გ.ფანცულაია

ალბათობის თეორიის ელემენტები

"ტექნიკური უნივერსიტეტი"

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გ.ფანცულაია

ალბათობის თეორიის

ელემენტები

დამტკიცებულია სტუ-ს სარედაქციო
საგამომცემლო საბჭოს მიერ
სახელმძღვანელოდ

თბილისი
2005

უაკ 519.21+519.22/25

დამხმარე სახელმძღვანელო წარმოადგენს ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სოხუმის ფილიალის ეკონომიკური ფაკულტეტისა და საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის დ/ს ეკონომიკური ინფორმატიკის სპეციალობის სტუდენტებისათვის 1996-2004 წწ. წაკითხული ლექციების კურსს ალბათობის თეორიაში.

განკუთვნილია მექანიკა-მათემატიკის, კიბერნეტიკის, ინფორმატიკის, ფიზიკის, ეკონომიკური 120205, 60412 და სხვა სპეციალობის სტუდენტებისათვის.

რედაქტორი პროფ. მ. ნადარეიშვილი

რეცენზენტები: პროფ. ჯ. სანიკიძე

პროფ. ი. სხირტლაძე

ISBN-99940-48-09-0

წინასიტყვაობა

თანამედროვე ალბათობის თეორია წარმოადგენს მათემატიკის საინტერესო და მეტად მნიშვნელოვან ნაწილს, რომელსაც აქვს დიდი მიღწევები და მჭიდრო კავშირები როგორც მათემატიკის კლასიკურ ნაწილებთან (გეომეტრია, მათემატიკური ანალიზი, ფუნქციონალური ანალიზი), ასევე მის სხვადასხვა განშტოებებთან (შემთხვევით პროცესთა თეორია, ერგოდულობის თეორია, დინამიურ სისტემათა თეორია, მათემატიკური სტატისტიკა და სხვა). ამ მიმართულებათა განვითარება ძირითადად უკავშირდება სტატისტიკური მექანიკის, სტატისტიკური ფიზიკის, სტატისტიკური რადიოტექნიკის, ასევე რთული სისტემების ამოცანებს, რომლებიც ითვალისწინებენ შემთხვევით ზემოქმედებასა და ქაოსურ ზეგავლენას. ალბათობის თეორიის საწყისებთან იდგნენ გამოჩენილი მათემატიკოსები ი.ბერნული, ა.მუავრი, პ.ლაპლასი, ს.პუასონი, ა.კოში, გ.კანტორი, ვ.ბუნიაკოვსკი, ფ.ბორელი, ა.ლებეგი და სხვები. მეცნიერებს შორის დიდი ხნის განმავლობაში არსებული პოლემიკის საკითხი, რომელიც შეეხებოდა ალბათობის თეორიის მათემატიკასთან მიმართების დადგენას, გადაწყვეტილ იქნა გამოჩენილი რუსი მეცნიერის ა.კოლმოგოროვის მიერ 1933 წელს, რომელმაც მოგვცა ალბათობის თეორიის მკაცრი აქსიომატიკური დაფუძნება.

აღნიშნული სახელმძღვანელოს შედგენისას გამოყენებულია ალბათობის თეორიის აქსიომატიკური დაფუძნების კოლმოგოროვისეული კონცეფცია, რომლის თანახმადაც აქსიომების სახით დახასიათებულია ზოგადი ალბათური სივრცეები და მათი შემადგენელი კომპონენტები.

სახელმძღვანელოს ძირითადი მიზანია სტუდენტს დაეხმაროს იმ ძირითადი უნარ-ჩვევების შეძენაში, რომელიც საჭიროა სხვადასხვა (სოციალური, ეკონომიკური, ბიოლოგიური, მექანიკური, ფიზიკური და სხვა) შემთხვევითი პროცესების აღმწერი მათემატიკური მოდელების (ე.ი. ალბათური სივრცეების) ასაგებად და მათი მახასიათებელი თვისებების შესასწავლად. ამ მიმართულებით საყურადღებოა სახელმძღვანელოს ბოლო პარაგრაფები, კერძოდ $\S\,12 - \S\,15$ *, სადაც განხილულია ისეთი მათემატიკური მოდელების გამოყენებები, როგორიცაა მარკოვის ჯაჭვები, ბროუნის მოძრაობის პროცესი და სხვა.*

სახელმძღვანელო შედგება თხუთმეტი პარაგრაფისაგან. ყოველ პარაგრაფს თან ახლავს სავარჯიშოები ტესტების სახით, რომელთა ამოხსნა დაეხმარება სტუდენტს ალბათობის თეორიის წარმოდგენილი ელემენტების ღრმა გააზრებასა და ათვისებაში.

§1. სიმრავლურ–თეორიული ოპერაციები. ალბათობის თეორიის აქსიომები

ვთქვათ, Ω არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $\mathcal{P}(\Omega)$ - კი Ω -ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი.

განსაზღვრება 1. *ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(1 \le k \le n)$. $(A_k)_{1\le k\le n}$ სიმრავლეთა სასრული ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\cup_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით*

$$\cup_{k=1}^{n} A_k = \{x | x \in A_1 \bigvee \cdots \bigvee x \in A_n\},$$

სადაც $\bigvee$ აღნიშნავს კონიუქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 2. *ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის გაერთიანება აღინიშნება $\cup_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით*

$$\cup_{k\in N} A_k = \{x | x \in A_1 \bigvee x \in A_2 \bigvee \cdots\}.$$

განსაზღვრება 3. *ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(1 \le k \le n)$. სიმრავლეთა სასრული $(A_k)_{1\le k\le n}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\cap_{k=1}^{n} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით*

$$\cap_{k=1}^{n} A_k = \{x | x \in A_1 \bigwedge \cdots \bigwedge x \in A_n\},$$

სადაც $\bigwedge$ აღნიშნავს დიზიუნქციის სიმბოლოს.

განსაზღვრება 4. *ვთქვათ, $A_k \in \mathcal{P}(\Omega)$ $(k \in N)$. სიმრავლეთა უსასრულო $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახის თანაკვეთა აღინიშნება $\cap_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით*

$$\cap_{k\in N} A_k = \{x | x \in A_1 \bigwedge x \in A_2 \bigwedge \cdots\}.$$

განსაზღვრება 5. *ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. A და B სიმრავლეების სხვაობა აღინიშნება $A \setminus B$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგი ტოლობით*

$$A \setminus B = \{x | x \in A \ \bigwedge x \notin B\}.$$

შენიშვნა 1. *მართებულია დე მორგანის ორადულობის შემდეგი ფორმულები:*

1) $\Omega \setminus \cup_{k=1}^{n} A_k = \cap_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$;
2) $\Omega \setminus \cup_{k\in N} A_k = \cap_{k\in N} (\Omega \setminus A_k)$;
3) $\Omega \setminus \cap_{k=1}^{n} A_k = \cup_{k=1}^{n} (\Omega \setminus A_k)$;
4) $\Omega \setminus \cap_{k\in N} A_k = \cup_{k\in N} (\Omega \setminus A_k)$.

განსაზღვრება 6. *Ω -სიმრავლის ქვესიმრავლეთა $\mathcal{A}$ კლასს ეწოდება ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:*

1) $\Omega \in \mathcal{A}$ *;*
2) თუ $A, B \in \mathcal{A}$*, მაშინ* $A \cup B \in \mathcal{A}$ *და* $A \cap B \in \mathcal{A}$*;*
3) თუ $A \in \mathcal{A}$*, მაშინ* $\Omega \setminus A \in \Omega$.

შენიშვნა 2. *2) პირობაში საკმარისია მოვითხოვოთ* $A \cup B \in \mathcal{A}$ *და* $A \cap B \in \mathcal{A}$ *პირობებიდან მხოლოდ ერთ-ერთის მართებულობა, ვინაიდან, შენიშვნა 1-ის ძალით მართებულია შემდეგი სიმრავლურ-თეორიული ტოლობები:*

$$A \cup B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)),$$
$$A \cap B = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)).$$

შენიშვნა 3. Ω *სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს* Ω *-ს და ჩაკეტილია სასრული რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "*$\cap, \cup, \setminus$ *" მიმართ.*

განსაზღვრება 7. Ω*-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა* $\mathcal{F}$*-კლასს ეწოდება* σ*-ალგებრა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:*
1) $\Omega \in \mathcal{F}$*;*
2) თუ $A_k \in \mathcal{F}$ $(k \in N)$ *, მაშინ* $\cup_{k \in N} A_k \in \mathcal{F}$ *და* $\cap_{k \in N} A_k \in \mathcal{F}$*;*
3) თუ $A \in \mathcal{F}$*, მაშინ* $\Omega \setminus A \in \Omega$.

შენიშვნა 4. Ω *სიმრავლის ქვესიმრავლეთა* σ*-ალგებრა მის ქვესიმრავლეთა ისეთი კლასია, რომელიც შეიცავს* Ω*-ს და ჩაკეტილია თვლადი რაოდენობა სიმრავლურ-თეორიული ოპერაციების "*$\cap, \cup, \setminus$ *" მიმართ.*

განსაზღვრება 8. Ω*-სიმრავლის ქვესიმრავლეთა* σ*-ალგებრაზე განსაზღვრულ* P *რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:*

1) ყოველი $A \in \mathcal{F}$ *ელემენტისათვის* $P(A) \geq 0$ *(ალბათობის არაუარყოფითობის თვისება);*

2) $P(\Omega) = 1$ *(ალბათობის ნორმირების თვისება);*

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ $\mathcal{F}$*-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ* $P(\cup_{k \in N} A_k) = \sum_{k \in N} P(A_k)$ *(ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისება).*

კოლმოგოროვის[1] აქსიომატიკა. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *სამეულს, სადაც*
1) Ω *-არაცარიელი სიმრავლეა,*
2) $\mathcal{F}$ *-* Ω *სიმრავლის ქვესიმრავლეთა* σ *-ალგებრაა,*
3) P *არის* $\mathcal{F}$ *კლასზე განსაზღვრული ალბათობა,*
ეწოდება ალბათური სივრცე.

ამასთან, Ω *სიმრავლეს ეწოდება ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე; ყოველ* $\omega \in \Omega$ *წერტილს ეწოდება ელემენტარული ხდომილობა;* $\mathcal{F}$ *კლასის ყოველ ელემენტს ეწოდება ხდომილობა;* $\emptyset$ *-სიმრავლეს ეწოდება შეუძლებელი ხდომილობა;* Ω *სიმრავლეს ეწოდება აუცილებელი ხდომილობა;*

---

[1] კოლმოგოროვი ანდრო ნიკოლოზის ძე [12(25).4.1903 ტამბოვი-25.10.1987 მოსკოვი] რუსი მათემატიკოსი, სსრკ-ის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი (1939), მოსკოვის სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი. 1933 წელს პირველმა განიხილა ალბათობის თეორიის აქსიომატიკური დაფუძნების მათემატიკური კონცეფცია.

ყოველი A ხდომილობისათვის $\overline{A} = \Omega \setminus A$ ხდომილობას ეწოდება მისი საწინააღმდეგო ხდომილობა; A და B ხდომილობების ნამრავლი AB ეწოდება ხდომილობას $A \cap B$; A და B ხდომილობებს ეწოდება არათავსებადი, თუ ხდომილობა AB არის შეუძლებელი ხდომილობა; არათავსებადი A და B ხდომილობების ჯამი $A + B$ ეწოდება $A \cup B$ ხდომილობას; ყოველი A ხდომილობისთვის $P(A)$ რიცხვს ეწოდება A ხდომილობის ალბათობა.

განსაზღვრება 9. *წყვილ-წყვილად არათავსებად $(A_k)_{k\in N}$ ხდომილობათა ოჯახის ჯამი აღინიშნება $\sum_{k\in N} A_k$ სიმბოლოთი და განისაზღვრება ტოლობით*

$$\sum_{k\in N} A_k = \cup_{k\in N} A_k.$$

შენიშვნა 5. *ჯამისა და ნამრავლის სიმრავლურ-თეორიულ ოპერაციებს, მსგავსად ჯამისა და ნამრავლის რიცხვითი ოპერაციებისა, გააჩნიათ შემდეგი თვისებები:*

1) $A+B = B+A,\ AB = BA$ (ჯამისა და ნამრავლის კომუტაციურობის თვისებები);

2) $(A+B)+C = A+(B+C), (AB)C = A(BC)$ (ჯამისა და ნამრავლის ასოციაციურობის თვისებები);

3) $(A + B)C = AC + BC,\ C(A + B) = CA + CB,\ C(\sum_{k\in N} A_k) = \sum_{k\in N} CA_k,\ (\sum_{k\in N} A_k)C = \sum_{k\in N} A_kC$ (დისტრიბუციულობის თვისება ჯამისა ნამრავლის მიმართ).

ტესტები

1.1. ვთქვათ, $A_k = [\frac{k+1}{k+2}, 1]$ $(k \in N)$. მაშინ

1) $\cap_{4\le k\le 10} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{1}{2}, 1]$, ბ) $]\frac{11}{12}, 1]$, გ) $[\frac{11}{12}, 1]$, დ) $[\frac{1}{2}, 1]$;

2) $\cup_{3\le k\le 10} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{4}{5}, 1]$, ბ) $[\frac{3}{4}, 1]$, გ) $[\frac{2}{3}, 1]$, დ) $[\frac{5}{6}, 1]$;

3) $\cup_{2\le k\le 10} A_k \setminus \cap_{1\le k\le 10} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{3}{4}, \frac{11}{12}[$, ბ) $[\frac{4}{5}, \frac{12}{13}[$, გ) $[\frac{4}{5}, 1[$, დ) $[\frac{5}{6}, 1[$;

4) $\cap_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $\{1\}$, ბ) $\{0\}$, გ) $\{\emptyset\}$, დ) $[0, 1]$;

5) $\cup_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{4}{5}, 1]$, ბ) $[\frac{3}{4}, 1]$, გ) $[\frac{2}{3}, 1]$, დ) $[\frac{5}{6}, 1]$;

6) $\cup_{k\in N} A_k \setminus \cap_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{3}{4}, 1[$, ბ) $[\frac{2}{3}, 1[$, გ) $[\frac{4}{5}, 1[$, დ) $[\frac{5}{6}, 1[$.

1.2. ვთქვათ, $A_k = [\frac{k-3}{3k}, \frac{2k+3}{3k}]$ $(k \in N)$. მაშინ

1) $\cap_{5\le k\le 10} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{8}{33}, \frac{25}{33}]$, ბ) $[\frac{7}{30}, \frac{23}{30}]$, გ) $[\frac{2}{15}, \frac{13}{15}]$, დ) $[\frac{1}{12}, \frac{11}{12}]$;

2) $\cup_{10\le k\le 20} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{8}{33}, \frac{25}{33}]$, ბ) $[\frac{7}{30}, \frac{23}{30}]$, გ) $[\frac{2}{15}, \frac{13}{15}]$, დ) $[\frac{1}{12}, \frac{11}{12}]$;

3) $\cap_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[\frac{8}{33}, \frac{25}{33}]$, ბ) $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$, გ) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, დ) $[\frac{1}{12}, \frac{11}{12}]$;

4) $[0,1] \setminus \cap_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $[0,1] \setminus [0, \frac{1}{3}] \cup]\frac{3}{4}; 1[$, ბ) $[0, \frac{1}{3} \cup]\frac{3}{4} \cup]\frac{3}{4}; 1[$, გ) $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, დ) $[\frac{1}{12}, \frac{11}{12}]$.

1.3*. ვთქვათ, θ დადებითი რიცხვია, ამასთან θ და π არ არიან რაციონალურად თანაზომადები, ე.ი. არ არსებობენ ისეთი ნატურალური რიცხვები k და m, რომ შესრულდეს ტოლობა $\theta = \frac{k}{m}\pi$. ვთქვათ, Δ სიმრავლე განსაზღვრულია შემდეგი პირობით

$$\Delta = \{(x,y) | -1 < x < 1, \ -1 < y < 1\}.$$

A_n-ით აღვნიშნოთ Δ სიმრავლის საკოორდინატო სიბრტყის სათავის გარშემო საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით $n\theta$ კუთხით შემობრუნების შედეგად მიღებული სიმრავლე. მაშინ

1) $\cap_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $\{(x,y) | x^2+y^2 \le 1\}$, ბ) $\{(x,y) | x^2+y^2 \le 2\}$,

გ) $\{(x,y) | x^2+y^2 < 1\}$, დ) $\{(x,y) | x^2+y^2 < 2\}$;

2) $\cup_{k\in N} A_k$ სიმრავლეს აქვს სახე

ა) $\{(x,y) | x^2+y^2 \le 1\}$, ბ) $\{(x,y) | x^2+y^2 \le 2\}$,

გ) $\{(x,y) | x^2+y^2 < 1\}$, დ) $\{(x,y) | x^2+y^2 < 2\}$.

1.4. ვთქვათ, $\Omega = \{0;1\}$. Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა

1) ალგებრა არის

ა) $\{\{0\}, \{0;1\}\}$, ბ) $\{\{0\}; \{0;1\}; \emptyset\}$,

გ) $\{\{0\}; \{1\}; \{0;1\}; \emptyset\}$; დ) $\{\{1\}, \{0;1\}\}$;

2) σ-ალგებრა არის

ა) $\{\{0\}, \{0;1\}\}$, ბ) $\{\{0\}; \{0;1\}; \emptyset\}$,

გ) $\{\{0\}; \{1\}; \{0;1\}; \emptyset\}$; დ) $\{\{1\}, \{0;1\}\}$.

1.5. ვთქვათ, $\Omega = [0,1[$.

1) მის ქვესიმრავლეთა ალგებრას წარმოადგენს

ა) $\{X | X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$,

ბ) $\{X | X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$,

გ) $\{X | X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება ორივე მხრიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$,

დ) $\{X | X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება ორივე მხრიდან ღია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$;

2) ვთქვათ, $\mathcal{A} = \{X | X \subset [0,1[$, X წარმოიდგინება მარცხნიდან ჩაკეტილი და მარჯვნიდან ღია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებით $\}$. მაშინ $\mathcal{A}$

ა) არ არის ალგებრა, ბ) არ არის σ-ალგებრა, გ) არის σ-ალგებრა, მაგრამ არ არის ალგებრა, დ) არის ალგებრა, მაგრამ არ არის σ-ალგებრა.

§ 2. ალბათობის თვისებები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ არის ალბათური სივრცე. P ალბათობას გააჩნია შემდეგი თვისებები.

თვისება 1. $P(\emptyset) = 0.$

დამტკიცება. $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$ *წარმოდგენის მართებულობისა და P ალბათობის თვლადად-ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ*

$$P(\emptyset) = \lim_{n\to\infty} nP(\emptyset).$$

P ფუნქციის სასრულობის გამო $P(\emptyset) \in R$. ამიტომ ზემოთ მოყვანილი ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ მაშინ, როცა $P(\emptyset) = 0$.

თვისება 2 (სასრულად–ადიტიურობის თვისება). *თუ $(A_k)_{1\le k\le n}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ხდომილობების სასრული მიმდევრობა, მაშინ*

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

დამტკიცება. *ყოველი $k > n$ ნატურალური რიცხვისათვის დაუშვათ $A_k = \emptyset$. მაშინ თვისება 1-ისა და P ალბათობის თვლადად-ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ*

$$P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = P(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

თვისება 3. *ყოველი $A \in \mathcal{F}$ ელემენტისათვის მართებულია ტოლობა*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

დამტკიცება. $\Omega = A + \overline{A}$ *წარმოდგენის მართებულობის, P ალბათობის ნორმირებისა და სასრულად-ადიტიურობის თვისებებიდან ვღებულობთ*

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

თვისება 4. *ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$ და $A \subseteq B$, მაშინ $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.*

დამტკიცება. $B = A + (B \setminus A)$ *წარმოდგენის მართებულობისა და P ალბათობის სასრულად-ადიტიურობის თვისებიდან ვღებულობთ $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.*

თვისება 5. *ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$ და $A \subseteq B$, მაშინ $P(A) \le P(B)$.*

დამტკიცება. *მე-4 თვისების გამო ვღებულობთ* $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. *აქედან* $P(A) = P(B) - P(B \setminus A) \leq P(B)$.

თვისება 6. *ვთქვათ,* $A, B \in \mathcal{F}$*, მაშინ*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

დამტკიცება. $A \cup B = (A \setminus B) + AB + (B \setminus A)$ *წარმოდგენის მართებულობიდან და* P *ალბათობის სასრულად-ადიტიურობის თვისებიდან ვღებულობთ*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

თვისება 7. *ვთქვათ,* $A, B \in \mathcal{F}$*, მაშინ*

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

დამტკიცება. *მე-6 თვისების გამო გვაქვს*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

აქედან ვღებულობთ

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \leq P(A) + P(B).$$

თვისება 8 (უწყვეტობა ზევიდან). *ვთქვათ,* $(A_n)_{n \in N}$ *არის ხდომი- ლობათა კლებადი მიმდევრობა, ე.ი.*

$$(\forall n)(n \in N \rightarrow A_{n+1} \subseteq A_n).$$

მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$P(\cap_{n \in N} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

დამტკიცება. *ყოველი ნატურალური* $n \in N$ *რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი წარმოდგენა*

$$A_n = \cap_{k \in N} A_k + (A_n \setminus A_{n+1}) + (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) + \cdots.$$

ამიტომ, ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ:

$$P(A_n) - P(\cap_{k \in N} A_k) = \sum_{p=1}^{\infty} P(A_{n+p} \setminus A_{n+p+1}).$$

შევნიშნოთ, რომ ჯამი $\sum_{p=1}^{\infty} P(A_{n+p} \setminus A_{n+p+1})$ *წარმოადგენს აბსოლუტურად კრებადი* $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n+1})$ *მწკრივის* n*-ურ ნაშთს. მწკრივის კრებადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის ძალით ვღებულობთ*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{p=1}^{\infty} P(A_{n+p} \setminus A_{n+p+1}) = 0.$$

ამ პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty}(P(A_n) - P(\cap_{k\in N}A_k)) = \lim_{n\to\infty}P(A_n) - P(\cap_{k\in N}A_k) = 0,$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n) = P(\cap_{k\in N}A_k).$$

თვისება 9 (უწყვეტობა ქვევიდან). ვთქვათ, $(B_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა ზრდადი მიმდევრობა, ე.ი.

$$(\forall n)(n \in N \to B_n \subseteq B_{n+1}).$$

მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$P(\cup_{n\in N}B_n) = \lim_{n\to\infty}P(B_n).$$

დამტკიცება. $\cup_{n\in N}B_n$ ხდომილობისათვის მართებულია წარმოდგენა

$$\cup_{n\in N}B_n = B_1 + (B_2 \setminus B_1) + \cdots + (B_{k+1} \setminus B_k) + \cdots.$$

ალბათობის თვლადად-ადიტიურობის თვისებიდან ვღებულობთ

$$P(\cup_{n\in N}B_n) = P(B_1) + P(B_2 \setminus B_1) + \cdots + P(B_{k+1} \setminus B_k) + \cdots.$$

მე-4 თვისების გამო ვღებულობთ

$$P(B_{k+1}) = P(B_k) + P(B_{k+1} \setminus B_k).$$

თუ ამ ტოლობიდან განვსაზღვრავთ $P(B_{k+1} \setminus B_k)$-ს და მის მნიშვნელობას შევიტანთ წინა ტოლობაში, მივიღებთ

$$P(\cup_{n\in N}B_n) = P(B_1) + (P(B_2) - P(B_1)) + \cdots + (P(B_{k+1}) - P(B_k)) + \cdots.$$

ტოლობის მარჯვნივ მდგომი მწკრივი კრებადია. ამასთან მისი პირველი n წევრის S_n ჯამისათვის მართებულია ტოლობა

$$S_n = P(B_n).$$

ამიტომ, მწკრივის ჯამის განსაზღვრიდან ვღებულობთ

$$P(\cup_{n\in N}B_n) = \lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}P(B_n).$$

ტესტები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა.

2.1. თუ A ხდომილების ალბათობა ტოლია $0,95$, მაშინ $P(\overline{A})$ ტოლია

ა) $0,56$, ბ) $0,55$, გ) $0,05$, დ) $0,03$.

2.2. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$, $P(A) = 0,65$ და $P(B) = 0,68$. მაშინ $P(B \setminus A)$ ტოლია

ა) $0,02$, ბ) $0,03$, გ) $0,04$, დ) $0,05$.

2.3. ვთქვათ, $A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0,35$, $P(B) = 0,45$ და $P(A \cup B) = 0,75$. მაშინ $P(A \cap B)$ ტოლია

ა) $0,02$, ბ) $0,03$, გ) $0,04$, დ) $0,05$.

2.4. ვთქვათ, $(A_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა კლებადი მიმდევრობა და $P(\cap_{n\in N} A_n) = 0,89$. მაშინ $\lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n})$ ტოლია

ა) $0,11$, ბ) $0,12$, გ) $0,13$, დ) $0,14$.

2.5. ვთქვათ, $(A_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა კლებადი მიმდევრობა და $P(A_n) = \frac{n+1}{3n}$. მაშინ $P(\cap_{n\in N} A_n)$ ტოლია

ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{1}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{5}$.

2.6. ვთქვათ, $(A_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა ზრდადი მიმდევრობა და $P(\cup_{n\in N} A_n) = 0,89$. მაშინ $\lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n})$ ტოლია

ა) $0,11$, ბ) $0,12$, გ) $0,13$, დ) $0,14$.

2.7. ვთქვათ, $(A_n)_{n\in N}$ არის ხდომილობათა ზრდადი მიმდევრობა და $P(A_n) = \frac{n-1}{3n}$. მაშინ $P(\cup_{n\in N} A_n)$ ტოლია

ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{1}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{5}$.

§3. ალბათურ სივრცეთა მაგალითები

1. კლასიკური ალბათური სივრცე. *ვთქვათ, Ω არის n-ელემენტიანი სიმრავლე, ე.ი. $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. $\mathcal{F}$-ით აღვნიშნოთ Ω სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. განვსაზღვროთ $\mathcal{F}$ კლასზე P რიცხვითი ფუნქცია შემდეგი თანაფარდობით*

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}),$$

სადაც $|\cdot|$ აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას.

ადვილი საჩვენებელია, რომ სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეს. მას ეწოდება კლასიკური ალბათური სივრცე, ხოლო P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება კლასიკური ალბათობა.

განსაზღვრება 1. *$\omega \in \Omega$ ელემენტარულ ხდომილობას ეწოდება A ხდომილობის ხელშემწყობი, თუ $\omega \in A$.*

კლასიკური ალბათობის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს A ხდომილობის კლასიკური ალბათობის გამოსათვლელი შემდეგი წესი:

A ხდომილობის კლასიკური ალბათობა ტოლია წილადის, რომლის მრიცხველია A ხდომილობის ყველა ხელშემწყობ ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა, ხოლო მნიშვნელია ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილობათა რაოდენობა.

2. გეომეტრიული ალბათური სივრცე. *ვთქვათ, Ω არის ევკლიდეს n-განზომილებიანი R^n სივრცის რაიმე დადებითი ბორელის [2] b_n ზომის მქონე ქვესიმრავლე (იხ. §5, მაგალითი 3). $\mathcal{F}$ იყოს Ω სიმრავლის ყველა ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი. $\mathcal{F}$ კლასზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი თანაფარდობით:*

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{b_n(A)}{b_n(\Omega)}).$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან Ω სივრცესთან ასოცირებული გეომეტრიული ალბათური სივრცე, ხოლო P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიანი გეომეტრიული ალბათობა, განსაზღვრული Ω სივრცეზე.

იმ შემთხვევაში, როცა წერტილი ვარდება Ω სიმრავლეში და მისი ამ სიმრავლის ბორელის აზრით ზომად ნებისმიერ ქვესიმრავლეში ჩავარდნის ალბათობა ამ სიმრავლის b_n-ბორელის ზომის პირდაპირპროპორციულია, გამოიყენება Ω სივრცეზე განსაზღვრული გეომეტრიული ალბათობის გამოსათვლელი შემდეგი წესი:

დადებითი ბორელის ზომის მქონე $\Omega \subset R^n$ სიმრავლის ბორელის აზრით ზომად $A \subset \Omega$ ქვესიმრავლეში ჩავარდნის ალბათობა ტოლია წილადის, რომლის მრიცხველია A სიმრავლის ბორელის b_n ზომა, ხოლო მნიშვნელია Ω სიმრავლის ბორელის b_n ზომა.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის შედგენაზე.

მაგალითი 1.

ექსპერიმენტი - *ერთი კამათლის შემთხვევითი გაგორება.*

ამოცანა. *ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება ლუწი ციფრი.*

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. *ვინაიდან ექსპერიმენტის შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ ყველა ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს ექნება შემდეგი სახე:*

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

[2] ბორელი ფელიქსი ედუარდი ჟიუსტენ (*Borel Felix Eduard Justion Emil*)(7.01. 1871 სენტ-აფრიკა--3.03.1956. პარიზი)-ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1921), პარიზის უნივერსიტეტის პროფესორი (1909-1941). ჩაუყარა საფუძველი თანამედროვე მათემატიკური ანალიზის რამოდენიმე მიმდინარეობას (განშლადი მწკრივები, ანალიზური ფუნქციის განზოგადება, სიმრავლის ზომა, დიოფანტური მიახლოებები და სხვა.)

$\mathcal{F}$ σ-ალგებრის როლში განვიხილოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. ცხადია, რომ

$$\mathcal{F} = \{\emptyset; \{1\}; \cdots \{6\}; \{1;2\}; \cdots \{1;2;3;4;5;6\}\}.$$

P-თი აღვნიშნოთ კლასიკური ალბათობა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A) = \frac{|A|}{6}).$$

ასეთნაირად აგებული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. *ერთი კამათლის გაგორებისას ლუწი ციფრის მოსვლას შეესაბამება ხდომილობა B, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:*

$$B = \{2; 4; 6\}.$$

P ალბათობის განსაზღვრიდან ვღებულობთ:

$$P(B) = \frac{|B|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

დასკვნა. *ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება ლუწი ციფრი, ტოლია $\frac{1}{2}$.*

მაგალითი 2.

ესპერიმენტი - *36 კარტიანი დასტიდან 3 კარტის შემთხვევითი ამოღება.*

ამოცანა. *ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ექსპერიმენტის შედეგი იქნება კარტების ისეთი სამეული, რომელშიც ერთი კარტი იქნება ტუზი.*

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. *ვინაიდან ექსპერიმენტის შედეგი - " 36 კარტიანი დასტიდან შემთხვევით ამოღებული 3 კარტი " - ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ Ω სივრცე იქნება კარტების ყველა შესაძლო სამეულების სიმრავლე. Ω სივრცის ელემენტთა რაოდენობა ტოლია 36 ელემენტიან სიმრავლეში ყველა განსხვავებულ 3 ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობის, ე.ი.*

$$|\Omega| = C_{36}^3.$$

$\mathcal{F}$ σ-ალგებრის როლში განვიხილოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი. P-თი აღვნიშნოთ კლასიკური ალბათობა, განსაზღვრული პირობით

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \rightarrow P(A) = \frac{|A|}{C_{36}^3}).$$

ასეთნაირად აგებული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს 36 კარტიანი დასტიდან 3 კარტის შემთხვევითი ამოღების ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. *36 კარტიანი დასტიდან 3 კარტის შემთხვევითი ამოღებისას მხოლოდ ერთი ტუზის მოსვლას შეესაბამება Ω სივრცის ისეთი სამეულების სიმრავლე A, რომლებიც შეიცავენ მხოლოდ ერთ ტუზს. ყოველი ასეთი სამეულის მიღება შეიძლება შემდეგნაირად: 1 კარტს ვირჩევთ ტუზების კომპლექტიდან, რომლის განხორციელების C_4^1 შესაძლებლობაა, ხოლო დანარჩენ ორ კარტს ვირჩევთ დანარჩენი 32 კარტიდან, რომლის განხორციელების C_{32}^2 შესაძლებლობაა. ამიტომ $C_4^1 \cdot C_{32}^2$ ემთხვევა A სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას.*

P ალბათობის განსაზღვრის საფუძველზე ვღებულობთ

$$P(A) = \frac{|A|}{C_{36}^3} = \frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}.$$

დასკვნა. *ალბათობა იმისა, რომ 36 კარტიანი დასტიდან შემთხვევით ამოღებულ 3 კარტში 1 კარტი იქნება ტუზი, ტოლია $\frac{C_4^1 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^3}$.*

მაგალითი 3.

ექსპერიმენტი. *სიბრტყეზე გავლებულია პარალელური წრფეები ისე, რომ მანძილი ორ მეზობელ წრფეს შორის $2a$-ს ტოლია. შემთხვევითად აგდებენ $2l$ სიგრძის ნემსს. ამასთან $2l < 2a$, რაც გამორიცხავს ნემსის მიერ ორი პარალელური ხაზის ერთდროულად გადაკვეთის შესაძლებლობას.*

ამოცანა *(ბიუფონი[3]). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ სიბრტყეზე შემთხვევითად დაგდებული ნემსი გადაკვეთს რომელიმე პარალელურ ხაზს.*

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელის აგება. *ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ სიბრტყე აღჭურვილია მართკუთხა კოორდინატთა XOY სისტემით, ხოლო წრფეები პარალელურია OX რიცხვითი ღერძისა. შევნიშნოთ რომ ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგი ნემსის გარკვეული მდებარეობაა სიბრტყეზე, რომელიც შეიძლება დახასიათდეს ცალსახად (რომელიმე პარალელური ხაზის გადაკვეთასთან მიმართებაში) რიცხვითი სიდიდეებით x და φ, სადაც x არის მანძილი ნემსის შუა წერტილიდან უახლოეს წრფემდე, ხოლო φ არის კუთხე ნემსსა (რომელიც განხილულია როგორც ვექტორი, მიმართულებით ნემსის ყუნწიდან მის წვერომდე) და OX ღერძის დადებით მიმართულებას შორის.*

ცხადია, რომ x და φ აკმაყოფილებენ პირობებს $0 \leq x \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi$. ამგვარად

$$\Omega = [0;\pi] \times [0;a] = \{(\varphi;x) : 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq x \leq a\}.$$

[3]ბიუფონი გეორგ ლუი ლეკლერკი (*Buffon Georges Louis Leclerc*) (7.9.1707 მონბარი-16.4.1788 პარიზი) ფრანგი ექსპერიმენტატორი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1776), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1733). პირველი, ვინც მუშაობდა გეომეტრიულ ალბათობასთან დაკავშირებულ ამოცანებზე.

$\mathcal{F}$ იყოს Ω სიმრავლის ყველა ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი. $\mathcal{F}$ კლასზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall A)(A \in \mathcal{F} \to P(A) = \frac{b_2(A)}{b_2(\Omega)}).$$

ასეთნაირად განსაზღვრული სამეული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ წარმოადგენს სიბრტყეზე ნემსის შემთხვევითი დაგდების ექსპერიმენტის აღმწერ ალბათურ მოდელს.

ამოცანის ამოხსნა. შევნიშნოთ, რომ სიბრტყეზე ნემსის შემთხვევითი დაგდებისას მის მიერ რომელიმე პარალელური ხაზის გადაკვეთას შეესაბამება B_0 ხდომილობა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$B_0 = \{(\varphi, x)| \ \ 0 \le \varphi \le \pi, \ \ 0 \le x \le l \sin\varphi\}.$$

P ალბათობის განსაზღვრის ძალით, ვღებულობთ

$$P(B_0) = \frac{b_2(B)}{a \cdot \pi} = \frac{\int_0^\pi l \sin\varphi d\varphi}{a \cdot \pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ სიბრტყეზე შემთხვევითად დაგდებული ნემსი გადაკვეთს რომელიმე პარალელურ ხაზს, ტოლია $\frac{2l}{a\pi}$.

ტესტები

3.1. ყუთში არის 5 თეთრი და 10 შავი ბურთულა. ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითად ამოღებული ბურთულა იქნება შავი, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{3}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

3.2. ყუთში არის 7 თეთრი და 13 წითელი ბურთულა. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევითად ამოღებული 3 ბურთულიდან 2 ბურთულა იქნება წითელი, ტოლია

ა) $\frac{C_{13}^2 \cdot C_7^1}{C_{20}^3}$, ბ) $\frac{C_{13}^1 \cdot C_7^2}{C_{20}^3}$, გ) $\frac{C_{13}^2 \cdot C_7^2}{C_{20}^3}$, დ) $\frac{C_{13}^1 \cdot C_7^1}{C_{20}^3}$.

3.3. აგორებენ ორ კამათელს. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ კამათლებზე მოსულ ციფრთა ჯამი არ აღემატება 8-ს, ტოლია

ა) $\frac{13}{18}$, ბ) $\frac{5}{6}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

3.4. ჯგუფში არის 17 სტუდენტი. მათ შორის 8 ვაჟია. გათამაშებულია 7 ბილეთი. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ ბილეთების მფლობელებს შორის 4 ვაჟია, ტოლია

ა) $\frac{C_{13}^2 \cdot C_7^2}{C_{15}^7}$, ბ)$\frac{C_8^1 \cdot C_7^2}{C_{17}^7}$, გ) $\frac{C_8^4 \cdot C_9^3}{C_{17}^7}$, დ) $\frac{C_{13}^1 \cdot C_7^1}{C_{25}^7}$.

3.5. კუბი, რომლის ყველა წახნაგი შეღებილია, დაყოფილია ათას თანატოლ კუბად. მიღებული კუბები არეულია ერთმანეთში. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებულ კუბს

1) ექნება სამი შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{1}{1000}$, ბ) $\frac{1}{125}$, გ) $\frac{1}{250}$, დ) $\frac{1}{400}$;

2) ექნება ორი შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{12}{124}$, ბ) $\frac{11}{120}$, გ) $\frac{12}{125}$, დ) $\frac{9}{125}$;

3) ექნება ერთი შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{54}{250}$, ბ) $\frac{43}{145}$, გ) $\frac{48}{125}$, დ) $\frac{243}{250}$;

4) არ ექნება შეღებილი წახნაგი, ტოლია

ა) $\frac{8}{250}$, ბ) $\frac{64}{125}$, გ) $\frac{4}{165}$, დ) $\frac{23}{250}$.

3.6. 10 ქალისა და 10 მამაკაცისაგან შედგენილი ჯგუფი შემთხვევით იყოფა ორ ტოლ ნაწილად. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ ორივე ნაწილში მამაკაცები და ქალები იქნებიან თანაბარი რაოდენობით, ტოლია

ა) $\frac{(C_{10}^5)^2}{C_{20}^{10}}$, ბ) $\frac{C_{10}^5}{C_{20}^{10}}$, გ) $\frac{(C_{10}^5)^3}{C_{20}^{10}}$, დ) $\frac{C_{10}^5}{C_{20}^5}$.

3.7. გვაქვს ხუთი მონაკვეთი, რომელთა სიგრძეებია 1, 3, 4, 7 და 9. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით აღებული სამი მონაკვეთისაგან შეიძლება სამკუთხედის შედგენა, ტოლია

ა) $\frac{3}{C_5^3}$, ბ) $\frac{2}{C_5^3}$, გ) $\frac{4}{C_5^3}$, დ) $\frac{5}{C_5^3}$.

3.8. კლასიკური ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას

1) მოსული ქულების ჯამი ხუთს არ აღემატება, ტოლია

ა) $\frac{7}{36}$, ბ) $\frac{5}{18}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{3}{9}$;

2) ერთ-ერთზე მაინც მოვა ხუთი ქულა, ტოლია

ა) $\frac{7}{36}$, ბ) $\frac{8}{36}$, გ) $\frac{11}{36}$, დ) $\frac{3}{19}$;

3) მხოლოდ ერთ კამათელზე მოვა ხუთი ქულა, ტოლია

ა) $\frac{7}{36}$, ბ) $\frac{5}{18}$, გ) $\frac{10}{36}$, დ) $\frac{12}{19}$;

4) მოსულ ქულათა ჯამი 3-ის ჯერადია, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{5}$, გ) $\frac{1}{6}$, დ) $\frac{2}{9}$;

5) მოსულ ქულათა სხვაობის მოდული 3-ის ტოლია, ტოლია

ა) $\frac{1}{6}$, ბ) $\frac{2}{5}$, გ) $\frac{2}{6}$, დ) $\frac{2}{5}$;

6) მოსულ ქულათა ნამრავლი მარტივია, ტოლია

ა) $\frac{5}{36}$, ბ) $\frac{7}{36}$, გ) $\frac{11}{36}$, დ) $\frac{2}{36}$.

3.9. წერტილი ვარდება კვადრატში, რომელშიც ჩახაზულია წრე. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ ჩავარდება წრეში, ტოლია

ა) $1-\frac{\pi}{3}$, ბ) $1-\frac{\pi}{4}$, გ) $1-\frac{\pi}{5}$, დ) $1-\frac{\pi}{6}$.

3.10. ქარიშხალმა დააზიანა სატელეფონო ხაზი 160-ე და 290-ე კილომეტრებს შორის. ალბათობა იმისა, რომ დაზიანება მოხდა სატელეფონო ხაზის მე-200-ედან მე-240-ე კმ-ს შორის, ტოლია

ა) $\frac{1}{13}$, ბ) $\frac{2}{13}$, გ) $\frac{4}{13}$, დ) $\frac{5}{13}$.

3.11. R რადიუსიანი წრის ცენტრიდან d მანძილზე $(d>R)$ აღებულია A წერტილი. ალბათობა იმისა, რომ A წერტილზე შემთხვევით გავლებული

1) წრფე წრეს გადაკვეთს, ტოლია

ა) $\frac{2\ \arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, ბ) $\frac{3\ arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, გ) $\frac{arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, დ) $\frac{2\ arcsin(\frac{2R}{d})}{\pi}$;

2) სხივი წრეს გადაკვეთს, ტოლია

ა) $\frac{2arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, ბ) $\frac{3arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, გ) $\frac{arcsin(\frac{R}{d})}{\pi}$, დ) $\frac{2arcsin(\frac{2R}{d})}{\pi}$.

3.12. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს კუბიდან, რომელშიც ჩახაზულია ბირთვი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული ბირთვიდან, ტოლია

ა) $1-\frac{\pi}{3}$, ბ) $1-\frac{\pi}{4}$, გ) $1-\frac{\pi}{5}$, დ) $1-\frac{\pi}{6}$.

3.13. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ბირთვიდან, რომელშიც ჩახაზულია კუბი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული კუბიდან, ტოლია

ა) $1-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$, ბ) $1-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, გ) $1-\frac{\sqrt{3}}{5\pi}$, დ) $1-\frac{\sqrt{3}}{6\pi}$.

3.14. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ტეტრაედრიდან, რომელშიც ჩახაზულია ბირთვი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული ბირთვიდან, ტოლია

ა) $1-\frac{5\pi\sqrt{2}}{48}$, ბ) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{45}$, გ) $1-\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$, დ) $1-\frac{5\pi\sqrt{2}}{80}$.

3.15. შემთხვევით ირჩევენ წერტილს ბირთვიდან, რომელშიც ჩახაზულია ტეტრაედრი. გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ წერტილი არ არის შერჩეული ტეტრაედრიდან, ტოლია

ა) $1-\frac{12\sqrt{3}}{45\pi}$, ბ) $1-\frac{1}{9\pi}$, გ) $1-\frac{12\sqrt{3}}{47\pi}$, დ) $1-\frac{12\sqrt{3}}{43\pi}$.

3.16. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კვადრატიდან, რომელიც საკოორდინატო XOY სიბრტყეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta=\{(x,y): 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის (x,y) კოორდინატები დააკმაყოფილებენ პირობას

$$x+y\ge\frac{1}{2},$$

ტოლია

ა) $\frac{3}{6}$, ბ) $\frac{3}{4}$, გ) $\frac{3}{5}$, დ) $\frac{5}{6}$.

3.17. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კვადრატიდან, რომელიც საკოორდინატო XOY სიბრტყეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის (x,y) კოორდინატები დააკმაყოფილებენ პირობას

$$\sin(x) \leq y \leq x,$$

ტოლია

ა) $1 - \frac{1}{4\pi^2}$, ბ) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}$, გ) $1 - \frac{1}{5\pi^2}$, დ) $1 - \frac{1}{6\pi^2}$.

3.18. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კუბიდან, რომელიც საკოორდინატო $XOYZ$ სივრცეში განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის (x,y,z) კოორდინატები დააკმაყოფილებენ პირობებს

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4},\ x + y + z \geq \frac{1}{2},$$

ტოლია

ა) $\frac{\pi-1}{48}$, ბ) $\frac{4\pi-1}{24}$, გ) $\frac{\pi-2}{50}$, დ) $\frac{\pi+2}{50}$.

3.19. ორი ამხანაგი უნდა შეხვდეს ერთმანეთს დათქმულ ადგილას 12სთ.-დან 13 სთ.-მდე. შეხვედრის ადგილზე პირველად მისული ელოდება მეორეს არა უმეტეს 20 წუთისა. ალბათობა იმისა, რომ ამხანაგები შეხვდებიან ერთმანეთს დროის აღნიშნულ ინტერვალში, ტოლია

ა) $\frac{5}{9}$, ბ) $\frac{5}{8}$, გ) $\frac{5}{7}$, დ) $\frac{6}{7}$.

3.20. სტუდენტს დაგეგმილი აქვს ბანკიდან ფულის გამოტანა. მოსალოდნელია, რომ იგი ბანკში მივა 14 საათსა და 15 წუთიდან 14 საათსა და 25 წუთამდე. ცნობილია ისიც, რომ მძარცველებს დაგეგმილი აქვთ ბანკზე თავდასხმა დროის იმავე შუალედში. ცნობილია, რომ ფულის გამოსატანად სტუდენტს სჭირდება 4 წთ და იგივე დროა საჭირო ყაჩაღებისთვის. ალბათობა იმისა, რომ სტუდენტი აღმოჩნდება ბანკში გაძარცვის მომენტში, ტოლია

ა) $\frac{1}{10}$, ბ) $\frac{1}{11}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

3.21. R რადიუსიან წრეწირზე შემთხვევითად ირჩევენ A, B და C წერტილებს. ალბათობა იმისა, რომ სამკუთხედი ABC მახვილკუთხაა, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{1}{4}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

3.22. l სიგრძის AB მონაკვეთზე აღებულია ორი წერტილი C და D. ალბათობა იმისა რომ მიღებული სამი მონაკვეთისაგან სამკუთხედი აიგება, ტოლია

ა) $\frac{1}{4}$, ბ) $\frac{1}{5}$, გ) $\frac{1}{6}$, დ) $\frac{1}{7}$.

3.23. შემთხვევით ირჩევენ M წერტილს Δ კვადრატიდან, რომელიც საკოორდინატო POQ სიბრტყეზე განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\Delta = \{(p,q) : 0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1\}.$$

გეომეტრიული ალბათობა იმისა, რომ $x^2 + px + q = 0$ განტოლების ფესვები ნამდვილი რიცხვები იქნება, სადაც (p,q) წარმოადგენს M წერტილის კოორდინატებს, ტოლია

ა) $\frac{1}{12}$, ბ) $\frac{1}{13}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

3.24. M წერტილს შემთხვევით ირჩევენ R რადიუსიანი ბირთვიდან. ალბათობა იმისა, რომ M წერტილის ρ დაშორება ბირთვის ცენტრიდან დააკმაყოფილებს პირობას $\frac{R}{2} < \rho < \frac{2R}{3}$, ტოლია

ა) $\frac{7}{27}$, ბ) $\frac{1}{4}$, გ) $\frac{37}{216}$, დ) $\frac{8}{29}$.

§ 4. პირობითი ალბათობა. სრული ალბათობისა და ბაიესის ფორმულები

ვთქვათ, მოცემულია $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცე.

განვიხილოთ დადებითი ალბათობის მქონე რაიმე B ხდომილობა.

განვსაზღვროთ $P(\cdot \mid B)$ რიცხვითი ფუნქცია $\mathcal{F}$ σ-ალგებრაზე შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall X)(X \in \mathcal{F} \rightarrow P(X|B) = \frac{P(X \cap B)}{P(B)}).$$

ასეთნაირად განსაზღვრულ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება პირობითი ალბათობა B-ს პირობით, ხოლო რიცხვს $P(X|B)$ ეწოდება X ხდომილობის პირობითი ალბათობა B-ს პირობით.

თეორემა 1. *თუ $B \in \mathcal{F}$ და $P(B) > 0$, მაშინ პირობითი ალბათობა $P(\cdot \mid B)$ წარმოადგენს ალბათობას.*

დამტკიცება. *ალბათობის განსაზღვრის ძალით, $P(\cdot \mid B)$ რიცხვითი ფუნქციისათვის უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:*

1) ყოველი $A \in \mathcal{F}$ ელემენტისათვის $P(A|B) \geq 0$;

2) $P(\Omega|B) = 1$;

3) თუ $(A_k)_{k \in N}$ $\mathcal{F}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა მიმდევრობაა, მაშინ

$$P(\cup_{k\in N}A_k|B)=\sum_{k\in N}P(A_k|B).$$

1) პირობის მართებულობა გამომდინარეობს $P(\,\cdot\mid B)$ ფუნქციის განსაზღვრიდან და P ალბათობის არაუარყოფითობიდან. მართლაც,

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq 0.$$

2) პირობის მართებულობა გამომდინარეობს შემდეგი თანაფარდობიდან

$$P(\Omega|B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

3) პირობის მართებულობა გამომდინარეობს P ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისებიდან და იმ ელემენტარული ფაქტიდან, რომ თუ $(A_n)_{n\in N}$ ხდომილობები არათავსებადია, მაშინ $(A_n\cap B)_{n\in N}$ ხდომილობებიც არათავსებადია. მართლაც,

$$P(\cup_{n\in N}A_n|B)=\frac{P((\cup_{n\in N}A_n)\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\cup_{n\in N}(A_n\cap B))}{P(B)}=$$

$$=\frac{\sum_{n\in N}P(A_n\cap B)}{P(B)}=\sum_{n\in N}\frac{P(A_n\cap B)}{P(B)}=\sum_{n\in N}P(A_n\mid B)$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. *თუ $P(B)>0$, მაშინ $P(\overline{B}|B)=0$.*

დამტკიცება.

$$P(\overline{B}|B)=\frac{P(\overline{B}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(\emptyset)}{P(B)}=0.$$

განსაზღვრება 1. *A და B ხდომილობებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ მათთვის სრულდება პირობა*

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

მაგალითი 1. *ვთქვათ, $\Omega=\{(x,y):x\in[0;1],y\in[0;1]\}$.*

$\mathcal{F}$ კლასის როლში განვიხილოთ ერთეულოვანი Ω კვადრატის ყველა ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი (იხ.§5, მაგალითი 3). P ალბათობის როლში განვიხილოთ ბორელის კლასიკური ზომა b_2. მაშინ ხდომილობები

$$A=\{(x,y):x\in[0;\frac{1}{2}],y\in[0;1]\},$$

$$B=\{(x,y):x\in[0;1],y\in[\frac{1}{2};\frac{3}{4}]\}$$

დამოუკიდებელი ხდომილობებია.

მართლაც

$$P(A\cap B)=b_2(A\cap B)=b_2(\{(x,y):x\in[0;\frac{1}{2}],y\in[\frac{1}{2};\frac{3}{4}]\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

მეორეს მხრივ,

$$P(A)\cdot P(B)=b_2(A)\cdot b_2(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

ამგვარად, მივიღეთ

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B),$$

რაც A და B ხდომილობების დამოუკიდებლობას ნიშნავს.

თეორემა 3. *თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია და $P(B)>0$, მაშინ $P(A|B)=P(A)$.*

დამტკიცება. პირობითი ალბათობის განსაზღვრის გამო გვაქვს

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

A და B ხდომილობათა დამოუკიდებლობის გამო $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. ამიტომ, საბოლოოდ ვღებულობთ

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)\cdot P(B)}{P(B)}=P(A).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა. თეორემა 3 უნდა გავიგოთ შემდეგნაირად: თუ A და B ხდომილობები დამოუკიდებელია და $P(B)>0$, მაშინ B ხდომილობის მოხდენა ან არ მოხდენა არავითარ გავლენას არ ახდენს A ხდომილობის ალბათობაზე.

თეორემა 4. *თუ A და B დამოუკიდებელი ხდომილობებია, მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე $\overline{A}$ და B ხდომილობებიც.*

დამტკიცება.

$$P(\overline{A}\cap B)=P((\Omega\setminus A)\cap B)=P((\Omega\cap B)\setminus(A\cap B))=$$
$$=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=P(B)(1-P(A))=P(B)\cdot P(\overline{A}).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 2.

ექსპერიმენტი - *ორი კამათლის შემთხვევითი გაგორება.*

ამოცანა. *ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსული ციფრების ჯამი უდრის 8-ს, თუ ცნობილია, რომ კამათლებზე მოსული ციფრების ჯამი ლუწია.*

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცის აგება. *იმის გამო, რომ ექსპერიმენტის ყოველი შესაძლო შედეგი ელემენტარული ხდომილობაა, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილობათა Ω სივრცეს ექნება შემდეგი სახე*

$$\Omega=\{(x,y):x\in N,y\in N,\ 1\le x\le 6,\ 1\le y\le 6\},$$

სადაც x და y აღნიშნავს შესაბამისად, პირველ და მეორე კამათელზე მოსულ ქულას.

$\mathcal{F}$-ით აღვნიშნოთ Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი, ხოლო P-ს როლში განვიხილოთ კლასიკური ალბათობა. ამით ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცე $(\Omega,\mathcal{F},P)$ აგებულია.

ამოცანის ამოხსნა. *A-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ის ქვესიმრავლე, რომელსაც შეესაბამება ხდომილობა:*

" ორი კამათლის გაგორებისას მოსულ ციფრთა ჯამი უდრის 8-ს ".

მაშინ, A სიმრავლე შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$A=\{\ (6;2);\ (5;3);\ (4;4);\ (3;5);\ (2;6)\ \}.$$

B-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ის ქვესიმრავლე, რომელიც შეესაბამება ხდომილობას:

" ორი კამათლის გაგორებისას მოსულ ციფრთა ჯამი ლუწია ".

მართებულია შემდეგი წარმოდგენა

$$B=\{(1;1);\ (1;3);\ (2;2);\ (3;1);\ (1;5);\ (2;4);\ (3;3);(4;4);\ (5;1);$$
$$(6;2);\ (5;3);(4;4);\ (3;5);\ (2;6);\ (6;4);\ (5;5);\ (4;6);(6;6)\ \}$$

შევნიშნოთ, რომ $A\cap B=A$. აქედან, კლასიკური ალბათობისა და პირობითი ალბათობის განსაზღვრის გამო ვღებულობთ:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{36}:\frac{18}{36}=\frac{5}{18}.$$

დასკვნა. *ალბათობა იმისა, რომ ორი კამათლის გაგორებისას კამათლებზე მოსულ ციფრთა ჯამი უდრის 8-ს, იმ პირობით, რომ ორი კამათლის გაგორებისას მოსულ ციფრთა ჯამი ლუწია, უდრის* $\frac{5}{18}$.

განსაზღვრება 2. *ვთქვათ,* $J \subseteq N$. $(A_i)_{i\in J}$ *ხდომილობათა მიმდევრობას ეწოდება ხდომილობათა სრული სისტემა, თუ მისთვის სრულდება პირობები:*

1) $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i,j \in J, i \neq j$,
2) $(\forall j)(j \in J \to P(A_j) > 0)$,
3) $\cup_{j\in J} A_j = \Omega$.

თეორემა 5. *ვთქვათ,* $J \subseteq N$ *და* $(A_j)_{j\in J}$ *ხდომილობათა სრული სისტემაა.* Ω *სივრცის ყოველი* B *ხდომილობისათვის მართებულია ფორმულა*

$$P(B) = \sum_{j\in J} P(B|A_j)\cdot P(A_j),$$

რომელსაც სრული ალბათობის ფორმულა ეწოდება.

დამტკიცება. *მართებულია შემდეგი წარმოდგენა*

$$B = \cup_{j\in J}(B \cap A_k),$$

სადაც $(B\cap A_j)_{j\in J}$ *წყვილ-წყვილად არათავსებად ხდომილობათა მიმდევრობაა (იხ. ნახ.4).*

მართლაც,

$$B = B\cap\Omega = B\cap(\cup_{j\in J}A_j) = \cup_{j\in J}(B\cap A_j).$$

ამიტომ, ალბათობის თვლადად ადიტიურობის თვისების გამო ვღებულობთ

$$P(B) = \sum_{j\in J} P(B\cap A_j).$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი j $(j\in J)$ *ნატურალური რიცხვისათვის მართებულია ტოლობა*

$$P(B|A_j) = \frac{P(B\cap A_j)}{P(A_j)},$$

საიდანაც

$$P(B \cap A_j) = P(A_j) \cdot P(B|A_j).$$

ამ ტოლობის გამოყენებით საბოლოოდ ვღებულობთ

$$P(B) = \sum_{j \in J} P(B \cap A_j) = \sum_{j \in J} P(A_j) \cdot P(B|A_j).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 3.

ექსპერიმენტი. *I ყუთში არის 3 თეთრი და 3 შავი, II ყუთში -3 თეთრი და 4 შავი, ხოლო III ყუთში 4 თეთრი და 1 შავი ბურთულა. ექსპერიმენტი მდგომარეობს ყუთის შემთხვევით არჩევასა და ამ ყუთიდან ბურთის შემთხვევით ამოღებაში.*

ამოცანა. *ვიპოვოთ თეთრი ბურთულის ამოღების ალბათობა , თუ ყუთების შერჩევის ალბათობები ტოლია.*

ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური სივრცის აგება. *იმის გამო, რომ ექსპერიმენტის შედეგი წარმოადგენს შემთხვევით შერჩეულ ბურთულას, ამიტომ Ω წარმოადგენს 18 ელემენტარული ხდომილობის ერთობლიობას. A_i-თი აღვნიშნოთ i-ურ ყუთში მოთავსებულ ბურთულათა ერთობლიობა. ამოცანის პირობის თანახმად, $(A_i)_{1 \le i \le 3}$ ხდომილობები ტოლალბათურებია.*

განვსაზღვროთ P ალბათობა შემდეგი თანაფარდობით:

$$(\forall A)(A \subseteq \Omega \to P(A) = \frac{1}{3}(\frac{|A \cap A_1|}{|A_1|} + \frac{|A \cap A_2|}{|A_2|} + \frac{|A \cap A_3|}{|A_3|})).$$

ამით ექსპერიმენტის აღმწერი ალბათური მოდელი $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ აგებულია, თუ დავუშვებთ $\mathcal{F} = \{A : A \subseteq \Omega\}$.

ამოცანის ამოხსნა. *თუ B-თი აღვნიშნავთ თეთრი ბურთულების ერთობლიობას, მაშინ*

$$P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{105}.$$

დასკვნა. *განხილულ ექსპერიმენტში თეთრი ბურთულას შერჩევის ალბათობა ტოლია $\frac{57}{105}$.*

შენიშვნა. *შევნიშნოთ, რომ $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$ და*

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} = \frac{|B \cap A_i|}{|A_i|} \quad (1 \le i \le 3).$$

ამიტომ, B ხდომილობის ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა წარმოადგენს სრული ალბათობის ფორმულას.

მაგალითი 4.

ექსპერიმენტი. k-ცალი ($k \in N$) ბაქტერიის წარმოქმნის ალბათობაა $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ ($\lambda > 0$). წარმოქმნილი ბაქტერიის გარემოს პირობებთან ადაპტაციის ალბათობა p-ს ($0 < p < 1$) ტოლია.

ამოცანა. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად n ცალი ($n \in N$) ბაქტერია გაივლის ადაპტაციის პროცესს.

ამოხსნა. A_k-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა იმისა, რომ წარმოიქმნება k ცალი ბაქტერია ($k \in N$). შევნიშნოთ, რომ $(A_k)_{k \in N}$ წარმოადგენს ხდომილობათა სრულ სისტემას. B_n-ით აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება n ცალი ბაქტერიის მიერ ადაპტაციის პროცესის გავლას ($n \in N$) . შევნიშნოთ, რომ $P(B_n|A_k) = 0$, როცა $k \leq n-1$. თუ $k \geq n$, მაშინ $P(B_n|A_k) = C_k^n p^n (1-p)^{k-n}$. ამ ფაქტების გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$P(B_n) = \sum_{k \in N} P(A_k)P(B_n|A_k) = \sum_{k=n} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}C_k^n p^n (1-p)^{k-n} =$$

$$= \sum_{k=n} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\frac{k!}{n! \cdot (k-n)!}p^n(1-p)^{k-n} =$$

$$= \frac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{k=n}\frac{\lambda^{k-n}}{\cdot (k-n)!}(1-p)^{k-n} = \frac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{k=n}\frac{(\lambda \cdot (1-p))^{k-n}}{\cdot (k-n)!} =$$

$= \frac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-\lambda}e^{\lambda \cdot (1-p)} = \frac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-p \cdot \lambda}$.

დასკვნა. ალბათობა იმისა, რომ ზუსტად n ცალი ბაქტერია გაივლის ადაპტაციის პროცესს ($n \in N$), ტოლია $\frac{(p\lambda)^n}{n!}e^{-p \cdot \lambda}$.

თეორემა 6. ვთქვათ, $J \subseteq N$ და $(A_j)_{j \in J}$ ხდომილობათა სრული სისტემაა. დადებითი ალბათობის მქონე ყოველი B ხდომილობისათვის მართებულია ტოლობა

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j \in J} P(A_j)P(B|A_j)} \ (i \in J),$$

რომელსაც ბაიესის[4] ფორმულა ეწოდება.

დამტკიცება. სრული ალბათობის ფორმულისა და პირობითი ალბათობის განსაზღვრის საფუძველზე ვღებულობთ

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j \in J} P(A_j)P(B|A_j)} \ (i \in J).$$

[4]ბაიესი თომასი (*Bayes Thomas*)(1702, ლონდონი-4.4.1761, ტანბრიჯი)-ინგლისელი მათემატიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1742), ძირითადი შრომები ალბათობის თეორიაში (ბაიესის თეორემა, გამოქვ.1763).

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი 5. *მაგალითი 3-ში განხილული ექსპერიმენტის შემთხვევაში აღმოჩნდა, რომ შემთხვევით შერჩეული ბურთულა თეთრია. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ეს ბურთულა შერჩეულია პირველი ყუთიდან.*

ამოხსნა.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(A_1)\cdot P(B|A_1) + P(A_2)\cdot P(B|A_2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} : \frac{57}{105} = \frac{2}{9}.$$

მაგალითი 6. *(ამოცანა მოთამაშის გაკოტრების შესახებ). განვიხილოთ მონეტის აგდებასთან დაკავშირებული თამაში, როცა მოთამაშე ირჩევს ან "გერბს" ან "საფასურს", რის შემდეგაც ხდება მონეტის აგდება. თუ მოვა მონეტის ის მხარე, რომელიც აირჩია მოთამაშემ, მაშინ ის იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში აგებს ფულის იგივე რაოდენობას. ვიგულისხმოთ, რომ მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს x ლარს და ის მიზნად ისახავს ფულის არსებული კაპიტალის a ერთეულამდე მიყვანას ($x < a$). თამაში გრძელდება მანამ, სანამ ის არ დააგროვებს a ლარს ან სანამ სრულად არ გაკოტრდება. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე საბოლოოდ გაკოტრდება ისე, რომ ვერ დააგროვებს მისთვის სასურველ კაპიტალს?*

ამოხსნა.

აღვნიშნოთ $p(x)$-ით ალბათობა მოთამაშის გაკოტრებისა, როცა მას გააჩნია x ლარი. მაშინ ერთი ნაბიჯის შემდგომ მოგების შემთხვევაში მოთამაშის გაკოტრების ალბათობა იქნება $p(x+1)$, ხოლო წაგების შემთხვევაში ერთი ნაბიჯის შემდგომ გაკოტრების ალბათობა იქნება $p(x-1)$. აღვნიშნოთ B_1-ით ხდომილობა, რომელიც მდგომარეობს მოთამაშის მიერ პირველ ნაბიჯზე თამაშის მოგებაში, ხოლო B_2-ით ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება იმ შემთხვევას, როცა მოთამაშე აგებს თამაშს პირველ ნაბიჯზე. A იყოს ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება მოთამაშის გაკოტრებას. მაშინ

$$P(A|B_1) = p(x+1),\ P(A|B_2) = p(x-1).$$

ცხადია, რომ (B_1, B_2) ხდომილობათა სრული სისტემაა და მონეტის სიმეტრიულობის გამო შეგვიძლია დავწეროთ $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

სრული ალბათობის ფორმულის თანახმად ვღებულობთ განტოლებას

$$p(x) = \frac{1}{2}[p(x+1) + p(x-1)].$$

ამასთან, $p(0) = 1$, $p(a) = 0$. უშუალო შემოწმებით ვრწმუნდებით, რომ მიღებული განტოლების ამონახსნია წრფივი ფუნქცია

$$p(x) = c_1 + c_2 x,$$

რომლის კოეფიციენტები განისაზღვრებიან სასაზღვრო პირობებიდან

$$p(0) = c_1 = 1,\ p(a) = c_1 + c_2 a = 0,$$

საიდანაც საბოლოოდ ვღებულობთ x საწყისი კაპიტალის შემთხვევაში მოთამაშის გაკოტრების $p(x)$ ალბათობისათვის შემდეგ გამოსახულებას

$$p(x)=1-\frac{x}{a},\ 0\le x\le a.$$

შევნიშნოთ, რომ რაც უფრო დიდია a (ე.ი. რაც უფრო დიდი კაპიტალის დაგროვება უნდა მოთამაშეს), მით უფრო დიდია გაკოტრების ალბათობა.

მაგალითი 6 *(ამოცანა ნადავლის განაწილების შესახებ). თოფიდან ერთი გასროლისას ნადირის მოკვლის ალბათობა პირველი მონადირისათვის ტოლია 0,8, ხოლო მეორე მონადირისათვის კი - 0,7. ორივე მონადირემ გაისროლა ერთდროულად, რის შედეგაც მხოლოდ ერთი ტყვიით იქნა მოკლული ნადირი, რომლის წონამ შეადგინა 190 კგ. როგორ უნდა მოხდეს მონადირეებს შორის ნადავლის განაწილება?*

ამოხსნა. B-თი აღვნიშნოთ ხდომილობა, რომელიც შეესაბამება შემთხვევას, როცა გაისროლა ორივე მონადირემ და ნადირი მოკლულ იქნა მხოლოდ ერთ-ერთის მიერ. A_1-ით აღვნიშნოთ პირველი მონადირის მიერ ნადირის მოკვლის ხდომილობა, ხოლო A_2-ით კი მეორე მონადირის მიერ ნადირის მოკვლის ხდომილობა. ბაიესის ფორმულის თანახმად ვღებულობთ

$$P(A_1|B)=\frac{0,3\cdot 0,8}{0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,7}=\frac{12}{19},$$

$$P(A_2|B)=\frac{0,2\cdot 0,7}{0,3\cdot 0,8+0,2\cdot 0,7}=\frac{12}{19}.$$

ამის გამო, პირველ მონადირეს ეკუთვნის $P(A_1|B)\cdot 190=120$ (კგ), ხოლო მეორეს კი-$P(A_2|B)\cdot 190=70$ (კგ).

ტესტები

4.1. ორი მსროლელი სამიზნეს ესვრის თითოჯერ. სამიზნის დაზიანების ალბათობა პირველი მსროლელისათვის არის $0,9$, ხოლო მეორე მსროლელისათვის $0,7$. ალბათობა იმისა, რომ ორივე მსროლელი ერთდროულად დააზიანებს სამიზნეს, ტოლია

ა) $0,42$, ბ) $0,63$, გ) $0,54$, დ) $0,36$.

4.2. ქალაქ თბილისისათვის უნალექო დღეების რაოდენობა ივლისში ტოლია 25-ის. ალბათობა იმისა, რომ ივლისის პირველი ორი დღე იქნება უნალექო, ტოლია

ა) $\frac{5}{87}$, ბ) $\frac{20}{29}$, გ) $\frac{19}{29}$, დ) $\frac{18}{29}$.

4.3. ირჩევენ ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად ორ A და B წერტილს Δ სიმრავლიდან, სადაც

$$\Delta=\{(x,y): x\in[0,1],\ y\in[0,1]\}.$$

g, f ფუნქციები განისაზღვრებიან შესაბამისად შემდეგი ფორმულების საშუალებით

$$g((x,y)) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } x^2+y^2 \le \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{თუ } x^2+y^2 > \frac{1}{4}, \end{cases}$$

$$f((x,y)) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x+y \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{თუ } x+y > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ალბათობა იმისა, რომ $g(A)+f(B)=1$, ტოლია

ა) $\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$, ბ) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$, გ) $\frac{8}{9}-\frac{\pi}{16}$, დ) $1-\frac{\pi}{8}$.

4.4. სათამაშო კარტის კომპლექტიდან (36 კარტი) შემთხვევით შეარჩიეს 10 კარტი. 10 კარტიანი კომპლექტიდან შემთხვევით ამოღებული კარტი აღმოჩნდა ტუზი. პირველად ამოღებული კარტი უკან ჩააბრუნეს. ალბათობა იმისა, რომ იმავე ათი კარტიდან მეორედ ამოღებული კარტი ტუზი იქნება, ტოლია

ა)$\frac{C_3^0C_{32}^9}{C_{35}^9}\cdot 0,1+\frac{C_3^1C_{32}^8}{C_{35}^9}\cdot 0,2+\frac{C_3^2C_{32}^7}{C_{35}^9}\cdot 0,3+\frac{C_3^3C_{32}^6}{C_{35}^9}\cdot 0,4$,

ბ) $\frac{C_3^0C_{32}^9}{C_{35}^9}\cdot 0,1+\frac{C_3^1C_{32}^8}{C_{35}^9}\cdot 0,2+\frac{C_3^2C_{32}^7}{C_{35}^9}\cdot 0,2+\frac{C_3^3C_{32}^6}{C_{35}^9}\cdot 0,3$.

4.5. მოცემულია სამი ყუთი თეთრი და შავი ბურთების შემდეგი შემადგენლობით

ყუთი	შავი ბურთულა	თეთრი ბურთულა
I	2	3
II	3	2
III	1	4

შემთხვევით შეირჩა ყუთი, საიდანაც შემთხვევით ამოღებულ იქნა ბურთულა.

1) ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა თეთრია, ტოლია

ა) $0,4$, ბ) $0,6$, გ) $0,7$, დ) $0,8$;

2) ბურთულა აღმოჩნდა თეთრი. ალბათობა იმისა, რომ ბურთულა ამოღებულია I ყუთიდან, ტოლია

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{1}{4}$, გ) $\frac{1}{5}$, დ) $\frac{1}{6}$.

4.6. I ქარხანაში დამზადებულია 100 დეტალი, ხოლო II ქარხანაში იმავე ტიპის 200 დეტალი. I ქარხანაში სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობა ტოლია -0, 9, ხოლო II ქარხანაში კი - 0, 8.

1) არასტანდარტული დეტალების დამზადებით მიყენებულმა ზარალმა შეადგინა 3000 ლარი. მეორე ქარხნის ადმინისტრაციამ არასტანდარტული დეტალების დამზადების გამო უნდა გადაიხადოს ჯარიმა

ა) 2400 ლარი, ბ) 2300 ლარი, გ) 2000 ლარი, დ) 1600 ლარი;

2) სტანდარტული დეტალების რეალიზაციით მიღებულმა მოგებამ შეადგინა 5000 ლარი. I ქარხნის წილმა ამ მოგებიდან (გამოსახული ლარებში) შეადგინა

ა) 1800, ბ) 1700, გ) 1400, დ) 3000 .

4.7. მოთამაშე ირჩევს ან "გერბს" ან "საფასურს", რის შემდეგაც ხდება მონეტის აგდება. თუ მოვა მონეტის ის მხარე, რომელიც აირჩია მოთამაშემ, მაშინ ის იგებს 1 ლარს, წინააღმდეგ შემთხვევაში აგებს ფულის იგივე რაოდენობას. მოთამაშის საწყისი კაპიტალი შეადგენს 1000 *ლარს და ის მიზნად ისახავს ფულის არსებული კაპიტალის* 2000 *ერთეულამდე მიყვანას. თამაში გრძელდება მანამ, სანამ ის არ დააგროვებს* 2000 *ლარს ან სანამ სრულად არ გაკოტრდება. ალბათობა იმისა, რომ მოთამაშე დააგროვებს მისთვის სასურველ კაპიტალს, ტოლია*

ა) $0,4$, ბ) $0,5$, გ) $0,6$, დ) $0,7$.

4.8. k-*წევრიანი* $(k \in N)$ *ბაქტერიების ოჯახის წარმოქმნის ალბათობაა* $\frac{0{,}3^k}{k!}e^{-0{,}3}$ $(k \in N)$. *წარმოქმნილი ბაქტერიის გარემოს პირობებთან ადაპტაციის ალბათობა* $0,1$-*ის ტოლია.*

1) ალბათობა იმისა, რომ მხოლოდ 5 *ბაქტერია გაივლის ადაპტაციის პროცესს, ტოლია*

ა) $\frac{0{,}03^5}{5!}e^{-0{,}03}$, ბ) $\frac{0{,}04^5}{5!}e^{-0{,}04}$, გ) $\frac{0{,}05^5}{5!}e^{-0{,}05}$, დ) $\frac{0{,}06^5}{5!}e^{-0{,}06}$;

2) შემთხვევით შერჩეულ ბაქტერიაზე დაკვირვებამ გვიჩვენა, რომ მას გავლილი ჰქონდა ადაპტაციის პროცესი. ალბათობა იმისა, რომ ის არის გადარჩენილი 6-*წევრიანი ბაქტერიების ოჯახის წარმომადგენელი, ტოლია*

ა) $\frac{0{,}03^6}{6!} : (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0{,}03^k}{k \cdot k!}e^{-0{,}03})$, ბ) $\frac{0{,}03^6}{6 \cdot 6!} : (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{0{,}03^k}{k \cdot k!}e^{-0{,}03})$.

§5. ალბათურ სივრცეთა აგების კარათეოდორის [5] მეთოდი

ვთქვათ, Ω *არის არაცარიელი სიმრავლე და* F *მის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასია. მართებულია შემდეგი დამხმარე დებულება.*

ლემა 1. *არსებობს* Ω *სივრცის ქვესიმრავლეთა* σ-*ალგებრა* $\sigma(F)$, *რომელიც შეიცავს* F *კლასს და არის მინიმალური ჩართვის თვალსაზრისით იმ* σ -*ალგებრებს შორის, რომლებიც შეიცავენ* F-*ს.*

დამტკიცება. *აღვნიშნოთ* $(\mathcal{F}_j)_{j\in J}$-*ით* Ω-*ს ქვესიმრავლეთა ყველა იმ* σ-*ალგებრების ოჯახი, რომლებიც შეიცავენ* F *კლასს და კლასი* $\sigma(F)$ *განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:*

$$\sigma(F) = \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j.$$

ვაჩვენოთ, რომ $\sigma(F)$ *არის* σ-*ალგებრა. მართლაც,*

1) $\Omega \in \sigma(F)$, *ვინაიდან ყოველი* $j \in J$ *ინდექსისათვის* $\Omega \in \mathcal{F}_j$.

[5] კარათეოდორი კონსტანტინე (*Caratheodory Constantin*) (13.9.1873, ბერლინი-2.2.1950,მიუნჰენი)-გერმანელი მათემატიკოსი. მიუნჰენის უნივერსიტეტის პროფესორი (1924-39),1933 წლიდან ათენის უნივერსიტეტის ლექტორია. ძირითადი შრომები ზომის თეორიაში, ვარიაციულ აღრიცხვაში, კონფორმულ ასახვათა თეორიაში. 1909 წელს მის მიერ იქნა აგებული თერმოდინამიკის საფუძვლების აქსიომატიკა.

2) ვთქვათ, $(A_k)_{k\in N}$ არის $\sigma(F)$ კლასის ელემენტთა მიმდევრობა. იმის გამო, რომ ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის ის არის აგრეთვე $\mathcal{F}_j$ კლასის ელემენტთა მიმდევრობაც, ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის ვღებულობთ $\cap_{k\in N} A_k \in \mathcal{F}_j$ და $\cup_{k\in N} A_k \in \mathcal{F}_j$, რაც ნიშნავს რომ $\cap_{k\in N} A_k \in \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j = \sigma(F)$ და $\cup_{k\in N} A_k \in \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j = \sigma(F)$.

3) თუ $A \in \sigma(F)$, მაშინ ყოველი $j \in J$ ინდექსისათვის $\overline{A} \in \mathcal{F}_j$, რაც ნიშნავს რომ $\overline{A} \in \cap_{j\in J}\mathcal{F}_j = \sigma(F)$.

დავუშვათ, რომ $\sigma(F)$ არ არის F კლასის შემცველი ჩართვის თვალსაზრისით მინიმალური σ-ალგებრა. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს σ-ალგებრა $\mathcal{F}^*$, ისეთი, რომ სრულდება პირობები:

1) $F \subset \mathcal{F}^*$,

2) $\mathcal{F}^* \subset \sigma(F)$ და $\sigma(F) \setminus \mathcal{F}^* \neq \emptyset$.

$(\mathcal{F}_j)_{j\in J}$ ოჯახის განსაზღვრის გამო იარსებებს ისეთი ინდექსი $j_0 \in J$, რომ $\mathcal{F}_{j_0} = \mathcal{F}^*$. აქედან ვღებულობთ, რომ $\sigma(F) \subset \mathcal{F}^*$, რაც ეწინააღმდეგება 2) პირობას. მიღებულია წინააღმდეგობა, რაც გამოწვეულია ჩვენი დაშვებით, რომ $\sigma(F)$ არ არის F კლასის შემცველი ჩართვის თვალსაზრისით მინიმალური σ-ალგებრა.

ლემა 1 დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 1. *ვთქვათ, მოცემულია Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ორი კლასი S_1 და „S_2. ამასთან, $S_1 \subset S_2$. P_1 და P_2 იყოს შესაბამისად S_1 და S_2 კლასზე განსაზღვრული რიცხვითი ფუნქციები. P_2 რიცხვით ფუნქციას ეწოდება P_1 რიცხვითი ფუნქციის გაგრძელება, თუ სრულდება შემდეგი პირობა:*

$$(\forall X)(X \in S_1 \to P_2(X) = P_1(X)).$$

განსაზღვრება 2. *ვთქვათ, $\mathcal{A}$ არის არაცარიელი Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრა. $\mathcal{A}$ კლასზე განსაზღვრულ P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობა, თუ მისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:*

1) ყოველი $A \in \mathcal{A}$ ელემენტისათვის $P(A) \geq 0$,

2) $P(\Omega) = 1$,

3) თუ $(A_k)_{k\in N}$ $\mathcal{A}$-კლასის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ ელემენტთა ისეთი მიმდევრობაა, რომ $\cup_{k\in N} A_k \in \mathcal{A}$, მაშინ

$$P(\cup_{k\in N} A_k) = \sum_{k\in N} P(A_k).$$

ალბათური სივრცეების აგების ზოგადი მეთოდი მოცემულია შემდეგ თეორემაში.

თეორემა 1 *(კარათეოდორი). ვთქვათ, P არის $\mathcal{A}$ ალგებრაზე განსაზღვრული ალბათობა. მაშინ არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას, ამასთან $\overline{P}$ ალბათობა განისაზღვრება შემდეგი ფორმულის საშუალე-*

ბით:

$$(\forall B)(B \in \sigma(\mathcal{A}) \to \overline{P}(B) = \inf\{ \sum_{k \in N} P(A_k) | (\forall k)(k \in N \to A_k \in \sigma(\mathcal{A}))$$

$$\& \ B \subseteq \cup_{k \in N} A_k \ \}.$$

შენიშვნა 1. *თეორემა 1 მოგვყავს დამტკიცების გარეშე. დაინტერესებულთ შეუძლიათ გაეცნონ მოცემული ფაქტის დამტკიცებას [6] ნაშრომში.*

ქვევით ჩვენ განვიხილავთ თეორემა 1-ის გამოყენებებს სხვადასხვა ალბათური სივრცეების ასაგებად.

5.1. ბორელის კლასიკური b_1 ზომის აგება $[0,1]$ ინტერვალზე

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ $[0,1]$ ინტერვალის ყველა ისეთ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლის ელემენტები წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ინტერვალების (ე.ი. $[a_k, b_k[, \ [a_k, b_k], \ ]a_k, b_k[, \ ]a_k, b_k]$ სახის სიმრავლეების) სასრული ოჯახის გაერთიანების სახით. ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს $[0,1]$ სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P([a_k, b_k[) = P([a_k, b_k]) = P(]a_k, b_k[) = P(]a_k, b_k]) = b_k - a_k$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება $[0,1]$ ინტერვალის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathcal{B}([0,1])$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული ერთ-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა და აღინიშნება b_1 სიმბოლოთი.

სამეულს $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), b_1)$-ს ეწოდება $[0,1]$ სიმრავლესთან ასოცირებული ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე.

5.2. R ღერძზე ბორელის ალბათური ზომების განსაზღვრა

ვთქვათ, $F : R \to [0,1]$ არის ყოველ წერტილში მარჯვნიდან უწყვეტი ისეთი არაკლებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \ \& \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

ვიგულისხმოთ, რომ $F(-\infty) = 0$ და $F(+\infty) = 1$.
ვთქვათ, $\Omega = R \cup \{+\infty\}$.

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ Ω სივრცის ყველა იმ ქვესიმრავლეთა კლასი, რომლებიც წარმოიდგინებიან მარცხნიდან ღია და მარჯვნიდან ჩაკეტილი თანაუკვეთი ინტერვალების სასრულო ოჯახის გაერთიანებით, ე.ი.

$$\mathcal{A} = \{A | A = \sum_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\},$$

სადაც $-\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$ $(1 \leq i \leq n)$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ აღნიშნული კლასი წარმოადგენს Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ალგებრას. ზემოთაღნიშნული სახის ინტერვალებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$P(]a_i, b_i]) = F(b_i) - F(a_i).$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია იმავე სახის თანაუკვეთი ინტერვალების სასრული ოჯახის გაერთიანებაზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A}) \cap R$ კლასს ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ბორელის აზრით ზომად ქვესიმრავლეთა კლასი და აღინიშნება $\mathcal{B}(R)$ სიმბოლოთი, ხოლო მასზე განსაზღვრულ P_F რიცხვით ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in \mathcal{B}(R) \rightarrow P_F(X) = \overline{P}(X)),$$

ეწოდება ნამდვილ რიცხვთა R სიმრავლეზე F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა.

მაგალითი 1. *ვთქვათ, ფუნქცია F არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით*

$$(\forall x)(x \in R \rightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\ ).$$

ვთქვათ, P არის F ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება 1-განზომილებიან ევკლიდეს R სივრცესთან ასოცირებული 1-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე. P რიცხვით ფუნქციას ეწოდება 1-განზომილებიან ევკლიდეს R სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური 1-განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_1-ით.

5.3. ალბათობათა სასრული ოჯახის ნამრავლის განსაზღვრა

ვთქვათ, $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ წარმოადგენს ალბათურ სივრცეთა სასრულ ოჯახს.

შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i=1}^{n}\Omega_i=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n)\mid \omega_1\in\Omega_1,\cdots,\omega_n\in\Omega_n\}.$$

$A\subseteq\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის მართებულია წარმოდგენა

$$B=\prod_{i=1}^{n}B_i,$$

სადაც $B_i\in\mathcal{F}_i$ $(1\le i\le n)$.

$\mathcal{A}$-ით აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\prod_{i=1}^{n}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P(\prod_{i=1}^{n}B_i)=\prod_{i=1}^{n}P_i(B_i)$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathcal{F}_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{1\le i\le n}\mathcal{F}_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{1\le i\le n}$ სასრული ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i=1}^{n}P_i$-ით.

$(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i,\prod_{i=1}^{n}P_i)$ სამეულს ეწოდება $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i)_{1\le i\le n}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

შენიშვნა 2. განვიხილოთ n-დამოუკიდებელი ცდა - ეს ცდათა ისეთი მიმდევრობაა, როცა ყოველი ცდის შედეგი გავლებას არ ახდენს მომდევნო ცდის შედეგზე.

ვიგულისხმოთ, რომ i-ური $(1\le i\le n)$ ცდა აღიწერება $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i)$ ალბათური სივრცით. მაშინ n დამოუკიდებელი ცდის აღმწერი ალბათური სივრცე იქნება $(\prod_{i=1}^{n}\Omega_i,\prod_{i=1}^{n}\mathcal{F}_i,\prod_{i=1}^{n}P_i)$.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1 (ბერნულის [6] ალბათური ზომა). ვთქვათ, ყოველი i $(1\le i\le n)$ რიცხვისათვის

[6] იაკობ ბერნული (27.12.1654, ბაზელი-16.8.1705იქვე)-შვეიცარელი მათემატიკოსი, ბაზელის უნივერსიტეტის პროფესორი (1687 წლიდან). ნაშრომში "*Arsconjectandi*"(*Basileqe*, 1713) დაამტკიცა ე.წ. ბერნულის თეორემა - დიდ რიცხვთა კანონის მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევა.

$$\Omega_i = \{0, 1\},\ \mathcal{F}_i = \{A | A \subseteq \Omega_i\},\ P_i(\{1\}) = p,$$

სადაც $0 < p < 1$.

ალბათურ სივრცეთა ნამრავლს

$$(\prod_{i=1}^{n} \Omega_i, \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^{n} P_i)$$

ეწოდება ბერნულის n-განზომილებიანი კლასიკური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i=1}^{n} P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ბერნულის n-განზომილებიანი ალბათური ზომა.

თუ განვიხილავთ A_k სიმრავლეს, განსაზღვრულს შემდეგნაირად

$$A_k = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) | (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \ \&\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = k\},$$

მაშინ ალბათურ ზომათა კონსტრუქციიდან გამომდინარე ვღებულობთ

$$(\forall(\omega_1, \cdots, \omega_n))((\omega_1, \cdots, \omega_n) \in A_k \rightarrow \prod_{i=1}^{n} P_i((\omega_1, \cdots, \omega_n)) = p^k (1-p)^{n-k}).$$

ამიტომ $\prod_{i=1}^{n} P_i(A_k) = |A_k| p^k (1-p)^{n-k}$, სადაც $|\cdot|$ აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $|A_k| = C_n^k$, სადაც C_n^k აღნიშნავს n-ელემენტიან სიმრავლეში ყველა განსხვავებულ k-ელემენტიან ქვესიმრავლეთა რაოდენობას.

ლიტერატურაში $\prod_{i=1}^{n} P_i(A_k)$ სიდიდეს აღნიშნავენ $P_n(k)$ სიმბოლოთი, რომელიც აღნიშნავს n-დამოუკიდებელ ორ $\{0, 1\}$-მნიშვნელობიან ცდაში $\{1\}$ ხდომილობის k-ჯერ მოხდენის ალბათობას, იმ პირობით, რომ ცალკეულ ცდაში $\{1\}$ ხდომილობის მოხდენის ალბათობა p-ს ტოლია. თუ $\{0\}$ ხდომილობის მოხდენის ალბათობას აღვნიშნავთ q-თი, მაშინ მივიღებთ

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}\ (1 \le k \le n),$$

რომელსაც ბერნულის ფორმულა ეწოდება.

k_0 ნატურალურ რიცხვს $[0, n]$ შუალედიდან ეწოდება უალბათესი რიცხვი, თუ სრულდება პირობა

$$P(k_0) = \max_{0 \le k \le n} P_n(k).$$

ის გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$k_0 = \begin{cases} [(1+n)p], & \text{თუ}\ (1+n)p \notin Z; \\ (1+n)p\ \text{და}\ (1+n)p - 1, & \text{თუ}\ (1+n)p \in Z, \end{cases}$$

სადაც $[\cdot\,]$ აღნიშნავს ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

მაგალითი 2 *(n-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური ზომა).*
ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:
ა) $\Omega_i = \{x_1, \cdots, x_k\}$ $(1 \le i \le n)$,
ბ) $\mathcal{F}_i$ *წარმოადგენს* Ω_i *სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს* $(1 \le i \le n)$,
გ) $P_i(\{x_j\}) = p_j > 0,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le k,\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$
მაშინ $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^n P_i)$ *ალბათურ სივრცეს ეწოდება* n*-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური სივრცე, ხოლო* $\prod_{i=1}^n P_i$ *რიცხვით ფუნქციას -* n*-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათობა.*
თუ განვიხილავთ $A_n(n_1, \cdots, n_k)$ *სიმრავლეს, განსაზღვრულს შემდეგნაირად*

$$A_n(n_1, \cdots, n_k) = \{(\omega_1, \cdots, \omega_n) | (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \prod_{i=1}^n \Omega_i \ \&$$

$$|\{i : \omega_i = x_p\}| = n_p,\ 1 \le p \le k\},$$

მაშინ ალბათურ ზომათა ნამრავლის კონსტრუქციიდან გამომდინარე

$$(\forall(\omega_1, \cdots, \omega_n))((\omega_1, \cdots, \omega_n) \in A_n(n_1, \cdots, n_k) \rightarrow$$

$$\prod_{i=1}^n P_i((\omega_1, \cdots, \omega_n)) = p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k}).$$

ამიტომ $\prod_{i=1}^n P_i(A_n(n_1, \cdots, n_k)) = |A_n(n_1, \cdots, n_k)| \times p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k}$*, სადაც* $|\cdot|$ *აღნიშნავს სიმრავლის ელემენტთა რაოდენობას. ადვილი დასამტკიცებელია, რომ* $|A_n(n_1, \cdots, n_k)| = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$.
$\prod_{i=1}^n P_i(A_n(n_1, \cdots, n_k))$ *სიდიდეს აღნიშნავენ* $P_n(n_1, \cdots, n_k)$*-ით, რომელიც აღნიშნავს* n*-დამოუკიდებელ* $\{x_1, \cdots, x_k\}$*-მნიშვნელობიან ცდაში* x_1 *ხდომილობის* n_1*-ჯერ,* $\cdots$ *,* x_k *ხდომილობის* n_k*-ჯერ მოხდენის ალბათობას, იმ პირობით, რომ ცალკეულ ცდაში* x_i *ხდომილობის მოხდენის ალბათობა* p_i*-ს ტოლია* $(1 \le i \le k)$*. ამგვარად, ჩვენს მიერ მიღებულია შემდეგი ფორმულა*

$$P_n(n_1, \cdots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} \times p_1^{n_1} \times \cdots \times p_k^{n_k},$$

რომელსაც n*-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათობის გამოსათვლელი ფორმულა ეწოდება.*

მაგალითი 3 *(* $[0,1]^n$*-ზე* R^n*-ზე განსაზღვრული* n*-განზო- მილებიანი ბორელის კლასიკური ზომები).*
ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{1\le i\le n}$ *ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:*
ა) $\Omega_i = [0,1]$ $(1 \le i \le n)$,
ბ) $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}([0,1])$ $(1 \le i \le n)$,
გ) $P_i = b_1,\ (1 \le i \le n)$.

მაშინ $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \prod_{i=1}^n \mathcal{F}_i, \prod_{i=1}^n P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბთან ასოცირებული n-განზომილებიანი ბორელის კლა- სიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i=1}^n P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან $[0,1]^n$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა.

b_n-ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით

$$(\forall X)(X \in B(R^n) \to b_n(X) = \sum_{g\in Z^n}\prod_{i=1}^n P_i([0,1[^n \cap g(X)),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ზომა, გაბსაზღვრული R^n-ზე.

მაგალითი 4. ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{1\le i\le n}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით

$$(\forall i)(\forall x)(1\le i\le n \ \&\ x\in R \to F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{1\le i\le n}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება n-განზომილებიან $\overline{R}^n$ სივრცესთან ასოცირებული n-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე.

$\prod_{1\le i\le n}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება n-განზომილებიან ევკლიდეს R^n სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური n-განზომილებიანი ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_n-ით.

5.4. ალბათობათა უსასრულო ოჯახის ნამრავლის განსაზღვრა

ვთქვათ, $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა უსასრულო ოჯახია. შემოვიტანოთ ზოგიერთი აღნიშვნა.

$$\prod_{i\in I}\Omega_i = \{(\omega_i)_{i\in I} \ :\ \omega_i\in\Omega_i, i\in I\}.$$

$A\subseteq \prod_{i\in I}\Omega_i$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ცილინდრული სიმრავლე, თუ მისთვის არსებობს ინდექსთა სასრული $(i_k)_{1\le k\le n}$ მიმდევრობა და $\mathcal{F}_{i_k}$ σ- ალგებრების ისეთი ელემენტები B_{i_k}, რომ მართებულია წარმოდგენა

$$B = \{(\omega_i)_{i\in I} \ :\ (\omega_i\in\Omega_i, i\in I\setminus\cup_{k=1}^n\{i_k\}\ )\ \&\ (\omega_i\in B_i, i\in\cup_{k=1}^n\{i_k\})\ \}.$$

$\mathcal{A}$-თი აღვნიშნოთ კლასი $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ისეთი ქვესიმრავლეებისა, რომლებიც წარმოიდგინებიან თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებით. შევნიშნოთ, რომ $\mathcal{A}$ წარმოადგენს $\prod_{i\in I}\Omega_i$ სივრცის ქვესიმრავლეთა ალგებრას.

ზემოთაღნიშნული სახის ცილინდრულ სიმრავლეებზე P რიცხვითი ფუნქცია განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$P(B) = \prod_{k=1}^{n} P_{i_k}(B_{i_k})$$

და ბუნებრივი წესით განვსაზღვროთ P რიცხვითი ფუნქცია თანაუკვეთი ცილინდრული სიმრავლეების სასრული ოჯახის გაერთიანებებზე. ამდაგვარად განსაზღვრული P რიცხვითი ფუნქცია წარმოადგენს ალბათობას $\mathcal{A}$ კლასზე და კარათეოდორის ზემოთ მოყვანილი თეორემის თანახმად არსებობს $\sigma(\mathcal{A})$ კლასზე განსაზღვრული ერთადერთი ალბათობა $\overline{P}$, რომელიც წარმოადგენს P ალბათობის გაგრძელებას. $\sigma(\mathcal{A})$ კლასს ეწოდება σ-ალგებრების $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}\mathcal{F}_i$-ით. მასზე განსაზღვრულ $\overline{P}$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ალბათობათა $(P_i)_{i\in I}$ უსასრულო ოჯახის ნამრავლი და აღინიშნება $\prod_{i\in I}P_i$-ით.

სამეულს $(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in I}P_i)$ ეწოდება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in I}$ ალბათურ სივრცეთა ოჯახის ნამრავლი.

შენიშვნა 1. *განვიხილოთ დამოუკიდებელი ცდების უსასრულო მიმდევრობა - ეს ცდათა ისეთი უსასრულო მიმდევრობაა, როცა ყოველი ცდის შედე- გი გავლენას არ ახდენს მომდევნო ცდის შედეგზე.*

ვიგულისხმოთ, რომ i-ური $(i \in I)$ ცდა აღიწერება $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ ალბათური სივრცით. მაშინ დამოუკიდებელი ცდების აღმწერი ალბათური სივრცე იქნება

$$(\prod_{i\in I}\Omega_i, \prod_{i\in I}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in I}P_i).$$

განვიხილოთ რამოდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ყოველი $i \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის

$$\Omega_i = \{0, 1\},\ \mathcal{F}_i = \{A | A \subseteq \Omega_i\},\ P_i(\{1\}) = p,$$

სადაც $0 < p < 1$.

ალბათურ სივრცეთა ნამრავლს

$$(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$$

ეწოდება ბერნულის უსასრულო განზომილებიანი კლასიკური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i\in N}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება ბერნულის უსასრულო განზომილებიანი ალბათური ზომა.

მაგალითი 2 *(უსასრულო განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური ზომა).* ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:

ა) $\Omega_i = \{x_1, \cdots, x_k\}$ $(i \in N)$,

ბ) $\mathcal{F}_i$ წარმოადგენს Ω_i სივრცის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასს $(i \in N)$,

გ) $P_i(\{x_j\}) = p_j > 0,\ i \in N,\ 1 \le j \le k,\ \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$

მაშინ $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათური სივრცე, ხოლო $\prod_{i\in N}P_i$ რიცხვით ფუნქციას უსასრულო-განზომილებიანი პოლინომიალური ალბათობა.

მაგალითი 3 *(უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა).*

ვთქვათ, ალბათურ სივრცეთა $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)_{i\in N}$ ოჯახს აქვს შემდეგი სახე:
ა) $\Omega_i = [0,1]$ $(i \in N)$,
ბ) $\mathcal{F}_i = \mathcal{B}([0,1])$ $(i \in N)$,
გ) $P_i = b_1$ $(i \in N)$.

მაშინ, $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი ბორელის კლასიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i\in N}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან $[0,1]^N$ კუბზე განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება b_N-ით.

მაგალითი 4. *ვთქვათ, ფუნქციათა $(F_i)_{i\in N}$ ოჯახი არის განსაზღვრული შემდეგი პირობით*

$$(\forall i)(\forall x)(i \in N\ \&\ x \in R \to F_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\ ).$$

ვთქვათ, P_i არის F_i ფუნქციით განსაზღვრული ბორელის ალბათური ზომა ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე. მაშინ $(\prod_{i\in N}\Omega_i, \prod_{i\in N}\mathcal{F}_i, \prod_{i\in N}P_i)$ ალბათურ სივრცეს ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცესთან ასოცირებული უსასრულო-განზომილებიანი გაუსის კანონიკური ალბათური სივრცე. $\prod_{i\in N}P_i$ რიცხვით ფუნქციას ეწოდება უსასრულო-განზომილებიან R^N სივრცეზე განსაზღვრული გაუსის კანონიკური ალბათური ზომა და აღინიშნება Γ_N-ით.

ტესტები

5.1. ბაზრის ტერიტორიაზე განლაგებულია 10000 ჯიხური. თითოეული ჯიხურის მეპატრონე ყოველ კვარტალში 0,5-ის ტოლი ალბათობით ნახულობს მოგებას 500 ლარის ოდენობით და იგივე ალბათობით ნახულობს ზარალს 200 ლარის ოდენობით. ჯიხურების იმ მეპატრონეთა რაოდენობა, რომლებიც წლის ბოლოსათვის

1) იზარალებენ 800 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 625, ბ) 670, გ) 450, დ) 700;

2) იზარალებენ 100 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 2500, ბ) 3000, გ) 2000, დ) 3500;

3) მიიღებენ მოგებას 600 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 3750, ბ) 3650, გ) 3600, დ) 3400;

4) მიიღებენ მოგებას 1300 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 2500, *ბ)* 2000, *გ)* 3000, *დ)* 1500;
5) მიიღებენ მოგებას 2000 ლარის ოდენობით, ტოლია
ა) 625, *ბ)* 650, *გ)* 600, *დ)* 550.

5.2. საბითუმო ბაზა ამარაგებს 20 მაღაზიას. ყოველი მათგანისაგან დამოუკიდებლად მოსალოდნელია შემდეგი დღისათვის განაცხადის მიღება $0,5$*-ის ტოლი ალბათობით.*

1) დღის განმავლობაში შეკვეთათა უალბათესი რიცხვი ტოლია
ა) 10, *ბ)* 11, *გ)* 12, *დ)* 13;
2) უალბათესი მნიშვნელობის ალბათობა ტოლია
ა) $C_{20}^{10}\frac{1}{2^{20}}$, *ბ)* $C_{20}^{10}\frac{1}{2^{10}}$, *გ)* $C_{20}^{10}\frac{1}{2^{30}}$, *დ)* $C_{20}^{5}\frac{1}{2^{20}}$.

5.3. მოცემულია სამი უჯრედი გადანომრილი რიცხვებით 1-დან 3-მდე. ვიგულისხმოთ, რომ ნაწილაკის პირველ მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობაა $0,3$*, ხოლო მეორე მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობაა* $0,4$*. ალბათობა იმისა, რომ მოცემული ექვსი ნაწილაკიდან* 3 *აღმოჩნდება პირველ უჯრაში,* 2 *აღმოჩნდება მეორე უჯრაში, ხოლო დანარჩენი ნაწილაკები აღმოჩნდებიან მესამე უჯრაში, ტოლია*

ა) $\frac{3!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$, *b)* $\frac{4!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$, *g)* $\frac{5!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$, *d)* $\frac{6!}{3!2!1!}0,3^4 0,4^2$.

§6. შემთხვევითი სიდიდეები.

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *არის ალბათური სივრცე.*

განსაზღვრება 1. *ასახვას* $\xi : \Omega \to R$ *ეწოდება შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება შემდეგი პირობა*

$$(\forall x)(x \in R \to \{\omega : \omega \in \Omega,\ \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}).$$

მაგალითი 1. *თუ ვიგულისხმევთ, რომ ერთეულოვანი წონის რაიმე ფხვნილი მოპნეულია* $[0,1]$*-ინტერვალზე ისე, რომ ფხვნილის ყოველ ნაწილაკს შეესაბამება* $[0,1]$ *ინტერვალის მხოლოდ ერთი წერტილი, მაშინ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება განხილულ იქნას როგორც ზემოთ აღნიშნული ფხვნილის* R *ღერძზე მიმოპნევის გარკვეული წესი (იხ. ნახ. 5)*

განსაზღვრება 2. *ფუნქციას* $I_A : \Omega \to R$ $(A \subset \Omega)$*, განსაზღვრულს პირობით*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } \omega \in A \\ 0, & \text{თუ } \omega \in \overline{A} \end{cases},$$

ეწოდება A *სიმრავლის ინდიკატორი.*

თეორემა 1. *ვთქვათ,* $A \subset \Omega$*, მაშინ* I_A *შემთხვევითი სიდიდეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $A \in \mathcal{F}$*.*

დამტკიცება. *თეორემა 1-ის მართებულობა ტრივიალურად გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან*

$$\{\omega : I_A(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{თუ } x \leq 0, \\ \overline{A}, & \text{თუ } 0 < x \leq 1, \\ \Omega, & \text{თუ } 1 < x. \end{cases}$$

განსაზღვრება 3. $\xi : \Omega \to R$ *შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, თუ მოიძებნება ისეთი არათავსებადი ხდომილობების* $(A_k)_{k\in N}$ *ოჯახი და ნამდვილ რიცხვთა ისეთი* $(x_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობა, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:*

1) $(\forall k)(k \in N \to x_k \in R, A_k \in \mathcal{F})$,
2) $\cup_{k\in N} A_k = \Omega$,
3) $\xi(\omega) = \sum_{k\in N} x_k I_{A_k}(\omega),\ \omega \in \Omega$.

განსაზღვრება 4. $\xi : \Omega \to R$ *შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, თუ მოიძებნება ისეთი არათავსებადი ხდომილობების* $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ *ოჯახი და ნამდვილ რიცხვთა ისეთი* $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ *მიმდევრობა, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:*

1) $(\forall k)(1 \leq k \leq n \to x_k \in R, A_k \in \mathcal{F}))$;
2) $\cup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$;
3) $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k I_{A_k}(\omega),\ \omega \in \Omega$.

განსაზღვრება 5. *შემთხვევით სიდიდეთა* $(\xi_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობას ეწოდება ზრდადი, თუ სრულდება პირობა*

$$(\forall n)(\forall \omega)(n \in N, \omega \in \Omega \to \xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega)).$$

დადებითი შემთხვევითი სიდიდეების სტრუქტურის შესახებ გარკვეულ ინფორმაციას იძლევა შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2. *ყოველი დადებითი* $\xi : \Omega \to R$ *შემთხვევითი სიდიდისათვის მოიძებნება დადებით მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი* $(\xi_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობა, რომ შესრულდება ტოლობა*

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \to \xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)).$$

დამტკიცება. *ყოველი ნატურალური $n \in N$ რიცხვისათვის განვსაზღვროთ შემთხვევითი სიდიდე შემდეგი პირობით:*

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n\cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot I_{\{y: y\in\Omega, \frac{k-1}{2^n} \leq \xi(y) < \frac{k}{2^n}\}}(\omega) + n \cdot I_{\{y: y\in\Omega, \xi(y)\geq n\}}(\omega).$$

უშუალოდ მოწმდება, რომ

$$(\forall n)(n \in N \rightarrow \ \xi_n(\omega) \leq \xi_{n+1}(\omega))$$

და

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. *ყოველი $\eta : \Omega \rightarrow R$ შემთხვევითი სიდიდისათვის მოიძებნება მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\eta_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება ტოლობა*

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \rightarrow \eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega)).$$

დამტკიცება. *ყოველი $\eta : \Omega \rightarrow R$ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია წარმოდგენა $\eta = \eta^+ + \eta^-$, სადაც*
$\eta^+(\omega) = \max\{\eta(\omega), 0\}$ *და* $\eta^-(\omega) = \min\{\eta(\omega), 0\}$.

თეორემა 2-ის ძალით, η^+ და $-\eta^-$ შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მოიძებნება შესაბამისად მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\eta_k^+)_{k\in N}$ და $(\eta_k^-)_{k\in N}$ მიმდევრობები, რომ

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \rightarrow \lim_{k\to\infty} \eta_k^+(\omega) = \eta^+(\omega), \ \ \lim_{k\to\infty} \eta_k^-(\omega) = -\eta^-(\omega)).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ $(\eta_n)_{n\in N} = (\eta_n^+ - \eta_n^-)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა წარმოადგენს მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \rightarrow \eta(\omega) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\omega)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ტესტები

6.1. ვთქვათ, ξ *და* η *არიან დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეები, რომელთათვისაც მართებულია წარმოდგენები*

$$\xi(\omega) = \sum_{k\in N} x_k I_{A_k}(\omega), \quad \eta(\omega) = \sum_{m\in N} y_m I_{B_m}(\omega) \ (\ \omega \in \Omega).$$

მაშინ

1) $\xi + \eta$ *შემთხვევითი სიდიდისათვის და* $\omega \in \Omega$*-სთვის მართებულია ტოლობა*

ა) $(\xi + \eta)(\omega) = \sum_{k\in N} \sum_{m\in N} (x_k + y_m) I_{A_k \cap B_m}(\omega)$,

ბ) $(\xi + \eta)(\omega) = \sum_{k\in N} \sum_{m\in N} x_k y_m I_{A_k \cap B_m}(\omega)$;

2) $\xi \cdot \eta$ *შემთხვევითი სიდიდისათვის და* $\omega \in \Omega$*-სთვის მართებულია ტოლობა*

ა) $(\xi \cdot \eta)(\omega) = \sum_{k\in N} \sum_{m\in N} (x_k + y_m) I_{A_k \cap B_m}(\omega)$,

ბ) $(\xi \cdot \eta)(\omega) = \sum_{k\in N} \sum_{m\in N} x_k y_m I_{A_k \cap B_m}(\omega)$;

3) თუ $g : R \to R$ *არის ზომადი ფუნქცია, მაშინ*

ა) $g(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} g(x_k) I_{A_k}(\omega)$,

ბ) $g(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} g^{-1}(x_k) I_{A_k}(\omega)$;

4) მართებულია შემდეგი ფორმულა

ა) $\sin(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} \sin(x_k) I_{A_k}(\omega)$,

ბ) $\sin(\xi)(\omega) = \sum_{k\in N} \arcsin(x_k) I_{A_k}(\omega)$.

6.2. ვთქვათ, $(A_k)_{k\in N}$ *არის ხდომილობათა მიმდევრობა, ხოლო* ξ *არის შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ*

1)

ა) $\xi^{-1}(\cup_{k\in N} A_k) = \cup_{k\in N} \xi^{-1}(A_k)$,

ბ) $\xi^{-1}(\cup_{k\in N} A_k) = \cap_{k\in N} \xi^{-1}(A_k)$;

2)

ა) $\xi^{-1}(\cap_{k\in N} A_k) = \cap_{k\in N} \xi^{-1}(A_k)$,

ბ) $\xi^{-1}(\cap_{k\in N} A_k) = \cup_{k\in N} \xi^{-1}(A_k)$;

3)

ა) $\Omega \setminus \xi^{-1}(A_k) = \xi^{-1}(\Omega \setminus A_k)$,

ბ) $\Omega \setminus \xi^{-1}(A_k) = \xi^{-1}(A_k)$.

6.3.

1) თუ $|\xi|$ არის შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

ა) ξ არის შემთხვევითი სიდიდე,

ბ) ξ შესაძლოა არ იყოს შემთხვევითი სიდიდე;

2) თუ ξ შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ

ა) ξ^+ არის შემთხვევითი სიდიდე,

ბ) ξ^+ შესაძლოა არ იყოს შემთხვევითი სიდიდე;

3) ვთქვათ, ξ და η არიან შემთხვევითი სიდიდეები და A არის ხდომილობა. თუ $\Theta(\omega) = \xi(\omega)I_A(\omega) + \eta(\omega)I_{\overline{A}}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$, მაშინ

ა) Θ არის შემთხვევითი სიდიდე,

ბ) Θ შესაძლოა არ იყოს შემთხვევითი სიდიდე.

§7. შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და მისი თვისებები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა.

განსაზღვრება 1. *$\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ეწოდება F_ξ ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით*

$$(\forall x)(x \in \overline{R} \to F_\xi(x) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}),$$

სადაც $\overline{R} = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$.

გავეცნოთ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის ზოგიერთ თვისებას.

თეორემა 1. $F_\xi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

დამტკიცება. *განვიხილოთ $+\infty$-სკენ კრებად ნამდვილ რიცხვთა $(x_k)_{k\in N}$ ზრდადი მიმდევრობა. შევნიშნოთ, რომ ერთი მხრივ*

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \le x_{k+1}\} \ (k \in N).$$

მეორეს მხრივ, $\cup_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} = \Omega$. *ამიტომ ალბათობის ქვევიდან უწყვეტობის თვისების გამო, ვღებულობთ*

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}) = P(\cup_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}) = P(\Omega) = 1,$$

ე.ი. $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

შევნიშნოთ, რომ $F_\xi(+\infty) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le +\infty\}) = P(\Omega) = 1$. *საბოლოოდ ვღებულობთ:*

$$F_\xi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2. $F_\xi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0.$

დამტკიცება. *შევნიშნოთ, რომ*

$$F_\xi(-\infty) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le -\infty\}) = P(\emptyset) = 0.$$

განვიხილოთ $-\infty$*-სკენ კრებად ნამდვილ რიცხვთა კლებადი მიმდევრობა. ადვილი შესამჩნევია, რომ სრულდება პირობები:*

1) $\{\omega : \xi(\omega) \le x_{k+1}\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}$ $(k \in N)$,

2) $\cap_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} = \emptyset$.

ამიტომ, P *ალბათობის ზემოდან უწყვეტობის თვისების გამო, ვღებულობთ*

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}) = P(\cap_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\}) = P(\emptyset) = 0,$$

ე.ი.

$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. *განაწილების* $F_\xi(x)$ *ფუნქცია ზრდადი ფუნქციაა.*

დამტკიცება. *ვთქვათ* $x_1 < x_2$. *ვაჩვენოთ შემდეგი არამკაცრი უტოლობის* $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ *მართებულობა. მართლაც, შემდეგი ჩართვის*

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x_1\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \le x_2\}$$

მართებულობისა და ალბათობის მონოტონურობის თვისების გამო (იხ. § 2, თვისება 5) ვღებულობთ

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_1\}) \le P(\{\omega : \xi(\omega) \le x_2\}),$$

რაც თავის მხრივ $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$ *პირობის ექვივალენტურია.*

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 4. *განაწილების* $F_\xi(x)$ *ფუნქცია უწყვეტია მარჯვნიდან, ე.ი. ყოველი* $(x_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობისათვის, რომლისთვისაც სრულდება პირობები* $x_k > x$ $(k \in N)$ *და* $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, *მაშინ*

$$\lim_{k\to\infty} F_\xi(x_k) = F_\xi(x).$$

დამტკიცება. *შევნიშნოთ, რომ*

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x\} = \cap_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \le x_k\},$$

$$\{\omega : \xi(\omega) \le x_{k+1}\} \subseteq \{\omega : \xi(\omega) \le x_k\} \ (k \in N).$$

ამიტომ, P ალბათობის ზემოდან უწყვეტობის თვისების გამო ვღებულობთ

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\}) = P(\cap_{k\in N}\{\omega : \xi(\omega) \leq x_k\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}),$$

რაც თავის მხრივ $\lim_{k\to\infty} F_\xi(x_k) = F_\xi(x)$ პირობის ექვივალენტურია.
თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ξ არის დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი. მისთვის მოიძებნება არათავსებადი ხდომილობების $(A_k)_{k\in N}$ ოჯახი და ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა $(x_k)_{k\in N}$, რომ შესრულდება შემდეგი პირობები:

1) $(\forall k)(k \in N \to x_k \in R,\ A_k \in \mathcal{F})$,

2) $\cup_{k\in N} A_k = \Omega$,

3) $\xi(\omega) = \sum_{k\in N} x_k I_{A_k}(\omega),\ \omega \in \Omega$.

მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია გამოითვლება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$F_\xi(x) = \sum_{x_k \leq x} P(A_k).$$

შევნიშნოთ, რომ დისკრეტული შემთხვევითი ξ სიდიდის განაწილების ფუნქციის ასაგებად არაა აუცილებელი იმის ცოდნა, თუ რა მნიშვნელობებს ღებულობს ის Ω სივრცის ω წერტილებზე. ამისათვის საკმარისია ვიცოდეთ შესაძლო მნიშვნელობათა ალბათობები, რომელიც მოიცემა შემდეგი სქემის საშუალებით

ξ	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

,

სადაც $(\forall k)(k \in N \to p_k = P(A_k))$.

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1 (პუასონის [7] განაწილება). $\xi : \Omega \to R$ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს

$$\xi(\omega) = \sum_{n\in N} n \cdot I_{A_n}(\omega)\ (\omega \in \Omega)$$

ეწოდება $\lambda\ (\lambda > 0)$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება პირობა

$$P(A_n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\ (n \in N),$$

ე.ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\ (n \in N).$$

[7] პუასონი სიმეონ დენისი (*Poisson Semion Denis*) (21.6.1781, ლუარის დეპ, პიტივიო - 25.4.1840, პარიზი)-ფრანგი მექანიკოსი, ფიზიკოსი, მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1826), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1812).

λ-პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების $F(x,\lambda)$ ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$F(x,\lambda)=\sum_{n\le x}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\ (x\in R).$$

მაგალითი 2 (გეომეტრიული განაწილება). *$\xi:\Omega\to R$ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს*

$$\xi(\omega)=\sum_{n\in N} n\cdot I_{A_n}(\omega)\ (\omega\in\Omega)$$

ეწოდება q $(0\le q\le 1)$ პარამეტრიანი გეომეტრიული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება პირობა:

$$P(A_n)=(1-q)q^{n-1}\ (n\in N),$$

ე.ი.

$$P(\{\omega:\xi(\omega)=n\})=(1-q)q^{n-1}\ (n\in N).$$

q-პარამეტრიანი გეომეტრიული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F_q მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_q(x)=\sum_{n\le x}(1-q)q^{n-1}\ (x\in R).$$

მაგალითი 3 (ლეიბნიცის [8] განაწილება). *$\xi:\Omega\to R$ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეს*

$$\xi(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot I_{A_n}(\omega)\ (\omega\in\Omega)$$

ეწოდება ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ სრულდება პირობა:

$$P(A_n)=\frac{1}{n\cdot(n+1)}\ (n\in N),$$

ე.ი.

$$P(\{\omega:\xi(\omega)=n\})=\frac{1}{n\cdot(n+1)}\ (n\in N).$$

ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების F ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით:

$$F(x)=\sum_{n\le x}\frac{1}{n\cdot(n+1)}=$$

[8] ლეიბნიცი გოტფრიდ ვილჰელმ (*Leibniz Gottfried Wilhelm*) (1.7.1646, ლეიპციგი,- 14.11.1716, განოვერი)-გერმანელი მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და გამომგონებელი, იურისტი, ისტორიკოსი, ენათმეცნიერი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1673), პარიზის აკადემიის წევრი (1700), პირველმა შეიმუშავა რაციონალური წილადების ინტეგრირება (1702-03), დაადგინა ნიშანცვლადი მწკრივის კრებადობის ზოგიერთი საკმარისი პირობა (1682).

$$= \begin{cases} 0, & \text{თუ } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{[x]+1}, & \text{თუ } x \geq 1 \end{cases},$$

სადაც $[x]$ აღნიშნავს x ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს.

მაგალითი 4 (ბინომური განაწილება). *მარტივ დისკრეტულ*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} k I_{A_k}(\omega) \quad (\omega \in \Omega).$$

შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება (n,p)-პარამეტრიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, თუ

$$P(A_k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

სადაც ნამდვილი რიცხვი p აკმაყოფილებს პირობას $0 < p < 1$, ხოლო მთელი რიცხვი k აკმაყოფილებს $0 \leq k \leq n$ პირობას, ე.ი.

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = k\}) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

(n,p) პარამეტრიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია აღინიშნება $F_n(x,p)$ სიმბოლოთი და გამოი- თვლება შემდეგი ფორმულით:

$$F_n(x,p) = \sum_{k \leq x} C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}.$$

შენიშვნა 1. *$(1,p)$-პარამეტრიან ბინომური წესით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს უწოდებენ აგრეთვე p-პარამეტრიან ბერნულის წესით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდესაც. მტკიცდება, რომ (n,p)-პარამეტრიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე შეიძლება წარმოვადგინოთ n-ცალი დამოუკიდებელი p- პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის ჯამის სახით .*

განსაზღვრება 2. *შემთხვევით $\xi : \Omega \to R$ სიდიდეს ეწოდება აბსოლუტურად უწყვეტი[9] შემთხვევითი სიდიდე, თუ მოიძებნება ისეთი არაუარყოფითი $f_\xi : R \to R^+$ ფუნქცია, რომ შესრულდება პირობა*

$$(\forall x)(x \in R \to F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)dx),$$

[9] შევნიშნოთ, რომ აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე განისაზღვრება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ლებეგის აზრით ნულზომად ქვესიმრავლეზე მნიშვნელობებამდე სიზუსტით; ხოლო რაც შეეხება ლებეგის აზრით ნულზომადობის ცნებას, ის მდგომარეობს შემდეგში: $X \subset R$ ქვესიმრავლეს ეწოდება ლებეგის აზრით ნულზომადი თუ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს ღია ინტერვალთა ისეთი $(]a_k, b_k[)_{k \in N}$ მიმდევრობა, რომ $X \subset \cup_{k \in N}]a_k, b_k[$ და $\sum_{k \in N}(b_k - a_k) < \epsilon$.

სადაც $R^+ = [0, +\infty[$.

$f_\xi(x)$ $(x \in R)$ ფუნქციას ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე

თეორემა 5. *ვთქვათ, $f_\xi : R \to R$ არის $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია. მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1.$$

დამტკიცება. $\lim_{L\to+\infty} F_\xi(L) = 1$, *ამიტომ* $\lim_{L\to+\infty} \int_{-\infty}^{L} f_\xi(x)dx = 1$, *რაც ნიშნავს* $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$ *ტოლობის მართებულობას.*

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6. *ვთქვათ, F_ξ არის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მაშინ ყოველი x და y $(x < y)$ ნამდვილი რიცხვებისთვის მართებულია ტოლობა*

$$P(\{\omega : x < \xi(\omega) \le y\}) = F_\xi(y) - F_\xi(x),$$

ამასთან, თუ ξ აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდეა და f_ξ მისი განაწილების სიმკვრივეა, მაშინ

$$P(\{\omega : x < \xi(\omega) \le y\}) = \int_x^y f_\xi(s)ds.$$

დამტკიცება.

$$P(\{\omega : x < \xi(\omega) \le y\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le y\} \setminus \{\omega : \xi(\omega) \le x\}) =$$

$$= P(\{\omega : \xi(\omega) \le y\}) - P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}) = F_\xi(y) - F_\xi(x).$$

თუ $F_\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\xi(s)ds$, *მაშინ*

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{y} f_\xi(s)ds - \int_{-\infty}^{x} f_\xi(s)ds = \int_x^y f_\xi(s)ds.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. *თუ f_ξ და F_ξ არიან შესაბამისად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და განაწილების ფუნქცია, მაშინ თითქმის ყველგან R-ზე*

$$\frac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x),$$

ე.ი. $\{x : x \in R,\ \frac{dF_\xi(x)}{dx} \ne f_\xi(x)$ ან $\frac{dF_\xi(x)}{dx}$ არ არსებობს$\}$ არის ნამდვილ რიცხვთა R ღერძის ლებეგის აზრით ნულზომადი ქვესიმრავლე.

მაგალითი 5 (ნორმალური განაწილება). *აბსოლუტურად უწყვეტ* $\xi : \Omega \to R$ *შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება* (m, σ^2) $(m \in R,\ \sigma > 0)$ *პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე (იხ. ნახაზი 7), თუ მართებულია ტოლობა*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ (x \in R).$$

(m, σ^2)*-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე და განაწილების ფუნქცია აღინიშნება შესაბამისად* $\phi_{(m,\sigma^2)}$ *და* $\Phi_{(m,\sigma^2)}$ *სიმბოლოებით, ე.ი.*

$$\phi_{(m,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \ (x \in R),$$

$$\Phi_{(m,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \ (t \in R).$$

როცა $m = 0$ *და* $\sigma = 1$, *მაშინ მათთვის მიღებულია შესაბამისად აღნიშვნები* ϕ *და* Φ, *ე.ი.* $\phi = \phi_{(0,1)}$ *და* $\Phi = \Phi_{(0,1)}$. *ამასთან,* ϕ*-ს ეწოდება სტანდარტული ნორმალური განაწილების სიმკვრივე, ხოლო* Φ *ფუნქციას ეწოდება სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქცია.*

მაგალითი 6. (თანაბარი განაწილება). *აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება თანაბრად განაწილებული $[a, b]$ $(a < b)$ ინტერვალზე (იხ. ნახაზი 8), თუ მართებულია ტოლობა*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{თუ } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$[a, b]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a, b]; \\ 1, & \text{თუ } x > b. \end{cases}$$

მაგალითი 7 (კოშის [10] განაწილება). *აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება განაწილებული კოშის კანონით, თუ*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ (x \in R).$$

მისი განაწილების ფუნქცია მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg(x) \ (x \in R).$$

მაგალითი 8 (მაჩვენებლიანი განაწილება). *აბსოლუტურად უწყვეტ $\xi : \Omega \to R$ შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება λ-პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი წესით განაწილებილი შემთხვევითი სიდიდე (იხ.ნახ.9), თუ*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0; \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F_ξ მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0; \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაგალითი 9 (სინგულარული განაწილება). *განვიხილოთ ინტერვალი $[0, 1]$ და განვსაზღვროთ მასზე ფუნქცია შემდეგი სქემის საშუალებით, რომელიც ეკუთვნის გ.კანტორს.* [11]

[10] კოში ავგუსტინე ლუი (*Cauch Augustin Louis*) (21.8.1789, პარიზი - 23.5.1857,სო) -ფრანგი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1831), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1816).

[11] კანტორი გიორგი (*Cantor Georg*) (19.2.(3.3).1845 პეტერბურგი-6.1.1918 გალე)-გერმანელი მათემატიკოსი, გალეს უნივერსიტეტის პროფესორი (1879-1913). მას ეკუთვნის უსასრულო სიმრავლეთა და ტრანსფინიტურ რიცხვთა თეორიების დამუშავება. 1874 წელს მან დაამტკიცა ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლის არათვლადობა. 1897 წელს ის წყვეტს მეცნიერულ შემოქმედებას. კანტორის იდეებმა, რომელთაც თანამედროვეთა მხრიდან შეხვდა დიდი წინააღმდეგობა, კერძოდ ლ.კრონეკერის მხრიდან, უდიდესი გავლენა მოახდინეს მათემატიკის განვითარებაზე.

დავყოთ ინტერვალი $[0,1]$ სამ ტოლ ნაწილად და განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{თუ } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[; \\ 0, & \text{თუ } x = 0; \\ 1, & \text{თუ } x = 1. \end{cases}$$

$[0,1]$ ინტერვალის სხვა წერტილებში წრფივი ინტერპოლაციის საშუალებით (იხ. ნახაზი 10).

შემდგომ, ყოველი შემდეგი $[0, \frac{1}{3}]$ და $[\frac{2}{3}, 1]$„ ინტერვალი კვლავ დავყოთ სამ ტოლ ნაწილად და განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{თუ } x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[; \\ \frac{1}{4}, & \text{თუ } x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[; \\ \frac{3}{4}, & \text{თუ } x \in]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[; \\ 0, & \text{თუ } x = 0; \\ 1, & \text{თუ } x = 1. \end{cases}$$

$[0,1]$ ინტერვალის სხვა წერტილებში წრფივი ინტერპოლაციის საშუალებით (იხ. ნახაზი 11).

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მივიღებთ $(F_n)_{n\in N}$ ფუნქციათა მიმდევრობას, რომელიც კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული კონკრეტული უწყვეტი F ფუნქციისაკენ, რომლის ზრდის წერტილთა [12] სიმრავლე წარმოადგენს ლებეგის აზრით ნულზომად სიმრავლეს. მართლაც, როგორც ჩანს $(F_n)_{n\in N}$ ფუნქციათა აგების კონსტრუქციიდან, ლებეგის ზომა

$$]\frac{1}{2},\frac{2}{3}[,\ ]\frac{1}{9},\frac{2}{9}[,\ ]\frac{7}{9},\frac{8}{9}[,\cdots$$

ინტერვალთა ოჯახის გაერთიანებისა, რომელზედაც F ფუნქცია ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს, ტოლია

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{2}{3}\big)^n=1.$$

F ფუნქციას უწოდებენ კანტორის ფუნქციას.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდის კონსტრუქცია, რომლის განაწილების ფუნქციასაც წარმოადგენს კანტორის ფუნქცია F.

ვთქვათ,

$$(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1],\mathcal{B}([0,1]),b_1).$$

განვსაზღვროთ ფუნქციათა

$$(\xi_{\frac{k}{2^n}})_{n\in N,\ 1\le k\le n,\ \&\ k\in 2N+1}=(\xi_i)_{i\in I}$$

ოჯახი შემდეგნაირად

$$\xi_{\frac{1}{2}}(\omega)=\frac{1}{3}I_{\{\frac{1}{2}\}}(\omega),\ (\omega\in\Omega),$$

[12] x წერტილს ეწოდება უწყვეტი F ფუნქციის ზრდის წერტილი, თუ ყოველი $\epsilon>0$ რიცხვისათვის $F(x+\epsilon)-F(x-\epsilon)>0$.

$$\xi_{\frac{1}{4}}(\omega) = \frac{1}{9} I_{\{\frac{1}{4}\}}(\omega),\ (\omega \in \Omega),$$

$$\xi_{\frac{3}{4}}(\omega) = \frac{1}{9} I_{\{\frac{3}{4}\}}(\omega),\ (\omega \in \Omega),$$

$$\xi_{\frac{1}{8}}(\omega) = \frac{1}{27} I_{\{\frac{1}{8}\}}(\omega),\ (\omega \in \Omega),$$

$$\xi_{\frac{3}{8}}(\omega) = \frac{1}{27} I_{\{\frac{3}{8}\}}(\omega),\ (\omega \in \Omega),$$

$$\xi_{\frac{5}{8}}(\omega) = \frac{1}{27} I_{\{\frac{5}{8}\}}(\omega),\ (\omega \in \Omega),$$

$$\xi_{\frac{7}{8}}(\omega) = \frac{1}{27} I_{\{\frac{7}{8}\}}(\omega),\ (\omega \in \Omega),$$

და ა.შ.

განვსაზღვროთ $\xi_{Cantor} : \Omega \to R$ *შემდეგნაირად*

$$\xi_{Cantor}(\omega) = \sum_{i \in I,\ i \leq \omega} \xi_i(\omega).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ξ_{cantor} *შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია ემთხვევა კანტორის* F *ფუნქციას.*

განსაზღვრება 3. *ყოველ უწყვეტ განაწილების ფუნქციას, რომლის ზრდის წერტილთა სიმრავლე წარმოადგენს ლებეგის აზრით ნულზომად სიმრავლეს, უწოდებენ სინგულარული განაწილების ფუნქციას.*

თეორემა 7. *ყოველი განაწილების* F *ფუნქციისათვის მართებულია წარმოდგენა*

$$F(x) = p_1 \cdot F_1(x) + p_2 \cdot F_2(x) + p_3 \cdot F_3(x)\ (x \in R),$$

სადაც $F_1,\ F_2,\ F_3$ *არიან შესაბამისად დისკრეტული, აბსოლუტურად უწყვეტი და სინგულარული განაწილების ფუნქციები, ხოლო* $p_1,\ p_2,\ p_3$ *ისეთი არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვებია, რომ*

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$

თეორემა 8. *ვთქვათ,* F_ξ *არის* ξ *შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია და* $a, b \in R$ *და* $a \neq 0$, *მაშინ* $\eta = a\xi + b$ *შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციისათვის მართებულია ტოლობა*

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right)\ (x \in \overline{R}).$$

დამტკიცება. *შევნიშნოთ, რომ*

$$F_\eta(x) = P(\{\omega : a\xi(\omega) + b \le x\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le \frac{x-b}{a}\}) = F_\xi(\frac{x-b}{a}).$$

ტესტები

7.1. მარტივი დისკრეტული $\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{4} x_k I_{A_k}(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება მოცემულია შემდეგი სქემის საშუალებით

ξ	-1	0	4	5
P	$0,2$	$0,3$	$0,1$	$0,4$

.

მაშინ

1) $F_\xi(-3)$ ტოლია

ა) $0,2$, ბ) $0,3$, გ) $0,1$, დ) 0;

2) $F_\xi(-1)$ ტოლია

ა) $0,2$, ბ) $0,3$, გ) $0,1$, დ) 0;

3) $F_\xi(-0,3)$ ტოლია

ა) $0,2$, ბ) $0,3$, გ) $0,1$, დ) 0;

4) $F_\xi(4)$ ტოლია

ა) $0,6$, ბ) $0,4$, გ) 1, დ) $0,8$;

5) $F_\xi(6)$ ტოლია

ა) $0,6$, ბ) $0,4$, გ) 1, დ) $0,8$.

7.2. ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს სახე

$$F_\xi(x) = \begin{cases} a, & x < 0; \\ bx, & 0 \le x < 1; \\ c, & x \ge 1. \end{cases}$$

მაშინ

ა) $a = 1, b = 0, c = 0$; ბ) $a = 0, b = 1, c = 1$;

გ) $a = 0, b = 0, c = 1$; დ) $a = 1, b = 1, c = 0$;

7.3. A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ცდაში 0,3-ის ტოლია. მაშინ სამი დამოუკიდებელი ცდის დროს A ხდომილობის მოხდენათა ξ რიცხვის განაწილების კანონს აქვს სახე ა)

ξ	0	1	2	3
P	$0,343$	$0,441$	$0,189$	$0,027$

,

ბ)

ξ	0	1	2	3
P	$0,343$	$0,441$	$0,179$	$0,037$

.

7.4. მსროლელს მიზანში მოხვედრისას ეწერება 5 ქულა, ხოლო აცდენისას 2 ქულა აკლდება. ამასთან ცალკეული გასროლისას მიზანში მოხვედრის ალბათობაა 0,03. 4 გასროლისას დაგროვილ ქულათა ξ რაოდენობის განაწილების კანონს აქვს სახე

ა)

ξ	-8	-1	6	13	20
P	$0,24$	$0,41$	$0,26$	$0,08$	$0,01$

,

ბ)

ξ	-8	-1	6	13	20
P	$0,2$	$0,44$	$0,25$	$0,09$	$0,01$

.

7.5. პარტიაში 10 დეტალია, რომელშიც 8 სტანდარტულია. შემთხვევითად ირჩევენ 2 დეტალს. მაშინ შერჩევაში მოხვედრილ სტანდარტულ დეტალთა ξ რაოდენობის განაწილების კანონს აქვს სახე

ა)

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

,

ბ)

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{45}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{29}{45}$

.

7.6. დროის ერთეულში საქონლის ფასის 1 ერთეულით მომატების ალბათობაა 0,3, ხოლო იგივე სიდიდით ფასის დაკლების ალბათობაა 0,7. საწყისი ფასი შეადგენდა 10 ერთეულს. მაშინ დროის 4 ერთეულის შემდეგ საქონლის ξ ფასის განაწილების კანონს ექნება სახე

ა)

ξ	6	8	10	12	14
P	$0,24$	$0,41$	$0,26$	$0,08$	$0,01$

,

ბ)

ξ	6	8	10	12	14
P	$0,2$	$0,44$	$0,2$	$0,14$	$0,01$

.

7.7. ნაწილაკი იმყოფება რიცხვითი ღერძის სათავეში. დროის ერთეულში ნაწილაკის მარჯვნივ, ისევე როგორც მარცხნივ, ერთი ერთეულით გადაადგილების ალბათობაა 0,5. მაშინ დროის ოთხი ერთეულის შემდეგ ნაწილაკის ξ მდგომარეობის განაწილების კანონს ექნება სახე

ა)

ξ	-4	-2	0	2	4
P	$0,0625$	$0,25$	$0,375$	$0,25$	$0,0625$

,

ბ)

ξ	-4	-2	0	2	4
P	$0,0625$	$0,245$	$0,385$	$0,245$	$0,0625$

.

7.8. ξ არის $\lambda = 1$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) [2,5; 5,5] ინტერვალში ξ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $0,306760$, ბ) $0,13455$, გ) $0,11213$, დ) $0,28111$;

2) [6,5; 7,5] ინტერვალში $3\xi + 4$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $0,367879$, ბ) $0,13894$, გ) $0,13121$, დ) $0,28991$.

7.9. ξ არის $[3,10]$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) $F_\xi(4)$ ტოლია

ა) $\frac{1}{7}$, ბ) $\frac{1}{8}$, გ) $\frac{1}{9}$, დ) $\frac{1}{10}$;

2) [2,5; 5,5] ინტერვალში ξ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $\frac{5}{7}$, ბ) $\frac{5}{8}$, გ) $\frac{5}{9}$, დ) $0,5$;

3) [5;10] ინტერვალში $5\xi + 5$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) $0,5$, დ) $0,8$.

7.10. ξ არის $\lambda(\lambda > 0)$-პარამეტრით მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე.

1) თუ $[0,a]$ ინტერვალში ξ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა $\frac{2}{3}$ -ის ტოლია, მაშინ

ა) $a = \frac{\ln(3)}{\lambda}$, ბ) $a = \frac{\ln(4)}{\lambda}$, გ) $a = \frac{\ln(5)}{\lambda}$, დ) $a = \frac{\ln(6)}{\lambda}$;

2) [-5;5] ინტერვალში $3\xi - 4$ შემთხვევითი სიდიდის მოხვედრის ალბათობა ტოლია

ა) $1 - e^{-3\lambda}$, ბ) $1 - e^{-4\lambda}$, გ) $1 - e^{-5\lambda}$, დ) $1 - e^{-6\lambda}$.

7.11. ξ არის $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხ- ვევითი სიდიდე.

1) თუ ξ სიდიდის $[-a,a]$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობაა 0,99, მაშინ

ა) $= 2,37$, ბ) $a = 2,57$, გ) $a = 2,77$, დ) $a = 2,97$;

2) $3\xi + 8$ შემთხვევითი სიდიდის $(-5,5)$ ინტერვალში მოხვედრის ალბათობაა

ა) $0,8413$, ბ) $0,7413$, გ) $0,6413$, დ) $0,5413$.

§8. შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და დისპერსია

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა. ვიგულისხმოთ, რომ ξ მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა, ე.ი.

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \to \xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot I_{A_k}(\omega)),$$

სადაც $x_k \in R$ $(1 \le k \le n)$ და ხდომილობათა $(A_k)_{1 \le k \le n}$ ოჯახი ისეთია, რომ მისთვის სრულდება პირობები:

1) $(\forall k)(\forall m)(1 \le k < m \le n \to A_k \cap A_m = \emptyset)$,
2) $\cup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

განსაზღვრება 1. *მარტივი დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ეწოდება ჯამს $\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(A_k)$ და აღინიშნება სიმბოლოთი $M\xi$, ე.ი.*

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot P(A_k).$$

ვიგულისხმოთ, რომ η ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა. §6-ში დამტკიცებული თეორემა 3-ის ძალით მოიძებნება მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\eta_n)_{n \in N}$ მიმდევრობა, რომ შესრულდება

$$(\forall \omega)(\omega \in \Omega \to \eta(\omega) = \lim_{n \to \infty} \eta_n(\omega)).$$

განსაზღვრება 2. *თუ არსებობს სასრული ზღვარი $\lim_{n \to \infty} M\eta_n$, მაშინ მას ეწოდება η შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი და აღინიშნება სიმბოლოთი $M\eta$ (ან $\int_{\Omega} \eta(\omega) dP(\omega)$).*

მტკიცდება, რომ თუ არსებობს სიდიდე $\lim_{n \to \infty} M\eta_n$ და ის სასრულია η-სკენ კრებადი ერთი მაინც მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობისათვის, მაშინ ეს ზღვარი ერთი და იგივეა η-სკენ კრებადი მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი მიმდევრობისათვის, რაც ნიშნავს განსაზღვრება 2-ის კორექტულობას.

შეთანხმება. *მომავალში ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ ისეთ შემთხვევით სიდიდეებს, რომელთა ლოდინი და კვადრატის ლოდინი სასრული რიცხვებია.*

თეორემა 1. *თუ აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივეა f_ξ, მაშინ მართებულია ტოლობა*

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx.$$

განსაზღვრება 3. *ξ შემთხვევითი სიდიდის დისპერსია ეწოდება სიდიდეს $M(\xi - M\xi)^2$ და აღინიშნება სიმბოლოთი $D\xi$.*

განსაზღვრება 4. *სიდიდეს $\sqrt{D\xi}$ ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის საშუალო კვადრატული გადახრა.*

გავეცნოთ მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის ზოგიერთ თვისებას.

თეორემა 2. ვთქვათ $\xi(\omega) = c$ $(\omega \in \Omega,\ c = const)$, მაშინ $M\xi = c$, ე.ი. $Mc = c$.

დამტკიცება. $\xi(\omega) = c \cdot I_{\Omega}(\omega)$. *მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის ძალით, გვექნება*

$$M\xi = c \cdot P(\Omega) = c.$$

თეორემა 3. $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$, *(ე.ი., შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის მათემატიკური ლოდინი შესაკრებთა მათემატიკური ლოდინების ჯამის ტოლია).*

დამტკიცება. *შემთხვევით სიდიდეთა სტრუქტურის შესახებ თეორემისა და შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის თანახმად, საკმარისია თეორემა დავამტკიცოთ მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების შემთხვევაში. ვიგულისხმოთ, რომ ξ და η მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებია, ე.ი. მართებულია შემდეგი ტოლობები:*

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{p} x_k \cdot I_{A_k}(\omega),\ A_k \cap A_m = \emptyset,\ 1 \le k < m \le p,$$

$$\cup_{k=1}^{p} A_k = \Omega,\ x_k \in R,\ k, m, p \in N,$$

$$\eta(\omega) = \sum_{n=1}^{q} y_n \cdot I_{B_n}(\omega),\ B_k \cap B_m = \emptyset,\ 1 \le k < m \le q,$$

$$\cup_{n=1}^{p} B_n = \Omega,\ y_n \in R,\ k, m, q \in N,$$

შევნიშნოთ, რომ

$$(\xi+\eta)(\omega) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}(x_k + y_n) \cdot I_{A_k \cap B_n}(\omega)\ (\omega \in \Omega),$$

საიდანაც ვღებულობთ

$$M(\xi+\eta) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}(x_k + y_n) \cdot I_{A_k \cap B_n}(\omega) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q}(x_k + y_n) \cdot P(A_k \cap B_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} x_k \sum_{n=1}^{q} P(A_k \cap B_n) + \sum_{n=1}^{q} y_n \sum_{k=1}^{p} P(A_k \cap B_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} x_k P(A_k) + \sum_{n=1}^{q} y_n P(B_n) = M\xi + M\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება 5. *ξ და η მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა*

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k,\ \eta(\omega) = y_n\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) = x_k\}) \cdot P(\{\omega :\ \eta(\omega) = y_n\}),$$

სადაც $1 \le k \le p,\ 1 \le n \le q.$

განსაზღვრება 6. *ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ სრულდება შემდეგი პირობა*

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \le x,\ \eta(\omega) \le y\}) = P(\{\omega : \xi(\omega) \le x\}) \cdot P(\{\omega :\ \eta(\omega) \le y\}),$$

სადაც $x,\ y\ \in R.$

შენიშვნა 1. *ξ და η მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების შემ- თხვევაში განსაზღვრებები 5 და 6 ერთმანეთის ექვივალენტურია.*

მართებულია შემდეგი

თეორემა 4. *თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ მოიძებნება დამოუკიდებელ მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\xi_n)_{n\in N}$ და $(\eta_n)_{n\in N}$ მიმდევრობები, რომ შესრულდება ტოლობა:*

$$(\xi \cdot \eta)(\omega) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) \cdot \eta_n(\omega) \ \ (\omega \in \Omega).$$

თეორემა 5. *ვთქვათ, ξ და η დამოუკიდებელი მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$.*

დამტკიცება. *შევნიშნოთ, რომ*

$$(\xi \cdot \eta)(\omega) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} (x_k \cdot y_n) \cdot I_{A_k \cap B_n}(\omega) \ \ (\omega \in \Omega).$$

აქედან

$$M(\xi \cdot \eta) = M(\sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} x_k \cdot y_n \cdot I_{A_k \cap B_n}) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} x_k \cdot y_n P(A_k \cap B_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{n=1}^{q} x_k \cdot y_n P(A_k) \cdot P(B_n) = \sum_{k=1}^{p} x_k P(A_k) \cdot \sum_{n=1}^{q} y_n P(B_n) = M\xi \cdot M\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მე-4 და მე-5 თეორემების საშუალებით მტკიცდება შემდეგი

თეორემა 6. *თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ*

$$M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta,$$

ე.ი. დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნამრავლის მათემატიკური ლოდინი თანამამრავლთა მათემატიკური ლოდინების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. *თუ ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ თეორემა 4-ის ძალით მოიძებნება დამოუკიდებელ მარტივ დისკრეტულ შემთხვევით სიდიდეთა ისეთი $(\xi_n)_{n \in N}$ და $(\eta_n)_{n \in N}$ მიმდევრობები, რომ შესრულდება ტოლობა*

$$(\xi \cdot \eta)(\omega) = \lim_{n \to \infty} \xi_n(\omega) \cdot \eta_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega).$$

მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრისა და მე-5 თეორემის ძალით ვღებულობთ

$$M(\xi \cdot \eta) = \lim_{n \to \infty} M\xi_n \cdot \eta_n = \lim_{n \to \infty} \big(M\xi_n \cdot M\eta_n\big) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} M\xi_n \cdot \lim_{n \to \infty} M\eta_n = M\xi \cdot M\eta.$$

განსაზღვრება 7. *შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1, \cdots, \xi_n$ სასრულო ოჯახს ეწოდება დამოუკიდებელი, თუ გაფართოებულ ნამდვილ რიცხვთა $\overline{R}$ ღერძის ყოველი $(x_k)_{1 \le k \le n}$ სასრული ოჯახისათვის სრულდება პირობა*

$$P(\{\omega : \xi_1(\omega) \le x_1, \cdots, \xi_n(\omega) \le x_n\}) = \prod_{k=1}^{n} P(\{\omega : \xi_k(\omega) \le x_k\}).$$

განსაზღვრება 8. *შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_n)_{n \in N}$ ოჯახს ეწოდება დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, თუ ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ ოჯახი დამოუკიდებელია.*

შენიშვნა 2. *მართებულია თეორემა 6-ის ანალოგი დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი სასრული ოჯახისათვის, ე.ი., თუ $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახია, მაშინ*

$$M(\prod_{k=1}^{n} \xi_k) = \prod_{k=1}^{n} M\xi_k.$$

თეორემა 7. *$M(c\xi) = cM\xi$, ე.ი. მუდმივა გამოდის მათემატიკური ლოდინის ნიშნის გარეთ.*

დამტკიცება. *შევნიშნოთ, რომ იგივურად c-ს ტოლი შემთხვევითი სიდიდე და ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდე არიან დამოუკიდებლები. ამიტომ, თეორემა 6-ის ძალით, ვღებულობთ*

$$M(c \cdot \xi) = Mc \cdot M\xi = cM\xi.$$

თეორემა 8 (კოში-ბუნიაკოვსკის [13]უტოლობა). *ყოველი ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისათვის მართებულია უტოლობა*

$$|M(\xi \cdot \eta)| \leq \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}.$$

დამტკიცება. *განვიხილოთ $M(\xi + x\eta)^2$ სიდიდე. ცხადია, რომ ერთის მხრივ, ყოველი $x \in R$-სთვის $M(\xi + x\eta)^2 \geq 0$. ამიტომ x-ის მიმართ*

$$M(\xi + x\eta)^2 = M\xi^2 + 2M(\xi \cdot \eta) \cdot x + M\eta^2 \cdot x^2$$

კვადრატული სამწევრის დეტერმინანტი არადადებითია, ე.ი.

$$(2M(\xi \cdot \eta))^2 - 4M\eta^2 \cdot M\xi^2 \leq 0,$$

რაც

$$|M(\xi \cdot \eta)| \leq \sqrt{M\xi^2} \cdot \sqrt{M\eta^2}$$

პირობის ექვივალენტურია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 9. *ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია $D\xi$ დის- პერსიის გამოსათვლელი შემდეგი ფორმულა*

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

დამტკიცება. *გავიხსენოთ დისპერსიის განსაზღვრა*

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

$M\xi$ მათემატიკური ლოდინის თვისებების გამო ვღებულობთ

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$$

$$= M\ \xi^2 - M(2\xi M\xi) + M((M\xi)^2) =$$

$$= M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10. *ყოველი ξ შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია შემდე- გი ტოლობა*

$$D\xi = \min_{a \in R} M(\xi - a)^2.$$

[13]ბუნიაკოვსკი ვიქტორ იაკობის ძე [4(16).12.1804 ბარე, პოდოლსკის გუბერნია - 30.11 (12.12). 1889, პეტერბურგი] - რუსი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი (1830, ადიუქტი 1828 წლიდან) და მისივე ვიცე პრეზიდენტი (1864 წლიდან; 1889 წლის სექტემბრიდან საპატიო ვიცე-პრეზიდენტი).

დამტკიცება. *გამოვთვალოთ* $M(\xi-a)^2$ *ფუნქციის მინიმუმი. ცხადია, რომ*

$$M(\xi-a)^2 = M(\xi^2 - 2a\xi + a^2) = M\xi^2 - 2M\xi a + a^2,$$

ე.ი. $M(\xi-a)^2$ *წარმოადგენს* a *პარამეტრის მიმართ არაუარყოფით კვადრატულ სამწევრს. ამიტომ მისი მინიმუმის წერტილი* $a_{\min}$ *აკმაყოფილებს პირობას*

$$\frac{dM(\xi-a)^2}{da} = -2M\xi + 2a = 0.$$

აქედან, $a_{\min} = M\xi$, *ე.ი.*

$$\min_{a\in R} M(\xi-a)^2 = M(\xi-a_{\min})^2 = M(\xi-M\xi)^2 = D\xi.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 11. *ყოველი* ξ *შემთხვევითი სიდიდისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:*

1) $D\xi \geq 0$,

2) $D\xi = 0 \Leftrightarrow (\exists c)(c \in R \to P(\{\omega : \xi(\omega) = c\}) = 1)$.

დამტკიცება. *ვინაიდან* $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ *და* $(\xi - M\xi)^2 \geq 0$, *ამიტომ მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრიდან უშუალოდ მიიღება თეორემის 1) ნაწილის დამტკიცება.*

დავამტკიცოთ თეორემის 2) ნაწილი.

ვთქვათ, $P(\{\omega : \xi(\omega) = c\}) = 1$, *მაშინ* $M\xi = c$ *და* $M\xi^2 = c^2$. *ამიტომ თეორემა 9-ის ძალით, ვღებულობთ* $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = c^2 - c^2 = 0$. *პირიქით, თუ* $D\xi = 0$, *მაშინ* $M(\xi - M\xi)^2 = 0$. *ე.ი.* $P(\{\omega : \xi(\omega) = M\xi\}) = 1$. *ამიტომ საკმარისია* c *მუდმივას როლში განვიხილოთ* $M\xi$ *სიდიდე.*

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12. *თუ* c *მუდმივაა და* ξ *ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ მართებულია შემდეგი პირობები:*

1) $D(c\xi) = c^2 D\xi$,

2) $D(c+\xi) = D\xi$.

დამტკიცება. *დისპერსიის განსაზღვრისა და თეორემა 7-ის ძალით ვღებულობთ*

$$D(c\xi) = M(c\xi - M(c\xi))^2 = M(c\xi - cM\xi)^2 = M(c^2(\xi - M\xi)^2) =$$

$$= c^2 M(\xi - M\xi)^2 = c^2 D\xi.$$

ამით თეორემის 1) ნაწილი დამტკიცებულია.

$\xi + c$ *შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის განსაზღვრის საფუძველზე, ვღებულობთ*

$$D(c+\xi) = M((c+\xi) - M(c+\xi))^2 = M(c + \xi - Mc - M\xi)^2 =$$

$$= M(c + \xi - c - M\xi)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = D\xi.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 13. *ვთქვათ, ξ და η არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, მაშინ*

$$D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta.$$

დამტკიცება. *უპირველეს ყოვლისა შევნიშნოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi-M\xi$ და $\eta-M\eta$ დამოუკიდებლებია. ამ ფაქტის გათვალისწინებით ვღებულობთ*

$$D(\xi+\eta)=M((\xi+\eta)-M(\xi+\eta))^2=M((\xi-M\xi)+(\eta-M\eta))^2=$$

$$=M((\xi-M\xi)^2+2(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)+(\eta-M\eta)^2)=$$

$$=M(\xi-M\xi)^2+2M((\xi-M\xi)(\eta-M\eta))+M(\eta-M\eta)^2=$$

$$=D\xi+2M(\xi-M\xi)M(\eta-M\eta)+D\eta=$$

$$=D\xi+2(M\xi-M(M\xi))(M\eta-M(M\eta))+D\eta=$$

$$=D\xi+2(M\xi-M\xi)(M\eta-M\eta)+D\eta=D\xi+D\eta.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 3. *მართებულია თეორემა 13-ის ანალოგი დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ნებისმიერი სასრული $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ ოჯახისათვის, კერძოდ*

$$D\sum_{k=1}^{n}\xi_k=\sum_{k=1}^{n}D\xi_k.$$

მართებულია შემდეგი

თეორემა 14. *ვთქვათ, F_ξ არის აბსოლუტურად უწყვეტი შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მაშინ დისპერსიის გამოსათვლელ ფორმულას აქვს შემდეგი სახე*

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)^2 f_\xi(x)dx.$$

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის გამოთვლის ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1 (პუასონის განაწილება). *ვთქვათ,*

$$\xi(\omega)=\sum_{n\in N}n\cdot I_{A_n}(\omega)\quad(\omega\in\Omega)$$

არის λ $(\lambda>0)$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(A_n) = P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (n \in N).$$

მაშინ

$$M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^{n-1}}{n!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda.$$

მეორეს მხრივ,

$$M\xi^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} +$$

$$+ \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \lambda^2 + \lambda = \lambda(1+\lambda).$$

მე-9 თეორემის ძალით ვღებულობთ

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda(1+\lambda) - \lambda^2 = \lambda.$$

მაგალითი 2 (გეომეტრიული განაწილება). *ვთქვათ,*

$$\xi(\omega) = \sum_{n \in N} n \cdot I_{A_n}(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

q-პარამეტრიანი გეომეტრიული კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა $(0 \le q \le 1)$, *ე.ი.*

$$P(A_n) = P(\{\omega : \xi(\omega) = n\}) = (1-q)q^{n-1} \quad (n \in N).$$

მაშინ

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)q^{n-1} = (1-q) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = (1-q)(\sum_{n=1}^{\infty} q^n)' = (1-q)(\frac{1}{1-q})' =$$

$$= (1-q) \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q}.$$

მეორეს მხრივ,

$$M\xi^2=\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-q)q^{k-1}=(1-q)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(k\cdot kq^{k-1})=(1-q)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(kq^k)'=$$

$$=(1-q)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(kq^{k-1}\cdot q)'=(1-q)\cdot\big[(\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1})'q+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\big]=$$

$$=(1-q)\big[\frac{2q}{(1-q)^3}+\frac{1}{(1-q)^2}\big]=\frac{2q}{(1-q)^2}+\frac{1}{(1-q)}.$$

ამიტომ

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\frac{2q}{(1-q)^2}+\frac{1}{(1-q)}-\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

მაგალითი 3. (ლეიბნიცის [14] განაწილება). *ვთქვათ,*

$$\xi(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot I_{A_n}(\omega)\ (\omega\in\Omega)$$

არის ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(A_n)=P(\{\omega:\xi(\omega)=n\})=\frac{1}{n\cdot(n+1)}\quad(n\in N).$$

მაშინ

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}=+\infty.$$

ამგვარად, ლეიბნიცის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის მათემატიკური ლოდინი $M\xi$ (შესაბამისად, მათემატიკური დისპერსია $D\xi$) არ არის განსაზღვრული.

მაგალითი 4 (ბინომური განაწილება). *ვთქვათ,*

$$\xi(\omega)=\sum_{k=0}^{n}kI_{A_k}(\omega)\quad(\omega\in\Omega)$$

არის (n,p)-პარამეტრებიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.

$$P(A_k)=P(\{\omega:\xi(\omega)=k\})=C_n^k\cdot p^k(1-p)^{n-k},$$

[14] ლეიბნიცი გოტფრიდ ვილჰელმი (*Leibniz Gottfried Wilhelm*) (1.7.1646, ლეიპციგი - 14.11.1716, განოვერი)-გერმანელი ფილოსოფოსი, მათემატიკოსი, ფიზიკოსი და გამომგონებელი, იურისტი, ისტორიკოსი, ენათმეცნიერი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1673), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1700)

სადაც ნამდვილი რიცხვი p აკმაყოფილებს პირობას $0 \leq p \leq 1$, ხოლო მთელი რიცხვი k აკმაყოფილებს $0 \leq k \leq n$ პირობას.

მაშინ

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= n \cdot p \sum_{k-1=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= n \cdot p \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s!((n-1)-s)!} \cdot p^{s} (1-p)^{(n-1)-s} =$$

$$= n \cdot p \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \cdot p^{s} (1-p)^{(n-1)-s} = n \cdot p.$$

შენიშვნა 4. *ვთქვათ, η არის p პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.*

$$\eta(\omega) = 0 \cdot I_{A_0}(\omega) + 1 \cdot I_{A_1}(\omega) \quad (\omega \in \Omega),$$

სადაც

$$P(A_0) = P(\{\omega : \eta(\omega) = 0\}) = 1-p, \; P(A_1) = P(\{\omega : \eta(\omega) = 1\}) = p.$$

მაშინ

$$M\eta = 0 \cdot P(\{\omega : \eta(\omega) = 0\}) + 1 \cdot P(\{\omega : \eta(\omega) = 1\}) = 1 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

მეორეს მხრივ,

$$P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 0\}) = 1-p, \; P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 1\}) = p,$$

ამიტომ

$$M(\eta^2) = 0 \cdot P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 0\}) + 1 \cdot P(\{\omega : \eta^2(\omega) = 1\}) = 1 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

საბოლოოდ ვღებულობთ

$$D(\eta) = M\eta^2 - (M\eta)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

იმის გამო, რომ (n,p)-პარამეტრებიანი ბინომური წესით განაწილებული შემთხ- ევითი სიდიდე ξ წარმოდგება n ცალი დამოუკიდებელი p პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ შემთხვევითი სიდიდის

ჯამის სახით და p-პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი p-ს ტოლია, თეორემა 3-ის ძალით ვღებულობთ

$$M\xi = M(\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} M\xi_k = np.$$

მე-13 თეორემის შენიშვნის ძალით მივიღებთ

$$D\xi = D(\sum_{k=1}^{n}\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k = np(1-p).$$

მაგალითი 5 (ნორმალური განაწილება). *ვთქვათ, $\xi : \Omega \to R$ არის (m, σ^2)-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე $(m \in R, \sigma > 0)$, ე.ი.*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in R).$$

მაშინ, თეორემა 1-ის ძალით, ვღებულობთ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{m}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz + m = m.$$

დისპერსიის გამოსათვლელი ფორმულის ძალით ვღებულობთ

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_\xi(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz,$$

სადაც $z = x - m$.

აქედან, $t = \frac{z}{\sigma}$ ჩასმის შედეგად მივიღებთ

$$D\xi = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = \sigma^2,$$

ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dz = \sqrt{2\pi}.$$

მაგალითი 6 (თანაბარი განაწილება). *ვთქვათ,* $\xi : \Omega \to R$ *არის* $[a, b]$ $(a < b)$ *ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a, b] \\ 0, & \text{თუ } x \notin [a, b] \end{cases} .$$

მაშინ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

მეორეს მხრივ,

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

აქედან, მე-9 თეორემის ძალით, ვღებულობთ

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

მაგალითი 7 (კოშის განაწილება). *ვთქვათ,* $\xi : \Omega \to R$ *არის კოშის კანონით განაწილებული შემთხვევით სიდიდე, ე.ი.*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \quad (x \in R).$$

შევნიშნოთ, რომ არასაკუთრივი ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi(1 + x^2)} dx$$

არ არსებობს, საიდანაც ვასკვნით რომ კოშის კანონით განაწილებული შემთხვევით სიდიდეს მათემატიკური ლოდინიარ გააჩნია (თუმცა განაწილების სიმკვრივის ლუწობიდან გამომდინარე მოსალოდნელი იყო, რომ მისი მათემატიკური ლოდინი ყოფილიყო ნულის ტოლი).

მაგალითი 8 (მაჩვენებლიანი განაწილება). *ვთქვათ,* $\xi : \Omega \to R$ *არის* λ*-პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე.ი.*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0; \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაშინ

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= \lambda\big(-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}\big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx\big) = \lambda\big(-\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{l}{e^{\lambda l}} + \frac{1}{\lambda^2}\big) =$$

$$= \lambda\big(-\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda e^{\lambda l}} + \frac{1}{\lambda^2}\big) = \lambda\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

ანალოგიური გამოთვლებით მივიღებთ, რომ

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi}(x)dx - (M\xi)^2 = \lambda\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda} x dx - \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

მაგალითი 9 (სინგულარული განაწილება). განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდე ξ_{Cantor}, განსაზღვრული ბორელის კლასიკური ზომით აღჭურვილ $[0,1]$ ინტერვალზე.

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$\int_0^1 \xi_{Cantor}(y)dy + \int_0^1 F(x)dx = 1,$$

სადაც F აღნიშნავს $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრულ კანტორის ფუნქციას.

ამიტომ

$$M\xi_{Cantor} = \int_0^1 \xi_{Cantor}(y)dy = 1 - \int_0^1 F(x)dx.$$

შევნიშნოთ, რომ $\Delta_1 = \{(x,y) : x \in [0,1], 0 \le y \le F(x)\}$ სიმრავლის $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ წერტილის გარშემო საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგოდ π-ს ტოლი კუთხით შემობრუნების შედეგად მიღებული Δ_2 სიმრავლისათვის სრულდება შემდეგი პირობები:

ა) $b_2(\Delta_1 \cap \Delta_2) = 0$,

ბ) $b_2(\Delta_1) = b_2(\Delta_2)$,

გ) $\Delta_1 \cup \Delta_2 = [0,1]\times[0,1]$.

ამიტომ $b_2(\Delta_1) = b_2(\Delta_2) = \frac{1}{2}$, საიდანაც ვღებულობთ

$$M\xi_{Cantor} = 1 - \int_0^1 F(x)dx = 1 - b_2(\Delta_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ახლა გამოვითვალოთ $D(\xi_{Cantor})$. შევნიშნოთ, რომ $\pi M\xi^2_{Cantor}$ წარმოადგენს $0Y$ ღერძის გარშემო Δ_2 ფიგურის ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობას, რომელიც რიცხობრივად ტოლია $[0,1]\times[0,1]$ ფიგურისა და შემდეგი

$$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\times[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]\times[0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]\times[0,\frac{3,}{4}]\cup\cdots$$

სიმრავლის $0Y$ ღერძის გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობათა სხვაობას. ამიტომ

$$M\xi^2_{Cantor} = 1 - \Big[\frac{1}{2}\big((\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2\big) + \frac{1}{4}\big((\frac{2}{9})^2 - (\frac{1}{9})^2\big) + \frac{3}{4}\big((\frac{8}{9})^2 - (\frac{7}{9})^2\big) + \cdots\Big].$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ

$$D\xi^2_{Cantor} = M\xi^2_{Cantor} - (M\xi_{Cantor})^2 = \frac{3}{4} - \Big[\frac{1}{2}\big((\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2\big) + \frac{1}{4}\big((\frac{2}{9})^2 - (\frac{1}{9})^2\big) + \frac{3}{4}\big((\frac{8}{9})^2 - (\frac{7}{9})^2\big) + \cdots\Big].$$

შენიშვნა 5. (მათემატიკური ლოდინისა და დისპერსიის ფიზიკური შინაარსი). *ξ-თი აღვნიშნოთ ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის R ღერძზე მიმობნევის რაიმე წესი. ბუნებრივად ისმის შემდეგი კითხვა: რა ფიზიკური შინაარსია ჩადებული $M\xi$ და $D\xi$ -სიდიდეებში ?*

თეორიული მექანიკის კურსიდან კარგადაა ცნობილი, რომ თუ $x_k \in R$ წერტილში მოთავსებულია p_k წონის ტვირთი ($1 \le k \le n$) და $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, მაშინ ამ წერტილებისაგან შედგენილი სისტემის სიმძიმის ცენტრი x_c გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$x_c = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k.$$

თუ ერთეულოვანი მასის ნივთიერების მიმობნევა R ღერძზე დისკრეტული სიდიდეა და მისი განაწილება მოცემულია შემდეგი ცხრილის სახით

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

,

მაშინ ცხადია, რომ $M\xi = x_c$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $M\xi$ ყოფილა R ღერძზე ξ წესით მიმობნეული ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის სიმძიმის ცენტრი.

ზოგად შემთხვევაში, ξ შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინის განსაზღვრის გამო ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $M\xi$ წარმოადგენს ერთეულოვანი მასის ნივთიერების R ღერძზე ξ წესით მიმობნეული ფხვნილის სიმძიმის ცენტრს.

მეორეს მხრივ, თუ ξ არის მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ

$$D\xi = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M\xi)^2 p_k.$$

ამასთან, სიდიდე $D\xi$ მით უფრო დიდია, რაც უფრო დიდია $((x_k - M\xi)^2)_{1 \le k \le n}$ მიმდევრობის ელემენტები. ეს უკანასკნელი ნიშნავს, რომ რაც უფრო შორს

არიან $(x_k)_{1\le k\le n}$ წერტილები განლაგებული ფხვნილის $M\xi$ სიმძიმის ცენტრიდან, მით უფრო დიდია დისპერსია. პირიქითაც, რაც უფრო ახლოს არიან $(x_k)_{1\le k\le n}$ წერტილები განლაგებული ფხვნილის $M\xi$ სიმძიმის ცენტრთან, მით უფრო მცირეა დისპერსია. კერძოდ, თუ $x_1 = \cdots = x_n = M\xi$, მაშინ $D\xi = 0$.

ამგვარად, $D\xi$ ყოფილა R-ღერძზე ξ-წესით მიმობნეული ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის გაბნეულობის გარკვეული რიცხვითი მახასიათებელი. კერძოდ, ის გვიჩვენებს, თუ რამდენად მჭიდროდ ან მეჩხრად არიან ფხვნილის ნაწილაკები განლაგებული მისივე სიმძიმის ცენტრის გარშემო.

საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეები, სადაც

ξ_1	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

ξ_2	-2	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

მაშინ $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$, ე.ი. ξ_1 და ξ_2 წესით მიმობნეულ ფხვნილის მასათა სიმძიმის ცენტრები ერთმანეთს ემთხვევა, მაგრამ

$$D\xi_1 = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

$$D\xi_2 = 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 4.$$

ამგვარად, R ღერძზე ξ_1 წესით მიმობნეული ერთეულოვანი მასის მქონე ფხვნილის ნაწილაკები უფრო ახლოსაა მის სიმძიმის ცენტრთან, ვიდრე ξ_2 წესით მიმობნეული ფხვნილის ნაწილაკები. ზოგად შემთხვევაში შემთხვევითი სიდიდის დისპერსიის ფიზიკური შინაარსი იგივეა, რაც მარტივი დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეების შემთხვევაში.

ტესტები

8.1. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებები მოცემულია შემდეგი სქემების საშუალებით

ξ	-1	0	1	2
P	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,4$

,

η	-1	0	-2
P	$0,5$	$0,3$	$0,2$

.

მაშინ

1) $M(3\xi - 4\eta)$ ტოლია

ა) $5,3$, ბ) $5,4$, გ) $5,5$, დ) $5,6$;

2) $D(3\xi - 4\eta)$ ტოლია

ა) $20,4,3$, ბ) $21,5$, გ) $22,6$, დ) $23,7$;

8.2. აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}.$$

მაშინ

1) $M(3\xi-4)$ ტოლია

ა) 3,   ბ) -3,   გ) 4,   დ) -4;

2) $D(\sqrt{18}\xi-4)$ ტოლია

ა) $0,3$,   ბ) $0,7$,   გ) 1,   დ) $1,3$.

8.3. ξ_1 არის $(3,25)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ξ_2 არის $(18,20)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ξ_3 არის $\lambda=5$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) $M(1\xi_1+2\xi_2+3\xi_3)$ ტოლია

ა) 34,   ბ) 35,   გ) 36,   დ) 37;

2) თუ ξ_1, ξ_2, ξ_3 დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ $D(1\xi_1+2\xi_2+3\xi_3+4)$ ტოლია

ა) $25\frac{1}{3}$,   ბ) $26\frac{1}{3}$,   გ) $27\frac{1}{3}$,   დ) $28\frac{1}{3}$.

8.4. ξ და η დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების განაწილებები მოცემულია შემდეგი სქემების საშუალებით

ξ	-1	1	2
P	$0,2$	$0,1$	$0,7$

,

η	2	3	-1
P	$0,3$	$0,3$	$0,4$

.

მაშინ

1) $\xi\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

$\xi\eta$	-3	-2	-1	1	2	3	4	6
P	$0,06$	$0,34$	$0,04$	$0,08$	0.03	$0,03$	$0,21$	$0,21$

,

ბ)

$\xi\eta$	-3	-2	-1	1	2	3	4	6
P	$0,05$	$0,35$	$0,03$	$0,09$	0.03	$0,02$	$0,22$	$0,21$

.

2) $\xi+\eta$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

$\xi+\eta$	-2	0	1	2	3	4	5
P	$0,08$	$0,04$	$0,34$	$0,06$	0.03	$0,24$	$0,21$

,

ბ)

$\xi+\eta$	-2	0	1	2	3	4	5
P	$0,06$	$0,06$	$0,34$	$0,06$	0.02	$0,25$	$0,21$

.

§9. კორელაციის კოეფიციენტი და სხვა რიცხვითი მახასიათებლები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა. ξ და η არიან ისეთი შემთხვევითი სიდიდეები, რომ სრულდება პირობები:
$0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$.

განსაზღვრება 1. *$\rho(\xi,\eta)$ სიდიდეს, განსაზღვრულს პირობით*

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}},$$

ეწოდება კორელაციის კოეფიციენტი ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 1. *ვთქვათ, ξ და η ისეთი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$. მაშინ $|\rho(\xi,\eta)| \le 1$.*

დამტკიცება.

$$0 \le D(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}) = M(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \pm \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}})^2 = 2 \pm 2\rho(\xi,\eta),$$

საიდანაც ვღებულობთ $|\rho(\xi,\eta)| \le 1$.

თეორემა 2. *თუ ξ და η ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$, მაშინ $|\rho(\xi,\eta)| = 0$.*

დამტკიცება. *ξ და η შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობიდან გამომდინარეობს $\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ და $\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}$ შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობაც. დამოუკიდებელ შემთხვევითი სიდიდეების ნამრავლის ლოდინის თვისების ძალით ვღებულობთ*

$$\rho = M\Big[\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\Big)\cdot\Big(\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big)\Big] =$$

$$= M\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\Big)\cdot M\Big(\frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big) = 0.$$

მაგალითი 1. *აქვე შევნიშნოთ, რომ თეორემა 2-ის შებრუნებული დებულება საზოგადოდ არაა მართებული, ე.ი. შესაძლებელია ისეთი ξ და η არადამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების აგება, რომ $0 < D\xi < \infty$, $0 < D\eta < \infty$ და $\rho(\xi,\eta) = 0$.* მართლაც, ვთქვათ

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0;1], \mathcal{B}([0;1]), b_1).$$

ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები განვსაზღვროთ შემდეგი თანაფარდობით:

$$\xi(\omega) = 4\cdot I_{[0,\frac{1}{4}[}(\omega) + 0_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}(\omega) - 4_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[}(\omega) + 0_{[\frac{3}{4},1]}(\omega),$$

$$\eta(\omega) = 0 \cdot I_{[0,\frac{1}{4}[}(\omega) + 4_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}[}(\omega) + 0_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[}(\omega) - 4_{[\frac{3}{4},1]}(\omega).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$M\xi = M\eta = 0, \ D\xi = D\eta = 8$$

და

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} =$$

$$= \frac{M\xi\eta}{8} = \frac{M0}{8} = 0.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ξ და η არ არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. მართლაც,

$$P(\{\omega : \xi < 3, \eta < 3\}) = \frac{1}{2},$$

$$P(\{\omega : \xi < 3\}) = \frac{3}{4}, \ P(\{\omega : \eta < 3\}) = \frac{3}{4},$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$P(\{\omega : \xi < 3, \eta < 3\}) \neq P(\{\omega : \xi < 3\}) \cdot P(\{\omega : \eta < 3\}).$$

თეორემა 3. *თეორემა 1-ის პირობებში $|\rho(\xi,\eta)| = 1$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი ნამდვილი რიცხვები $a \neq 0$ და b, რომ*

$$P(\{\omega : \eta(\omega) = a\xi(\omega) + b\}) = 1.$$

დამტკიცება.

საკმარისობა. *ვთქვათ,*

$$P(\{\omega : \eta(\omega) = a\xi(\omega) + b\}) = 1.$$

აღვნიშნოთ $M\xi = \alpha$ და $\sqrt{D\xi} = \beta$. მაშინ

$$\rho(\xi,\eta) = M\frac{\xi - \alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha\xi + b - a\alpha - b}{|\alpha|\beta} = sign(a).$$

აუცილებლობა. *დავუშვათ, რომ $\Big|\rho(\xi,\eta)\Big| = 1$. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $\rho(\xi,\eta) = 1$. მაშინ*

$$D\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big) = 2(1 - \rho(\xi,\eta)) = 0.$$

დისპერსიის თვისების ძალით კონკრეტული $c \in R$ რიცხვისათვის ვღებულობთ

$$P\Big(\{\omega : \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = c\}\Big) = 1,$$

საიდანაც

$$P\Big(\{\omega : \xi(\omega) = \frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}} \cdot \eta(\omega) - \sqrt{D\xi}\Big(\frac{M\eta}{\sqrt{D\eta}} - c\Big) + M\xi\}\Big) = 1.$$

იმ შემთხვევაში, როცა $\rho(\xi, \eta) = -1$, ვღებულობთ

$$D\Big(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}\Big) = 2(1 + \rho(\xi, \eta)) = 0.$$

ანალოგიურად, დისპერსიის თვისების ძალით ვასკვნით ისეთი $d \in R$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$P\Big(\{\omega : \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}} = d\}\Big) = 1,$$

ე.ი.

$$P\Big(\{\omega : \xi(\omega) = -\frac{\sqrt{D\xi}}{\sqrt{D\eta}} \cdot \eta(\omega) + \sqrt{D\xi}\frac{M\eta}{\sqrt{D\eta}} + d\sqrt{D\xi} + M\xi\}\Big) = 1.$$

შენიშვნა 1. *კორელაციის კოეფიციენტი ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის დამოკიდებულების ხარისხის რაოდენობრივი მახასიათებელია. სასარგებლოა მისი, როგორც ორ შემთხვევით სიდიდეს შორის "კუთხის" კოსინუსის ინტერპრეტირება. მართლაც, ვინაიდან $|\rho(\xi, \eta)| \le 1$, ამიტომ $[0, \pi]$ ინტერვალიდან მოიძებნება ერთადერთი რიცხვი ϕ, ისეთი, რომ $\cos\phi = \rho(\xi, \eta)$. სწორედ ამ ϕ რიცხვს უწოდებენ კუთხეს ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის და აღნიშნავენ $\widehat{(\xi, \eta)}$ სიმბოლოთი. ე.ი. $\widehat{(\xi, \eta)} = arccos(\rho(\xi, \eta))$. ამ ტერმინებში საინტერესოა თეორემა 2-ისა და თეორემა 3-ის შემდეგი ინტერპრეტაციები: თუ ξ და η ისეთი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია, რომ $0 < D\xi < \infty$ და $0 < D\eta < \infty$, მაშინ ისინი ორთოგონალურებია, ე.ი. $\widehat{(\xi, \eta)} = \frac{\pi}{2}$.*

თუ $\widehat{(\xi, \eta)}$ ტოლია 0-ის ან π-სი, მაშინ η შემთხვევითი სიდიდე P-თითქმის ყველა ω წერტილისათვის წარმოადგენს ξ შემთხვევითი სიდიდისა და მუდმივი ერთეულოვანი ფუნქციის წრფივ კომბინაციას.

მაგალითი 2. *განვიხილოთ გადამცემი მოწყობილობა. ξ-თი აღვნიშნოთ გადასაცემი სიგნალი. ხარვეზების გამო მიმღები ღებულობს სიდიდეს $\eta(\omega) = \alpha\xi(\omega) + \Delta(\omega)$, სადაც α გაძლიერების კოეფიციენტია, ხოლო $\Delta(\omega)$ არის ხარვეზი. ვიგულისხმოთ, რომ შემთხვევითი სიდიდეები Δ და ξ არიან დამოუკიდებლები. ამასთან $M\xi = a, D\xi = 1$, ხოლო $M\Delta = 0$, $D\Delta = \sigma^2$. თუ დავითვლით კორელაციის კოეფიციენტს ξ და η შემთხვევით სიდიდეებს შორის, მივიღებთ*

$$\rho(\xi, \eta) = M\Big((\xi - a) \cdot \frac{\alpha\xi + \Delta - a\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}}\Big) = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \sigma^2}}.$$

თუ σ არის მცირე α სიდიდესთან მიმართებით, მაშინ $\rho(\xi,\eta)$ ახლოსაა 1-თან და თეორემა 3-ის ძალით, შესაძლებელია η-ს საშუალებით ξ შემთხვევითი სიდიდის აღდგენა.

განვიხილოთ შემთხვევით სიდიდეთა სხვა რიცხვითი მახასიათებლები.

განსაზღვრება 2. *ξ შემთხვევითი სიდიდის k-ური რიგის $(k \in N)$ მომენტი ეწოდება სიდიდეს $M\xi^k$ და აღინიშნება α_k სიმბოლოთი, ე.ი.*

$$\alpha_k = M\xi^k \ (k \in N).$$

განსაზღვრება 3. *სიდიდეს $M(\xi - M\xi)^k$ $(k \in N)$ ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის k-ური რიგის ცენტრალური მომენტი და აღინიშნება μ_k სიმბოლოთი, ე.ი.*

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k \ (k \in N).$$

შენიშვნა 2. *შევნიშნოთ, რომ დისპერსია $D\xi$ არის მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი.*

ვთქვათ, მოცემულია შემთხვევით სიდიდეთა სასრული ოჯახი $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$.

განსაზღვრება 4. *სიდიდეს*

$$M\xi_1^{k_1} \cdots \xi_n^{k_n}$$

ეწოდება $k_1 + \cdots + k_n$ რიგის შერეული მომენტი და აღინიშნება $\alpha_{(k_1,\cdots,k_n)}$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\alpha_{(k_1,\cdots,k_n)} = M\xi_1^{k_1} \cdots \xi_n^{k_n} \quad (k_1, \cdots, k_n \in N).$$

განსაზღვრება 5. *სიდიდეს*

$$M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1} \cdots (\xi_n - M\xi_n)^{k_n}$$

ეწოდება $k_1 + \cdots + k_n$ რიგის ცენტრალური მომენტი და აღინიშნება $\mu_{(k_1,\cdots,k_n)}$ სიმბოლოთი, ე.ი.

$$\mu_{(k_1,\cdots,k_n)} = M(\xi_1 - M\xi_1)^{k_1} \cdots (\xi_n - M\xi_n)^{k_n} \ (k_1, \cdots, k_n \in N).$$

განსაზღვრება 6. *ξ შემთხვევითი სიდიდის ასიმეტრიის კოეფიციენტი ეწოდება $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ რიცხვს და აღინიშნება A_s სიმბოლოთი, ე.ი.*

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

განსაზღვრება 7. *ξ შემთხვევითი სიდიდის ექსცესი ეწოდება $\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$ რიცხვს და აღინიშნება E_x სიმბოლოთი, ე.ი.*

$$E_x=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3.$$

განსაზღვრება 8. *თუ F_ξ არის ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია, მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის მედიანა ეწოდება ისეთ γ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება პირობები:*

$$F_\xi(\gamma-0)\le\frac{1}{2}\ \ ,\ \ F_\xi(\gamma+0)\ge\frac{1}{2},$$

სადაც $F_\xi(\gamma-0)$ და $F_\xi(\gamma+0)$ აღნიშნავენ შესაბამისად F_ξ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა ზღვრებს γ წერტილში.

განსაზღვრება 9. *დისკრეტული ტიპის ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება მის იმ შესაძლო მნიშვნელობას, რომლის შესაბამისი ალბათობა არის უდიდესი.*

განსაზღვრება 10. *აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის მოდა ეწოდება მისი განაწილების სიმკვრივის ლოკალური მაქსიმუმის წერტილს.*

განსაზღვრება 11. *შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება უნიმოდალური, თუ მას გააჩნია ერთადერთი მოდა. წინააღმდეგ შემთხვევაში შემთხვევით სიდიდეს ეწოდება პოლიმოდალური.*

ტესტები

9.1. ვთქვათ, $(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1],\mathcal{B}([0,1]),b_1)$. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები განსაზღვრულია შემდეგი წესით

$$\xi(\omega)=\begin{cases}0, & \omega\in[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[\\ 1, & \omega\in[0,\frac{1}{2}[\\ 2, & \omega\in[\frac{3}{4},1]\end{cases},$$

$$\eta(\omega)=\begin{cases}2, & \omega\in[0,\frac{1}{2}[,\\ -1, & \omega\in[\frac{1}{2},0]\end{cases}.$$

მაშინ კორელაციის კოეფიციენტი $\rho(\xi,\eta)$ ტოლია

ა) $-0,2$, ბ) $-0,1$, გ) 0, დ) $0,1$.

9.2. მოცემულია ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ξ	-1	0	-1
P	$0,6$	$0,1$	$0,3$

.

მაშინ

1) $M(\xi^3)$ ტოლია

ა) $-0,1$, ბ) $-0,2$, გ) $-0,3$, დ) $-0,4$;

2) $M(\xi - M\xi)^4$ ტოლია

ა) $1,948$, ბ) $0,9481$, გ) $0,8481$, დ) $0,7481$.

9.3. ξ არის $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) კენტი რიგის მომენტი α_{2k+1} ტოლია

ა) 1, ბ) 0, გ) $2k+1$, დ) $2k$;

2) მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი μ_2 ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) 2, დ) 3;

3) მედიანა γ ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) 2, დ) 3;

4) მოდა ტოლია

ა) 0, ბ) 1, გ) 2, დ) 3.

9.4. ξ არის $(0,4)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

1) მეორე რიგის ცენტრალური მომენტი μ_2 ტოლია

ა) 6, ბ) 7, გ) 8, დ) 9;

3) მედიანა γ ტოლია

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4;

4) მოდა ტოლია

ა) $[0,4]$, ბ) $[0,3]$, გ) $[0,2]$, დ) $[0,1]$.

9.5. მოცემულია „ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ξ	-1	2	3
P	$0,3$	$0,4$	$0,3$

.

მაშინ

1) მედიანა γ ტოლია

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4;

2) მოდა ტოლია

ა) -1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

9.6. აბსოლუტურად უწყვეტი ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

მაშინ

1) მედიანა γ ტოლია

ა) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ბ) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, გ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, დ) $\frac{\sqrt{7}}{7}$;

2) მოდა ტოლია

ა) 1, ბ) 2, გ) 3, დ) 4.

§10. შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქცია

განვიხილოთ (Ω, F, P) ალბათურ სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ მიმდევრობა.

განსაზღვრება 1. *ასახვას $(\xi_1,\cdots,\xi_n):\Omega\to R^n$, განსაზღვრულს პირობით*

$$(\forall\omega)(\omega\in\Omega\to(\xi_1,\cdots,\xi_n)(\omega)=(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი შემთხვევითი ვექტორი, ანუ n-განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე.

განსაზღვრება 2. *ასახვას $F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}:R^n\to R$, განსაზღვრულს პირობით*

$$(\forall(x_1,\cdots,x_n))((x_1,\cdots,x_n)\in R^n\to F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}((x_1,\cdots,x_n))=$$
$$=P(\{\omega:\xi_1<x_1,\cdots,\xi_n<x_n\})),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი შემთხვევითი $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ვექტორის ერთობლივი განაწილების ფუნქცია.

განსაზღვრება 3. *შემთხვევით $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ვექტორს ეწოდება დისკრეტული ტიპის, თუ ყოველი i-ური მდგენელი ξ_i დისკრეტული შემთხვევითი სიდიდეა $(1\le i\le n)$.*

ანალოგიურად განისაზღვრება აბსოლუტურად უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი ვექტორი.

ერთობლივი განაწილების $F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

$$1. \lim_{x_i\to\infty,\ 1\le i\le n} F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}((x_1,\cdots,x_n))=1,$$
$$2. \lim_{x_i\to-\infty,\ 1\le i\le n} F_{\xi_1,\cdots,\xi_n}((x_1,\cdots,x_n))=0.$$

განვიხილოთ $n=2$ შემთხვევაში საკოორდინატო მართკუთხედში შემთხვევითი ვექტორის ჩავარდნის ალბათობის გამოთვლის საკითხი.
მართებულია შემდეგი დებულება.

თეორემა 1. *მართებულია შემდეგი ფორმულა*

$$(\forall k)(\forall x_k)(\forall y_k)(1\le k\le 2\ \&\ x_k\in R\ \&\ y_k\in R\ \&\ x_1<x_2\ \&\ y_1<y_2\to$$

$$P(\{\omega:(\xi_1,\xi_2)(\omega)\in[x_1;x_2[\times[y_1;y_2[\})=F_{\xi_1,\xi_2}((x_2,y_2))-F_{\xi_1,\xi_2}((x_1,y_2))+$$
$$+F_{\xi_1,\xi_2}((x_1,y_1))-F_{\xi_1,\xi_2}((x_2,y_1)),$$

სადაც

$$[x_1;x_2[\times[y_1;y_2[=\{(x,y)|x_1\le x<x_2,\ y_1\le y<y_2\}.$$

დამტკიცება. *თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას*

$$A_{(a,b)} = \{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in]-\infty; a[\times]-\infty; b[\} \quad (a \in R, b \in R),$$

მაშინ

$$\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in]x_1; x_2[\times]x_2; y_2[\} = (A_{(x_2,y_2)} \setminus A_{(x_2,y_1)}) \setminus (A_{(x_1,y_2)} \setminus A_{(x_1,y_1)}).$$

ამიტომ

$$P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in]x_1; x_2[\times]x_2; y_2[\}) = P((A_{(x_2,y_2)} \setminus A_{(x_2,y_1)})) -$$
$$P((A_{(x_1,y_2)} \setminus A_{(x_1,y_1)})) = (P(A_{(x_2,y_2)}) - P(A_{(x_2,y_1)})) - (P(A_{(x_1,y_2)}) -$$
$$P(A_{(x_1,y_1)})) = P(A_{(x_2,y_2)}) - P(A_{(x_2,y_1)}) - P(A_{(x_1,y_2)}) + P(A_{(x_1,y_1)}) =$$
$$F_{\xi_1,\xi_2}((x_2, y_2)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_2, y_1)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_1, y_2)) + F_{\xi_1,\xi_2}((x_1, y_1)).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ R^2 სივრცის რაიმე (x, y) წერტილი. თუ არსებობს ორმაგი ზღვარი

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in [x - \Delta x; x + \Delta x[\times]y - \Delta y; y + \Delta y[\})}{4 \Delta x \Delta y},$$

მაშინ ჩვენ ვიტყვით, რომ ორგანზომილებიანი (ξ_1, ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების F_{ξ_1,ξ_2} ფუნქციას (x, y) წერტილში გააჩნია სიმკვრივე $f_{\xi_1,\xi_2}(x, y)$, რომელიც რიცხობრივად ზემოთხსენებული ორმაგი ზღვრის ტოლია.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 2. *თუ F_{ξ_1,ξ_2} ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი კერძო წარმოებულები (x_0, y_0) წერტილის რაიმე მიდამოში, მაშინ ორგანზომილებიანი შემთხვევით ვექტორს (x_0, y_0) წერტილში გააჩნია განაწილების სიმკვრივე $f_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0)$, რომელიც გამოითვლება შემდეგი ფორმულით*

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}.$$

დამტკიცება. *თეორემა 1-ის ძალით ვღებულობთ*

$$P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in [x - \Delta x; x + \Delta x[\times]y - \Delta y; y + \Delta y[\}) =$$
$$= F_{\xi_1,\xi_2}((x_0 + \Delta x, y_0)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_0 + \Delta x, y_0 - \Delta y)) -$$
$$F_{\xi_1,\xi_2}((x_0 - \Delta x, y_2)) + F_{\xi_1,\xi_2}((x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y)).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად Δx-ისა და Δy -ის სიმცირის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ წერტილები $(x_0 - \Delta x, y_0)$, $(x_0 - \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $(x_0, y_0 - \Delta y), (x_0, y_0 + \Delta y)$ ეკუთვნიან (x_0, y_0) წერტილის ისეთ მიდამოს, რომელშიც

F_{ξ_1,ξ_2} ფუნქციას გააჩნია მეორე რიგამდე ჩათვლით უწყვეტი კერძო წარმოებულები. ლაგრანჟის [15] თეორემის ძალით იარსებებს ისეთი $\theta_1 \in]0;1[$, რომ შესრულდება ტოლობა

$$[F_{\xi_1,\xi_2}((x_0+\Delta x, y_0)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_0+\Delta x, y_0-\Delta y))] -$$
$$[F_{\xi_1,\xi_2}((x_0-\Delta x, y_2)) - F_{\xi_1,\xi_2}((x_0-\Delta x, y_0-\Delta y))] =$$
$$= 2\Delta x \cdot \frac{\partial F_{\xi_1\xi_2}}{\partial x}(x_0-\Delta x+2\theta_1\Delta x, y_0-\Delta y).$$

ლაგრანჟის თეორემის მეორედ გამოყენებით ჩვენ ვასკვნით ისეთი $\theta_2 \in]0;1[$ რიცხვის არსებობას, რომ

$$P(\{\omega : (\xi_1,\xi_2)(\omega) \in [x-\Delta x; x+\Delta x[\times]y-\Delta y; y+\Delta y[\}) =$$
$$= 4\cdot\Delta x\cdot\Delta y\frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}}{\partial y\partial x}(x_0-\Delta x+2\theta_1\Delta x, y_0-\Delta y+2\theta_2).$$

ცხადია, რომ

$$\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{P(\{\omega : (\xi_1,\xi_2)(\omega) \in [x-; x+\Delta x[\times]y-\Delta y; y+[\})}{4\Delta x\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{4\cdot\Delta x\cdot\Delta y\frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}}{\partial y\partial x}(x_0-\Delta x+2\theta_1\Delta x, y_0-\Delta y+2\theta_2)}{4\Delta x\Delta y} =$$
$$= \frac{\partial^2 F_{\xi_1,\xi_2}(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}.$$

შვარცის [16] თეორემის გამოყენება ასრულებს თეორემის დამტკიცებას.

მაგალითი 1. *ორგანზომილებიან შემთხვევით (ξ_1,ξ_2) ვექტორს ეწოდება ორგანზომილებიანი გაუსის შემთხვევითი ვექტორი, თუ მისი განაწილების f_{ξ_1,ξ_2} სიმკვრივეს აქვს შემდეგი სახე*

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (x_1,x_2\in R),$$

სადაც $a_1,a_2\in R, \sigma_1>0, \sigma_2>0$.

[15] ლაგრანჟი ჟოზეფ ლუი (*Lagrange Joseph Louis*) 25.1.1736, ტურინი - 10.4.1813, პარიზი) - ფრანგი მათემატიკოსი და მექანიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის უცხოელი საპატიო წევრი (1776), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1772). მას ეკუთვნის ანალიზის შექმნა ხარისხოვანი მწკრივების ბაზაზე, სასრული ნაზრდის ფორმულა-ლაგრანჟის ფორმულა, პირობითი ექსტრემუმების თეორიაში მამრავლთა მეთოდის შექმნა და სხვა.

[16] შვარცი კარლ გერმანი (*Schwarz Karl Hermann Amandus*) (25.1.1843, ხესმდორფი, -- 30.11.1921, ბერლინი) -- გერმანელი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის უცხოელი წევრ-კორესპონდენტი (1897), ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1893). ძირითადი შრომები გეომეტრიასა (სწავლობდა მინიმალურ ზედაპირებს) და კონფორმულ ასახვათა თეორიაში.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ ზოგიერთი თეორემა.

თეორემა 3. *ვთქვათ, $D \subseteq R^2$ არის საკოორდინატო სიბრტყეზე განლაგებული რაიმე არე. ამასთან f_{ξ_1,ξ_2} არის ორგანზომილებიანი (ξ_1, ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების სიმკვრივე. მაშინ მართებულია შემდეგი ფორმულა*

$$P(\{\omega : (\xi_1, \xi_2)(\omega) \in D\}) = \int\int_D f_{\xi_1,\xi_2}(x, y) dx dy.$$

განსაზღვრება 4. *ასახვას $g : R^n \to R$ ეწოდება ზომადი ასახვა, თუ სრულდება შემდეგი პირობა*

$$(\forall x)(x \in R \to \{(x_1, \cdots, x_n) : g(x_1, \cdots, x_n) < x\} \in B(R^n)).$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ასახვა $g : R^n \to R$ არის ზომადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$(\forall B)(B \in \mathcal{B}(R) \to g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(R^n)),$$

სადაც $g^{-1}(B) = \{(x_1, \cdots, x_n) : g(x_1, \cdots, x_n) \in B\}$.

თეორემა 4. *ვთქვათ, $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ შემთხვევითი ვექტორის განაწილების ფუნქციის სიმკვრივეა $f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$. მაშინ ნებისმიერი ზომადი $g : R^n \to R$ ასახვისა და $B \in B(R)$ ზომადი სიმრავლისათვის მართებულია ფორმულა*

$$P(\{\omega : g((\xi_1, \cdots, \xi_n)(\omega)) \in B\}) = \int \cdots \int_{g^{-1}(B)} f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

თეორემა 5. *თუ $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, $f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$ არის შემთხვევითი $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ვექტორის განაწილების ფუნქციის სიმკვრივე, f_{ξ_i} $(1 \le i \le n)$ არის ξ_i შემთხვევითი სიდიდის განაწილების სიმკვრივე, მაშინ*

$$f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{1 \le i \le n} f_{\xi_i}(x_i) \quad ((x_1, \cdots, x_n) \in R^n).$$

განსაზღვრება 5. *ვთქვათ, $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, ამასთან ყოველი ξ_k $(1 \le k \le n)$ არის (a_k, σ_k^2)-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ შემთხვევით ვექტორს ეწოდება n-განზომილებიანი გაუსის ვექტორი და მისი განაწილების სიმკვრივეს, თეორემა 5-ის ძალით, აქვს შემდეგი სახე*

$$f_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \prod_{k=1}^n \sigma_k} e^{-\sum_{k=1}^n \frac{(x_k - a_k)^2}{2\sigma_k^2}},$$

სადაც $(x_1, \cdots, x_n) \in R^n,\ a_1, \cdots, a_n \in R, \sigma_1 > 0, \cdots, \sigma_n > 0.$

n-განზომილებიანი გაუსის $(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ ვექტორს ეწოდება n-განზომილებიანი გაუსის სტანდარტული ვექტორი, თუ

$$f_{\eta_1,\cdots,\eta_n}(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\sum_{k=1}^n\frac{x_k^2}{2}}\ ((x_1,\cdots,x_n)\in R^n).$$

განსაზღვრება 6. *ვთქვათ, $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ არის გაუსის შემთხვევითი ვექტორი. $P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}$ ფუნქციას, განსაზღვრულს პირობით*

$$(\forall B)(B\in\mathcal{B}(R^n)\to P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(B)=P(\{\omega:(\xi_1(\omega),\cdots,\xi_n(\omega))\in B\}),$$

ეწოდება n-განზომილებიანი გაუსის ალბათური ზომა.

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3-ის ძალით, მართებულია შემდეგი ფორმულა

$$P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(B)=\overbrace{\int\cdots\int_B}^{n}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\prod_{k=1}^n\sigma_k}e^{-\sum_{k=1}^n\frac{(x_k-a_k)^2}{2\sigma_k^2}}dx_1\cdots dx_n.$$

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი

მაგალითი 3. *ვთქვათ, $\prod_{k=1}^n[a_k,b_k]$ არის R^n სივრცის n-განზომილებიანი გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა. მაშინ*

$$P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(\prod_{k=1}^n[a_k,b_k])=\prod_{k=1}^n[\Phi(b_k)-\Phi(a_k)].$$

მაგალითი 4. *ვთქვათ, $\prod_{k=1}^n[a_k,b_k]$ არის R^n სივრცის n-განზომილებიანი გაუსის სტანდარტული ალბათური ზომა, ხოლო V_ρ^n არის n-განზომილებიანი ρ-რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით $O(0,\cdots,0)\in R^n$ წერტილში. მაშინ*

$$P_{\xi_1,\cdots,\xi_n}(V_\rho^n)=\overbrace{\int\cdots\int_{V_\rho}}^{n}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\sum_{k=1}^n\frac{x_k^2}{2}}dx_1\cdots dx_n=$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})}\times\int_0^\rho r^{n-1}\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}dr,$$

სადაც $\Gamma(\cdot)$ მეორე გვარის ეილერის ინტეგრალია.

$\chi_n^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილების $F_{\chi_n^2}$ ფუნქციას ეწოდება χ_n^2 -განაწილება, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$F_{\chi_n^2}(x)=\begin{cases}0, & \text{თუ } x\le 0,\\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})}\times\int_0^{\sqrt{x}}r^{n-1}\cdot e^{-\frac{r^2}{2}}dr, & \text{თუ } x>0.\end{cases}$$

აქედან

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \times x^{\frac{n-1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{თუ } x > 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{თუ } x \le 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \times x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, & \text{თუ } x > 0. \end{cases}$$

შენიშვნა. *ჩვენს მიერ გამოყენებული იყო შემდეგი ფაქტი ინტეგრალური თეორიიდან*

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{V_\rho} f(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2})dx_1 \cdots dx_n = 2 \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int_0^\rho r^{n-1} f(r)dr,$$

სადაც f არის V_ρ-ზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია.

მაგალითი 5. *ვთქვათ, $(e_k)_{1\le k\le m}$ $(m \le n)$ არის დამოუკიდებელ ნორმირებულ ვექტორთა ოჯახი R^n-ში, ხოლო $\xi_1, \cdots, \xi_m$ არის დამოუკიდებელ გაუსის სტანდარტულ ერთ-განზომილებიან შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა განსაზღვრული $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათურ სივრცეზე. მაშინ μ ზომა, განსაზღვრული პირობით*

$$(\forall X)(X \in \mathcal{B}(R^n) \to \mu(X) = P(\{\omega : \sum_{k=1}^{m} \xi_k(\omega)e_k \in X\})),$$

წარმოადგენს R^n სივრცეზე განსაზღვრულ გაუსის ზომას. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ აღნიშნული წარმოდგენა მართებულია ნებისმიერი გაუსის ზომისათვის R^n-ში.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 6. *ვთქვათ, ξ_1 და ξ_2 არიან დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები, f_{ξ_1} და f_{ξ_2} არიან შესაბამისად ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდეების განაწილების სიმკვრივეები. მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა $\xi_1+\xi_2$ ჯამის განაწილების $F_{\xi_1+\xi_2}$ ფუნქციისა და განაწილების $f_{\xi_1+\xi_2}$ სიმკვრივისათვის მართებულია შემდეგი ფორმულები:*

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{x} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)f_2(x_2 - x_1)dx_1,$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)f_2(x_2 - x_1)dx_1.$$

დამტკიცება. *ჯამი* $\xi_1+\xi_2$ *შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც* (ξ_1,ξ_2) *შემთხვევითი ვექტორის უწყვეტი* g *ანასახი, სადაც* $g(x_1,x_2)=x_1+x_2$. B *სიმრავლის როლში განვიხილოთ* $(-\infty,x)$ *სიმრავლე. მე-4 და მე-5 თეორემების ძალით ვღებულობთ*

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=P(\{\omega:\xi_1(\omega)+\xi_2(\omega)<x\})=P(\{\omega:g(\xi_1,\xi_2)(\omega)<x\})=$$

$$=\int\int_{g^{-1}((-\infty;x))} f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)dx_1dx_2.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$g_{-1}((-\infty;x))=\{(x_1,x_2)|x_1+x_2<x\},$$

ამიტომ

$$F_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int\int_{\{(x_1,x_2)|x_1+x_2<x\}} f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)dx_1dx_2=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{\infty}^{x-x_1}dx_2 f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{\infty}^{x-x_1}d(x_1+x_2)f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{\infty}^{x}d\tau f_{\xi_1}(x_1)f_{\tau-\xi_2}(x_2)=\int_{-\infty}^{\tau}d\tau\int_{\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x_1)f_{\tau-\xi_2}(x_2)dx_1,$$

სადაც $\tau=x_1+x_2$.

ცხადია, რომ R ღერძის ℓ_1-თითქმის ყველა x წერტილისათვის

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\frac{dF_{\xi_1+\xi_2}(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(\tau-x_1)dx_1.$$

ამ ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომ ინტეგრალს ეწოდება f_1 და f_2 ფუნქციათა ნახვევი და აღინიშნება სიმბოლოთი $f_{\xi_1}*f_{\xi_2}$.

ადვილი საჩვენებელია, რომ $f_{\xi_1}*f_{\xi_2}=f_{\xi_2}*f_{\xi_1}$, ე.ი.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x-x_1)dx_1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x-x_1)f_{\xi_2}(x_1)dx_1.$$

ტესტები

10.1. მოცემულია დისკრეტული ორგანზომილებიანი (ξ_1,ξ_2) შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

(ξ_1,ξ_2)	$(4,3)$	$(4,10)$	$(4,12)$	$(5,3)$	$(5,12)$
P	$0,17$	$0,13$	$0,25$	$0,2$	$0,25$

.

მაშინ

1) ξ_1 შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე

ა)

ξ_1	4	5
P	$0,55$	$0,45$

,

ბ)

ξ_1	4	5
P	$0,55$	$0,45$

;

2) ξ_2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე
ა)

ξ_2	3	10	12
P	$0,37$	$0,13$	$0,5$

,

ბ)

ξ_2	3	10	12
P	$0,35$	$0,15$	$0,5$

;

3) $F_{\xi_1,\xi_2}(4,5;10,5)$ ტოლია
ა) $0,36$, ბ) $0,34$, გ) $0,32$, დ) $0,3$;
4) $P(\{\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \in [1,5] \times [5,8]\})$ ტოლია
ა) $0,39$, ბ) $0,38$, გ) $0,37$, დ) $0,36$.

10.2. მოცემულია ორი დამოუკიდებელი ξ_1 და ξ_2 შემთხვევითი სიდიდის განაწილებები

ξ_1	2	3
P	$0,7$	$0,3$

,

ξ_2	-2	2
P	$0,3$	$0,7$

.

მაშინ $\xi_1 \cdot \xi_2$ შემთხვევითი სიდიდის განაწილებას აქვს სახე
ა)

$\xi_1 \cdot \xi_2$	-6	-4	4	6
P	$0,08$	$0,22$	$0,48$	$0,22$

,

ბ)

$\xi_1 \cdot \xi_2$	-6	-4	4	6
P	$0,09$	$0,21$	$0,49$	$0,21$

.

10.3. მოცემულია ორგანზომილებიანი (ξ_1, ξ_2) ვექტორის განაწილების ფუნქცია

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} (1-e^{-4x_1})(1-e^{-2x_2}), & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ 0, & x_1 < 0 \text{ ან } x_2 < 0. \end{cases}$$

მაშინ
ა)

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2) = \begin{cases} (6e^{-4x_1-2x_2}), & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ 0, & x_1 < 0 \text{ ან } x_2 < 0, \end{cases}$$

ბ)

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\begin{cases}(6e^{-4x_1-2x_2}), & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\\ 0, & x_1<0 \text{ ან } x_2<0.\end{cases}$$

10.4. მოცემულია (ξ_1,ξ_2) შემთხვევითი ვექტორის განაწილების სიმკვრივე

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\frac{20}{\pi^2(16+x_1^2)(25+x_2^2)}\quad ((x_1,x_2)\in R^2).$$

მაშინ

ა)

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(\frac{x_1}{8})(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(\frac{x_2}{10})),$$

ბ)

$$F_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(\frac{x_1}{4})(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg(\frac{x_2}{5})).$$

10.5. ცნობილია, რომ $y^{''}+5y^{'}+6y=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის თავისუფალი კოეფიციენტები არიან $(0,1)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. ალბათობა იმისა, რომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი $x=0$ წერტილში მიიღებს სიდიდით $0,5$-ზე მეტ მნიშვნელობას, ტოლია

ა) $0,5$, ბ) $0,75$, გ) $0,6$, დ) $0,85$.

10.6. ცნობილია, რომ $y^{''}+y=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის თავისუფალი კოეფიციენტები არიან $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდი- დეები. ალბათობა იმისა, რომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი $x=0$ წერტილში მიიღებს მნიშვნელობებს $(0,2)$ ინტერვალიდან, ხოლო $x=\frac{\pi}{2}$ წერტილში მიიღებს მნიშვნელობებს $(-2,1)$ ინტერვალიდან, ტოლია

ა) $0,2245785$, ბ) $0,7767678$, გ) $0,3665582$, დ) $0,8598760$.

10.5. ცნობილია, რომ $y^{''}-\ln 6y^{'}+\ln 2\ln 3y=0$ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნის თავისუფალი კოეფიციენტები არიან $(0,1)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. ალბათობა იმისა, რომ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი $x=0$ წერტილში მიიღებს სიდიდით 1-ზე ნაკლებ მნიშვნელობას, ხოლო $x=1$ წერტილში მიიღებს სიდიდით 2-ზე ნაკლებ მნიშვნელობას, ტოლია

ა) $\frac{1}{2}$, ბ) $\frac{1}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{5}$.

§11. ჩებიშევის უტოლობა. სამი სიგმას წესი

ვთქვათ, (Ω, F, P) ალბათური სივრცეა. მართებულია შემდეგი

თეორემა 1 (ჩებიშევის[17] I უტოლობა). *ყოველი დადებითი ξ შემთხვევითი სიდიდისა და ყოველი დადებითი ϵ რიცხვისათვის ადგილი აქვს შემდეგ უტოლობას*

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \geq \epsilon\}) \leq \frac{M\epsilon}{\epsilon}.$$

დამტკიცება. *ცხადია, რომ სრულდება შემდეგი პირობა*

$$M\xi = M(\xi \cdot I_\Omega) = M(\xi \cdot I_{\{\omega:\xi(\omega)\geq\epsilon\}} + \xi \cdot I_{\{\omega:\xi(\omega)<\epsilon\}}) \geq$$

$$\geq M(\xi \cdot I_{\{\omega:\xi(\omega)\geq\epsilon\}}) \geq \epsilon \cdot P(\{\omega : \xi(\omega) \geq \epsilon\}).$$

აქედან ვღებულობთ

$$P(\{\omega : \xi(\omega) \geq \epsilon\}) \leq \frac{M\epsilon}{\epsilon}.$$

თეორემა 2 (ჩებიშევის II უტოლობა). *ყოველი η შემთხვევითი სიდიდისა და ყოველი $\delta > 0$ რიცხვისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობა*

$$P(\{\omega : |\eta(\omega) - M\eta| \geq \sigma\}) \leq \frac{D\eta}{\sigma^2}.$$

დამტკიცება. *შემოვიღოთ აღნიშვნები: $\xi(\omega) = (\eta(\omega) - M\eta)^2$, $\epsilon = \sigma^2$. ჩებიშევის I უტოლობის ძალით ვღებულობთ*

$$P(\{\omega : (\eta(\omega) - M\eta)^2 \geq \sigma^2\}) \leq \frac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma^2}.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\{\omega : (\eta(\omega) - M\eta)^2 \geq \sigma^2\} = \{\omega : |\eta(\omega) - M\eta| \geq \sigma\}.$$

აქედან, წინა უტოლობის გამოყენებით, ვღებულობთ

$$P(\{\omega : |\eta(\omega) - M\eta| \geq \sigma\}) \leq \frac{D\eta}{\sigma^2}.$$

[17] ჩებიშევი პაფტუნი ლევის ძე [4(16).5.1821. კალუგის ოლქის სოფ.ოკატოვო- 26.11.(8.12)1894, პეტერბურგი] - რუსი მათემატიკოსი და მექანიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის აკადემიკოსი (1856), ბერლინის მეცნიერებათა აკადემიის (1871), ბოლონიის მეცნიერებათა აკადემიის (1873), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის (1874)(1860-წევრ.კორ.) და ლონდონის სამეფო მეცნიერებათა აკადემიის (1893) საპატიო წევრი.

მაგალითი. *ვთქვათ, მთვარის ფოტოგადაღების საშუალებით ვაწარმოებთ მთვარის დიამეტრის გაზომვას. ატმოსფერული პირობების ცვალებადობის გამო, დროის განსხვავებული მომენტებისათვის გადაღებულ სურათებში მივიღებთ მთვარის დიამეტრის სხვადასხვა მნიშვნელობებს* $\xi_1, \cdots, \xi_n$. *ვთქვათ,* a *არის მთვარის დიამეტრის მნიშვნელობა, მაშინ* $|\xi_k(\omega)-a|$ *იქნება* k*-ურ ცდაში მიღებული გაზომვის შედეგის გადახრა მთვარის დიამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობიდან* $(1 \leq k \leq n)$, *ხოლო* $\sqrt{M(\xi_k-a)^2} = \sqrt{D\xi_k}$ *იქნება საშუალო კვადრატული გადახრა. ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი* k*-ური ცდისათვის* $(1 \leq k \leq n)$ *სრულდება პირობები:*

a) $M\xi_k = a$,

b) $\sqrt{D\xi_k} = 1$,

g) $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ *შემთხვევითი სიდიდეები დამოუკიდებლებია.*

ბუნებრივია, რომ სიდიდე $J_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \cdots + \xi_n)$ *მიიღება* a *პარამეტრის შეფასებად. ისმის შემდეგი კითხვა:*

რამდენი გაზომვა უნდა ვაწარმოოთ, რომ შესრულდეს პირობა

$$P(\{\omega : |J_n(\omega) - a| \leq 0,01\}) \geq 0,95,$$

ე.ი. გადახრა $|J_n(\omega) - a|$ *იყოს* $0,1$ *-ზე ნაკლები ან ტოლი* $0,95$*-ზე მეტი ალბათობით.*

ცხადია, რომ ერთის მხრივ უნდა შესრულდეს პირობა

$$P(\{\omega : |J_n(\omega) - a| > 0,01\}) \leq 0,05.$$

მეორეს მხრივ, ჩებიშევის II უტოლობის ძალით ვღებულობთ

$$P(\{\omega : |J_n(\omega) - a| > 0,01\}) \leq \frac{D(J_n)}{(0,1)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\xi_k}{0,01} = \frac{\frac{1}{n^2}n}{0,01} = \frac{100}{n}.$$

თუ შევარჩევთ ისეთ უმცირეს $n = n_{\text{ჩ}}$ *ნატურალურ რიცხვს, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა* $\frac{100}{n_{\text{ჩ}}} \leq 0,05$, *ის აღმოჩნდება* 2000*-ის ტოლი.*

ამგვარად, მივიღეთ შემდეგი უტოლობა

$$P(\{\omega : |J_{2000}(\omega) - a| \leq 0,1\}) \geq 0,95.$$

ამგვარად, საჭიროა 2000 *გაზომვის ჩატარება იმისათვის, რომ* $0,95$*-ზე მეტი ალბათობით ვიყოთ დარწმუნებული იმაში, რომ გაზომვის შედეგად მიღებული სიდიდეებისაგან შედგენილი საშუალო არითმეტიკული იყოს გადახრილი მთვარის დიამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობისაგან არაუმეტეს* $0,1$*-ის ტოლი სიდიდისა.*

თეორემა 3 (სამი სიგმას წესი). *ყოველი* ξ *შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია შემდეგი უტოლობა*

$$P(\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq 3\sigma\}) \leq \frac{1}{9}.$$

დამტკიცება. *მართლაც, ჩებიშევის II უტოლობის ძალით ვღებულობთ*

$$P(\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq 3\sigma\}) \leq \frac{D\xi}{9\sigma^2} = \frac{1}{9}.$$

ტესტები

11.1. ცნობილია, რომ $D\xi = 0,001$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით $\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < 0,1\}$ ხდომილობის ალბათობა ფასდება ქვევიდან რიცხვით, რომელიც ტოლია

ა) $0,8$, ბ) $0,9$, გ) $0,98$, დ) $0,89$.

11.2. ცნობილია, რომ $D\xi = 0,004$. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით დადგენილია, რომ $P(\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < \epsilon\}) \geq 0,9$; მაშინ ϵ ტოლია

ა) $0,1$, ბ) $0,2$, გ) $0,3$, დ) $0,4$.

11.3. მოცემულია დისკრეტული ξ შემთხვევითი სიდიდის განაწილება

ξ	$0,3$	$0,6$
P	$0,2$	$0,8$

.

ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან $\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < \epsilon\}$ ხდომილობის ალბათობა.

ა) $0,86$, ბ) $0,87$, გ) $0,88$, დ) $0,89$.

11.4.ერთი დღის განმავლობაში წყლის საშუალო დანახარჯი დასახლებულ პუნქტში შეადგენს
50000 ლიტრს. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვევიდან ალბათობა იმისა, რომ ამ პუნქტში მოცემულ დღეს წყლის დანახარჯი არ აღემატება 150 000 ლიტრს.

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{2}{3}$, გ) $\frac{1}{4}$, დ) $\frac{1}{2}$.

11.5. A ხდომილობის მოხდენის ალბათობა ცალკეულ ცდაში ტოლია $0,7$. ν_n-ით აღვნიშნოთ n-დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის ფარდობა n რიცხვთან. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ დამოუკიდებელ ცდათა მინიმალური რაოდენობა n, რომლისთვისაც $0,78$-ზე მეტი ალბათობით შესრულდება უტოლობა $|\nu_n - p| < 0,06$.

ა) 327, ბ) 427, გ) 527, დ) 627.

11.6. კამათლის 1200-ჯერ დამოუკიდებელი გაგორებისას ერთიანის მოსვლის რაოდენობა აღვნიშნოთ ξ-თი. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან $|\omega : \xi(\omega) \leq 800\}$ ხდომილობის ალბათობა.

ა) $0,74$, ბ) $0,75$, გ) $0,76$, დ) $0,77$.

11.7. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან კამათლის 10 000-ჯერ დამოუკიდებელი გაგორებისას ექვსიანის ფარდობითი სიხშირის $\frac{1}{6}$-დან არაუმეტეს $0,01$ სიდიდით გადახრის ალბათობა.

ა) $0,84$, ბ) $0,85$, გ) $0,86$, დ) $0,87$.

11.8. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან ქვემეხიდან 600 გასროლისას სამიზნის დაზიანებათა რიცხვის 360 რიცხვიდან არაუმეტეს 20-ით გადახრის ალბათობა, თუ ცნობილია რომ ქვემეხიდან ერთი გასროლისას სამიზნის დაზიანების ალბათობაა $0,6$.

ა) $0,63$, ბ) $0,64$, გ) $0,65$, დ) $0,66$.

11.9. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული ფუნთუშის წონა არ გადააჭარბებს 90 გრამს, თუ ცნობილია რომ ფუნთუშის საშუალო წონა 50 გრამის ტოლია.

ა) $\frac{1}{3}$, ბ) $\frac{4}{9}$, გ) $\frac{5}{9}$, დ) $\frac{2}{3}$.

11.10. ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით შეაფასეთ ქვემოდან ალბათობა იმისა, რომ ქვემეხიდან შემთხვევითი გასროლისას ჭურვის საწყისი სიჩქარე არ გადააჭარბებს 800 მ/წმ, თუ ცნობილია რომ ჭურვის საწყისი სიჩქარის საშუალო 500 მ/წმ -ის ტოლია.

ა) $\frac{3}{7}$, ბ) $\frac{3}{8}$, გ) $\frac{1}{3}$, დ) $\frac{3}{10}$.

§12. ზღვარითი თეორემები და მათი ზოგიერთი გამოყენება

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ არის ალბათური სივრცეა, ხოლო $(X_k)_{k\in N}$ არის ამავე სივრცეზე განსაზღვრულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

განსაზღვრება 1. *შემთხვევით სიდიდეთა $(X_k)_{k\in N}$ მიმდევრობას ეწოდება ალბათობით კრებადი რაიმე $a \in R$ რიცხვისაკენ, თუ ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის სრულდება პირობა:*

$$\lim_{k\to\infty} P(\{\omega : |X_k(\omega) - a| < \epsilon\}) = 1.$$

$(X_k)_{k\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა ალბათობით კრებადობა a რიცხვისაკენ აღინიშნება სიმბოლოთი $\lim_{k\to\infty} X_k \stackrel{p}{=} a$.

მართებულია შემდეგი

თეორემა 1 (ჩებიშევის თეორემა). *ვთქვათ, დამოუკიდებელ შემთხვევით X_k $(k \in N)$ სიდიდეთა დისპერსიები ერთობლივ შემოსაზღვრულია, ე.ი.*

$$(\exists c)(c \in R \to (\forall n)(n \in N \to DX_n < c)).$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \stackrel{p}{=} 0.$$

დამტკიცება. *შემთხვევით სიდიდეთა $a = 0$ რიცხვისაკენ ალბათობით კრებადობის განსაზღვრის ძალით, აუცილებელია და საკმარისი ვაჩვენოთ შემდეგი პირობის მართებულობა*

$$(\forall\epsilon)(\epsilon > 0 \to \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - \sum_{k=1}^{n} MX_k) - 0| < \epsilon\}) = 1).$$

შევნიშნოთ, რომ თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) - \sum_{k=1}^{n} MX_k),$$

მაშინ

$$MY_n = M\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k = 0,$$

$$DY_n = D(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k)) = D(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n^2}D(\sum_{k=1}^{n} X_k) \leq \frac{nc}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

ჩებიშევის უტოლობის ძალით გვაქვს

$$P(\{\omega : |Y_n(\omega) - MY_n| < \epsilon\}) \geq 1 - \frac{DY_n}{\epsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n\epsilon^2}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, მაშინ მივიღებთ

$$P(\{\omega : |Y_n(\omega) - MY_n| < \epsilon\}) \geq 1,$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \stackrel{p}{=} 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ თეორემა 1-ის შემდეგი შედეგი

თეორემა 2 (ბერნულის თეორემა). *ვთქვათ, $(Z_k)_{k\in N}$ არის p-პარამეტრიან ბერნულის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ*

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) \stackrel{p}{=} p.$$

დამტკიცება. *დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $(Z_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა აკმაყოფილებს თეორემა 1-ის პირობებს. ამიტომ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k - \sum_{k=1}^{n} MZ_k) \stackrel{p}{=} 0.$$

მაგრამ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} MZ_k) \stackrel{p}{=} p,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k - p\right) \overset{p}{=} 0,$$

რაც თავის მხრივ შემდეგი პირობის ექვივალენტურია

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k \overset{p}{=} p.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. *თუ f არის $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ ფუნქციათა $(Mf(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k))_{n\in N}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე $f(p)$ ფუნქციისაკენ, სადაც $(Z_k)_{k\in N}$ არის p-პარამეტრიან ბერნულის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.*

დამტკიცება. *ყოველი $\epsilon > 0$ რიცხვისათვის მართებულია შემდეგ უტოლობათა ჯაჭვი*

$$M|f(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k)) - f(p)| \le M(|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k) - f(p)|\cdot I_{\{\omega:|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k)-f(p)|\le\epsilon\}} +$$

$$+M(|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k)-f(p)|\cdot I_{\{\omega:|f(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Z_k)-f(p)|>\epsilon\}} \le \sup_{|x|\le\epsilon}|f(p+x)-f(p)|+o(n),$$

რაც ნათლად გვიჩვენებს დასამტკიცებელი დებულების მართებულობას.

შენიშვნა 1. *თუ f არის $[0,1]$ ინტერვალზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქცია, მაშინ*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right) = f(x)$$

ყოველი $x \in [0,1]$ რიცხვისათვის; თანაც ეს კრებადობა არის თანაბარი $[0,1]$ ინტერვალზე. უკანასკნელი თანაფარდობა არის ფუნქციათა

$$(Mf(\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} Z_k)))_{n\in N} = (\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k p^k(1-p)^{n-k})_{n\in N}$$

მიმდევრობის f ფუნქციისაკენ p-ს მიმართ $[0,1]$ ინტერვალზე თანაბარი კრებადობის სხვანაირი ჩაწერა. ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს ვეიერშტრასის [18]ცნობილი თეორემა უწყვეტი ფუნქციის პოლინომებით მიახლოების

[18]ვეიერშტრასი კარლ თეოდორი (*Weierstras Karl Theodor Wilhelm*) (31.10.1815, ოსტენფილდე - 19.2.1897, ბერლინი) - გერმანელი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის უცხოელი წევრ-კორესპონდენტი (1864) და უცხოელი საპატიო წევრი (1895). 1856 წლიდან ბერლინის უნივერსიტეტის პროფესორი. შრომები მათემატიკურ ანალიზში, ფუნქციათა თეორიაში, ვარიაციულ აღრიცხვაში, დიფერენციალურ გეომეტრიასა და წრფივ ალგებრაში.

შესახებ. ამასთან საჭირო პოლინომები აგებულია ცხადი სახით და მათ აქვთ შემდეგი სახე

$$\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \quad (n \in N).$$

ეს ბერშტეინის[19] *პოლინომებია. თეორემა 1-ის შედეგს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა.*

თეორემა 4 (დიდ რიცხვთა კანონი). *ვთქვათ,* $(X_k)_{k\in N}$ *არის ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან* $MX_k = a$ *და* $DX_k = \sigma^2 < \infty$*; მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა საშუალო არითმეტიკული ალბათობით კრებადია* a *რიცხვისაკენ, ე.ი.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{p}{=} a.$$

დამტკიცება. *შემთხვევით სიდიდეთა* $(X_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობა აკმაყოფილებს თეორემა 1-ის პირობებს, ამიტომ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \overset{p}{=} 0.$$

მაგრამ $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k = \frac{na}{n} = a$. *შევნიშნოთ, რომ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} MX_k) \overset{p}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{p}{=} 0.$$

უკანასკნელი ტოლობა ექვივალენტურია შემდეგი ტოლობის

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{p}{=} 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშვნა 2. *თუ* $(X_k)_{k\in N}$ *არის* $(0, \sigma^2)$- *პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, მაშინ*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \overset{p}{=} \sigma^2.$$

[19] ბერშტეინი სერგო ნატანის ძე (22.2(5,3).1880, ოდესა - 26.10.1968 მოსკოვი) - რუსი მათემატიკოსი, სსრკ მეცნიერებათა აკადემიის (1929) და უკრაინის სსრ მეცნიერებათა აკადემიის (1925) აკადემიკოსი, გერმანელ მათემატიკოსთა კავშირის წევრი (1929), ფრანგული მათემატიკური საზოგადოების წევრი (1944), ალჟირის უნივერსიტეტის (1945) საპატიო დოქტორი, ბულგარეთის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1945), პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1955).

შენიშვნა 3. *ვთქვათ, ყოველ ცდაში A ხდომილობის მოხდენის ალბათობაა p. ν_n-ით აღვნიშნოთ n დამოუკიდებელ ცდაში A ხდომილობის მოხდენათა რიცხვის ფარდობა n რიცხვთან (მას ეწოდება A ხდომილობის ფარდობითი სიხშირე n ცდაში). დიდ რიცხვთა კანონის გამოყენებით ადვილია იმის ჩვენება, რომ ყოველი დადებითი ϵ რიცხვისათვის სრულდება პირობა*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |\nu_n(\omega) - p| < \epsilon\}) = 1,$$

ე.ი.

$$\lim_{n\to n} \nu_n \stackrel{p}{=} p.$$

ტესტები

12.1. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის (a,b) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

1) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) $\frac{a+b}{2}$, ბ) $\frac{b-a}{2}$, გ) $\frac{a+b}{3}$, დ) $\frac{b-a}{3}$.

2) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \stackrel{p}{=} B,$$

სადაც B ტოლია

ა) $\frac{(a+b)^2}{2}$, ბ) $\frac{a^2+ab+b^2}{3}$, გ) $\frac{(a+b)^3}{3}$, დ) $\frac{(b-a)}{12}$.

12.2. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის $\lambda = 5$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა.

1) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k \stackrel{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) 3, ბ) 4, გ) 5, დ) 6;

2) მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \stackrel{p}{=} B,$$

სადაც B ტოლია

ა) 28, ბ) 29, გ) 30, დ) 31.

12.3. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის p პარამეტრიანი ბერნულის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ ყოველი მთელი არანულოვანი s რიცხვისათვის

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^s \overset{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) p, ბ) pq, გ) p^s, დ) q^s.

12.4. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის კანტორის წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \overset{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) $0,3$, ბ) $0,5$, გ) $0,6$, დ) $0,7$.

12.5. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის $q=0,3$ პარამეტრიანი გეომეტრიული წესით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \overset{p}{=} A,$$

სადაც A ტოლია

ა) $\frac{29}{49}$, ბ) $\frac{30}{49}$, გ) $\frac{31}{49}$, დ) $\frac{32}{49}$.

12.6. ფუნქციათა $(\sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n})^3 C_n^k x^k(1-x)^{n-k})_{n\in N}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე f ფუნქციისაკენ, სადაც $f(x)$ ტოლია

ა) x^2; ბ) x^3; გ) x^4; დ) x^5;

12.7. ფუნქციათა $(\sum_{k=0}^{n}\sin((\frac{k}{n})^2) C_n^k x^k(1-x)^{n-k})_{n\in N}$ მიმდევრობა თანაბრად კრებადია $[0,1]$ ინტერვალზე f ფუნქციისაკენ, სადაც ყოველი $x\in[0,1]$-სთვის $f(x)$ ტოლია

ა) $\sin(x^2)$, ბ) $\sin(x^3)$, გ) $\sin(x^4)$, დ) $\sin(x^4)$.

12.8. მოცემულია დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა $(\xi_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა. ξ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების კანონი მოცემულია ცხრილის საშუალებით

ξ_n	$-\sqrt{n+1}$	0	$\sqrt{n+1}$
P	$\frac{1}{n+1}$	$1-\frac{2}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$

.

მაშინ ასეთი მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება

ა) შეიძლება, ბ) არ შეიძლება.

12.9. ვთქვათ, $(\xi_k)_{k\in N}$ არის პუასონის კანონით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, ამასთან $M(\xi_k)=k$. მაშინ ასეთი მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება

ა) არ შეიძლება, ბ) შეიძლება.

12.10. მოცემულია $(\xi_k)_{k\in N}$ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, ამასთან, ξ_k $(k\in N)$ თანაბრად არის განაწილებული $[0;\sqrt{k}]$ ინტერვალზე. მაშინ ასეთი მიმდევრობის მიმართ ჩებიშევის თეორემის გამოყენება

ა) შეიძლება, ბ) არ შეიძლება.

§13. მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდი და მათი ზოგიერთი გამოყენება

განსაზღვრება 1. *ვთქვათ,* (Ω,F,P)*-ალბათური სივრცეა.* $\xi:\Omega\to R$ *შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი* Φ_ξ *ფუნქცია ეწოდება* $e^{it\xi}=\cos(t\xi)+i\sin(t\xi)$ *კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკურ ლოდინს, ე. ი.*

$$\Phi_\xi(t)=Me^{it\xi}\quad(t\in R).$$

ვთქვათ, ξ შემთხვევითი სიდიდე დისკრეტულია. ე. ი. მართებულია წარმოდგენა

$$\xi(\omega)=\sum_{k\in N}x_kI_{A_k}(\omega)\quad(\omega\in\Omega),$$

სადაც $(A_k)_{k\in N}$ არის თანაუკვეთ ხდომილობათა ისეთი ოჯახი, რომ $\bigcup_{k\in N}A_k=\Omega$ და $(x_k)_{k\in N}$ -ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობაა. ამ შემთხვევაში

$$\Phi_\xi(t)=Me^{it\xi}=\sum_{k\in n}e^{itx_k}P(A_k)\quad(t\in R).$$

იმ შემთხვევაში, როცა ξ შემთხვევითი სიდიდე აბსოლუტურად უწყვეტია განაწილების ფუნქციის f_ξ სიმკვრივით, ვღებულობთ

$$\Phi_\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f_\xi(x)dx\quad(t\in R).$$

როგორც ამ უკანასკნელი ფორმულიდან ჩანს, $\Phi_\xi(t)$ არის f_ξ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა. მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ მოცემულია f_ξ ფუნქციის ფურიეს [20] გარდაქმნა Φ_ξ, მაშინ გარკვეულ პირობებში შეიძლება f_ξ ფუნქციის აღდგენა Φ_ξ-ს საშუალებით. კერძოდ,

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\Phi_\xi(t)dt\ (x\in R).$$

[20] ფურიე ჟან ბატისტი ჟოზეფი (*Fourier Jean Baptiste Joseph*)(1.3. 1768, ოსერი-16. 5. 1830, პარიზი)-ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1817), პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1829). მისი მუშაობის ძირითად სფეროს წარმოადგენდა მათემატიკური ფიზიკა. მას ეკუთვნის ცვლადთა განცალებადობის მეთოდი (ფურიეს მეთოდი), ფურიეს მწკრივებისა და ფურიეს ინტეგრალის ცნებების შემოტანა.

აღნიშნულ თანაფარდობას ფურიეს შებრუნებული გარდაქმნა ეწოდება.

განვიხილოთ მახასიათებელი ფუნქციის თვისებები.

თეორემა 1. *ყოველი* $\xi : \Omega \to R$ *შემთხვევითი სიდიდისათვის*

$$\Phi_\xi(0) = 1.$$

დამტკიცება. *ვინაიდან* $\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi}$ $(t \in R)$, *ამიტომ*

$$\Phi_\xi(0) = M\ 1 = 1.$$

თეორემა 2. *ყოველი* ξ *შემთხვევითი სიდიდისათვის სრულდება პირობა*

$$(\forall t)(t \in R \to |\Phi_\xi(t)| \leq 1).$$

დამტკიცება. *შევნიშნოთ, რომ ყოველი* η *შემთხვევითი სიდიდისათვის მართებულია პირობა*

$$|M\eta| \leq M|\eta|.$$

ამიტომ

$$|\Phi_\xi(t)| = |Me^{it\xi}| \leq M|e^{it\xi}| = M1 = 1.$$

თეორემა 3. *ყოველი* ξ *შემთხვევითი სიდიდისათვის*

$$\Phi_\xi(-t) = \overline{\Phi_\xi(t)}.$$

დამტკიცება.

$$\Phi_\xi(-t) = M(e^{-it\xi}) = M(\cos(-t\xi) + i\sin(-t\xi)) = M(\cos(-t\xi)) + iM(\sin(-t\xi)) =$$

$$= M(\cos(t\xi)) - iM(\sin(t\xi)) = \overline{M(\cos(t\xi)) + iM(\sin(t\xi))} = \overline{Me^{it\xi}} = \overline{\Phi_\xi(t)}.$$

დაუმტკიცებლად მოგვყავს შემდეგი ორი დებულება.

თეორემა 4. ξ *შემთხვევითი სიდიდის მახასიათებელი ფუნქცია* $\Phi_\xi(t)$ *თანაბრად უწყვეტია ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.*

თეორემა 5 (ერთადერთობის თეორემა). *განაწილების ფუნქცია ცალსახად განისაზღვრება თავისი მახასიათებელი ფუნქციით.*

თეორემა 6. *თუ* ξ *და* η *შემთხვევით სიდიდეებს შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება (ე. ი.* $\xi(\omega) = a\eta(\omega) + b$ $(a \in R,\ b \in R, \omega \in \Omega)$*), მაშინ*

$$\Phi_\xi(t) = e^{itb}\Phi_\eta(at).$$

დამტკიცება. *მართლაც,*

$$\Phi_\xi(t) = \Phi_{a\eta+b}(t) = Me^{i(a\eta+b)t} = Me^{ibt}Me^{ia\eta t} = e^{itb}\Phi_\eta(at).$$

თეორემა 7. *ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდის ჯამის მახასიათებელი ფუნქცია უდრის შესაკრები სიდიდეების მახასიათებელი ფუნქციების ნამრავლს.*

დამტკიცება. *ვთქვათ,* ξ *და* η *დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია. მაშინ დამოუკიდებელია აგრეთვე* $e^{it\xi}$ *და* $e^{it\eta}$ *კომპლექსური შემთხვევითი სიდიდეებიც. ამიტომ მათემატიკური ლოდინის თვისების გამო ვღებულობთ*

$$\Phi_{\xi+\eta}(t) = Me^{it(\xi+\eta)} = Me^{it\xi}Me^{it\eta} = \Phi_\xi(t)\cdot\Phi_\eta(t).$$

თეორემა 7 უშვებს შემდეგ განზოგადებას.

თეორემა 8. *თუ* $(\xi_k)_{1\le k\le n}$ *არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, მაშინ*

$$\Phi_{\sum_{k=1}^n \xi_k}(t) = \prod_{k=1}^n \Phi_{\xi_k}(t) \quad (t\in R).$$

ვთქვათ, ξ *არის შემთხვევითი სიდიდე, ხოლო* $(\xi_k)_{k\in N}$ *შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა.*

განსაზღვრება 2. *შემთხვევით სიდიდეთა* $(\xi_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობას ეწოდება სუსტად კრებადი* ξ *შემთხვევითი სიდიდისაკენ, თუ* $(F_{\xi_n})_{n\in N}$ *მიმდევრობა კრებადია* F_ξ *ფუნქციისაკენ მისი უწყვეტობის ყოველ წერტილში.*

დაუმტკიცებლად მოგვყავს ალბათობის თეორიიდან შემდეგი ფუნდამენტური თეორემა.

თეორემა 9. *შემთხვევით სიდიდეთა* $(\xi_k)_{k\in N}$ *მიმდევრობა სუსტად კრებადია* ξ *შემთხვევითი სიდიდისაკენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მახასიათებელ ფუნქციათა* $(\Phi_{\xi_n})_{n\in N}$ *მიმდევრობა კრებადია* Φ_ξ *მახასიათებელი ფუნქციისაკენ.*

განვიხილოთ ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1. *ვთქვათ,* ξ *არის* (n,p)*-პარამეტრებიანი ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.*

$$P(\{\omega:\xi(\omega)=k\}) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (0\le k\le n).$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^n e^{itk}\cdot C_n^k p^k(1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it}p)^k (1-p)^{n-k} = [pe^{it} + (1-p)]^n = (pe^{it} + q)^n,\ q = 1-p.$$

მაგალითი 2. *ვთქვათ, ξ არის λ-პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.*

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, \cdots),$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk}}{k!} e^{-\ \lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda e^{it} - \lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

მაგალითი 3. *ვთქვათ, ξ არის $(a;b)$ ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.*

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{თუ } x \in [a,b], \\ 0, & \text{თუ } x \notin [a,b]. \end{cases}$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{1}{(b-a)it} e^{itx}\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{(b-a)it}(e^{itb} - e^{ita}).$$

მაგალითი 4. *ვთქვათ, ξ არის (a, σ^2)- პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.*

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in R).$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

მოვახდინოთ ჩასმა $z = \frac{x-a}{\sigma} - it\sigma$. *მაშინ*

$$\frac{x-a}{\sigma} = z + it\sigma,\ x = a + \sigma z + it\sigma^2,\ dx = \sigma dz.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ

$$\Phi_\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{it(a+z\sigma+it\sigma^2)-\frac{(z+it\sigma)^2}{2}}\sigma dz =$$

$$= e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \ (t \in R).$$

თუ გამოვიყენებთ ანალიზის კურსიდან კარგად ცნობილ ფაქტს, რომ

$$(\forall b)(b \in R \to \int_{-\infty-it\sigma}^{+\infty-it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{2\pi}),$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$\Phi_\xi(t) = e^{iat-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \ \ (t \in R).$$

შენიშვნა. $(0,1)$-პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი ξ სიდიდის მახასიათებელ Φ_ξ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$\Phi_\xi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \ \ (t \in R).$$

მაგალითი 5. ვთქვათ, ξ არის λ პარამეტრიანი მაჩვენებლიანი წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, ე. ი.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{თუ } x \geq 0, \\ 0, & \text{თუ } x < 0. \end{cases}$$

მაშინ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{itx-\lambda x}dx =$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}(e^{it}e^{-\lambda})^x dx = \lambda\int_0^{+\infty}(e^{it-\lambda})^x dx = \lambda\frac{(e^{it-\lambda})^x}{(it-\lambda)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-it}.$$

მაგალითი 6. ვთქვათ, ξ არის იგივურად c-ს ტოლი შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ

$$P(\{\omega : \xi(\omega) = c\}) = 1,$$

ამიტომ

$$\Phi_\xi(t) = Me^{it\xi} = Me^{itc} = e^{itc}.$$

მოვიყვანოთ მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდის ერთი გამოყენება.

თეორემა 10 *(ლინდებერგ [21] -ლევის [22] თეორემა). თუ* $(\xi_k)_{k\in N}$ *ერთნაირად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა, მაშინ*

$$\Big(\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M(\sum_{k=1}^n \xi_k)}{\sqrt{D\sum_{k=1}^n \xi_k}}\Big)_{n\in N}$$

მიმდევრობა სუსტად კრებადია $(0,1)$ *- პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, ე. ი.*

$$(\forall x)(x\in R \to \lim_{n\to\infty} P\big(\{\omega : \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M(\sum_{k=1}^n \xi_k)}{\sqrt{D\sum_{k=1}^n \xi_k}} < x\}\big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\big).$$

დამტკიცება. *დამტკიცება მოვიყვანოთ უწყვეტი ტიპის შემთხვევითი სიდიდეებისათვის. დავუშვათ* $m = M\xi_1,\ \sigma = \sqrt{D\xi_1}$. *მართებულია შემდეგ ტოლობათა ჯაჭვი*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - mn}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{\sum_{k=1}^n (\frac{\xi_k - m}{\sqrt{\sigma}})\frac{1}{\sqrt{n}}}(t) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\sum_{k=1}^n (\frac{\xi_k - m}{\sqrt{\sigma}})}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^n \Phi_{\frac{\xi_i - m}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\prod_{i=1}^n \Phi_{\frac{\xi_i - m}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\sum_{i=1}^n \ln \Phi_{\frac{\xi_i - m}{\sigma}}(\frac{t}{\sqrt{n}})}.$$

თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $\Phi(t) = \Phi_{\frac{\xi_i - m}{\sigma}}(t)$, *ხოლო* $\frac{\xi_i - m}{\sigma}$ *შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციის სიმკვრივეს აღვნიშნავთ* $f(t)$*-თი, მაშინ*

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx,$$

$$\Phi^{'}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{itx} f(x)dx,$$

$$\Phi^{''}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^2x^2e^{itx} f(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{itx} f(x)dx.$$

[21] ლინდებერგი (*Lindeberg J.W.*)- ფინელი მათემატიკოსი. მას ეკუთვნის აღნიშნული თეორემის ე.წ. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დამტკიცება.

[22] ლევი პოლ პიერი (*Levy Paul Pierre*)(15.9.1889, პარიზი, - 15.12.1971, იქვე)-ფრანგი მათემატიკოსი, პარიზის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1964), პარიზის პოლიტიკური სკოლის პროფესორი 1920 წლიდან. ძირითადი შრომები ალბათობის თეორიასა და შემთხვევით პროცესთა თეორიაში, ფუნქციონალურ ანალიზში, ფუნქციათა თეორიაში, მექანიკაში. ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დასამ- ტკიცებლად პირველმა გამოიყენა მახასიათებელ ფუნქციათა მეთოდი.

შევნიშნოთ, რომ

$$\Phi(0) = 1,$$

$$\Phi^{'}(0) = iM(\frac{\xi_i - m}{\sigma}) = 0,$$

$$\Phi^{''}(0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = -1.$$

მაკლორენის[23] ფორმულას პირველი სამი წევრით აქვს სახე

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \frac{\Phi^{'}(0)}{1!}t + \frac{\Phi^{"}(0)}{2!}t^2 + a(t)t^3,$$

სადაც $\lim_{t\to 0} a(t) = 0$. ამიტომ გვექნება

$$\Phi(\frac{t}{\sqrt{n}}) = 1 + 0 \cdot \frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + a(\frac{t}{\sqrt{n}}) \cdot \frac{t^3}{n\sqrt{n}}.$$

ანალიზის კურსიდან კარგადაა ცნობილი, რომ $\ln(1+o(n)) \approx o(n)$, როცა $o(n)$ უსასრულოდ მცირე მიმდევრობაა (ე. ი. $\lim_{n\to\infty} o(n) = 0$). ამიტომ საბოლოოდ ვღებულობთ

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k - mn}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+0\cdot\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n} + a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{n\sqrt{n}})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{n(-\frac{t^2}{2n} + a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{n\sqrt{n}})} = e^{\lim_{n\to\infty}(-\frac{t^2}{2} + a(\frac{t}{\sqrt{n}})\cdot\frac{t^3}{\sqrt{n}})} = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

რაც ასრულებს თეორემის დამტკიცების პროცესს.

განვიხილოთ შემდეგი

მაგალითი 7. *ვთქვათ, სრულდება პირობები:*

1) ξ_k არის k-ურ ცდაში გაზომვის შედეგად მიღებული მთვარის დიამეტრი ($k \in N$),

2) $a = M\xi_k$ ($k \in N$) არის მთვარის დიამეტრის ჭეშმარიტი მნიშვნელობა,

3) $D\xi_k = 1$ ($k \in N$),

4) გაზომვის ξ_k შედეგები წარმოადგენენ $(a, 1)$-პარამეტრებიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეებს.

§11-ში ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით იქნა დამტკიცებული, რომ $n_{\beta} = 2000$ არის ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - a| \leq 0,1\}) \geq 0,95.$$

[23]მაკლორენი კოლინი (*Maclaurin Colin*) (1698, კილმოდანი, არგაილი - 14.6.1746, ედინბურგი) - შოტლანდიელი მათემატიკოსი, ლონდონის სამეფო საზოგადოების წევრი (1719).

ამასთან, ჩებიშევის უტოლობის პირდაპირი გამოყენებით შეუძლებელია უტოლობის $n_{ჩ} = 2000$-ზე ნაკლები ამონახსნის პოვნა. იმ ფაქტის გათვალისწინებით, რომ $\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - na}{\sqrt{n}}$ არის $(0,1)$ - პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, გამოვითვალოთ ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი $n_{ც}$, რომლისთვისაც სრულდება იგივე უტოლობა. ვღებულობთ:

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - a| \leq 0,1\} = P(\{\omega : |\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - na}{n}| \leq 0,1\} =$$

$$= P(\{\omega : |\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - na}{\sqrt{n}}| \leq 0,1\sqrt{n}\} = 1 - 2\Phi(-0,1\sqrt{n}).$$

ცხადია, $n_{ც}$-ნატურალური რიცხვი უნდა შევარჩიოთ ისეთნაირად, რომ ის იყოს უმცირესი ამონახსნი შემდეგი უტოლობის

$$1 - 2\Phi(-0,1\sqrt{n}) \geq 0,95.$$

ვღებულობთ

$$\Phi(-0,1\sqrt{n}) \leq \frac{1-0,95}{2} \Leftrightarrow \Phi(-0,1\sqrt{n}) \leq 0,025 \Leftrightarrow$$

$$-0,1\sqrt{n} \leq \Phi^{-1}(0,025) \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 100(\Phi^{-1}(0,025))^2 \Leftrightarrow$$

$$n \geq 100(1,96)^2 \Leftrightarrow n \geq 383,16 \Leftrightarrow n \geq 384.$$

აქედან ვასკვნით, რომ $n_{ც} = 384$. ამგვარად, 384 არის ის უმცირესი ნატურალური რიცხვი, რომლისთვისაც სრულდება უტოლობა

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega) - a| \leq 0,1\} \geq 0,95.$$

ცხადია, რომ ნატურალური რიცხვი $n_{ც} = 384$ გაცილებით ნაკლებია ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით მიღებულ $n_{ჩ} = 2000$ რიცხვზე.

შენიშვნა 1. *თუ $(\xi_k)_{k\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, მაშინ "საკმაოდ დიდი n-ებისათვის" ξ_n შემთხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქცია F_{ξ_n} შეიძლება ჩაითვალოს ξ შემთხვევითი სიდიდის F_{ξ} განაწილების ფუნქციის ტოლად.*

ტესტები

13.1. $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$(\forall\omega)(\omega \in \Omega \to \xi_n(\omega) = C - \frac{1}{n}).$$

მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია ξ შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც ξ არის ტოლი (ალბათობით ერთი)

ა) $c-1$, ბ) c, გ) c^2, დ) $c+1$.

13.2. ყოველი $n \in N$ ნატურალური რიცხვისათვის ξ_n იყოს $\lambda + o(n)$ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, სადაც $\lambda > 0$ და $(o(n))_{n\in N}$ არის უსასრულოდ მცირე მიმდევრობა, მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია μ პარამეტრიანი პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც μ ტოლია

ა) λ, ბ) λ^2, გ) $\lambda(1+\lambda)$, დ) $\lambda^2(1+\lambda)^2$.

13.3. ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის (a_n, b_n) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ და $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია (c,d) ინტერვალზე თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც (c,d) ტოლია

ა) (a,b), ბ) $(\frac{b-a}{2}, \frac{a+b}{2})$, გ) $(a, \frac{a+b}{2})$, დ) $(\frac{a+b}{2}, b)$.

13.4. ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ამასთან ყოველი $k \in N$ რიცხვისათვის ξ_k არის $(\frac{1}{2^k}; \frac{1}{2^{2k}})$ პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ $(\sum_{k=1}^{n} \xi_k)_{n\in N}$ მიმდევრობა სუსტად კრებადია (m, σ^2) პარამეტრებიანი ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც (m, σ^2) ტოლია

ა) $(1,3)$, ბ) $(1,4)$, გ) $(1,5)$, დ) $(1,6)$.

13.5. (პუასონის თეორემა). ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის (n, p_n)-პარამეტრიან ბინომურად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. ვიგულისხმოთ, რომ არსებობს $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0$. მაშინ $(\xi_n)_{n\in N}$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა სუსტად კრებადია μ პარამეტრიანი პუასონის წესით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც

ა) $\lambda+1$, ბ) λ, გ) $\lambda-1)$, დ) λ^2.

13.6. ვთქვათ, $(\xi_n)_{n\in N}$ არის (a, σ^2)- პარამეტრიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა $(\frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n})_{n\in N}$ სუსტად კრებადია m-ის ტოლი (ალბათობით ერთი) შემთხვევითი სიდიდისაკენ, სადაც m ტოლია

ა) a, ბ) a^2, გ) a^3, დ) a^4.

13.7. ვთქვათ, $1 \le k \le n$. მაშინ (m_k, σ_k^2)- პარამეტრებიან ნორმალურად განაწილებულ დამოუკიდებელ ξ_k შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ განაწილებულია ნორმალურად პარამეტრებით (m, σ^2), სადაც (m, σ^2) ტოლია

ა) $(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k)$, ბ) $(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2)$,
გ) $(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^3)$, დ) $(\sum_{k=1}^{n} m_k, \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^4)$.

13.8. თუ ξ არის განაწილებული ნორმალურად პარამეტრებით (m, σ^2),

მაშინ $a\xi + b$ არის განაწილებული აგრეთვე ნორმალურად პარამეტრებით (c, d^2), სადაც (c, d^2) ტოლია

ა) $(b + am, a^2\sigma^2)$, ბ) $(b + am, a\sigma^2)$,
გ) $(b + am, a^2\sigma)$, დ) $(b + m, a\sigma^2)$.

13.9. ვთქვათ, $1 \le k \le n$. მაშინ λ_k-პარამეტრიან პუასონის კანონით განაწილებულ $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ შემთხვევით სიდიდეთა ჯამი $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ წარმოადგენს μ-პარამეტრიან პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს, სადაც μ ტოლია

ა) $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$, ბ) $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$,
გ) $\sum_{k=1}^{n} (1 - \lambda_k)$, დ) $\sum_{k=1}^{n} (1 + \lambda_k)$.

13.10. თუ $(\xi_k)_{1 \le k \le n}$ არის (n_k, p)-პარამეტრებიან ბინომური კანონით განაწილებულ დამოუკიდებელ შემთხვევით სიდიდეთა ოჯახი, მაშინ $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ არის (m, x)-პარამეტრებიანი ბინომური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდე, სადაც (m, x) ტოლია

ა) $(\sum_{k=1}^{n} {}_k, p)$, ბ) $(\sum_{k=1}^{n} {}_k, p^2)$,
გ) $(\sum_{k=1}^{n} {}^2_k, p^2)$, დ) $(\sum_{k=1}^{n} {}_k, p^3)$.

13.11. ξ_k არის k-ური სახის საქონელზე ერთი დღის განმავლობაში მოთხოვნათა რიცხვი, რომელიც წარმოადგენს λ_k პარამეტრიან პუასონის კანონით განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეს $(1 \le k \le n)$. ალბათობა იმისა, რომ ერთად ყველა ამ სახის საქონელზე მოთხოვნათა საერთო რიცხვი ერთი დღის განმავლობაში ტოლი იქნება 8-ის, იმ პირობით რომ $m = 10$, $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 = 0,3$, $\lambda_6 = \dots = \lambda_9 = 0,8$, $\lambda_{10} = 1,3$, ტოლია

ა) $0,345103$, ბ) $0,457778$, გ) $0,567788$, დ) $0,103258$.

13.12. ვთქვათ, ყოველ რეისზე ავტომანქანას საშუალოდ გადააქვს $m = 20$ ტ. ტვირთი. ვიგულისხმოთ, რომ საშუალო კვადრატული გადახრა $\sigma = 1$ ტონას. მაშინ

1) ალბათობა იმისა, რომ 100 რეისზე ავტომანქანის მიერ გადატანილი ტვირთის წონა, გამოსახული ტონებში, მოთავსებული იქნება $[1950; 2000]$ ინტერვალში, ტოლია

ა) $0,5$, ბ) $0,55$, გ) $0,555$, დ) $0,5555$;

2) სიდიდე, რომელსაც არ გადააჭარბებს 100 რეისზე გადატანილი ტვირთის წონა 0,95-ზე მეტი ალბათობით, ტოლია

ა) 20164, ბ) 20264, გ) 20364, დ) 20464.

13.13. ვაშლის საშუალო წონაა $m = 0,2$ კგ. საშუალო კვადრატული გადახრაა $\sigma = 0,02$ კგ. მაშინ

1) ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით არჩეული 49 ვაშლის წონა, გამოსახული კილოგრამებში, მოთავსებულია $[9,5; 10]$ ინტერვალში, ტოლია

ა) $0,44$; ბ) $0,88$; გ) $0,178$; დ) $0,356$;

2) სიდიდე, რომელსაც გადააჭარბებს შემთხვევით არღეული 100 ვაშლის წონა 0,95-ზე მეტი ალბათობით, ტოლია

ა) $16,672$, ბ) $17,672$, გ) $18,672$, დ) $19,672$.

13.14. ხარატის მიერ სტანდარტული დეტალის დამზადების ალბათობაა 0,64. ალბათობა იმისა, რომ

1) 100 დეტალიდან 70 იქნება სტანდარტული, ტოლია

ა) $0,6241$, ბ) $0,7241$, გ) $0,8241$, დ) $0,9241$;

2) 100 დეტალიდან სტანდარტულ დეტალთა რაოდენობა მოთავსებული იქნება [50,65] ინტერვალში, ტოლია

ა) $0,1108$, ბ) $0,1308$, გ) $0,1508$, დ) $0,1708$.

13.15. ქარხანამ ბაზაში გაგზავნა 15000 ვარგისი ნაწარმი. ალბათობა იმისა, რომ ნაწარმი გაფუჭდება გზაში, არის 0,0002. მაშინ ალბათობა იმისა, რომ

1) ბაზაში მოიტანენ 3 ცალ უვარგის ნაწარმს, ტოლია

ა) $0,094042$, ბ) $0,114042$, გ) $0,134042$, დ) $0,154042$;

2) ბაზაში მოტანილ უვარგის ნაწარმთა რიცხვი მოთავსებული იქნება [2,4] ინტერვალში, ტოლია

ა) $0,414114$, ბ) $0,515115$, გ) $0,616116$, დ) $0,717117$.

§14. მარკოვის ჯაჭვები

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ალბათური სივრცეა. პირობითად ვისაუბროთ რაიმე ფიზიკურ სისტემაზე, რომელიც ყოველი ნაბიჯის შემდგომ იცვლის თავის ფაზურ მდგომარეობას. ვიგულისხმოთ, რომ გვაქვს სასრულო ან უსასრულო თვლადი რაოდენობა განსხვავებული ფაზური მდგომარეობებისა $\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots$. აღვნიშნოთ $\xi_n(\omega)$-თი სისტემის მდგომარეობა n ნაბიჯის შემდგომ $(\omega \in \Omega)$. ცხადია, რომ თანამიმდევრულ გადასვლათა ჯაჭვი

$$\xi_0(\omega) \to \xi_1(\omega) \to \cdots \quad (\omega \in \Omega)$$

დამოკიდებულია შემთხვევითობის ფაქტორზე. ვიგულისხმოთ, რომ დაცულია შემდეგი კანონზომიერება: თუ რომელიმე n-ურ ნაბიჯზე სისტემა იმყოფება ϵ_i მდგომარეობაში, მაშინ წინა მდგომარეობისაგან დამოუკიდებლად ის გადადის P_{ij}-ს ტოლი ალბათობით ϵ_j მდგომარეობაში, ე. ი.

$$P_{ij} = P(\{\omega : \xi_{n+1}(\omega) = \epsilon_j \, | \xi_n(\omega) = \epsilon_i\}), i, j = 1, 2, \cdots.$$

ზემოთ აღწერილ მოდელს ეწოდება მარკოვის [24] ერთგვაროვანი ჯაჭვი, ხოლო P_{ij}-ს ალბათობას ეწოდება ამ ჯაჭვის გადასვლის ალბათობა. გარდა ამისა მოიცემა საწყისი მდგომარეობის განაწილებები, ე.ი.

$$P_i^{(0)} = P(\{\omega : \xi_0(\omega) = \epsilon_i\}) \;\; i = 1, 2, \cdots.$$

ბუნებრივია ისმის შემდეგი კითხვა: რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ სისტემა n ნაბიჯის შემდგომ აღმოჩნდება ϵ_i-მდგომარეობაში? აღვნიშნოთ ეს ალბათობა $P_j(n)$-ით. ე. ი.

$$P_j(n) = P(\{\omega : \xi_n(\omega) = \epsilon_j\}).$$

[24] მარკოვი ანდრია ანდრიას ძე (2(14).1856, რიაზანი-20.7.1922, პეტროგრადი) - რუსი მათემატიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის წევრი (1890).

შევნიშნოთ, რომ $n-1$ ნაბიჯის შემდეგ სისტემა აუცილებლად იქნება ϵ_k $(k=1,2,\cdots)$ მდგომარეობიდან ერთ-ერთში. ამასთან ϵ_k მდგომარეობაში ის აღმოჩნდება $P_k(n-1)$-ის ტოლი ალბათობით. ალბათობა იმისა, რომ ფიზიკური სისტემა n-ნაბიჯის შემდგომ აღმოჩნდება ϵ_j მდგომარეობაში იმ პირობით, რომ $n-1$ ნაბიჯის შემდგომ ის იმყოფებოდა ϵ_k მდგომარეობაში, ტოლია P_{kj} გადასვლის ალბათობისა ϵ_k-დან ϵ_j-ში. სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით ვღებულობთ

$$P(\{\omega:\xi_n(\omega)=\epsilon_j\})=$$

$$\sum_{k\in N}P(\{\omega:\xi_n(\omega)=\epsilon_j\}|\{\omega:\xi_{n-1}(\omega)=\epsilon_k\})\cdot P(\{\omega:\xi_{n-1}(\omega)=\epsilon_k\}).$$

ეს ტოლობა გვაძლევს შემდეგ რეკურენტულ ფორმულას $P_j(n)$ ალბათობისათვის

$$P_j(0)=P_j^{(0)},\quad P_j(n)=\sum_{k\in N}P_k(n-1)\cdot P_{kj}\quad (j,n=1,2,\cdots).$$

იმ შემთხვევაში, როცა სისტემა საწყისი მომენტისათვის იმყოფება ϵ_i ფაზურ მდგომარეობაში, საწყის განაწილებას აქვს სახე

$$P_i^{(0)}=1,\quad P_k^{(0)}=0,\quad k\neq i,$$

ხოლო $P_j(n)$ ალბათობა ემთხვევა $P_{ij}(n)$ ალბათობას, რომელიც ტოლია ϵ_i მდგომარეობიდან n ნაბიჯის შემდგომ ϵ_j მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობისა, ე. ი.

$$P_{ij}(n)=P(\{\omega:\xi_n(\omega)=\epsilon_j|\{\omega:\xi_0(\omega)=\epsilon_i\}\}\quad i,j=1,2,\cdots.$$

$P_i^{(0)}=1,\ \ P_k^{(0)}=0\ (k\neq i)$ საწყისი განაწილების შემთხვევაში ვღებულობთ

$$P_{ij}=\begin{cases}1, & \text{თუ }\ i=j\\ 0, & \text{თუ }\ i\neq j\end{cases},$$

$$P_{ij}(n)=\sum_{k\in N}P_{ik}(n-1)\cdot P_{kj}\quad (n=1,2,\cdots).$$

თუ შემოვიღებთ აღნისვნას

$$\mathcal{P}(n)=(P_{ij}(n))_{i,j\in N}\ ,$$

მაშინ

$$\mathcal{P}(0)=I,\ \mathcal{P}(1)=\mathcal{P},\ \mathcal{P}(2)=\mathcal{P}(1)\cdot\mathcal{P}=\mathcal{P}^2,\cdots,$$

სადაც I უსასრულო ერთეულოვანი მატრიცაა, $\mathcal{P}$ გადასვლის ალბათობათა მატრიცაა. ცხადია, რომ

$$\mathcal{P}(n)=\mathcal{P}^n\quad (n=1,2,\cdots).$$

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1(შემთხვევითი ხეტიალი). *განვიხილოთ შემთხვევითი ხეტიალი, რომელიც უკავშირდება ბერნულის დამოუკიდებელ ცდათა უსასრულო რაოდენობას, როცა წერტილი "ხეტიალობს" რიცხვითი ღერძის მთელმნიშვნელობიან წერტილებში, ისე, რომ თუ ის იმყოფება i-ურ მდგომარეობაში, მაშინ შემდგომ ნაბიჯზე მისი $i+1$ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა არის p-ს ტოლი $(0<p<1)$, ხოლო $i-1$ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა არის $q=1-p$-ს ტოლი. თუ აღვნიშნავთ ξ_n-ით ნაწილაკის მდგომარეობას n ნაბიჯის შემდგომ, მაშინ მიმდევრობა*

$$\xi_0(\omega)\to\xi_1(\omega)\to\cdots\quad(\omega\in\Omega)$$

იქნება მარკოვის ჯაჭვი, რომლის გადასვლის ალბათობებს აქვს შემდეგი სახე

$$P_{ij}=\begin{cases} p\,, & \text{როცა}\ \ j=i+1\\ q\,, & \text{როცა}\ \ j=i-1\end{cases}\quad .$$

ამ მოდელში სისტემას გააჩნია უსასრულო თვლადი რაოდენობა განსხვავებული ფაზური მდგომარეობისა.

მაგალითი 2. *განვიხილოთ ფიზიკური სისტემა, რომელსაც გააჩნია სამი სხვადასხვა მდგომარეობა $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$. $\mathcal{P}$-ერთ ნაბიჯზე გადასვლის ალბათობების მატრიცას ჰქონდეს შემდეგი სახე*

$$\mathcal{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1. \end{pmatrix}.$$

მოცემულ მაგალითში ϵ_3 მდგომარეობა ხასიათდება იმით, რომ თუ სისტემა მოხვდა ამ მდგომარეობაში, იგი ერთის ტოლი ალბათობით რჩება ამავე მდგომარეობაში. ასეთ მდგომარეობას მშთანთქავი მდგომარეობა ეწოდება. თუ მდგომარეობა ისეთია, რომ ფიზიკური სისტემა ერთის ტოლი ალბათობით გამოვა ამ მდგომარეობიდან, მაშინ მას ამრეკლავი მდგომარეობა ეწოდება. თუ ϵ_i მდგომარეობა მშთანთქავია, მაშინ $P_{ii}=1$, ხოლო თუ ϵ_i მდგომარეობა ამრეკლავია, მაშინ $P_{ii}=0$.

თუ ცნობილია, რომ დაკვირვების წინ სისტემა იმყოფება რომელიმე ϵ_i მდგომარეობაში $(1\le i\le n)$, მაშინ m ნაბიჯის შემდეგ $\mathcal{P}(m)$ მატრიცის საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ სისტემის ნებისმიერ ϵ_j მდგომარეობაში m ნაბიჯის შემდეგ მოხვედრის $P_{ij}(m)$ ალბათობა. იმ შემთხვევაში, როცა სისტემის საწყისი მდგომარეობა არ არის ცნობილი, მაგრამ მოცემულია $P_i^{(0)}$ ალბათობები იმისა, რომ სისტემა საწყის მომენტში იმყოფება i-ურ

მდგომარეობაში, მაშინ სრული ალბათობის ფორმულის გამოყენებით შეგვიძლია გამოვითვალოთ m ნაბიჯის შემდეგ სისტემის ნებისმიერ j-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის $P_j(m)$ ალბათობა შემდეგი ფორმულით

$$P_j(m) = \sum_{k=1}^{n} P_k^{(0)} \cdot P_{kj}(m).$$

სტრიქონ-ვექტორს

$$P^{(0)} = (P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, \cdots, P_n^{(0)})$$

ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის საწყისი განაწილების ვექტორი, ხოლო $P_i^{(m)}$ $(1 \leq i \leq n)$ ალბათობებისაგან შედგენილ სტრიქონ-ვექტორს

$$\mathcal{P}^{(m)} = (P_1^{(m)}, P_2^{(m)}, \cdots, P_n^{(m)})$$

ეწოდება მარკოვის ჯაჭვის განაწილების ვექტორი m ნაბიჯის შემდეგ. ამ აღნიშვნებში ვღებულობთ

$$\mathcal{P}^{(m)} = \mathcal{P}^{(0)} \cdot \mathcal{P}(m)$$

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ მარკოვის თეორემა ზღვარითი ალბათობების შესახებ.

თეორემა 1. *ვთქვათ, $(\epsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობებია. თუ $m > 0$ რიცხვისათვის მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა $\mathcal{P}^{(m)}$ მატრიცის ყოველი P_{ij} ელემენტი დადებითია, მაშინ იარსებებს მუდმივ რიცხვთა ისეთი $(q_i)_{1\leq i\leq n}$ მიმდევრობა, რომ ადგილი ექნება შემდეგ თანაფარდობებს*

$$(\forall i)(1 \leq i \leq n \rightarrow \lim_{m\rightarrow\infty} P_{ij}(m) = q_j) \ \ (1 \leq j \leq n).$$

q_j $(1 \leq j \leq n)$ რიცხვები შეგვიძლია მივიჩნიოთ სისტემის j-ურ მდგომარეობაში მოხვედრის ალბათობად, როცა m საკმაოდ დიდია.

ტესტები

14.1. მოცემულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი $(0,2;\ 0,5;\ 0,3)$. *ორი ნაბიჯის შემდეგ სისტემის განაწილების ვექტორი ტოლია*

ა) $(0,125; 0,475; 0,4)$, *ბ)* $(0,225; 0,475; 0,3)$,
გ) $(0,025; 0,575; 0,4)$, *დ)* $(0,125; 0,375; 0,5)$.

14.2. მოცემულია მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

2-ბიჯიანი გადასვლის $\mathcal{P}(2)$ *მატრიცას აქვს სახე*

ა)

$$\begin{pmatrix} 0,25 & 0,15 & 0,6 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix},$$

ბ)

$$\begin{pmatrix} 0,33 & 0,21 & 0,46 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,24 & 0,13 & 0,33 \end{pmatrix}.$$

14.3. მოცემულია მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

მე-2 მდგომარეობიდან მე-3 მდგომარეობაში 3 ნაბიჯის შემდგომ გადასვლის ალბათობა $P_{23}(3)$ *ტოლია*

ა) $0,125$, *ბ)* $0,225$, *გ)* $0,54$, *დ)* $0,375$.

14.4. მოცემულია მარკოვის ერთგვაროვანი ჯაჭვის გადასვლის ალბათობათა მატრიცა

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

და საწყის ალბათობათა ვექტორი $(0,2;\ 0,8)$. *ცნობილია, რომ საწყისი მდგომარეობიდან* ϵ_i *მდგომარეობაში 2 ნაბიჯის შემდგომ მოხვედრის ალბათობაა* ***0,128***. *მაშინ* i *ტოლია*

ა) 1, *ბ)* 2.

§15. ბროუნის მოძრაობის პროცესი

განვიხილოთ მცირე ნაწილაკი, რომელიც მოთავსებულია ერთგვაროვან სითხეში. ნაწილაკი განიცდის ქაოსურ შეჯახებას სითხის მოლეკულებთან, რის შედეგადაც ის იმყოფება უწყვეტ მოუწესრიგებელ მოძრაობაში. ამ პროცესის დისკრეტულ ანალოგს წარმოადგენს შემთხვევითი ხეტიალის შემდეგი მოდელი. ნაწილაკი იცვლის თავის მდგომარეობას მხოლოდ დროის დისკრეტულ Δt*-ს ჯერად მომენტებში* $(\Delta t > 0)$. *მდგომარეობის ცვლილება წარმოებს იმგვარად, რომ თუ ნაწილაკი იმყოფება* x *წერტილში, მაშინ წინა ყოფაქცევისაგან დამოუკიდებლად ის გადადის ტოლი ალბათობებით მეზობელი* $x + \Delta x$ *და* $x - \Delta x$ *წერტილებიდან ერთ-ერთში. ამასთან*

წანაცვლება Δx ერთი და იგივეა ყველა x წერტილისათვის (აქ საუბარია მოძრავი ნაწილაკის ერთ-ერთ კოორდინატზე, ანუ სხვანაირად, ერთგანზომილებიან შემთხვევით ხეტიალზე). ზღვარში, როცა გარკვეული წესით $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, მიიღება უწყვეტი შემთხვევითი ხეტიალი, რომელიც დამახასიათებელია ბროუნის[25] მოძრაობის ფიზიკური პროცესისათვის.

აღვნიშნოთ $\xi_t(\omega)$-თი ბროუნის ნაწილაკის მდგომარეობა დროის t მომენტისათვის. ვთქვათ, დროის საწყისი $t=0$ მომენტისათვის ნაწილაკი იმყოფება $x=0$ მდგომარეობაში. დისკრეტული ხეტიალის შემთხვევაში t დროის განმავლობაში ის აწარმოებს $n=\frac{t}{\Delta t}$ ნაბიჯს. თუ აღვნიშნავთ $S_n(\omega)$-თი Δx-ით წანაცვლებათა რაოდენობას დადებითი მიმართულებით, მაშინ საერთო წანაცვლება დადებითი მიმართულებით შეადგენს $S_n(\omega)\cdot\Delta x$, ხოლო უარყოფითი მიმართულებით კი $(n-S_n(\omega))\cdot\Delta x$. ამგვარად, საერთო წანაცვლება $\xi_t(\omega)$ $t=n\Delta t$ დროის განმავლობაში დაკავშირებულია $S_n(\omega)$ რიცხვთან შემდეგი ტოლობით

$$\xi_t(\omega)=[S_n(\omega)\Delta x-(n-S_n(\omega))\Delta x]=(2S_n(\omega)-n)\Delta x.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\xi_0(\omega)=0$, მაშინ

$$\xi_t(\omega)=(\xi_s(\omega)-\xi_0(\omega))+(\xi_t(\omega)-\xi_s(\omega))$$

ყოველი s-სათვის, $0\le s\le t$. ცხადია, რომ აღწერილ მოდელში შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_s-\xi_0$ და $\xi_t-\xi_s$ არიან დამოუკიდებლები. ამასთან $\xi_t-\xi_s$ ნაზრდის განაწილება ზუსტად იგივეა, რაც $\xi_{t-s}-\xi_0$-ისა. ამიტომ $\sigma^2(t)=D\xi_t$ აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$\sigma^2(t)=\sigma^2(s)+\sigma^2(t-s)\quad(0\le s\le t).$$

აქედან ჩანს, რომ $\sigma^2(t)$, როგორც t-ს ფუნქცია, t-ს ზრდასთან ერთად იცვლება წრფივად, რის გამო იარსებებს ისეთი σ^2, რომ

$$D\xi_t=\sigma^2\cdot t.$$

σ^2 კოეფიციენტს ეწოდება დიფუზიის კოეფიციენტი. მეორე მხრივ, ადვილი მისახვედრია, რომ წანაცვლების დისპერსია t დროის განმავლობაში (ანუ სხვანაირად, $n=\frac{t}{\Delta t}$ ნაბიჯის შემდეგ) არის $D\xi_t=(\Delta x)^2\cdot\frac{t}{\Delta t}$. საბოლოოდ ვღებულობთ შემდეგ თანაფარდობას Δx და Δt სიდიდეებს შორის

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}=\sigma^2.$$

ნაწილაკის მიერ მოხდენილი გადასვლები არიან ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელი და ამიტომ ისინი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ბერნულის

[25]ბროუნი რობერტი (*Brown Robert*) (21.12.1773, მონტროზი - 10.6.1858, ლონდონი) - ინგლისელი ბოტანიკოსი, პეტერბურგის მეცნიერებათა აკადემიის საპატიო წევრი (1827). აღმოაჩინა ე.წ. ბროუნის მოძრაობა, რომელიც ალბათობის თეორიაში ცნობილია როგორც ვინერის პროცესი.

ცდა "წარმატების" $p=\frac{1}{2}$ ალბათობით. მაშინ $S_n(\omega)$ ნაბიჯთა რაოდენობა დადებითი მიმართულებით იქნება "წარმატებათა" რიცხვის ტოლი ბერნულის n დამოუკიდებელ ცდაში. ამასთან დროის t მომენტისათვის ნაწილაკის $\xi_t(\omega)$ მდგომარეობა ნორმირებულ $S_n^*(\omega)=\frac{1}{\sqrt{n}}(2S_n(\omega)-n)$ შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული იქნება შემდეგნაირად

$$\xi_t(\omega)=S_n^*(\omega)\sqrt{n}\Delta x=S_n^*(\omega)\sqrt{t}\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}}=S_n^*(\omega)\sigma\sqrt{t}.$$

ლინდენბერგ-ლევის თეორემის გამოყენებით ვღებულობთ(იხ. §13, თეორემა 10), რომ $\xi_t(\omega)$ შემ- თხვევითი სიდიდის განაწილების ფუნქციას ბროუნის მოძრაობის ზღვრული პროცესის დროს აქვს შემდეგი სახე

$$P(\{\omega : x_1 \le \frac{\xi_t(\omega)}{\sigma\sqrt{t}} \le x_2\}) = \lim_{\Delta t\to 0} P(\{\omega : x_1 \le S_n^*(\omega) \le x_2\}) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : x_1 \le \frac{S_n(\omega)-np}{\sqrt{npq}} \le x_2\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

სადაც $p=q=\frac{1}{2}$.

ტესტები

15.1. საქონლის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს $\sigma^2=1$ დიფუზიის კოეფიციენტით. $t=0$ მომენტისათვის საქონლის ფასი იყო 9-ერთეულის ტოლი. ალბათობა იმისა, რომ საქონლის ფასი $t=9$ მომენტისათვის არ მოიმატებს, ტოლია
ა) $0,776655$, ბ) $0,996655$, გ) $0,556655$, დ) $0,336655$.

15.2. ბაზარზე ფერადი ტელევიზორის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს დიფუზიის $\sigma^2=1$ (ლარი /წთ.) კოეფიციენტით. დროის $t=0$ მომენტისათვის საქონლის ფასი შეადგენდა 200 ლარს. ალბათობა იმისა, რომ დროის $t=6$სთ. 40წთ. მომენტისათვის ტელევიზორის ფასი იქნება:
1) 190 ლარზე ნაკლები, ტოლია
ა) $0,3064$, ბ) $0,3164$, გ) $0,3264$, დ) $0,3364$;
2) 210 ლარზე მეტი, ტოლია
ა) $0,2864$, ბ) $0,3264$, გ) $0,3464$, დ) $0,3664$;

3) [185 ლარი, 205 ლარი] შუალედში, ტოლია
ა) $0,3027$, ბ) $0,3227$, გ) $0,3527$, დ) $0,3727$.

15.3. ბირჟაზე ფასიანი ქაღალდის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს დიფუზიის $\sigma^2=1$ კოეფიციენტით. ფირმამ დროის $t=0$ მომენტისათვის 3000 ლარად შეიძინა A სახის ფასიანი ქაღალდი. ალბათობა იმისა, რომ

1) დროის $t = 250000$ *მომენტისათვის ფირმის მიერ გაყიდული* A *სახის ფასიანი ქაღალდისაგან ამონაგები შეადგენს 300 ლარზე მეტ თანხას, ტოლია*

ა) 0, *ბ)* $0,1$, *გ)* $0,2$, *დ)* $0,3$;

2) დროის $t = 900$ *მომენტისათვის ფირმის მიერ* A *სახის ფასიანი ქაღალდის გაყიდვით მიყენებული ზარალი გადააჭარბებს 15 ლარს, ტოლია*

ა) 0, *ბ)* 1, *გ)* $0,3$, *დ)* $0,6$.

15.4. B *ტიპის საქონლის ფასის ცვლილება წარმოადგენს ბროუნის მოძრაობის პროცესს დიფუზიის* $\sigma^2 = 1$ *კოეფიციენტით. დროის* $t = 0$ *მომენტისათვის საქონლის ფასი შეადგენდა 50 ლარს. მომხმარებელი დაინტერესებულია იყიდოს ეს ნაწარმი 55 ლარის ფარგლებში. მაღაზია წყვეტს* B *ტიპის საქონლის გაყიდვას, თუ მოხდა ფასის დაცემა 41 ლარზე დაბლა. ალბათობა იმისა, რომ* $t = 1\frac{2}{3}$ *სთ. მომენტისათვის მაღაზიაში ყოფნისას მომხმარებელი შეიძენს* B *ტიპის პროდუქციას, ტოლია*

ა) $0,2287$, *ბ)* $0,3387$, *გ)* $0,4487$, *დ)* $0,5587$.

ცხრილი 1

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad \phi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

ნორმალური განაწილების ფუნქცია და ნორმალური განაწილების სიმკვრივე

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000	0,34	0,3765	0,6331	0,68	0,3166	0,7517
01	3989	5040	35	3752	6368	69	3144	7549
02	3988	5080	36	3739	6406	70	3123	7580
03	3988	5120	37	3725	6443	71	3101	7611
04	3986	5160	38	3712	6480	72	3079	7642
05	3984	5199	39	3697	6517	73	3056	7673
06	3982	5239	40	3683	6557	74	3034	7703
07	3980	5279	41	3668	6591	75	3011	7734
08	3977	5319	42	3653	6628	76	2989	7764
09	3973	5359	43	3637	6664	77	2966	7794
10	3970	5398	44	3621	6700	78	2943	7823
11	3965	5438	45	3605	6736	79	2920	7852
12	3961	5478	46	3589	6772	80	2897	7881
13	3956	5517	47	3572	6808	81	2874	7910
14	3951	5557	48	3555	6844	82	2850	7939
15	3945	5596	49	3538	6879	83	2827	7967
16	3939	5636	50	3521	6915	84	2803	7995
17	3932	5675	51	3503	6950	85	2780	8023
18	3925	5714	52	3484	6985	86	2756	8051
19	3918	5753	53	3467	7016	87	2732	8078
20	3910	5793	54	3448	7054	88	2709	8106
21	3902	5832	55	3429	7088	89	2685	8133
22	3894	5871	56	3410	7123	90	2661	8159
23	3885	5910	57	3391	7157	91	2637	8186
24	3876	5948	58	3372	7190	92	2613	8212
25	3867	5987	59	3352	7224	93	2589	8238
26	3357	6026	60	3332	7257	94	2565	8264
27	3847	6064	61	3312	7291	95	2541	8289
28	3836	6103	62	3292	7324	96	2510	8315
29	3825	6141	63	3271	7357	97	2492	8340
30	3814	6179	64	3251	7389	98	2468	8365
31	3802	6217	65	3230	7422	99	2444	8389
32	3790	6265	66	3207	7454	1,00	2420	8413
33	3778	6293	67	3187	7486	1,01	2396	8438

ცხრილი 1–ის გაგრძელება

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
1,02	0,2371	0,8461	1,42	0,1456	0,9222	1,82	0,0761	0,9656
03	2347	8485	43	1435	9236	83	0748	9664
04	2323	8508	44	1415	9251	84	0734	9671
05	2299	8531	45	1394	9265	85	0721	9678
06	2275	8554	46	1374	9279	86	0707	9686
07	2251	8577	47	1354	9292	87	0694	9693
08	2227	8599	48	1334	9306	88	0681	9699
09	2203	8621	49	1315	9319	89	0669	9706
10	2179	8648	50	1295	9332	90	0656	9713
11	2155	8665	51	1276	9345	91	0644	9719
12	2131	8686	52	1257	9357	92	0632	9729
13	2107	8708	53	1238	9370	93	0620	9732
14	2083	8729	54	1219	9382	94	0608	9738
15	2059	8749	55	1200	9394	95	0596	9744
16	2036	8770	56	1182	9406	96	0584	9750
17	2012	9790	57	1163	9418	97	0573	9756
18	1989	8810	58	1145	9429	98	0562	9761
19	1965	8820	59	1127	9441	99	0551	9767
20	1942	8849	60	1109	9452	2,00	0540	9772
21	1919	8869	61	1092	9463	02	0519	9783
22	1895	8888	62	1074	9474	04	0498	9793
23	1872	8907	63	1057	9484	06	0478	9803
24	1849	8925	64	1040	9495	08	0459	9812
25	1826	8944	65	1023	9505	10	0440	9821
26	1804	8962	66	1006	9515	12	0422	9830
27	1881	8980	67	0989	9525	14	0404	9838
28	1858	8997	68	0973	9535	16	0387	9846
29	1836	9015	69	0957	9545	18	0371	9854
30	1714	9032	70	0940	9554	20	0355	9861
31	1691	9049	71	0925	9564	22	0339	9868
32	1669	9066	72	0909	9573	24	0325	9868
33	1647	9082	73	0893	9583	26	0310	9881
34	1626	9099	74	0878	9591	28	0297	9887
35	1604	9115	75	0863	9599	30	0283	9893
36	1582	9131	76	0848	9608	32	0270	9898
37	1561	9147	77	0833	9616	34	0258	9904
38	1539	9162	78	0818	9625	36	0246	9909
39	1518	9177	79	0804	9633	38	0235	9913
40	1457	9192	80	0790	9641	40	0224	9918
41	1476	9207	81	0775	9649	42	0213	9922

ცხრილი 1–ის გაგრძელება

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
2,44	0,0203	0,9927	2,72	0,0099	0,9967	3,00	0,0043	0,99655
46	0194	9931	74	0093	9969	10	0110	99903
48	0184	9934	76	0088	9971	20	0104	99931
50	0175	9938	78	0084	9973	30	0099	99951
52	0167	9941	80	0079	9974	40	0093	99966
54	0158	9945	82	0075	9976	50	0088	99976
56	0151	9948	84	0071	9977	60	0084	99984
58	0143	9951	86	0067	9979	70	00042	99989
60	0136	9953	88	0063	9980	80	00029	99993
62	0129	9956	90	0060	9981	90	00020	99995
64	0122	9959	92	0056	9982	4,00	00013	99996
66	0116	9961	94	0053	9984	4,50	00001	99999
68	0110	9963	96	0050	9985	5,00	00000	99999
70	0104	9965	98	0047	9986			

ცხრილი 1–ის დანართი

ცხრილი 1 შეიცავს ნორმალური განაწილების ϕ სიმკვრივისა და Φ ფუნქციის მნიშვნელობებს x არგუმენტის მნიშვნელობებისათვის [0;5] არიდან. მართებულია შემდეგი ფორმულები:

$$\phi(x)=\begin{cases} 0, & \text{თუ } x>5;\\ \phi(x), & \text{თუ } x\in[0;5]\ (\phi(x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან});\\ \Phi(-x), & \text{თუ } x\in[-5;0[\ (\phi(-x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან});\\ 0, & \text{თუ } x<-5.\end{cases}$$

$$\Phi(x)=\begin{cases} 1, & \text{თუ } x>5;\\ \Phi(x), & \text{თუ } x\in[0;5]\ (\Phi(x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან});\\ 1-\Phi(-x), & \text{თუ } x\in[-5;0[\ (\Phi(-x)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან});\\ 0, & \text{თუ } x<-5.\end{cases}$$

ნორმალური განაწილების ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია Φ^{-1} მოიცემა შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$\Phi^{-1}(a)=\begin{cases} \Phi^{-1}(a), & \text{თუ } a\in[0,5;1]\ (\Phi^{-1}(a)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან});\\ -\Phi^{-1}(1-a), & \text{თუ } a\in]0;0,5[\ (\Phi^{-1}(1-a)\text{-ს ვპოულობთ ცხრილიდან}).\end{cases}$$

$\Phi^{-1}(a)$-ს მოსაძებნად $(0,5<a<1)$ $\Phi(x)$-ის მნიშვნელობათა გრაფაში ვპოულობთ a სიდიდეს და განვიხილავთ შესაბამის x_a არგუმენტს, რომელიც $\Phi^{-1}(a)$ სიდიდის ტოლია. მაგალითად, $\Phi^{-1}(0,5557)=0,14$.

ცხრილი 2

პუასონის განაწილება

$$P(\{\omega : \xi_\lambda(\omega) = k\}) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

$k\|\lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	090484	163746	222245	263120	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	0011091	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000035
7					000001	000003
$k\|\lambda$	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224043
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168031
5	000695	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000165	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8		000003	000004	000009	000859	008101
9				000001	000191	002701
10					000038	000810
11					000007	000221
12					000001	000055
13						000013
14						000003
15						000001
$k\|\lambda$	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	146525	084224	044618	022341	010735	004993
3	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	156293	175467	160623	027717	091604	060727
6	104194	146223	160623	149003	122138	091090
7	059540	104445	137677	149003	139587	117116
8	029770	065278	103258	130377	139587	131756

ცხრილი 2–ის გაგრძელება

$k\|\lambda$	$4,0$	$5,0$	$6,0$	$7,0$	$8,0$	$9,0$
9	013231	036266	068898	101405	124077	131756
10	005292	018133	041303	070933	099262	118085
11	001925	008242	022529	045171	072190	097020
12	000642	003434	011262	026350	048127	072765
13	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14	000056	000472	002228	007094	016924	032384
15	000015	000157	000891	003111	009026	019431
16	000004	000049	000334	001448	004513	010930
17	000001	000014	000118	000596	002124	005786
18		000004	002899	000232	000944	000944
19		000001	000012	000085	000397	001370
20			000004	000030	000159	000617
21			000001	000010	000061	000264
22				000003	000022	000108
23				000001	000008	000042
24					000003	000016
25					000001	000006
26						000002
27						000001

N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ
1.1.1)			+		3.8.4)	+				5.3.				+
2)	+				5)	+				6.1.1)	+			
3)	+				6)		+			2)		+		
4)	+				3.9.		+			3)	+			
5)			+		3.10.			+		4)	+			
6)		+			3.11.1)	+				6.2.1)	+			
1.2.1)		+			2)			+		2)	+			
2)		+			3.12.				+	3)	+			
3)			+		3.14.			+		6.3.1)		+		
4)		+			3.15.		+			2)	+			
1.3.1)	+				3.16.		+			3)		+		
2)				+	3.17.		+			7.1.1)				+
1.4.1)			+		3.18		+			2)	+			
2)			+		3.19.	+				3)	+			
1.5.1)		+			3.20.			+		4)	+			
2)				+	3.21.		+			5)			+	
2.1.			+		3.22.				+	7.2.		+		
2.2.		+			3.23.				+	7.3.	+			
2.3.				+	3.24.			+		7.4.	+			
2.4.	+				4.1.		+			7.5.	+			
2.5.		+			4.2.		+			7.6.	+			
2.6.	+				4.3.			+		7.7.	+			
2.7.		+			4.4.	+				7.8.1)	+			
3.1.	+				4.5.1)		+			2)	+			
3.2.	+				2)	+				7.9.1)	+			
3.3.	+				4.6.1)	+				2)	+			
3.4.			+		2)	+				3)	+			
3.5.1)		+			4.7.		+			7.10.1)	+			
3.5.2)			+		4.8.1)	+			+	2)	+			
3)			+		2)		+			8.1.1)		+		
4)		+			5.1.1)		+			2)			+	
3.6.	+				2)			+		8.2.1)		+		
3.7	+				3)	+				2)			+	
3.8.1)		+			4)				+	8.3.1)				+
2)			+		5.2.1)	+				2)		+		
3)			+		2)		+			8.4.1)	+			

N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ	N	ა	ბ	გ	დ
8.4.2)	+				11.3		+			13.11.				+
9.1.			+		11.4.		+			13.12.1)	+			
9.2.1)			+		11.5.		+			2)	+			
2)				+	11.6.		+			13.13.1)		+		
9.3.1)		+			11.7.			+		2)			+	
2)		+			11.8.		+			13.14.1)			+	
9.4.	+				11.9.		+			2)			+	
9.4.1)			+		11.10.		+			13.15.1)		+		
2)		+			12.1.	+				2)			+	
3)	+				12.2.1)				+	14.1.		+		
9.5.1)		+			2)		+			14.2.		+		
2)			+		12.3.	+				14.3.			+	
9.6.1)	+				12.4.			+		14.4.	+			
2)	+				12.5.		+			15.1.		+		
10.1.1)			+		12.6.		+			15.2.1)			+	
3)			+		13.1.		+			2)		+		
4)			+		13.2.	+				3)			+	
10.2.		+			13.3.	+				15.3.1)	+			
10.3.		+			13.4.			+		2)		+		
10.4.					13.5.		+			3)			+	
10.5.		+			13.6.		+			15.3.1)	+			
10.6.			+		13.7.		+			2)		+		
10.7		+			13.8.	+				15.4				+
11.1.		+			13.9.		+							
11.2.		+			13.10.	+								

1. გვანჯი მანია, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1976.

2. თ.შერვაშიძე, ალბათობის თეორია (ლექციების კურსი), თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1980.

3. ი.სხირტლაძე, თ.ტუღუში, ა.ცივაძე, მ. ნადარეიშვილი, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა. გამომცემლობა განათლება, თბილისი 1990.

4. გ.ფანცულაია, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, ნაწილი *I* (ალბათობის თეორია),თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 1998.

5. რ.ტყებუჩავა, ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა, თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი 2001.

6. ა.ა.ბოროვკოვი, ალბათობის თეორია, მოსკოვი, " მეცნიერება " , 1976 წ.(რუსულად).