2 = 1/4\, MR^2 + MR^2 = 5/4\, MR^2$.
$\underline{J_{AB} = 5/4\, MR^2}$.



5.8. $J_{AB} = J_{0z} + MR^2 =$
$= 1/ 2\, MR^2 + MR^2 = 3/2$. $\underline{J_{AB} = 3/2\, MR^2}$.



5.9. $J_a = J_d+ Mh^2 =$
$=1/ 4\, MR^2 + M (R/4)^2 = 5/16\, MR^2$.
$\underline{J_d = 5/16\, MR^2}$.



5.10. $J_z =J_z^{\text{ღ}} + J_z^{\text{მ ქ}}$; $J_z^{\text{ღ}} =1/2\cdot M_1r^2 = P_1/2g\cdot$;
$J_z^{\text{მქ}}= 1/2\cdot M_2R^2 =P_2/2g\cdot$; $\underline{J_z = (P_1r^2 + P_2R^2)/2g}$.

5.11. აღვნიშნოთ: M - რგოლის მასა; m - ამოჭრილი ნაწილის მასა. (M+m) - მთლიანი დისკოს მასა. ρ- დისკოს სიმკვრივე. მაშინ $M=\pi(R^2-r^2)\rho$, საიდანაც $\rho=M/\pi(R^2-r^2)$; $M =P/ g$. $m=\pi r^2\rho=Mr^2/ (R^2-r^2)$;
$J_c= J_{1c} - J_{2c}=(M+m)R^2/2–mr^2 /2 =MR^4/2(R^2-r^2)-Mr^4/2(R^2-r^2)=M(R^2+r^2)/2$.
$\underline{J_c = P(R^2+r^2) / 2g}$.

5.12. იხილეთ 5.5 ამოცანის ამოხსნა

5.13. d – დიამეტრია; $J_x = J_d = Mr^2/ 4$ ა დიამეტრის პარალელურია:
$J_y = J_d+Ma^2 = Mr^2/4 + Ma^2 = M(r^2$- $= J_c+Ma^2 = Mr^2/2 + Ma^2 = M(r^2+2a^2)/2$.
დისკო სიმეტრიულია x და z ღეოთეიის თითართ, ამიტომ $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$.

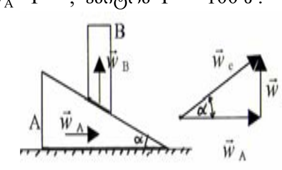
5.14. $v_1=\pi r_1^2h_1$; $v_2= \pi r_2^2h_2$; $v_3= \pi r_3^2h_3$; $m_1=v_1\rho$; $m_2=v_2\rho$; $m_3=v_3\rho$.
$J_z = J_z^1+ J_z^2+ J_z^3 = (m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2)/2 =\pi\rho(r_1^4h_1+r_2^4h_2+r_3^4h_3)/ 2 = \underline{96{,}86 \text{ კგმ}^3}$.

5.15. ინერციის რადიუსი: $\rho = \sqrt{J/ m}$;
დისკოსათვის: $J_1 = mr^2 / 2$; $\rho_1= \sqrt{J_1/ m} = r/ \sqrt{2}$;
რგოლისათვის: $J_2 = mr^2$; $\rho_2 = \sqrt{J_2/ m} = r$;
ღრუ ცილინდრისათვის: $J_3= m(r^2+r^2/4) /2=5mr^2/ 8$; $\rho_3=\sqrt{J_3/ m} = r\sqrt{5/8}$;
კონუსისათვის: $J_4 = 3mr^2/ 10$; $\rho_4 = \sqrt{J_4/ m} = r \sqrt{3/10}$;
$\underline{\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4 = 1/\sqrt{2} : 1 : \sqrt{5/8} : \sqrt{3/10}.}$

§ 6. მასების ცენტრის მოძრაობა

6.5. A ტვირთის აჩქარებატოლია დოლის ფერსოს წერტილის მხები აჩქარებისა:
$w_A = w_B = \varepsilon R = 2$. ტვირთი მოძრაობს კანონით: $mw_A =F^{(\text{გ})}$; ამიტომ $F^{(\text{გ})} =100$ ნ .

6.6. $w_A=w$; $M \vec{W}_c=\sum m_k \vec{W}_k$;
$M \vec{W}_c = m_A \vec{W}_A+m_B \vec{W}$



$w_B = w_A tg\alpha = w\ tg\alpha$

$|M \vec{W}_c| = \sqrt{(m_A w_A)^2 + (m_B w_B)^2} = \sqrt{(P_1 w/g)^2 + (P_2 w tg\alpha/g^2}$

$Mw_c = w/g \cdot \sqrt{P_1^2 + P_2^2 tg^2\alpha}$; $M = (P_1+P_2)/g$; $\underline{w_c = w/(P_1+P_2) \cdot \sqrt{P_1^2+P_2^2 tg^2\alpha}}$

.

6.7. $F_x^{(გ)} = 0$; $x_c^0 = x_c^t$; $P_1 = 70$ ნ ; $P_2 = 30$ ნ.
საწყის $t_0 = 0$ მომენტში: $Mx_c = m_1x_1 + m_2x_2$.(1)
t მომენტისათვის ტვირთი გადაადგილდა $\ell = 40$ სმ მანძილზე დახრილი წიბოს გასწვრივ, ხოლო სოლი გადაადგილდა მარცხნივ s მანძილზე. მაშინ სოლის სიმძიმის ცენტრის აბსცისია (x_1+s), ხოლო ტვირთისა $(x_2+s-\ell\ Cos\alpha)$; გვექნება:

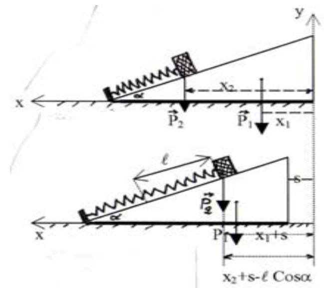
$Mx_c^t = m_1(x_1+s) + m_2(x_2+s - \ell\ Cos\alpha)$; (2)

(1) და (2) ტოლობებიდან მივიღებთ:

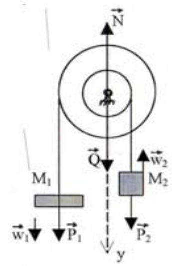
$m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(x_1+s) + m_2(x_2+s - \ell\ Cos\alpha)$;

აქედან: $s = m_2\ell\ Cos\alpha / (m_1+m_2) =$

$= P_2\ell\ Cos\alpha / (P_1+P_2) = \underline{10{,}39}$ სმ .



6.8. გამოვიყენოთ სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა y ღერძზე გეგმილებში $Mw_{cy} = \sum F_{ky}^{(გ)}$,
ანუ $Mw_{cy} = P_1+P_2+Q - N$. (*)
ამასთანავე: $Mw_{cy} = \sum m_k w_{ky}$; ვინაიდან $w_{1y} = w_1$; $w_{2y} = -w_2$,
გვექნება: $Mw_{cy} = m_1w_1 - m_2w_2$.

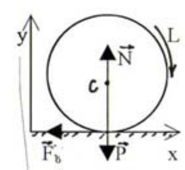


ვთქვათ ბლოკი ბრუნავს კუთხური აჩქარებით,
მაშინ $w_1 = \varepsilon\ r_1$, $w_2 = \varepsilon\ r_2$; $w_1/w_2 = r_1/r_2$; $w_2 = r_2/r_1 \cdot w_1$;
მივიღებთ: $Mw_{cy} = (P_1w_1 - P_2w_2) = (P_1w_1 - P_2r_2w_1/r_1)$ (**)
(*) და (**)-ის გატოლებით მივიღებთ:
$P_1+P_2+Q - N = (P_1r_1 - P_2r_2)w_1 / gr_1$. აქედან: $\underline{N = P_1+P_2+Q - (P_1r_1-P_2r_2)w_1 / gr_1}$.

6.9. ავტომანქანის თვალზე მოქმედებს: სიმძიმის P ძალა; L მომენტის მაბრუნებელი წყვილძალა და ხახუნის ძალა $F_ხ$.
წყვილძალის შემადგენელი ძალების გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე ნულის ტოლია. ამიტომ თვალის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები იქნებიან: $M\ddot{X}_C = -F_ხ$; ანუ $\ddot{X}_C = -fg$;

$0 = P - N$. $N = P = mg$..

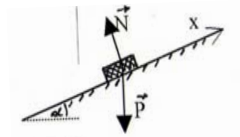
ამოხსნის გაგრძელება იხილეთ 6.3 ამოცანის ამოხსნაში.



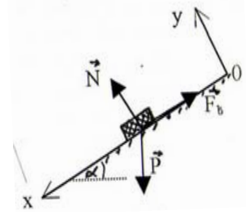
§ 7. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა

7.6. $mv - mv0 = F\ t$. $m(v =- v0) = Ft$; $\Delta v = v - v0 = Ft / m = \underline{30}$ მ/წმ.

7.7. $m\vec{V} - m\vec{V}_0 = (P+N)\ t$. საბოლოო სიჩქარე v=0;
$P = mg$. დავაგეგმილოთ ღერძზე:
$mv - mv_0 = -P\ Sin\alpha \cdot t$;
$t = v_0/\ g\ Sin\alpha = 0{,}82$; $\underline{t = 0{,}82}$ წმ.

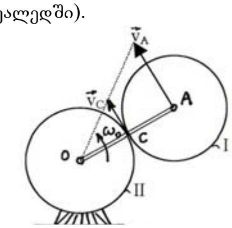


7.8. $m\vec{V} - m\vec{V}_0 = (P+N+F_ხ)\ t$,
(x): $mv - mv_0 = (P\ Sin\alpha - F_ხ)\ t$;(*)
(y): $0 = -P\ Cos\alpha + N$.
$N = P\ Cos\alpha = mg\ Cos\alpha$.
$F_ხ = f\ N = f\ mg\ Cos\alpha$; $v_0 = 0$;
(*) –დან: $mv - mv_0 = (mg\ Sin\alpha - fmg\ Cos\alpha)t$.
$v = g(Sin\alpha - f\ Cos\alpha)t = \underline{15{,}2}$ მ/წმ .



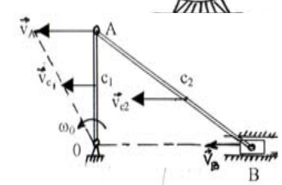
7.9. $v_0 = 72$ კმ/სთ $= 20$ მ/წმ . $m_1 = 1300$ კგ, $m_2 = 20$კგ, $Q = m_1v_0 + 4\ m_2v$;
v – ბორბლების მასების ცენტრის სიჩქარეა. მოძრაობა თანაბარია $v = v_0 =$ const ; ამიტომ: $Q = m_1v_0 + 4\ m_2v_0 = \underline{27600}$ კგმ/ წმ.
სრული იმპულსი $S = mv - mv_0 = 0$ (დროის ნებისმიერ შუალედში).

7.10. $Q = Q_{0A} + Q_1$.
I კბილანას მასების ცენტრია A ; ამიტომ: $Q_1 = m_1\ v_A$.
$v_A = \omega_0 \cdot 0A = 2\omega_0\ r$; $Q_1 = 2m_1\omega_0\ r$.
0A ღეროს მასების ცენტრია შუა C წერტილი:
$Q_{0A} = m_2v_C = m_2v_A/2 = m_2\omega_0 r$.
$Q_{0A} \perp 0A$; $Q_1 \perp 0A$; $\Rightarrow$ $Q \perp 0A$;
$Q = Q_{0A} + Q_1 = \underline{\omega_0 r\ (2m_1+m_2)}$.



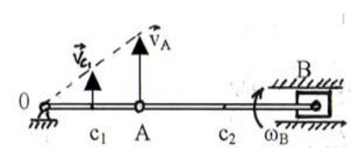
7.11. 1) $0A \perp 0B$; $Q = Q_{0A} + Q_{AB} +$

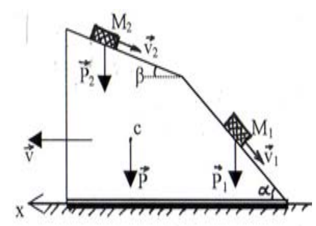
$v_A = 0A \cdot \omega_0 = a\ \omega_0$
$v_{c1} = v_A/2 = a\omega_0/2$;
$v_{c2} = v_B = v_A = a\ \omega_0$.
$Q_{0A} = m_1v_{c1} = P_1\ a\ \omega_0/2g$;
$Q_{AB} = m_2v_{c2} = P_2\ a\ \omega_0/\ g$;
$Q_B = m_3v_B = P_3\ a\ \omega_0/\ g$; $Q = a\ \omega_0(P_1+2P_2+P_3)/\ 2g$.



2) 0A მიმართულია 0B -ს გასწვრივ: $v_A = a\ \omega_0$; $v_{c1} = a\ \omega_0/\ 2$;
AB ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. ბრუნვის მყისი ცენტრია B წერტილი, ამიტომ $v_B = 0$ $v_A = AB \cdot \omega_B$;
$v_{c2} = AB \cdot \omega_B/2$;
$v_{c2} = v_A/2 = a\ \omega_0/2$.
$Q = Q_{0A} + Q_{AB} + Q_B =$
$= m_1v_{c1} + m_2v_{c2} + m_2v_{c2} + P_1 a\ \omega_0/2g + P_2\ a\ \omega_0/2g =$

$= \underline{a\ \omega_0(P_1+P_2)/\ 2g}$.





7.12. ვთქვათ M მასის პრიზმი იწყებს მოძრაობას მარცხნივ v სიჩქარით. მაშინ M_1 მასის სხეულის აბსოლუტური სიჩქარის გეგმილი x ღერძზე არის $u_1=(v-v_1\cos\alpha)$, ხოლო M_2 მასის სხეულის სიჩქარეა $u_2=(v-v_2\cos\beta)$,

$Q_{0x} = Q_x$;

საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, $Q_{0x}= 0$.

$Q_x = mv + m_1u_1 + m_2u_2$;

$Pv/ g + P_1(v-v_1\cos\alpha) / g +P_2 (v-v_2\cos\beta),/ g = 0$.

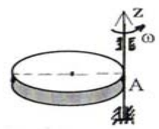
აქედან: $\underline{v = (P_1v_1\cos\alpha +P_2v_2\cos\beta) / (P+P_1+P_2)}$.

§ 8. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა

8.5. $\ell_z = J_z\ \omega$.

$J_z = J_0 + mR^2 = mR^2 / 2 +mR^2 = 3PR^2 / 2g$.

$\ell_z = 3\ PR^2\omega / 2g$.



8.6. საწყის მომენტში M წერტილს უკავია A მდებარეობა; გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. მაშასადამე , ადგილი აქვს z ღერძის მიმართ

კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონს: $\ell_z^{\,0} = \ell_z^{\,t}$. (*)

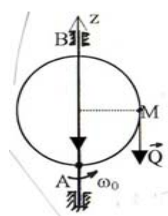
საწყის მომენტში: $\ell_z^{\,0} = \ell_z^{\,\text{დისკო}} + \ell_z^{\,M} = J_z\ \omega_0 = Pr^2\omega_0 / 4g$. ($\ell_z^{\,M}$ = 0).

წერტილი უდიდესი მანძილით დაშორებულია ჰორიზონტალურ დიამეტრზე მდებარეობისას. ამ მომენტისათვის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იყოს ω

მაშინ $\ell_z = (Jz^{\text{დ}} +Jz^{M})\ \omega = (Pr^2/4g+Qr^2/g)\omega = (P+4Q)r^2\omega/4g$.

(*)-ის თანახმად: $Pr^2\omega_0/4g = (P+4Q)r^2\omega/4g$. აქედან

$\underline{\omega=P\omega_0/(P+4Q)}$.



8.7. $\ell_z^{\,0} = \ell_z^{\,a}$. (*) საწყის მომენტში M წერტილს უკავია A მდებარეობა ფერსოზე, ამიტომ: $\ell_z^{\,0} = (J_z^{\text{დისკ}} +J_z^{A})\ \omega_0 = (Pr^2/2g + Qr^2/g)\ \omega_0 =$

$= (P + 2Q)\ r^2\ \omega_0/2g$.

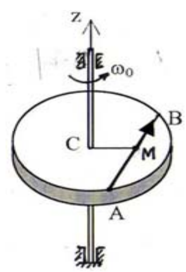
დისკოსთან ერთად AB ქორდის გასწვრივ M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას; მისი აბსოლუტური სიჩქარე იქნება: $v_M=v_{\text{ვ}} + v_{\text{წ}}$. ე.ი.$v_M = u + a\ \omega$, სადაც ω არის აღებულ მომენტში დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

M წერტილის z ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იქნება: $\omega_M = v_M / a = (u + a\ \omega)/ a$; ამ მომენტისათვის: $\ell_z^{\,a} = J_z^{\,\text{დისკ}}\omega + J_z^{M}\omega_M = Pr^2\omega/ 2g + Qa^2/g\cdot (u+a\ \omega)/ a =$

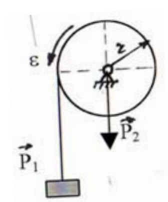
$= Pr^2\omega/ 2g + Qa(u+a\ \omega)/ g$.

(*) ტოლობის თანახმად $(P + 2Q)\ r^2\ \omega_0/2g = Pr^2\omega/ 2g + Qa(u+a\ \omega)/ g$;

აქედან: $\underline{\omega = [\ (P + 2Q)\ r^2\ \omega_0 - 2Q\ au\ ] / (Pr^2 + 2Q\ a^2)}$.



8.8. ცილინდრული დოლის ბრუნვის განტოლება: $J_0\varepsilon = L_0^{(\text{გ})}$. სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: დოლი და ტვირთი :



$J_0 = P_2\ r^2 / 2g + P_1r^2/ g = r^2(P_2 + 2P_1) / 2g$.

გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ: $L_0^{(\text{გ})} = p_1\ r$.

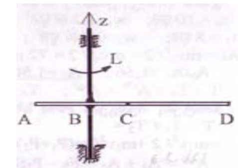
$\underline{\varepsilon = L_0^{(\text{გ})} / J_0 = 2P_1g / (2P_1 +P_2)\ r}$.

8.9. $J_z\varepsilon = L_z$. $BC = \ell/ 6$. $L_z = L$.

AD ღეროსათვის: $J_z =J_B =J_c + m\cdot BC^2 =$

$= m\ell^2/12 +m\ell^2/ 36 = m\ell^2/ 9$.

$\varepsilon = L_z / J_z = 9L / m\ell^2 = 9$.



8.10. სისტემა შედგება ორი ერთნაირი დისკოსაგან. ერთ-ერთი დისკოსათვის 0z ღერძის პარალელური ვერტიკალური დიამეტრი იყოს AB . ამ დისკოს ინერციის მომენტი 0z ღერძის მიმართ იქნება: $J_z^{01} = J_{AB} + ma^2 = PR^2 / 4g + Pa^2 / g = P(R^2 + 4a^2) / 4g$.

ორივე დისკოსათვის: $J_z = 2\ J_z^{01} = P(R^2 + 4a^2) / 4g$.

$J_z\ \varepsilon = L$; $\varepsilon = L / J_z = 2gL / P(R^2 + 4a^2)$.

8.11. ფიზიკური ქანქარა: $T = 2\pi\sqrt{J_0 / mgh}$; $h = 0C = r$.

რგოლისათვის: $J_c = P\ (R^2 + r^2) / 2g$

$J_0 = J_c + m\cdot 0C^2 = P(R^2 + r^2) + Pr^2 / g = P\ (R^2 + 3r^2) / 2g$.

რხევის პერიოდი: $T = 2\pi \sqrt{(R^2 + 3r^2) / 2gr}$.

8.12. $\omega_0 = \pi n / 30 = 20\ \pi$. დამუხრუჭებისას ხახუნის ძალა:

$F_{\text{ხ}}= f\ Q = 0{,}4\ Q$; $J_0\ \varepsilon= L_0$; $J_0 = m\rho^2 = 0\ ,9$;

ბრუნვისადმი წინაღობის მომენტი:

$L_0 =- F\ R = - 0{,}04\ Q$. $\varepsilon = L_0 / J_0$; $d\omega / dt = - 2Q / 45$;

გავაინტეგროთ: $\omega = \omega_0 - 2Q\ t / 45$;

t = 10 წმ-ის შემდეგ ლილვი გაჩერდა: $\omega= 0$;

$\omega_0 - 2Q\ t /45 = 0$; $Q = 45\ \omega_0 / 2t = 45\ \pi$. $\underline{Q = 45\pi}$ ნ.

ლილვი ბრუნავს თანაბრადშენელებულად:

$\varepsilon = L_0/ J_0 = - 2Q / 45 = - 2\pi$. $\varphi = \omega_0t + \varepsilon t^2 / 2 = 100\ \pi$; $\varphi = 2\ \pi\ N$.

ბრუნვათა რიცხვი: $N = \varphi / 2\pi =$ 50 ბრუნი .

§ 9. კინეტიკური ენერ[illegible]ვილების თეორემა

9.7. $\vec r_{\,0}(2; 2; 2)$, $\vec r_{\,1}(3; 3; 3)$; $\Delta\vec r =\vec r_{\,1} - \vec r_{\,0}= \vec i + \vec j + \vec k$; $\Delta\vec r\ (1;1;1)$.

$\vec F\ (1; 1; 1)$; $\vec F$ და $\Delta\vec r$ ვექტორები ურთიერთპარალელურია.

$\Delta\vec r$ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა $A = \vec F \cdot\Delta\vec r =3$ ჯ.

კინეტიკური ენერგიის ცვლილება: $\Delta T = T - T_0 = A =$ 3 ჯ.

9.8. $v_0 = 72$ კმ/სთ = 20მ/წმ. წინაღობის ძალა: $R = 0{,}1P = 0{,}1\ mg$;

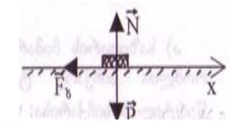
$mv^2/2 - mv_0^2/ 2 = - R\ s$; $v = 0$; $- mv_0^2/2 = - 0{,}1\ mgs$;

$\underline{s = v_0^2/ 0{,}2\ g = 204}$ მ.

9.9. $mv^2/ 2 - mv_0^2/ 2 = - F_{\text{ხ}}\ s$;

$v = 0$. $F_{\text{ხ}} = f\ N = f\ P = f\ mg$.

$- mv_0^2/ 2 = - f\ m\ g$; $\underline{f = v_0^2/ 2gs}$.

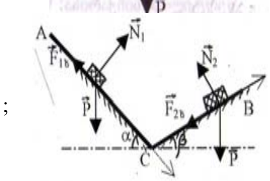


9.10. გზის AC მონაკვეთზე:

$v_0=v_A = 0$; $v =v_C$; $AC = s_1$. $f_1=tg\varphi_1$;

$mv_C^2/2- mv_A^2/2=mg\ (\sin\alpha - f_1 \cos\alpha)\ s_1$.

$v_C^2= 2g(\sin\alpha - f_1 \cos\alpha)\ s_1 = 2g\ (\sin\alpha - tg\varphi_1\cdot \cos\alpha)\ s_1$;



$v_C^2 = 2gs_1 \sin(\alpha - \varphi_1) / \cos\varphi_1$. (*)

გზის CB მონაკვეთზე: $v_0 = v_C = v$; $v_B = 0$; $CB = s_2$;

$f_2 = tg\varphi_2$; $mv_B^2/2 - mv_C^2/2 = - mg (\sin\beta + f_2 \cos\beta) s_2$.

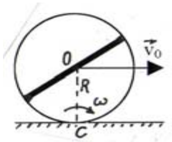
$s_2 = v_C^2 / 2g (\sin\beta + f_2 \cos\beta) = v_C^2 / 2g (\sin\beta + tg\varphi_2 \cdot \cos\beta) = v_C^2 \cos\varphi_2 / 2g \ \sin(\beta + \varphi_2)$

;

თუ მხედველობაში მივიღებთ (*) ტოლობას, გვექნება:

$\underline{s_2 = s_1 \sin(\alpha - \varphi_1) \cdot \cos\varphi_2 / \sin(\beta + \varphi_2) \cdot \cos\varphi_1}$.

9.11. დისკო და ღერო ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას .
ბრუნვის მყისი ცენტრია 0 წერტილი . $\omega = v_0 / R$.



$T = T_{დ} + T_{ღ}$. $T_{დ} = m_1 v_0^2 + J_c^{დ} \omega^2 / 2 =$

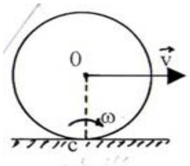
$= Pv_0^2 / 2g + PR^2/4g \cdot v_0^2 / R^2 = 3Pv_0^2/4g$.

$T_{ღ} = m_2 v_0^2 + J_c^{ღ} \omega^2 / 2 = Qv_0^2 / 2g + QR^2/6g \cdot v_0^2 / R^2 = 2Qv_0^2 / 3g$.

$T = T_{დ} + T_{ღ} = 3Pv_0^2/4g + 2Qv_0^2 / 3g = v_0^2 (9P+8Q) / 12g$.

$\underline{T = v_0^2 (9P+8Q) / 12g}$.

9.12. 00_1 ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას ($m_1 = 3m$):



$T_1 = m_1 v^2 / 2 = 3mv^2 / 2$.

თითოეული თვალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

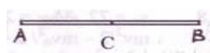
$T_2 = T_3 = m_2 v_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2$;

$v = \omega r$; $\omega = v / R$; $J_c = m_2 r^2 / 2$; ამიტომ:

$T_2 = mv^2 / 2 + mr^2 / 4 \cdot (v/r)^2 = 3mv^2 / 4$;

$T = T_1 + T_2 + T_3 = T_1 + 2T_2 = 3mv^2$. $\underline{T = 3mv^2}$.

9.13. ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას: $T = mv_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2$; (*)



$v_c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4t^2 + 4$; როცა $t = 1$ წმ, $v_c^2 = 8$;

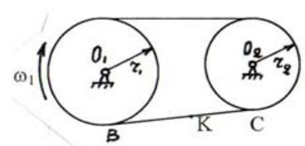
$\omega = \dot{\varphi} = 12t^2$; როცა $t = 1$ წმ, $\omega = 12$;

$J_c = m\ell^2$; (*) ტოლობაში შეტანით მივიღებთ: $\underline{T = 10}$ ჯ .

9.14. ა) საზიდარის მიმართ ტვირთი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, რომლის სიჩქარე ტოლია ჯალამბარის ფერსოზე მდებარე K წერტილის სიჩქარისა: $v_k = v_B = \omega r = 1$; ამიტომ: $T_1 = mv_B^2/2 = m/2$.

ბ) გზის მიმართ ტვირთი ასრულებს რთულ მოძრაობას: $\vec{V}_B = \vec{V}_c + \vec{V}_k$; ($\vec{V}_c = \vec{V}$). ვინაიდან $\vec{V}_c \perp \vec{V}_k$, ამიტომ: $v_B^2 = v_c^2 + v_k^2 = 5$;

მაშასადამე: $T_2 = mv_B^2/2 = 5m/2$. $\underline{T_2 : T_1 = 5}$



.

9.15. $T = T_1 + T_2 + T_3$; $T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2$; $T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2$;

$v_B = \omega_1 r_1$; $v_c = \omega_2 r_2$; $v_B = v_c$.

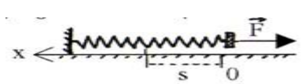
$\omega_2 = \omega_1 r_1 / r_2$; $T_2 = J_2 (r_1/r_2)^2 \omega_1^2 / 2$;

ღვედი წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემას, რომლის ყოველი წერტილის სიჩქარე ტოლია: $v_k = v_B = \omega_1 r$;

ამიტომ: $T_3 = (\sum m_k v_k^2)/2 = (\sum m_k \omega_1^2 r_1^2)/2 = \omega_1^2 r_1^2 m/2$.

$T = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 (r_1/r_2)^2 \omega_1^2 / 2 + m\omega_1^2 r_1^2 / 2$; $\underline{T = [J_1 + J_2 (r_1/r_2)^2 + mr_1^2] \omega_1^2 / 2}$.

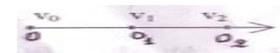
9.16. ზამბარის დეფორმაციის საწყისი სიჩქარეა v_0, საბოლოო - $v = 0$, ზამბარის უდიდესი დეფორმაცია $-s$. ზამბარაზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი (ცვალებადი) ძალა $F = c$ x .



$$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = - \int_0^s F\,dx \ ; \quad - mv_0^2 / 2 = - \int_0^s c\,x\,dx; \quad mv_0^2 / 2 = cs^2/2;$$

$\underline{s = v_0 \sqrt{m/c}}$.

9.17. გზის ორივე უბანზე მოძრაობა თანაბრადცვლადია:



$t_1 = 10$ წმ; $w_1 = 1{,}2$ მ/ წმ^2 ; $v_1 = v_0 + w_1 t_1 = 12$ მ/წმ .

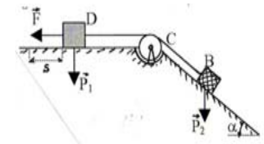
$t_2 = 8$ წმ; $w_1 = 0{,}9$ მ/ წმ^2 ; $v_2 = v_1 + w_2 t_2 = 19{,}2$ მ/წმ .

$A_1 = mv_1^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = 72\ m$; $A_2 = mv_2^2 / 2 - mv_1^2 / 2 = 112{,}32\ m$;

$A_2/A_1 = 1{,}56$; $\underline{A_2 = 1{,}56\ A_1}$.

9.18. $T - T_0 = A^{(შ)} + A^{(გ)}$; $T_0 = 0$; $A^{(შ)} = 0$; $\underline{T = A^{(გ)}}$. (*)

სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან:



$T = T_1 + T_2 = m_1 v^2 / 2 + m_2 v^2/2 = (P_1 + P_2) v^2/2g$.

$A^{(გ)} = A_1 + A_2 = Fs - P_2 \sin\alpha \cdot s$;

$A^{(გ)} = (F - P_2 \sin\alpha) \cdot s$;

(*) ტოლობის თანახმად: $(P_1 + P_2) v^2/2g = (F - P_2 \sin\alpha) \cdot s$

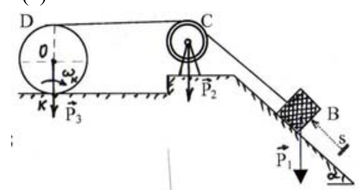
აქედან $v^2 = 2gs(F - P_2 \sin\alpha) / (P_1 + P_2)$.

თუ უკანასკნელ ტოლობას გავაწარმოებთ, მივიღებთ:

$2v \cdot w = 2g (F - P_2 \sin\alpha) / (P_1 + P_2) \cdot \dot{S}$; ($\dot{S} = v$);

აქედან: $\underline{w = g (F - P_2 \sin\alpha) / (P_1 + P_2)}$.

9.19. $T - T_0 = A^{(შ)} + A^{(გ)}$; $T_0 = 0$; $A^{(შ)} = 0$; $\underline{T = A^{(გ)}}$. (*)



$T = T_B + T_C + T_D$. $T_B = m_1 v^2/2$;

$v = v_B = v_C = \omega_C r$;

$T_C = J_C \omega_C^2 / 2 = m_2 r^2 \omega_C^2/4 = m_2 v^2 / 4$;

D საგორავი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას: $T_D = m_3 v_0^2 / 2 + J_0 \omega_k^2$;

$v_0 = v_D / 2 = v/2$; $\omega_k = v_D / 2R = v/2R$;

$T_D = m_3 v^2 / 8 + m_3 R^2/4 \cdot (v/2R$ [illegible]

$T = T_B + T_C + T_D = m_1 v^2/2$ [illegible]

$+ 3m_3 v^2 / 16 = (8m_1 + 4m$ [illegible]

სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების მუშაობა: $A = A_B + A_C + A_D = A_B = m_1 g \sin\alpha \cdot s$.

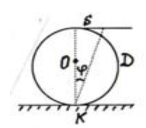
(*) ტოლობის თანახმად $T = A$; შევიტანოთ მნიშვნელობები:

$(8m_1 + 4m_2 + 3m_3) v^2/16 = m_1 g \sin\alpha \cdot s$;

აქედან $v = 4 \sqrt{m1gs \sin\alpha / (8m_1 + 4m_2 + 3m_3)} = 2{,}3$.

$\underline{v = 2{,}3}$ მ/წმ .

9.20. იხილეთ წინა 9.18 ამოცანის ამოხსნა. დაემატება D საგორავის გორვის ხახუნის მუშაობა: $A_D = - \delta N \varphi$; აქ $N = P_3 = m_3 g$;



$\varphi = s/2R$; $A_D = - \delta m_3 gs/2R$. სრული მუშაობა:

$A = A_B + A_C + A_D = (m_1 R \sin\alpha - 0{,}5\delta m_3) gs / R$.

9.21. $T - T_0 = A$. $T_0 = 0$; $T = T_B + T_C + T_D = (J_B + J_C + J_D) \omega^2 / 2 = 3P r^2 \omega^2 / 4g$;

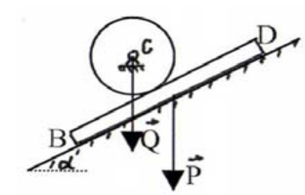
$A = L_z \varphi = L \varphi$; $3P r^2 \omega^2 / 4g = L \varphi$; აქედან: $\underline{\omega = 2/r \cdot \sqrt{Lg\varphi / 3P}}$;

კუთხური აჩქარება: $\varepsilon = d\omega / dt = 2Lg / 3P r^2$. $\underline{\varepsilon = 2Lg / 3P r^2}$.

9.22. $T - T_0 = A$. $T_0 = 0$; $T = A$. $vD = \omega r$.

$T = T_C + T_{BD} = J_C \omega^2/2 + Pv_D^2 / 2g =$

$= Q r^2 \omega^2/4g + Pv_D^2 / 2g = (2P + Q) v_D^2/4g$.



$A = A_C + A_{BD} = A_{BD} = PSin\alpha \cdot \ell$;

$(2P + Q)v_D^2/4g = P\ell\, Sin\alpha$;

$\underline{v_D^2 = 4\, Pg\ell\, Sin\alpha \,/\, (2P + Q)}$.

9.23. $T = A$. $T = 2T_1 + 2T_2 + T_3$; $v = v_{01} = v_{02}$;

ძარისათვის: $T_3 = Gv^2/2g$;

წამყვანი ბორბალისათვის: $T_2 = J_2\omega_k^2/2 = J_2v^2/2R^2$. მუშაობას ასრულებს მაბრუნებელი L მომენტი და გორვისადმი ხახუნის წინაღობის მომენტი

$M = -\,\delta\, N$; ე.ი. $A_2 = (\, L - \delta\, N)\, \varphi$.

ამყოლი ბორბალისათვის: $T_1 = J_1\omega_k^2/2 = J_1v^2/2R^2$; მუშაობას ასრულებს მხოლოდ გორვისადმი ხახუნის წინაღობის მომენტი $M = -\,\delta\, N$; ე.ი. $A_1 = -\,\delta\, N\, \varphi$.

თითოეულ ბორბალზე მოდის დატვირთვა $P = G/4$;

რეაქციის ძალა: $N = P = G/4$.

ავტომანქანს მიერ s მანძილის გავლის შედეგად თითოეული ბორბალი შემობრუნდება $\varphi = s/\, R$ კუთხით .

სისტემის კინეტიკური ენერგია:

$T = 2T_1 + 2T_2 + T_3 = J_1v^2/\, R^2 + J_2v^2/\, R^2 + Gv^2/\, 2g$;

$T = v^2[\, GR^2 + 2(J_1 + J_2)\, g] \,/\, 2\, g\, R^2$.

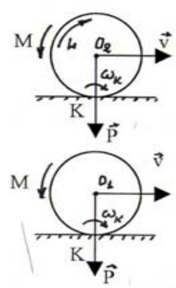
სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობა:

$A = A_1 + A_2 = (\, L - 2\,\delta\, N)\, \varphi = (\, L - 2\delta\, G/\, 4)\, s/\, R$;

$A = s\,(2L - \delta\, G) \,/\, 2R$. $T = A$.

$v^2[\, GR^2 + 2(J_1 + J_2)\, g] \,/\, 2\, g\, R^2 = s\,(2L - \delta\, G) \,/\, 2R$.

აქედან: $\underline{v^2 = 2g\, s\, R(2L - \delta\, G) \,/\, [\, GR^2 + 2(J_1 + J_2)\, g]}$.



9.24. იხილეთ წინა 9.22 ამოცანის ამოხსნა

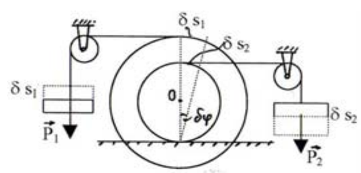
§10. შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი

10.4. $-\, P_1\delta s_1 + P_2\delta s_2 = 0$.

$\delta\, s_1 = (r_1 + r_2)\, \delta\varphi$;

$\delta\, s_2 = 2\, r_2\, \delta\varphi$;

$\delta\, s_1/\, \delta\, s_2 = (r_1 + r_2) \,/\, 2\, r_2$.



10.5. $P\, \delta s_B - M_1\delta\, \varphi_1 - M\, \delta\, \varphi = 0$;

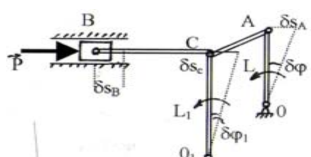
$M = (P\, \delta s_B - M_1\delta\, \varphi_1) \,/\, \delta\, \varphi$.

$\delta s_B = \delta s_C = 0_1C\cdot\delta\varphi_1 = 3\, r\, \delta\varphi_1$;

$\delta s_B = r\, \delta\varphi$. $\delta s_C = \delta s_B = 0A\cdot\delta\varphi = r\, \delta\varphi$;

$3r\, \delta\varphi_1 = r\, \delta\varphi$; $\delta\varphi_1 = \delta\varphi/\, 3$;

$M = P\, r - M_1/\, 3 = Pr/\, 2$. $\underline{M = Pr/\, 2}$.

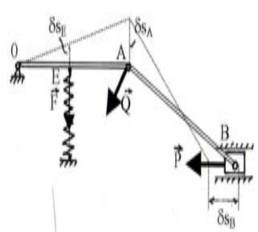


10.6. $P\delta s_B - QCos\alpha\cdot\delta s_A - F\delta s_E = 0$. ზამბარის დრეკადობის ძალა $F = ch$ (h – ზამბარის დეფორმაციაა).

გეგმ$_{AB}\delta s_A$ = გეგმ$_{AB}\delta s_B$; $\delta s_A\, Sin\alpha = \delta s_B\, Cos\alpha$;

$\delta s_B = tg\alpha\, \delta s_A$; $\delta s_E = \delta s_A \,/\, 2$.

$Ptg\alpha\delta s_A - Q\, Cos\alpha\, \delta s_A - ch\, \delta s_A \,/\, 2 = 0$;



აქედან: $\underline{h = 2(\, P\, tg\alpha - Q\, Cos\alpha) \,/\, c}$.

10.7. $Q\, \delta s_A - P\delta s_0 - F\delta s_0 = 0$.

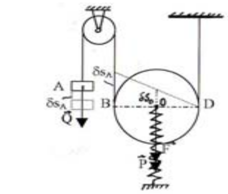
$\delta s_0 = \delta s_A/\, 2$;

$Q\delta s_A - P\, \delta s_A/\, 2 - ch\, \delta s_A \,/\, 2 = 0$;

$2Q - P - ch = 0$;

$\underline{Q = (P + ch) \,/\, 2}$.

$\underline{Q = 200}$.



10.8. $Q\, \delta s_A - P\, \delta s_D = 0$; $Q = P\cdot\, \delta s_D/\, \delta s_A$.

$\delta s_A = \delta s_K = \delta s_E = r\, \delta\varphi$;

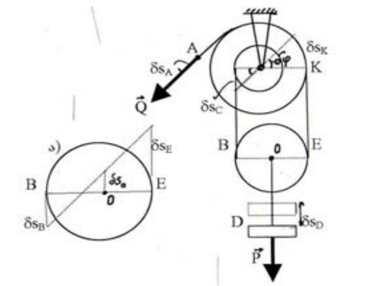
ნახ. ა) – ს თანახმად:

$\delta s_0 = (\delta s_E - \delta s_B) \,/\, 2 = (R - r)\, \delta\varphi/\, 2$.

$\delta s_D = \delta s_0$;

$Q = P\, (R - r)\, \delta\varphi \,/\, 2R\delta\varphi$.

$\underline{Q = P\, (R - r) \,/\, 2R}$.



10. 9. ამოცანა ამოიხსნება ისევე, როგორც 10.10 ამოცანა.

10.10. AD კოჭზე მოქმედებენ პარალელური ძალები, ამიტომ ჩამაგრების A წერტილში რეაქცია შედგება მათი პარალელური R_A ძალისა და წყვილძალისაგან, მომენტით L_A.

ა) B სახსარი დავტოვოთ უძრავად და შემოვაბრუნოთ კოჭი A წერტილის გარშემო შესაძლო $\delta\varphi_A$ კუთხით. შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი ასე ჩაიწერება:

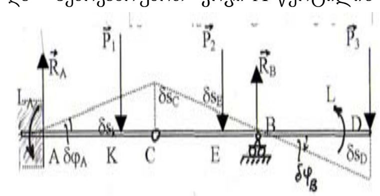
$L_A\delta\varphi_A - P_1\delta s_K - P_2\delta s_E - L\delta s_B + P_3\delta s_D = 0$;

$\delta s_K = AK\, \delta\varphi_A = 2\delta\varphi_A$;

$\delta s_C = AC\, \delta\varphi_A = 3\delta\varphi_A$;

$\delta s_E = EB\, \delta\varphi_B = \delta\varphi_B = \delta\varphi_A$;

$\delta s_D = 3\, \delta\varphi_B = 3\delta\varphi_A$;



$L_A\delta\varphi_A - P_1 2\delta\varphi_A - P_2\, \delta\varphi_A - L\, \delta\varphi_A + P_3 3\delta\varphi_A = 0$; $\underline{L_A = 2P_1 + P_2 + L - 3\, P_3}$. $\underline{L_A = 7}$ ტმ.

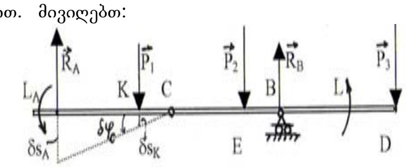
ბ) B სახსარი დავტოვოთ უძრავად და შემოვაბრუნოთ კოჭის AC ნაწილი C სახსრის გარშემო შესაძლო $\delta\varphi_C$ კუთხით. მივიღებთ:

$L_A\delta\varphi_C - R_A\delta s_A + P_1\delta s_K = 0$.

$\delta s_A = 3\, \delta\varphi_C$; $\delta s_K = \delta\varphi_C$;

$L_A\delta\varphi_C - R_A 3\, \delta\varphi_C + P_1\delta\varphi_C = 0$.

$\underline{R_A = 4}$ტ .



გ) სისტემაზე მოქმედი პარალელური ძალები წონასწორობაშია:

$R_A - P_1 - P_2 + R_B - P_3 = 0$; $\underline{R_B = 8}$ტ.

§11. დინამიკის ზოგადი განტოლება

11.4. $L\delta\varphi - L^{\text{ინ}}\delta\varphi - \Phi_1^{\text{ინ}}\delta s_1 - \Phi_2^{\text{ინ}}\delta s_2 = 0$.

$\delta s_1 = R\,\delta\varphi$; $\delta s_2 = \delta\varphi$. $\Phi_1^{\text{ინ}}$ 1

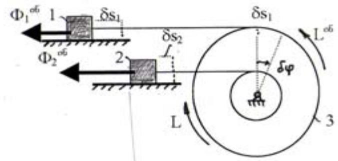
$\Phi_1^{\text{ინ}} = m_1 w_1 = m_1 R\varepsilon$;

$\Phi_2^{\text{ინ}} = m_2 w_2 = m_2 r\,\varepsilon$;

$L^{\text{ინ}} = J_3\varepsilon$;

$L\delta\varphi - J_3\varepsilon\,\delta\varphi - m_1 R\varepsilon\,\delta\varphi R - m_2 r\,\varepsilon\, r\,\delta\varphi = 0$;

$\varepsilon = L / (J_3 + m_1R^2 + m_2 r^2) = 1$ წმ$^{-1}$.



11.5. $- L_1\delta\varphi_1 + L_1^{\text{ინ}}\delta\varphi_1 + L_2\delta\varphi_2 - L_2^{\text{ინ}}\delta\varphi_2 = 0$.

$r\,\delta\varphi_1 = - R\delta\varphi_2$; $\delta\varphi_2 = r\,\delta\varphi_1/ R$;

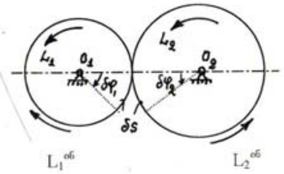
$w_1^K = w_2^K$; $r\,\varepsilon_1 = R\varepsilon_2$;

$L_1^{\text{ინ}} = J_1\varepsilon_1 = m_1 r^2\varepsilon_1/2$;

$L_2^{\text{ინ}} = J_2\varepsilon_2 = m_2 R^2\varepsilon_2/2 = - m_2R\, r\,\varepsilon_1/2$;

$- L_1\delta\varphi_1 + m_1 r^2\varepsilon_1/2\delta\varphi_1 + m_2R\, r\,\varepsilon_1/2 \cdot r\,\delta\varphi_1/R + L_2\, r\,\delta\varphi_1/ R = 0$;

$\underline{\varepsilon_1 = (2 L_1R - r L_2)/ R\, r^2 (m_1 + m_2)}$.



11.6. $L\delta\varphi - L^{\text{ინ}}\delta\varphi - P \operatorname{Sin}\alpha\,\delta s - F_{\text{ხ}}\,\delta s - \Phi_A^{\text{ინ}}\delta s - 2J_1\varepsilon_1\delta\varphi_1 = 0$.

დოლზე $\delta s = R\delta\varphi$; წყვილთვალაზე $\delta s = r\,\delta\varphi_1 = R\,\delta\varphi$;

$F_{\text{ხ}} = P\, f \operatorname{Cos}\alpha$; $\Phi_A^{\text{ინ}} = mw = Pw/ g$; $\varepsilon_1 = w/ r$;

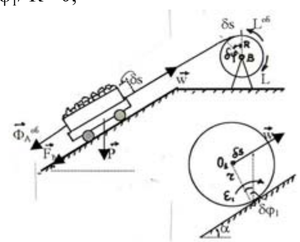
$L^{\text{ინ}} = J_2\varepsilon_B = J_2 w/R$;

$L\delta\varphi - J_2 w\delta\varphi/ R - P \operatorname{Sin}\alpha\, R\,\delta\varphi - P\, f \operatorname{Cos}\alpha\, R\delta\varphi -$

$- PwR\delta\varphi/ g - 2J_1wR\delta\varphi/ r^2 = 0$;

$L - PR(\operatorname{Sin}\alpha + f \operatorname{Cos}\alpha) = (J_2/R + PR/ g + 2J_1R/ r^2)\, w$;

$\underline{w = L - PR(\operatorname{Sin}\alpha + f \operatorname{Cos}\alpha) / R(}$ [illegible] $\underline{2J_1/ r^2)}$.



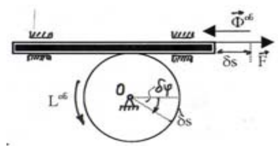
11.7. $F\delta s - \Phi^{\text{ინ}}\delta s - L^{\text{ინ}}\delta\varphi = 0$;   w

$\Phi^{\text{ინ}} = mw = w\,\varepsilon\, r$; $L^{\text{ინ}} = J_1\varepsilon$; $\delta s = r\,\delta\varphi$;

$F\, r\,\delta\varphi - m\varepsilon\, r \cdot r\delta\varphi - J_1\varepsilon\delta\varphi = 0$;

$\varepsilon = F\, r / (mr^2 + J_1)$.

$t = 1$ წმ მომენტში $\varepsilon = 9t^2r/ (mr^2 + J_1) .= \underline{1{,}5}$ წმ$^{-2}$.



11.8. $L_1\delta\varphi_1 - L_1^{\text{ინ}}\delta\varphi_1 - L_2\,\delta\varphi_2 - L_2^{\text{ინ}}\delta\varphi_2 = 0$. $r\,\delta\varphi_1 = R\delta\varphi_2$;

$L_1^{\text{ინ}} = J_1\varepsilon_1 = m_1r^2\varepsilon_1/2$; $L_2^{\text{ინ}} = J_2\varepsilon_2 = m_2 R^2\varepsilon_2/2$;

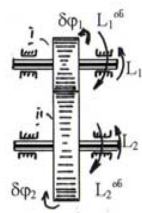
$\varepsilon_1 r = - \varepsilon_2 R$;

$L_1\delta\varphi_1 - m_1r^2\varepsilon_1\delta\varphi_1/2 - L_2 r\,\delta\varphi_1/ R - m_2r^2\varepsilon_1\delta\varphi_1/2 = 0$.

$2L_1\delta\varphi_1 - m_1r^2\varepsilon_1 - 2L_2 r / R - m_2r^2\varepsilon_1 = 0$;

$\varepsilon_1 = (2L_1R - 2L_2\, r) / (m_1+m_2)Rr^2$;

$\underline{\varepsilon_1 = 15L_1/ 8\, r^2 (m_1+m_2)}$.



11.9. $P_1 \operatorname{Sin}\alpha\,\delta s - F_{\text{ხ}}\,\delta s - \Phi_1^{\text{ინ}}\delta s - L^{\text{ინ}}\delta\varphi -$

$-P_2\delta s_C - m_2 w_C\delta s_C - J_C\varepsilon_C\delta\varphi_C -$

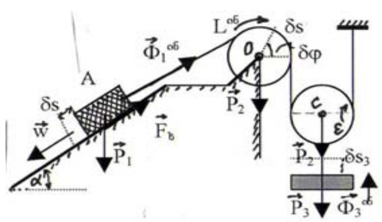
$- P_3\delta s_3 + \Phi_3^{\text{ინ}}\delta s_3 = 0$.

$P_1 = m_1 g$; $\Phi_1^{\text{ინ}} = m_1 w$;

$F_{\text{ხ}} = P_1 \operatorname{Cos}\alpha \cdot f = m_1 f\, g \operatorname{Cos}\alpha$;

$L^{\text{ინ}} = m_2 r^2\,\varepsilon_0 / 2$;

$P_2 = m_2 g$; $J_C = m_2\, r^2$; $P_3 = m_3 g$;



$\Phi_3^{\text{ინ}} = m_3 w$; $w = r\,\varepsilon_0$; $\varepsilon_0 = w/ r$;

$\delta s = r\,\delta\varphi$; $\delta s_C = \delta s/ 2$; $\delta s_3 = \delta s_C$;

$w_3 = w_C = w/ 2$; $\varepsilon_C = w_C / r = w / 2r$;

$\delta s_C = r\,\delta\varphi_C$; $\delta\varphi_C = \delta s_C/ r = \delta s / 2r$;

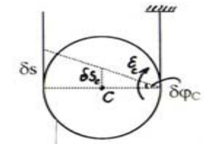
$m_1 g \operatorname{Sin}\alpha\,\delta s - m_1 f\, g \operatorname{Cos}\alpha\,\delta s - m_1 w\,\delta s - m_2 w\,\delta s/2 -$

$- m_2 g\,\delta s/2 - m_2 w\,\delta s/4 - m_2 w\,\delta s/ 8 - m_3 g\delta s/ 2 + m_3 w\,\delta s/ 4 = 0$.

$(m_1+m_2/2+m_2/4 +m_2/8 +m_3/4)\, w = m_1 g (\operatorname{Sin}\alpha - f \operatorname{Cos}\alpha) -$

$-m_2\, g/2 - m_3\, g/2$.

$\underline{w = 4\, g[\, m_1(\operatorname{Sin}\alpha - f \operatorname{Cos}\alpha) - m_2 - m_3] / (8m_1+7m_2 +2m_3)}$.



§12. განზოგადებული კოორდინატები. განზოგადებული ძალა

12.4. განზოგადებული კოორდინატი: $q_1 = s$;

განზოგადებული ძალა - Q. $\delta A = Q_s\delta s$;   (*)

$\delta A = P\,\delta s - G \operatorname{Sin}\alpha\,\delta s_D - F_{\text{ხ}}\,\delta s_D$;

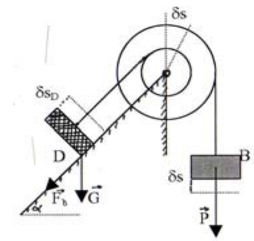
$F_{\text{ხ}} = f\, G \operatorname{Cos}\alpha$; $\delta s = R\,\delta\varphi$; $\delta s_D = r\,\delta\varphi/R$;

$\delta A = P\delta s - G (\operatorname{Sin}\alpha + f \operatorname{Cos}\alpha)\, r\,\delta s / R$;

(*) ტოლობის თანახმად:

$P\delta s - G (\operatorname{Sin}\alpha + f \operatorname{Cos}\alpha)\, r\,\delta s\;\; R = Q_s\delta s$;

$\underline{Q = P - G\, r\, (\operatorname{Sin}\alpha + f \operatorname{Cos}\alpha) / R}$. ნ.



§ 13. ლაგრანჟის II გვ ტოლებები

13.5. $q_1 = s$ (B ტვირთის გადაადგილება); $\delta A = Q_s\delta s$; $\delta A = P\,\delta s$;

$\underline{Q_s = P}$. $d(\partial T/\partial \dot S)/dt - \partial T/\partial s = Q_s$.   (1) $T = T_1 + T_2 + T_3$;

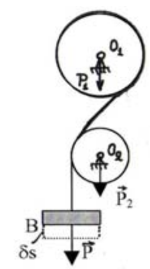
$T_1 = m_1 \dot S^2 /4$; $T_2 = m_2 \dot S^2 /4$; $T_3 = m_3 \dot S^2 /2$;

$T = (m_1 + m_2 + 2m)\, \dot S^2 /4 = (P_1 + P_2 + 2P)\, \dot S^2 /4g$;

$\partial T/\partial s = 0$; $\partial T/\partial \dot S = (P_1+P_2 +2P)/2g \cdot \dot S$

$d (\partial T/ \partial \dot S)/ dt = (P_1+P_2+2P)/2g\cdot \ddot S$. $(P_1+P_2+2P)/2g\cdot \ddot S = P$;

$\underline{w = \ddot S = 2Pg / (P_1+P_2+2P)}$.



13.6. $q_1 = s$; $d(\partial T/\partial \dot S)/dt - \partial T/\partial s = Q_s$.   (1)

$\delta A = Q_s\delta s$; $\delta A = - P_1 \operatorname{Sin}\alpha\,\delta s + L$

$\delta\varphi = \delta s/ r$; $\underline{Q_s = - P_1 \operatorname{Sin}\alpha + L/ r}$;

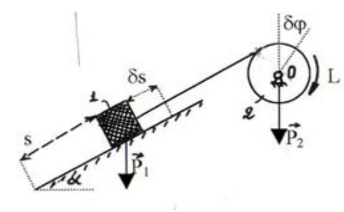
$T = 35\, \dot S^2$; $\partial T/\partial s = 0$;

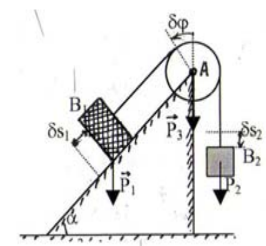
$\partial T/\partial \dot S = 70\, \dot S$;

$d (\partial T/ \partial \dot S)/ dt = 70\, \ddot S$;

$w_1 = \ddot S = (L/ r - mg \operatorname{Sin}\alpha)/ 70$;

$\underline{w_1 = 0{,}47}$.





13.7. $q_1 = \varphi$; $d(\partial T/\partial \dot{\varphi})/dt - \partial T/\partial\varphi = Q_\varphi$.

$\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$; $\delta s_1 = \delta s_2 = r\,\delta\varphi$.

$\delta A = P_1 \operatorname{Sin}\alpha\, \delta s_1 - P_2 \delta s_2 = P_1 r \operatorname{Sin}\alpha\, \delta\varphi - P_2 r\, \delta\varphi$;

$\underline{Q_\varphi = r\,g\,(m_1 \operatorname{Sin}\alpha - m_2)}$.

$T = T_1 + T_2 + T_3$; $T_1 = m_1 v_1^2/2$

$T_2 = m_2 v_2^2/2$; $T_3 = J_0\omega^2/2 = m_3 r^2 \omega^2$;

$v_1 = v_2 = r\,\omega = r\,\dot{\varphi}$; $T = (2m_1 + 2m_2 + m_3)\, r^2\, \dot{\varphi}^2/4$;

$\partial T/\partial\varphi = 0$; $\partial T/\partial\dot{\varphi} = (2m_1 + 2m_2 + m_3)\, r^2\, \dot{\varphi}/2$;

$d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt = (2m_1 + 2m_2 + m_3)\, r^2\, \ddot{\varphi}/2$; $(2m_1 + 2m_2 + m_3)\, r^2\, \ddot{\varphi}/2 = r\,g\,(m_1 \operatorname{Sin}\alpha - m_2)$

$\underline{\varepsilon = \ddot{\varphi} = 2g\,(m_1 \operatorname{Sin}\alpha - m_2)/r\,(2m_1 + 2m_2 + m_3)}$.

13.8. $q_1 = \varphi_1$; $d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_1)/dt - \partial T/\partial\varphi_1 = Q_{\varphi 1}$.

$\delta A = Q_{\varphi 1}\delta\varphi_1$; $\delta A = L_1\delta\varphi_1 - L_2\delta\varphi_2 - L_3\delta\varphi_3$;

$\delta s_1 = r_1\delta\varphi_1$; $\delta s_2 = r_2\delta\varphi_2$; $\delta s_3 = r_3\delta\varphi_3$;

$\delta s_1 = \delta s_2 = \delta s_3$; $\delta\varphi_2 = r_1\delta\varphi_1/r_2$; $\delta\varphi_3 = r_1\delta\varphi_1/r_3$;

$\delta A = (L_1 - L_2 r_1/r_2 - L_3 r_1/r_3)\,\delta\varphi_1$;

$\underline{Q_{\varphi 1} = L_1 - L_2 r_1/r_2 - L_3 r_1/r_3}$; $\dot{\varphi}_2 = r_1/r_2 \cdot \dot{\varphi}_1$;

$T = T_1 + T_2 + T_3$; $T_1 = J_1\omega^2/2 = m_1 r_1^2\, \dot{\varphi}_1^2/4$;

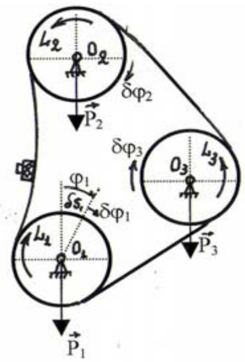
$T_2 = T_3 = m_2 r_1^2\, \dot{\varphi}_1^2/4$; $T = (m_1 + 2m_2)\, r_1^2\, \dot{\varphi}_1^2/4$;

$\partial T/\partial\varphi_1 = 0$; $\partial T/\partial\dot{\varphi}_1 = (m_1 + 2m_2)\, r_1^2\, \dot{\varphi}_1/2$;

$d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_1)/dt = (m_1 + 2m_2)\, r_1^2\, \ddot{\varphi}_1/2$;

$(m_1 + 2m_2)\, r^2\, \ddot{\varphi}_1/2 = L_1 - L_2 r_1/r_2 - L_3 r_1/r_3$

$\underline{\varepsilon = \ddot{\varphi}_1 = 2(L_1 - L_2 r_1/r_2 - L_3 r_1/r_3)/(m_1 + 2m_2)\, r_1^2 = 281{,}2\ \text{წმ}^{-2}}$.



13.9. $q_1 = \varphi$; $d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt - \partial T/\partial\varphi = Q_\varphi$.

$\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$; $\delta A = G \operatorname{Sin}\alpha\, \delta s = P\delta s + L\,\delta\varphi$.

$\delta s = r\,\delta\varphi$; $\delta A = G \operatorname{Sin}\alpha\, r\,\delta\varphi = P\,r\,\delta\varphi + L\,\delta\varphi$.

$\underline{Q_\varphi = L + r\,(G \operatorname{Sin}\alpha = P)}$.

თვალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

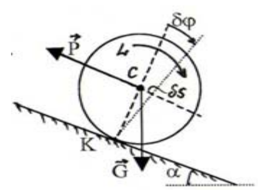
$T = m v_C^2/2 + J_C\,\omega_k^2/2$; $v_C = r\,\omega_k = r\,\dot{\varphi}$; $J_C = m\rho^2$;

$T = m r^2\, \dot{\varphi}^2/2 + m\rho^2 \dot{\varphi}^2/2 = m(r^2 + \rho^2)\, \dot{\varphi}^2/2$;

$\partial T/\partial\varphi = 0$; $\partial T/\partial\dot{\varphi} = m(r^2 + \rho^2)\, \dot{\varphi}$; $d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt = m(r^2 + \rho^2)\, \ddot{\varphi}$;

$m(r^2 + \rho^2)\, \ddot{\varphi} = L + r\,(G \operatorname{Sin}\alpha = P)$;

$\underline{\varepsilon = \ddot{\varphi} = [L + r\,(G \operatorname{Sin}\alpha = P)]/m(r^2 + \rho^2) = 3{,}48\ \text{წმ}^{-2}}$.

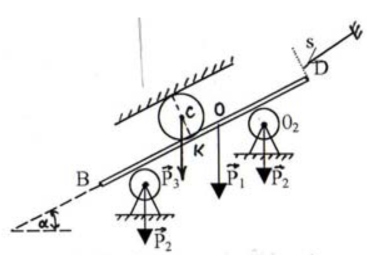


13.10. C ცენტრის აჩქარება $w_C = \varepsilon\, r$;

ჰორიზონტალურ გზაზე მოძრაობისას $\alpha = 0$.

13.11. $q_1 = s$; $d(\partial T/\partial\dot{S})/dt - \partial T/\partial s = Q_s$. (*)

$\delta A = Q_s \delta s$; $\delta A = P_1 \operatorname{Sin}\alpha\, \delta s + P_3 \operatorname{Sin}\alpha\, \delta s_C$;



$\delta s_C = \delta s_K/2 = \delta s/2$; $\underline{Q_s = (2P_1 + P_3)\operatorname{Sin}\alpha/2}$;

$T = T_1 + 2T_2 + T_3$;

$T_1 = P_1\, \dot{S}^2/2g$; $T_2 = J_0\omega_2^2/2$; $\dot{S} = \omega_2 r_2$;

$J_0 = P_2 r_2^2/2g$; $T_2 = P_2\, \dot{S}^2/4g$.

C დისკო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

$T_3 = m_3 v_C^2/2 + J_C\omega_C^2 = P_3(\dot{S}/2)^2/2g + P_3 r_3^2/4g \cdot (\dot{S}/2r_3)^2$; $T_3 = 3P_3\, \dot{S}^2/16g$.

$T = (8P_1 + 8P_2 + 3P_3)\, \dot{S}^2/16g$. $\partial T/\partial s = 0$; $\partial T/\partial\dot{S} = (8P_1 + 8P_2 + 3P_3)\, \dot{S}/8g$;

$d(\partial T/\partial\dot{S})/dt = (8P_1 + 8P_2 + 3P_3)\, \ddot{S}/8g$;

(*)-დან: $(8P_1 + 8P_2 + 3P_3)\, \ddot{S}/8g = (2P_1 + P_3)\operatorname{Sin}\alpha/2$;

$\underline{w_K = \ddot{S} = 4g\,(2P_1 + P_3)\operatorname{Sin}\alpha/(8P_1 + 8P_2 + 3P_3)}$;

$\underline{w_C = w_K/2}$; $(w_D = w_B = w_K = 2w_C)$.

13.12. $q_1 = \varphi$; $d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt - \partial T/\partial\varphi = Q_\varphi$. (*)

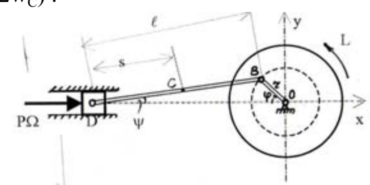
$\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$; $\delta A = P\Omega\,\delta x - L\,\delta\varphi$;

$x = x_B = -r \operatorname{Cos}\varphi$; $\delta x = r \operatorname{Sin}\varphi\, \delta\varphi$;

$\delta A = (P\Omega\, r \operatorname{Sin}\varphi - L)\,\delta\varphi$.

$\underline{Q_\varphi = P\Omega\, r \operatorname{Sin}\varphi - L}$.

$v_A = \dot{X} = r \operatorname{Sin}\varphi \cdot \dot{\varphi}$;



$T = T_A + T_{AB} + T_{0B}$. $T_A = m_A v_A^2/2 = m_1 r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi \cdot \dot{\varphi}/2$; $T_{0B} = J_3\omega_0^2/2 = J_3\, \dot{\varphi}^2/2$

AB ბარბაცა ასრულებს ჰრაობას . მივიღოთ პოლუსად ღეროს A ბოლო. პოლუსის გარშემო ... ობრუნების კუთხეა ψ. ამიტომ: $T_{AB} = m_2 v_A^2/2 + J_A \cdot \dot{\psi}^2/2$. აქ $J_A = J_C + m_2 \cdot AC^2 = J_2 + m_2 s^2$. $\Delta A0B$ –ში $\ell/\operatorname{Sin}\varphi = r/\operatorname{Sin}\psi$;

პირობის თანახმად: $\operatorname{Sin}\psi \sim \psi$; ამიტომ $\psi = r/\ell \cdot \operatorname{Sin}\varphi$; $\dot{\psi} = r/\ell \cdot \operatorname{Cos}\varphi \cdot \dot{\varphi}$;

გვექნება: $T_{AB} = m_2 r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2/2 + (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Cos}^2\varphi/2\ell^2 \cdot \dot{\varphi}^2$;

მთლიანი სისტემისათვის $T = [(m_1 + m_2)\, r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Cos}^2\varphi/\ell^2 + J_3]\, \dot{\varphi}^2/2$.

$\partial T/\partial\varphi = [(m_1 + m_2)\, r^2 \operatorname{Sin}2\varphi - (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Sin}2\varphi/\ell^2]\, \dot{\varphi}^2/2$;

$\partial T/\partial\dot{\varphi} = [(m_1 + m_2)\, r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Cos}^2\varphi/\ell^2 + J_3]\, \dot{\varphi}$;

$d(\partial T/\partial\dot{\varphi})/dt = [(m_1 + m_2)\, r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Cos}^2\varphi/\ell^2 + J_3]\, \ddot{\varphi} +$

$+ [(m_1 + m_2)\, r^2 \operatorname{Sin}2\varphi - (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Sin}2\varphi/\ell^2]\, \dot{\varphi}^2$.

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი ლაგრანჟის II გვარის (*) განტოლებაში:

$\underline{[(m_1 + m_2)\, r^2 \operatorname{Sin}^2\varphi + (J_2 + m_2 s^2)\, r^2 \operatorname{Cos}^2\varphi/\ell^2 + J_3]}\, \ddot{\varphi} +$

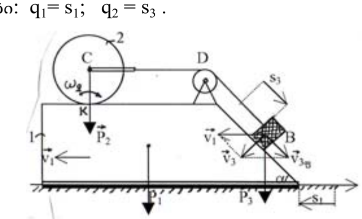
$\underline{+ [(m_1 + m_2) - (J_2 + m_2 s^2)/\ell^2]\, r^2 \operatorname{Sin}2\varphi\, \dot{\varphi}^2/2 = P\Omega\, r \operatorname{Sin}\varphi - L}$.

ეს არის მოცემული მექანიზმის მოძრაობის განტოლება.

13.13. სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი: $q_1 = s_1$; $q_2 = s_3$.

ლაგრანჟის განტოლებები იქნებიან:

$d(\partial T/\partial\dot{S}_j)/dt - \partial T/\partial s_j = Q_{sj}$. $(j = 1; 3)$ (*)



ა) $q_1 = s_1; \quad q_2 = s_3 = const;$

$\delta A_1 = Q_{s1}\delta s_1; \ \delta A_1 = 0;$ $\qquad \underline{Q_{s1} = 0}$.

ბ) $q_1 = s_1 = const; \ q_2 = s_3; \quad \delta A_3 = Q_{s3}\delta s_3;$

$\delta A_3 = P_3 Sin\alpha\delta s_3;$

$Q_{s3} = P_3 Sin\alpha = \ = m_3 g Sin\alpha = 2\sqrt{3}\, g$.

$T = T_1 + T_2 + T_3$. $\quad v_1 = \dot{S}; \quad T_1 = m_1 \dot{S}_1^2 / 2;$

ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას: $\quad T_2 = m_2 v_C^2 / 2 + J_C\omega^2/2$.

$\vec{V}_C$ - ცილინდრის C ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარეა.

C წერტილის ფარდობითი სიჩქარე: $v_{C\text{ფ}} = v_{3\text{ფ}} = \dot{S}_3$.

$\vec{V}_{C\text{ფ}} \,||\, \vec{V}_1$, ამიტომ, $\vec{V}_C = \vec{V}_1 + \vec{V}_{C,\text{ფ}}$, ანუ $\vec{V}_C = \dot{S}_1 + \dot{S}_3$; ამასთანავე:

$v_{C\text{ფ}} = \omega_2 r^2$; $\omega_2 = \dot{S}_3 / r_2 \quad (r_2 = KC)$. გვექნება: $T_2 = m_2(\dot{S}_1 + \dot{S}_3)^2/2 + m_2 r_2^2(\dot{S}_3/r_2)^2 / 4 =$

$= m_2(\dot{S}_1^2 + 2\dot{S}_1\dot{S}_3 Cos\alpha + \dot{S}_3^2)/2 + m_2\dot{S}_3^2/4 = 0{,}15 m_1(2\dot{S}_1^2 + 4\dot{S}_1\dot{S}_3 + 3\dot{S}_3^2)$.

მე-3 სხეული ასრულებს რთულ გადატანით მოძრაობას:

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{3\text{ფ}} = \dot{S}_1 + \dot{S}_3;$$

ამიტომ: $T_3 = m_3 v_3^2 / 2$, ანუ $T_3 = 0{,}2 m_1 (\dot{S}_1^2 + 2\dot{S}_1\dot{S}_3 Cos\alpha + \dot{S}_3^2)$. მთელი სისტემისათვის: $\quad T = m_1(\dot{S}_1^2 + 0{,}5\dot{S}_1\dot{S}_3 + 0{,}65\dot{S}_3^2)$.

ვინაიდან: $\partial T/\partial s_1 = 0; \quad \partial T/\partial \dot{S}_1 = 2m_1(\dot{S}_1 + 0{,}25\dot{S}_3); \quad d(\partial T/\partial \dot{S}_1)/dt = 2m_1(\ddot{S}_1 + 0{,}25\ddot{S}_3);$

$\partial T/\partial s_3 = 0; \quad \partial T/\partial \dot{S}_3 = m_1(0{,}5\dot{S}_1 + 1{,}3\dot{S}_3); \quad d(\partial T/\partial \dot{S}_3)/dt = m_1(0{,}5\ddot{S}_1 + 1{,}3\ddot{S}_3);$

ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$2m_1(\ddot{S}_1 + 0{,}25\ddot{S}_3) = 0;$ $\qquad$ ანუ $\ddot{S}_1 + 0{,}25\ddot{S}_3 = 0;$

$m_1(0{,}5\ddot{S}_1 + 1{,}3\ddot{S}_3) = 2\sqrt{3}\, g;$ $\qquad \ddot{S}_1 + 2{,}6\ddot{S}_3 = 6{,}79.$

აქედან: $\underline{w_1 = \ddot{S}_1 = -0{,}722}$ მ/წმ²; $\qquad \underline{w_3 = \ddot{S}_3 = 2{,}89}$ მ/წმ².

13.14. სისტემას გააჩნია ორი თავისუფლების ხარისხი: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$; φ_1 – I კბილანას, ხოლო φ_2 – II ჩარჩოს შემობრუნების კუთხეები.

$$d(\partial T/\partial \dot{\varphi}_j)/dt - \partial T/\partial \varphi_j = Q_j \ . \ (j=1,2) \quad (*)$$

$\delta A_1 = Q_1\delta\varphi_1; \quad \delta A_1 = L_1\delta\varphi_1; \quad \underline{Q_1 = L_1};$

$\delta A_2 = Q_2\delta\varphi_2; \quad \delta A_2 = L_2\delta\varphi_2; \quad \underline{Q_2 = L_2}$.

$T = T_1 + T_3 + T_4$.

A და B კბილანები ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას.

$v_A = 0A\cdot\omega_2 = (R - r)\dot{\varphi}_2 = 2r\dot{\varphi}_2;$

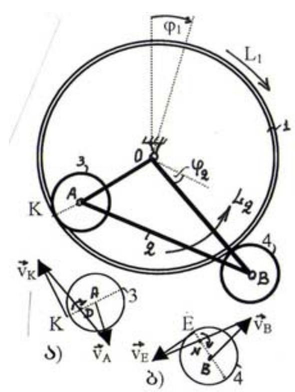
$v_K = v_E = 0K\cdot\omega_1 = R\dot{\varphi}_1 = 3r\dot{\varphi}_1;$

$v_B = 0B\cdot\omega_2 = (R + r)\dot{\varphi}_2 = 4r\dot{\varphi}_2;$

ა) $\omega_3 = \omega_D = v_A/AD = v_K/KD;$

$\omega_3 = (v_A + v_K)/(AD + KD) =$

$= (2r\dot{\varphi}_2 + 3r\dot{\varphi}_1)/r = 3\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2;$



ბ) $\omega_4 = \omega_n = v_B/BN = v_E/EN;$

$\omega_4 = (v_B + v_E)/(BN + EN) =$

$= (4r\dot{\varphi}_2 + 3r\dot{\varphi}_1)/r = 3\dot{\varphi}_1 + 4\dot{\varphi}_2 \quad T_1 = J_1\omega_1^2/2 = m_1R^2\dot{\varphi}_1^2/2 = 9mr^2\dot{\varphi}_1^2;$

$T_3 = m_3v_A^2/2 + J_A\omega_3^2/2 = m(2r\dot{\varphi}_1)^2/2 + mr^2(3\dot{\varphi}_1 + 2\dot{\varphi}_2)^2/4 =$

$= (9\dot{\varphi}_1^2/4 + 3\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 3\dot{\varphi}_2^2)\, m r^2$.

$T_4 = m_4v_B^2/2 + J_B\omega_4^2/2 = m(4r\dot{\varphi}_2)^2/2 + mr^2(3\dot{\varphi}_1 + 4\dot{\varphi}_2)^2/4 =$

$= (9\dot{\varphi}_1^2/4 + 6\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 12\dot{\varphi}_2^2)\, m r^2$.

მთელი სისტემისათვის: $T = (27\dot{\varphi}_1^2/2 + 9\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + 15\dot{\varphi}_2^2)\, m r^2$.

$\partial T/\partial\varphi_1 = 0; \quad \partial T/\partial\dot{\varphi}_1 = mr^2(27\dot{\varphi}_1 + 9\dot{\varphi}_2); \quad d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_1)/dt = mr^2(27\ddot{\varphi}_1 + 9\ddot{\varphi}_2);$

$\partial T/\partial\varphi_2 = 0; \quad \partial T/\partial\dot{\varphi}_2 = mr^2(9\dot{\varphi}_1 + 30\dot{\varphi}_2); \quad d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_2)/dt = mr^2(9\ddot{\varphi}_1 + 30\ddot{\varphi}_2);$

ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$mr^2(27\ddot{\varphi}_1 + 9\ddot{\varphi}_2) = L_1;$ $\qquad$ ანუ $\quad 27\ddot{\varphi}_1 + 9\ddot{\varphi}_2 = L_1/mr^2;$

$m r^2(9\ddot{\varphi}_1 + 30\ddot{\varphi}_2) = L_2;$ $\qquad 9\ddot{\varphi}_1 + 30\ddot{\varphi}_2 = L_2/mr^2.$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს: $\quad \ddot{\varphi}_1 = (10L_1 - 3L_2)/243\, mr^2;$

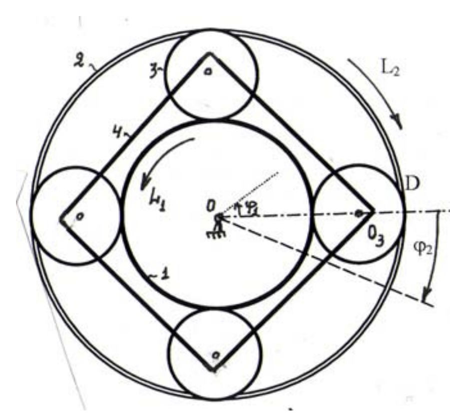
ვაინტეგროთ ეს ტოლობა; მივიღებთ: $\underline{\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = [(10L_1 - 3L_2)/243\, mr^2]\, t}$. $(C_1 = 0)$.

13.15. სისტემას გააჩნია ორი თავის[illegible]ისხი: $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$; φ_1 – I კბილანას, ხოლო φ_2 [illegible]ას (რგოლის) შემობრუნების კუთხეები.

$d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_j)/dt - \partial T/\partial\varphi_j = Q_j$. (j[illegible]

$\delta A_1 = Q_1\delta\varphi_1; \ \delta A_1 = L_1\delta\varphi_1; \ \underline{Q_1 = L_1}; \ \delta A_2 = Q_2\delta\varphi_2; \ \delta A_2 = L_2\delta\varphi_2; \ \underline{Q_2 = L_2}$.

მე-3 კბილანები ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას.



$v_B = \omega_1 r_1 = r_1\dot{\varphi}_1;$

$v_D = \omega_2 r_2 = r_2\dot{\varphi}_2$.

ა) ნახაზიდან :

$\omega_K = v_B/BK = v_D/KD;$

$\omega_K = (v_B + v_D)/(BK + KD) =$

$= (r_1\dot{\varphi}_1 + r_2\dot{\varphi}_2)/2r_3$.

$v_3 = (v_D - v_B)/2 =$

$= (r_2\dot{\varphi}_2 - r_1\dot{\varphi}_1)/2;$

სისტემისათვის:

$T = T_1 + T_2 + 4T_3$.

$T_1 = J_1\omega_1^2/2 = m_1r_1^2\dot{\varphi}_1^2/4;$

$T_2 = J_2\omega_2^2/2 = m_2r_2^2\dot{\varphi}_2^2/4$

$T_3 = m_3v_3^2/2 + J_3\omega_K^2 = m_3(r_2\dot{\varphi}_2 - r_1\dot{\varphi}_1)^2/8 + m_3(r_2\dot{\varphi}_2 + r_1\dot{\varphi}_1)^2/16;$

მთელი სისტემისათვის:

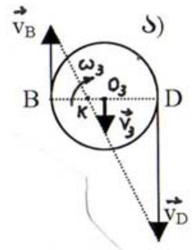
$T = (7r_1^2 \dot{\varphi}_1^2/16 - r_1 r_2 \dot{\varphi}_1$

$+ \dot{\varphi}_2/ 8+11r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) m_1$;

$\partial T/\partial\varphi_1=0$; $d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_1)/dt = m_1 r_1 (7r_1 \ddot{\varphi}_1 - r_2 \ddot{\varphi}_2) / 8$;

$\partial T/\partial\varphi_2=0$; $d(\partial T/\partial\dot{\varphi}_2)/dt = m_1 r_2 (11r_2 \ddot{\varphi}_2 - r_1 \ddot{\varphi}_1) / 8$;

ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:



$m_1 r_1 (7r_1 \ddot{\varphi}_1 - r_2 \ddot{\varphi}_2) = 8 L_1$; $m_1 r_2 (- r_1 \ddot{\varphi}_1 + 11 r_2 \ddot{\varphi}_2) = 8L_2$.

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს: $\ddot{\varphi}_1 = 2 (11 L_1 r_2 + L_2 r_1) / 19 m_1 r_1^2$
r_2;

$$\ddot{\varphi}_2 = 2 (L_1 r_2 +7 L_2 r_1) / 19 m_2 r_1 r_2^2 ;$$

ვაინტეგროთ ეს ტოლობები; საწყისი პირობების გათვალისწინებით (t_0= 0, φ1=0, φ2=0, $\ddot{\varphi}_1$=0, $\ddot{\varphi}_2$=0) მივიღებთ:

$\underline{\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = [\, 2 (11 L_1 r_2 + L_2 r_1) / 19 m_1 r_1^2 r_2 \,]\, t}$;

$\underline{\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = [\, 2 (L_1 r_2 + 7 L_2 r_1) / 19 m_2 r_1 r_2^2 \,]\, t}$.

14. დარ

14.1. $k = 0$; $m_1=m_2$; v =6მ/წმ; $v_1=0$; $u_1=u_2= (m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)$ =3მ/წმ.

14.2. $k=0$; $P_1=12$; $v_1=2$; $P_2=14$; $v_2=0$;
$u=m_1v_1 / (m_1+m_2) =0,92$ მ/წმ; $s=m_1m_2(v_1 - v_2) / (m_1+m_2) =12,92$.

14.3 $k=0$; $v_1=10$; $v_2= -4$; $P_2= 10$; $u=0$; $(m_1v_1 +m_2v_2)/ (m_1+m_2)$
$m_1v_1 +m_2v_2= 0$; $P_1v_1 +P_2v_2 = 0$; $P_1= P_2v_2 / v_1 = 4$.

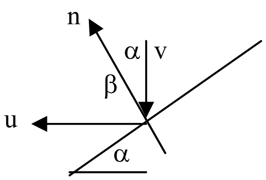
14.4. $P_1=200$; $P_2=100$; $v_2=0$; $u=6$;
$u = (m_1v_1+m_2v_2) / (m_1+m_2)$;
$v_1=(m_1+m_2)\, u / m_1 = (P_1+P_2)\, u / P_1 = 9$.
კუტი ვარდება h სიმაღლიდან $v_0=0$ საწყისი სიჩქარით. მაშინ
$v^2 = 2gh$; $h = v^2/ 2g = 4,128$ მ.

14.5. $v_1=4$; $v_2=2$; $k=0,8$; $m_1= m_2 = m$.
მითითება: ვთქვათ ბურთულების ცენტრებზე გამავალი ღერძი არის n . მაშინ, დარტყმის ბოლოს ბურთულების სიჩქარეების გეგმილები ამ ღერძზე შესაბამისად იქნებიან:

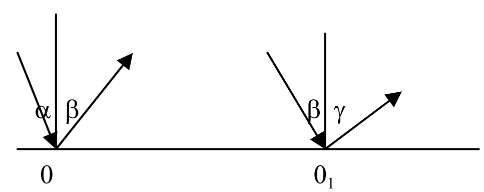
$u_{1n} = u_n+k(u_n-v_{1n})$,
$u_{2n} = u_n+k(u_n-v_{2n})$,
სადაც $u_n = (m_1v_{1n} + m_2 v_{2n}) / (m_1+ m_2)$ არის არადრეკადი დარტყმის დროს სხეულების საერთო სიჩქარე.
ჩვენ შემთხვევაში:
$u_n = (m_1v_{1n} + m_2 v_{2n}) / (m_1+ m_2) = (v_1+v_2) / 2 = 3.$
$u_{1n} = u_n+k(u_n-v_{1n}) = 3+ 0,8 (3 - 4) = 2,2$;
$u_{2n} = u_n+k(u_n-v_{2n}) = 3+ 0,8 (3 - 2) = 3,8$.

14.6. $v_1=4$; $v_2= - 2$; $k=0,8$; $u_n= 1$; $u_1= - 1,4$; $u_2= 3,4$.

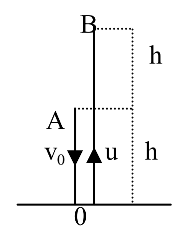
14.7. ნივთიერი წერტილის დარტყმა უძრავ გლუვ ზედაპირზე.
$v_n = v \cos\alpha = 7,2746$; $u_n = - kv_n = - 2,42$;
$u_\tau = \underline{v_\tau = v \sin}\alpha\ 4,2$;
$u =\sqrt{u_n^2 + u_\tau^2} = 4,847$.
$k =tg\alpha/ tg\beta$; $tg\beta =tg\alpha / k =\sqrt{3}$. $\beta=60^0$.
u მიმართულია ჰორიზონტალურად .
დარტყმის იმპულსი:
$s = m(1+k)\, v_n = 19,7948$ ნწმ .



14.8. აღდგენის კოეფიციენ… $\alpha/ tg\beta = \sqrt{3} / 3 = 0,577$.
დარტყმის კუთხე 0_1 წერტილში იგივეა, რაც არეკვლის კუთხე 0 წერტილში . ამიტომ 0_1 წერტილში:
$k =tg\beta/ tg\gamma$.
$tg\gamma = tg\beta / k = \sqrt{3}$. $\gamma = 60^0$.



14. 9. დარტყმა პირდაპირია (α =0) . $u = kv$.
დარტყმის შემდეგ 0B გზაზე:
$mu_B^2/ 2 - mu^2/ 2 = - 2mgh$;
$u_B = 0$; $u = \sqrt{4gh} = 2\sqrt{gh}$; $k=0,5$; $v=4 \sqrt{gh}$.
დარტყმამდე A0 გზაზე:
$mv^2/ 2 - mv_0^2/ 2 = mgh$;
$16gh/ 2 - v_0^2/ 2 = gh$; $\underline{v_0 = \sqrt{14gh}}$.



14.10. კუტის წონა $P_1 = 2$ კნ. ხიმინჯის წონა $P_2 = 1$ კნ.
$H = 1,225$ მ . $v_2 = 0$; $v_1 = \sqrt{2gH} = 4,903$.
დარტყმა არადრეკადია:

$$u = (m_1v_1+m_2v_2) / (m_1+m_2) = (P_1v_1 +P_2v_2) / (P_1+P_2) = 3,27 .$$

კუტი და ხიმინჯი ერთად მოძრაობენ u სიჩქარით. კინეტიკური ენერგია იხარჯება F = 23 კნ წინაღობის გადალახვაზე:

$$mu^2/ 2 = Fh .$$

$$h = (m_1+m_2)\, u^2 / 2F = (P_1+P_2)\, u^2 / 2gF = 0,071 \text{ მ } = 7,1 \text{ სმ}$$

14.11. უძრავ სხეულზე (v_2=0) არადრეკადი დარტყმისას კუტის მიერ დაკარგული კინეტიკური ენერგია:

$$\Delta T = T_0 – T_1 = m_1v_1^2 / 2 - (m_1+m_2)\, u^2 / 2 = 816,7 \text{ ნმ} .$$

ლიტერატურა

1. ა. გორგიძე – თეორიუკი მექანიკის კურსი (დინამიკა)

2. ნ. მახვილაძე – თეორიუკი მექანიკის კურსი (დინამიკა)

3.

4.

5.

შინაარსი