საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის

2011 წლის გრანტის ფარგლებში

შესრულებული სამუშაოს ანგარიში

პროექტი 88

პროექტის დასახელება:გადაწყვეტილებათა მიღების ახალი მეთოდი ექსპერტების არამკაფიო შეფასებების საფუძველზე

ნომინაცია: სამეცნიერო-თეორიული კვლევა.

პროექტის ხელმძღვანელი: თეიმურაზ ცაბაძე.

აბსტრაქტი

ამ ნაშრომის ფარგლებში შემუშავებულია ჯგუფური გადაწყვეტილებათა მიღების საკმაოდ მარტივი მეთოდი, სადაც ექსპერტების შეფასებები წარმოდგენილია ტრაპეციული არმკაფიო რიცხვებით. მეთოდი დაფუძნებულია მეტრიკულ მიდგომაზე, რომელიც ფარავს მეტრიკების უსასრულო რაოდენობას და, ამავდროულად, საშუალებას იძლევა მარტივი პროცედურით ცალსახა კონსესუსის მიღწევის. შემოთავაზებულია ახალი მიდგომა - ექსპერტების მნიშვნელოვნობის ხარისხი. ჩამოყალიბებულია თეორიული ბაზისი, რომელიც ადასტურებს, რომ მეთოდი კორექტულია მეტრიკების მთელი კლასისთვის ტრაპეციული არმკაფიო რიცხვების სიმრავლეზე. შემოთავაზებული მიდგომის რეალიზაციისთვის შექმნილია სპეციალური არამკაფიო აგრეგირების ოპერატორი. ნაჩვენებია, რომ მიუხედავად მისი სიმარტივისა შემოთავაზებული მეთოდი ინარჩუნებს ისეთ მნიშვნელოვან თვისებებს, როგორიცაა: შეთანხმების შენარჩუნება, რიგითობის დამოუკიდებლობა, განუზღვრელობის ზომა და ა.შ. აგრეთვე მოცემულია შედარებითი ანალიზი შემოთავზებული მეთოდის რეზულტატებსა და რამოდენიმე სხვა მეთოდებით მიღებულ რეზულტატებს შორის.

საკვანძო სიტყვები: ჯგუფური გადაწყვეტილებათა მიღება, ტრაპეციული არმკაფიო რიცხვი, ტრაპეციული არმკაფიო რიცხვების მეტრიკული სივრცე, რეგულაცია, წარმომადგენელი, არამკაფიო აგრერირების ოპერატორი.

შესავალი

ჯგუფური გადაწყვეტილებების მიღების პროცესები გამოიყენება უამრავ სხვადასხვა პრაქტიკულ სფეროში. თავისი ბუნებით ეს პროცესები წარმოადგენენ ექსპერტების ინდივიდუალური შეხედულებების ტრანსფორმაციას მარეზულტირებელ შეფასებაში. რადგანაც ექსპერტთა შეფასებანი ატარებს სუბიექტურ, განუზღვრელ და არამკაფიო (არაზუსტ) ხასიათს, ამიტომ კონსენსუსის განსაზღვრისათვის (მიღწევისათვის) არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის გამოყენება გვესახება ეფექტიან ხერხად.

წარმოდგენილი ნაშრომი მიზნად ისახავს ახალი მეთოდის აგებას ექსპერტების არამკაფიო შეფასების აგრეგირებისათვის. იგულისხმება, რომ თითოეული ექსპერტი გამოსახავს მის სუბიექტურ შეფასებას დადებითი არამკაფიო რიცხვით, რომელიც წარმოადგენს გადაწყვეტილების ალტერნატივის რეიტინგს მოცემული კრიტერიუმის შესაბამისად. შედეგად ჩვენ ვღებულობთ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრულ ერთობლიობას.

იგულისხმება, რომ ექსპერტები არაიან თანაბარი დონის სპეციალისტები. მაგრამ ეს არ ნიშნავს იმას, რომ მათი შეფასებები შეიძლება იყოს არსებითად განსხვავებული. შემოთავაზებული მეთოდის არსი მდგომარეობს შემდეგში. X უნივერსის დადებითი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვთა სიმრავლეზე ჩვენ შემოგვაქვს გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციები ისე, რომ ამ ოპერაციების რეზულტატები ყოველთვის არის დადებითი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვები.

ექსპერტების შეხედულებათა შორის შეთანხმებულობის ხარისხი იზომება ზოგადი მეტრიკით, რომელიც განსაზღვრულია ნაშრომში შემოტანილი იზოტონური

შეფასების საშუალებით და მოიცავს ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვებს შორის დისტანციების მტელ კლასს.

შემდგომ შემოტანილი არის ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების რეგულაციის და წარმომადგენლის კონცებციები და ახსნილია მათი შემოტანის მოტივაცია. წარმომადგენელი განსაზღვრულია როგორც ისეთი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვი, რომლისგანაც მანძილების ჯამი ყველა დანარჩენ განხილული ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის ყველა წევრთან არის მინიმალური. ზოგად შემთხვევაში წარმომადგენელს შეიძლება ჰქონდეს მნიშვნელობების უამრავი რაოდენობა, მაგრამ სპეციალური არამკაფიო აგრერირების ოპერატორის მეშვეობით ის შეიძლება განისაზღვროს ცალსახად.

შემოთავაზებული მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს შემდეგში. რაც უფრო მცირეა მანძილი ექსპერტის სუბიექტურ შეფასებასა და წარმომადგენელს შორის, მით უფრო მეტია ექსპერტის მნიშვნელოვნების წონა. ექსპერტების მნიშვნელოვნების წონების დადგენის შემდეგ ექსპერტთა ჯგუფური გადაწყვეტილების შედეგი მიიღება სტანდარტული პროცედურის გამოყენებით.

I და II ამოცანა: <u>განუზღვრელობის პირობებში გადაწყვეტილებათა მიღების არსებული მეთოდების მიმოხილვა, ახალი მეთოდის დამუშავების აუცილებლობის დასაბუთება.</u>

არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში არსებობს ექსპერტთა ჯგუფური გადაწყვეტილებათა მიღების საკმაო რაოდენობა. მათი მიმოხილვა შეიძლება ინახოს [6,8,12,14]. გარდა ამისა დამუსავდა სხვა სპეციფიკური არამკაფიო აგრეგაციის მიდგომები სხვადასხვა თეორიული და პრაქტიკული პრობლემების გადასაწყვეტად (იხ.მაგალითად [13]).

ჩვენი აზრით, გრანტის ფარგლებში, შემოთავაზებულ მეთოდთან ყველაზე ახლოს არის შემდეგი სამი ნაშრომი [6,8,15]. [6]-ში ექსპერტების შეფასებები წარმოდგენილია ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებით. უპირველეს ყოვლისა ყველა ექსპერტის შეფასებები მუშავდება *დელფის* მეთოდით და იგულისხმება, რომ მათ აქვთ თანაკვეთა რაიმე α დონის ჭრილში, $\alpha \in]0,1]$. შემდგომ ექსპერტების შეფასებათა შეთანხმებულობის ხარისხის გასაზომად შემოტანილია მსგავსების გასაზომი ფუნქცია. ამ ფუნქციის გამოყენებით ექსპერტების შეფასებათა შეთანხმებულობის ხარისხები გამოითვლება წყვილ-წყვილად. განიხილება აგრეთვე სხვადასხვა ექსპერტთა ფარდობითი მნიშვნელოვანება. ექსპერტების შეხედულებათა აგრეგაცია იწარმოება ფარდობითი შეთანხმებულობის და მნიშვნელობის ხარისხების საფუძველზე. ჩვენი აზრით ამ მეთოდის მთავარი ნაკლი მდგომარეობს იმაში, რომ იგი ვერ მუშაობს მაშინ, როცა ექსპერტთა შეფასებები არ იკვეთება. ამ მეთოდის თაობაზე უფრო დეტალური კრიტიკული კომენტარები შეიძლება ინახოს [8]-ში. [8]-ში აგრეთვე მოცემულია ექსპერტების შეფასებები ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებით. შემოტანილია საკმაოდ მარტივი მსგავსების ზომა, რომელიც გამოსადეგია იმ შემთხვევაშიც როცა არამკაფიო შეფასებები არ იკვეთება. განსაზღვრულია აგრეგაციული წონების ოპტიმალური კრიტერიუმი. ოპტიმიზაციის ქვეშ იგულისხმება აგრეგირებული შეფასების და ყოველ ინდივიდუალურ შეფასებასთან შეწონილი არაშეთანხმებულობის ჯამის მინიმიზაცია. ოპტიმალური აგრეგაციული წონების დასადგენად შემოთავაზებულია იტერაციული ალგორითმი;

ნაჩვენებია, რომ იგი კრებადია ლოკალური ოპტიმუმისაკენ. გარდა ამისა ეს პროცესი ითვალისწინებს თითოეული ექსპერტის მნიშვნელოვნებას.

ჩვენ მიგვაჩნია, რომ *ლის* მეთოდი ასე თუ ისე არის ზედმეტად გართულებული. ავტორი არ განსაზღვრავს კონკრეტულ წესებს დამატებითი საწყისი მონაცემების, ისეთები როგორიცაა ექსპონენციალური წონა m და კონსტანტა c განსაზღვრისათვის.

ლი მხოლოდ განაცხადებს, რომ მათი შესაძლო მნიშვნელობები უნდა იყოს 1-ზე მეტი, მაგრამ თვალნათლივია, რომ ამ კონსტანტების ვარიაციას აქვს მნიშვნელოვანი ზემოქმედება საბოლოო რეზულტატზე. გარდა ამისა *ლის* მეთოდი საჭიროებს სპეციალურ პროგრამულ უზრუნველყოფას, რომელიც დაკავშირებულია შრომატევად იტერაციულ პროცედურებთან.

[15]-ში წარმოდგენილია ინდივიდუალური არამკაფიო შეფასებების აგრეგაციის ორი მიდგომა. პირველი დაფუძნებულია შეწონილი არამკაფიო შეფასებებს შორის კვადრატული მანძილების ჯამის ოპტიმალურ მინიმიზაციაზე და მას ეწოდება LSDM. მეორე მიდგომაში გამოყენებულია ნებისმიერი ორი შეწონილი არამკაფიო შეფასებების დეფაზიფიკაციური კვადრატული სხვაობების ჯამის ოპტიმალური მინიმიზაცია და მას ეწოდება DLSM.

LSDM-ის ფარგლებში ექსპერტების ინდივიდუალური შეფასებები განიხილება როგორც $\tilde{R}_i = (r_{i1}, \ldots r_{im})$, სადაც ეს შეფასებები არის სამკუთხა (m=3) ან ტრაპეციული (m=4) არამკაფიო რიცხვები. მეთოდის ძირითადი თეორემის შესაბამისად ექსპერტების მნიშვნელოვნების წონები განისაზღვრება ვექტორის საშუალებით

$$W^* = \frac{G^{-1}e}{e^{\mathrm{T}}G^{-1}e},$$

სადაც e = (1, . . . ,1) არის e^T ტრანსფორმირებული მატრიცა, ხოლო G^{1} არის G ინვერსია, რომელიც შემდეგნაირად განისაზრვრება

$$G = \left(g_{ij}\right)_{n\times n} = \begin{cases} (n-1)\sum_{k=1}^{m} r_{ik}^2, & i = j = 1,\ldots n, \\ -\sum_{k=1}^{m} r_{ik} r_{jk}, & i, j = 1,\ldots, n;\ \ j \neq i \end{cases}.$$

ამ თეორემის დამტკიცებისას ავტორები გულისხმობენ, რომ G არის არასინგულარული მატრიცა. იმისათვის, რომ ვაჩვენოთ, რომ ეს თეორემა არ არის კორექტული მოვიყვანოთ ორი კონტრმაგალითი.

1) ვთქვათ ორი ექსპერტის შეფასებები გამოსახულია ასეთი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებით $\tilde{R}_1 = (a, b, c, d)$, $\tilde{R}_2 = (ka, kb, kc, kd)$, $k > 0$. შევადგინოთ G მატრიცა (სადაც n = 2, m = 4): $g_{11} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, $g_{12} = g_{21} = -kg_{11}$, $g_{22} = k^2 g_{11}$ და

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & -kg_{11} \\ -kg_{11} & k^2 g_{11} \end{pmatrix}.$$

G-ს დეტერმინანტის გამოთვლისას ვრწმუნდებით, რომ ეს მატრიცა არის სინგულარული და G^{1} არ არსებობს:

$$\det(G) = k^2 g_{11}^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2) ახლა ვთქვათ, რომ სამი ექსპერტის შეფასებები წარმოდგენილია ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებით $\tilde{R}_1 = (a, b, c, d)$, $\tilde{R}_2 = (ka, kb, kc, kd)$, $\tilde{R}_3 = (pa, pb, pc, pd)$, $k, p > 0$. ავაგოთ G მატრიცა (სადაც $n = 3$, $m = 4$):
$g_{11} = 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$, $g_{12} = g_{21} = -k\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$, $g_{13} = g_{31} = -p\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$, $g_{22} = 2k^2\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$, $g_{23} = g_{32} = -kp\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$, $g_{33} = 2p^2\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$.
$q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ აღნიშვნის გამოყენებით მივიღებთ

$$G = \begin{pmatrix} 2q & -kq & -pq \\ -kq & 2k^2 q & -kpq \\ -pq & -kpq & 2p^2 q \end{pmatrix}.$$

G -ს დეტერმინანტის გამოთვლისას ვრწმუდებით, რომ ამ შემთხვევაშიც ეს მატრიცა სინგულარულია და G^{-1} არ არსებობს:

$$\det(G) = k^2 p^2 q^3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

ამ კონტრმაგალითებიდან თვალნათლივ ჩანს, რომ LSDM-ის თეორიული ბაზა არ არის კორექტული.

ახლა გავაგრძელოთ [15]-ის შემდგომი გარჩევა. DLSM-ის ფარგლებში შემოტანილია არამკაფიო შეფასებების დეფაზიფიკაციის კონცეფცია, რომელსაც ავტორების აზრით მივყავართ მარტივ მეთოდთან. $\tilde{R}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{i4})$ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვის დეფაზიფიციური მნიშვნელობა z_i განისაზღვრება ასე

$$z_i = \frac{1}{4}\left(r_{i1} + r_{i2} + r_{i3} + r_{i4}\right).$$

DLSM-ის ძირითადი თეორემის შესაბამისად $\tilde{R}_i$-ის არამკაფიო შეფასების წონა განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$w_i^* = \frac{1/z_i}{\sum_{k=1}^{n} 1/z_k}.$$

ამის შემდგომ, ჯგუფის წევრების არამკაფიო შეფასებები აგრეგირებულია ზოგადი პროცედურის მიხედვით

$$\tilde{R}^* = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^* r_{i1}, ..., \sum_{i=1}^{n} w_i^* r_{i4} \right).$$

ერთი შეხედვით მეთოდი ლამაზი და მარტივია მაგრამ, ჩვენი აზრით, მას აქვს ერთი მნიშვნელოვანი ნაკლი. ავტორები იყენებენ ექსპერტების არამკაფიო შეფასებების დეფაზიფიციურ მნიშვნელობებს, როგორც საწყის მონაცემებს. დეფაზიფიკაცია არის მნიშვნელოვანი პრობლემა არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის პრაქტიკული გამოყენებისას. დეფაზიფიკაციის მეტოდების გამოყენება არის დელიკატური საკითხი, რომელიც მნიშვნელოვნადაა დამოკიდებული განსახილველი ამოცანის სპეციფიურ ხასიათზე (იხ. მაგალითად [2]: Section 6. Defuzzification based on distances). დეფაზიფიკაციის თაობაზე შემდეგი დისკუსია სცილდება ჩვენი ნაშრომის ფარგლებს და ჩვენ ვუბრუნდებით DLSM-ს. ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ [15] -ში გამოყენებული დეფაზიფიკაციის მეთოდები არ არის გამოსადეგი დასმული ამოცანის გადასაწყვეტად.

დავიწყოთ შემდეგი ზოგადი მაგალითით: ორი ექსპერტი გამოსახავს თავიანთ სუბიექტურ მოსაზრებებს ასეთი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებით: $\tilde{R}_1 = (a,b,c,d)$, $\tilde{R}_2 = (ka,kb,kc,kd)$, $k > 0$. ბუნებრივია, რომ მოსალოდნელი კონსენსუსის მნიშვნელობა უნდა იყოს ახლოს შემდეგ მოსალოდნელ მნიშვნელობასთან

$$\tilde{R}^* \approx \left(\frac{k+1}{2} a, \frac{k+1}{2} b, \frac{k+1}{2} c, \frac{k+1}{2} d \right).$$

გამოვთვალოთ ამ რიცხვების დეფაზიფიციური მნიშვნელობები:

$$z_1 = \frac{a+b+c+d}{4}, \quad z_2 = kz_1 .$$

ამის შემდგომ გამოვთვალოთ ექსპერტების მნიშვნელოვნების ოპტიმალური წონები და ოპტიმალური აგრეგაცია:

$$w_1^* = \frac{1/z_1}{1/z_1 + 1/kz_1} = \frac{k}{k+1}, \quad w_2^* = \frac{1}{k+1},$$

$$\tilde{R}^* = \left(\frac{2k}{k+1} a, \frac{2k}{k+1} b, \frac{2k}{k+1} c, \frac{2k}{k+1} d \right).$$

თვალნათლივია, რომ ნებისმიერი დადებითი k -სათვის $2k/(k+1) < 2$. ამგვარად, თუ მაგალითად $\tilde{R}_1 = (a,b,c,d)$, $\tilde{R}_2 = (10a, 10b, 10c, 10d)$ (ანუ $k = 10$); მაშინ ჩვენ მივიღებთ

$$\tilde{R}^* = \left(1.(81)a,\ 1.(81)b,\ 1.(81)c,\ 1.(81)d \right).$$

ვრწმუნდებით, რომ DSLM გვაძლევს სიდიდეს, რომელიც ძალზედ შორსაა მოსალოდნელი შედეგისაგან:

$$\tilde{R}^* \approx \left(5.5a,\ 5.5b,\ 5.5c,\ 5.5d\right).$$

ასე, რომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ორი ექსპერტის შემთხვევაში DSLM არასაიმედოა.

ახლა ვთქვათ სამი ექსპერტის შეფასებები წარმოდგენილია ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვებით $\tilde{R}_1 = (a,b,c,d),\ \ \tilde{R}_2 = (ka,kb,kc,kd),\ \tilde{R}_3 = (pa,pb,pc,pd),\ \ k,p>0$. გამოვთვალოთ ამ რიცხვების დეფაზიფიციური მნიშვნელობები:

$$z_1 = \frac{a+b+c+d}{4},\ \ z_2 = kz_1,\ \ z_3 = pz_1.$$

ამის შემდგომ გამოვთვალოთ ექსპერტების მნიშვნელოვნების ოპტიმალური წონები და ოპტიმალური აგრეგაცია:

$$w_1^* = \frac{1/z_1}{1/z_1 + 1/kz_1 + 1/pz_1} = \frac{kp}{kp+k+p},\ \ w_2^* = \frac{p}{kp+k+p},\ \ w_3^* = \frac{k}{kp+k+p},$$

$$\tilde{R}^* = \left(\frac{3kp}{kp+k+p}a, \frac{3kp}{kp+k+p}b, \frac{3kp}{kp+k+p}c, \frac{3kp}{kp+k+p}d\right).$$

თვალნათლივია, რომ ნებისმიერი დადებით k და p -სათვის $3kp\ /\ (kp+p+k) < 3$. ამგვარად, თუ მაგალითად $\tilde{R}_1 = (a,b,c,d),\ \ \tilde{R}_2 = (10a,10b,10c,10d),\ \ \tilde{R}_3 = (11a,11b,11c,11d)$ (ანუ $k = 10$, $p = 11$), მაშინ მოსალოდნელია, რომ კონსესუსი უნდა იყოს $\tilde{R}_2$ და $\tilde{R}_3$ მნიშვნელობებთან ახლოს, მაგრამ DSLM გვაძლევს მოულოდნელ რეზულტატს

$$\tilde{R}^* = (2.52a,\ 2.52b,\ 2.52c,\ 2.52d).$$

ამგვარად ვასკვნით, რომ DSLM დაფუძნებულია მცდარ დაშვებასთან: რაც უფრო ნაკლებია ექსპერტის შეფასების დეფაზიფიციური მნიშვნელობა, მით უფრო დიდია მისი მნიშვნელოვნების წონა. ჩვენი აზრით ორივე მეთოდი LSDM და DSLM საჭიროებს სერიოზულ გადახედვას და ისინი არ შეიძლება გამოყენებულ იქნან არამკაფიო ჯგუფური გადაწყვეტილებების პრაქტიკაში. ამგვარად, [15] ამოღებული იქნება შემდგომი განხილვისაგან და ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ მეთოდს შევადარებთ მხოლოდ მეთოდებთან, რომელიც მოცემულია [6] და [8] -ში.

ამრიგად, ჩატარებული კრიტიკული ანალიზის საფუძველზე შეგვიძლია დასაბუთებულად დავასკვნათ, რომ არამკაფიო ტრაპეციული შეფასებების საფუძველზე ჯგუფური გადაწყვეტილებათა მიღების არსებულ მეთოდებს გააჩნიათ არსებითი ნაკლოვანებები.

ჩვენ მიზნად ვისახავთ ექსპერტთა არამკაფიო შეფასებებზე დაყრდნობით ისეთი ახალი ჯგუფური გადაწყვეტილებათა მეთოდის შექმნას, რომელიც თავისუფალი იქნება ზემოაღნიშნულ ნაკლოვანებებისაგან.

ჩვენი მიდგომის ეფექტიანობის შედარებითი ანალიზი მოცემული იქნება მოგვიანებით.

III ამოცანა: ახალი მეთოდის თეორიული ფუნდამენტის აგება

ჩვენ ავღნიშნავთ ყველა ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვთა სიმრავლეს X უნივერსუმზე $\Psi(X)=\left\{\tilde{R}_i=(a_i,b_i,c_i,d_i),\ a_i\le b_i\le c_i\le d_i,\ i\in\mathbb{N}\right\}$-ით.

განმარტება 3.1. ვიტყვით რომ, ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვი $\tilde{R}_1=(a_i)$ ნაკლებია ან ტოლი ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვზე $\tilde{R}_2=(b_i)$, $i=\overline{1,4}$, ანუ $\tilde{R}_1\tilde{\subseteq}\tilde{R}_2$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც

$$a_1\le b_1,\ a_2\le b_2,\ a_3\le b_3,\ a_4\le b_4\,. \tag{3.1}$$

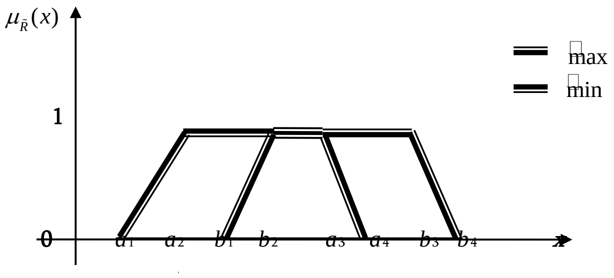
აქედან გამომდინარეობს, რომ ზემოთმოყვანილი განმარტება ექვივალენტურია ლიტერატურაში მოყვანილი განმარტებებისა (იხილეთ [9] და მაგ. [4]):

$$\tilde{R}_1\tilde{\subseteq}\tilde{R}_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\widetilde{\min}\left\{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\right\}=\tilde{R}_1,\\ \widetilde{\max}\left\{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\right\}=\tilde{R}_2\end{cases},\quad \tilde{R}_1,\tilde{R}_2\in\Psi\left(X\right).$$

ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების გაერთიანების და თანაკვეთის ოპერაციები ჩვენს გამოკვლევაში მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ. როცა $\tilde{R}_1\tilde{\subseteq}\tilde{R}_2$ ეს ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\tilde{R}_1\tilde{\cup}\tilde{R}_2=\widetilde{\max}\left\{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\right\}=\tilde{R}_2,\ \ \tilde{R}_1\tilde{\cap}\tilde{R}_2=\widetilde{\min}\left\{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\right\}=\tilde{R}_1$$

(იხილეთ აგრეთვე ნახ.1):



ნახ. 1. $\tilde{R}_1\tilde{\subseteq}\tilde{R}_2$

მაგრამ თუ $\tilde{R}_1 \tilde{\subseteq} \tilde{R}_2$ არა აქვს ადგილი მაშინ, გაფართოებული $\widetilde{\max}, \widetilde{\min}$ ოპერაციების საფუძველზე ჩატარებული გაერთიანების და თანაკვეთის ოპერაციების რეზულტატები არ წარმოადგენენ ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვებს (იხილეთ ნახ.2). წინამდებარე ნაშრომში ჩვენ ვიყენებთ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების გაერთიანების და თანაკვეთის ოპერაციებს იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ მანძილები ამ რიცხვებს შორის. ამისათვის ჩვენ გვჭირდება ამ ოპერაციების მოდიფიკაცია იმგვარად, რომ ისინი აკმაყოფილებდნენ შემდეგ მოთხოვნებს: ა) ამ ოპერაციების რეზულტატები უნდა წარმოადგენდნენ ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვებს; ბ) მიღებული რიცხვების წვეროები უნდა ეკუთვნოდნენ საწყისი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების წვეროების სიმრავლეს. გარდა ამისა ბუნებრივია მოთხოვნა, რომ თანაკვეთა იყოს ნაკლები ან ტოლი გაერთიანებისა.

განმარტება 3.2. $\tilde{R}_1 = (a_i), \tilde{R}_2 = (b_i),\ i = \overline{1,4}$ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების გაერთიანება და თანაკვეთა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2 = \widetilde{\max}\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = \left(\max\{a_1,b_1\},\ \max\{a_2,b_2\},\ \max\{a_3,b_3\},\ \max\{a_4,b_4\}\right),$$
$$\tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2 = \widetilde{\min}\{\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\} = \left(\min\{a_1,b_1\},\ \min\{a_2,b_2\},\ \min\{a_3,b_3\},\ \min\{a_4,b_4\}\right).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ეს განმარტება აკმაყოფილებს ა) და ბ) პირობებს.

თეორემა 3.1. *განვიხილოთ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვები $\tilde{R}_1 = (a_i), \tilde{R}_2 = (b_i),\ i = \overline{1,4}$. მათი გაერთიანების და თანაკვეთის ოპერაციების რეზულტატები, სადაც თანაკვეთა ნაკლებია ან ტოლი გაერთიანებისა, არის ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვები წვეროებით, რომლებიც ეკუთვნის მოცემული რიცხვების წვეროების სიმრავლეს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც გაერთიანება $\tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2$ ტოლია, ხოლო თანაკვეთა კი $\tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2$ -ისა.*

დამტკიცება. ვთქვათ შესრულებულია $\tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2, \tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2$. მაშინ გვაქვს

$$\min\{a_1,b_1\} \le \max\{a_1,b_1\},\ \min\{a_2,b_2\} \le \max\{a_2,b_2\},$$
$$\min\{a_3,b_3\} \le \max\{a_3,b_3\},\ \min\{a_4,b_4\} \le \max\{a_4,b_4\}.$$

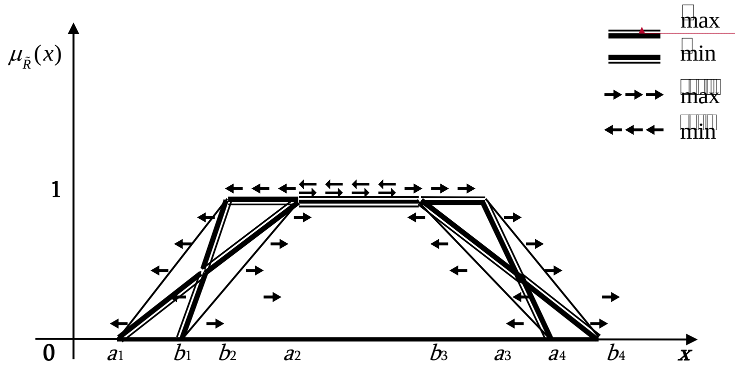
აქედან გამომდინარე $\tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2 \tilde{\subseteq} \tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2$

ახლა ვთქვათ გაერთიანების და თანაკვეთის ოპერაციების რეზულტატები წარმოადგენენ შესაბამისად ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებს (a, b, c, d), (e, f, g, h), $a, b, c, d, e, f, g, h \in \{a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4\}$. მაშინ $a, e \in \{\min\{a_i\}, \min\{b_i\}\} \Rightarrow a, e \in \{a_1, b_1\},\ b, f \in \{a_2, b_2\},\ c, g \in \{a_3, b_3\},\ d, h \in \{a_4, b_4\}$. რადგან თანაკვეთა ნაკლებია ან ტოლი გაერთიანებაზე (3.1)-ზე დაყრდნობით მივიღებთ

$$\left(a = \max\{a_1,b_1\},\ b = \max\{a_2,b_2\},\ c = \max\{a_3,b_3\},\ d = \max\{a_4,b_4\}\right) = \tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2,$$
$$\left(e = \min\{a_1,b_1\},\ f = \min\{a_2,b_2\},\ g = \min\{a_3,b_3\},\ h = \min\{a_4,b_4\}\right) = \tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2$$

და დამტკიცება დასრულებულია. □

ერთერთი შესაძლო შემთხვევა, როცა $R_1 \not\subseteq R_2$ და $R_2 \not\subseteq R_1$ ნაჩვენებია ნახ. 2-ზე.



ნახ. 2 $R_1 \not\subseteq R_2$, $R_2 \not\subseteq R_1$

ეს ნახატი ადასტურებს შემდეგი წინადადების სამართლიანობას.

წინადადება 3.1. *ნებისმიერი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებისათვის* $\tilde{R}_1 = (a_i), \tilde{R}_2 = (b_i), \ i = \overline{1,4}$ *ადგილი აქვს შემდეგ თვისებებს:*

$$\forall x \in \left]0; \max\{a_2, b_2\}\right[, \ \min \geq \min \geq \max \geq \max,$$
$$\forall x \in \left[\max\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}\right], \ \min = \min = \max = \max,$$
$$\forall x \in \left]\min\{a_3, b_3\}, \infty\right[, \ \min \leq \min \leq \max \leq \max.$$

არ არის რთული დარწმუნაბა იმაში, რომ Ψ (X) -ში ადგილი აქვს გაერთიანებისა და თანაკვეთის დისტრიბუციულობას:

$$\tilde{R}_1 \cap \left(\tilde{R}_2 \cup \tilde{R}_3\right) = \left(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2\right) \cup \left(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_3\right), \quad \tilde{R}_1 \cup \left(\tilde{R}_2 \cap \tilde{R}_3\right) = \left(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2\right) \cap \left(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_3\right). \tag{3.2}$$

ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებს შორის მანძილების განსაზღვრისათვის ჩვენ გვჭირდება $\Psi(X)$ მეტრიკის შემოტანა. მეტრიკაზე დაყრდნობით ორ ობიექტს შორის მანძილი შეიძლება გაზომილ იქნას მრავალნაირად. ამ საკითხის გარშემო არსებობს ლიტერატურის მრავალი წყარო (იხილეთ მაგ. [3,5,10]). წინამდებარე ნაშრომში ჩვენ შევჩერდით შემდეგი სახის მიდგომის გამოყენებაზე.

ვიტყვით, რომ ფუნქცია $v\left(\tilde{R}\right)$: Ψ (X) $\to \Re^+$ წარმოადგენს *იზოტონურ შეფასებას* $\Psi(X)$-ზე, თუ

$$\nu\left(\tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2\right)+\nu\left(\tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2\right)=\nu\left(\tilde{R}_1\right)+\nu\left(\tilde{R}_2\right)$$

და

$$\tilde{R}_1 \tilde{\subseteq} \tilde{R}_2 \Rightarrow \nu\left(\tilde{R}_1\right) \leq \nu\left(\tilde{R}_2\right). \tag{3.3}$$

იზოტონური შეფასება ν განსაზღვრავს $\Psi\,(X)$ შემდეგნაირ *მეტრიკას*:

$$\rho\left(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\right)=\nu\left(\tilde{R}_1 \tilde{\cup} \tilde{R}_2\right)-\nu\left(\tilde{R}_1 \tilde{\cap} \tilde{R}_2\right). \tag{3.4}$$

$\Psi(X)$-ს ν იზოტონურ შეფასებასთან და (3.4) მეტრიკასთან ერთად ეწოდება ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების *მეტრიკული სივრცე.*

განმარტება 3.3. მეტრიკულ სივრცეში ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვი $\tilde{R}^*$ არის $\left\{\tilde{R}_j\right\},\ j=\overline{1,m},\ m=2,3,\ldots$-ის ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის *წარმომადგენელი*, თუ

$$\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{S}, \tilde{R}_j\right),\quad \forall \tilde{S} \in \Psi\left(X\right). \tag{3.5}$$

შემდგომი თეორიული კონსტრუქციების გასამარტივებლად ჩვენ დაგვჭირდება ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის *რეგულაციის* კონცეფციის შემოღება. დავიწყოთ მაგალითით.

ვთქვათ გვაქვს ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობა:

	a_j	b_j	c_j	d_j
$\tilde{R}_1$	7	7.5	8	8.8
$\tilde{R}_2$	6	6.1	7.7	9
$\tilde{R}_3$	1	3	5	9.5
$\tilde{R}_4$	7.6	7.9	8.1	8.9

შევადაროთ იგი შემდეგი სახის ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრულ ერთობლიობას:

	a'_j	b'_j	c'_j	d'_j
$\tilde{R}'_1$	1	3	5	8.8
$\tilde{R}'_2$	6	6.1	7.7	8.9
$\tilde{R}'_3$	7	7.5	8	9
$\tilde{R}'_4$	7.6	7.9	8.1	9.5

ვხედავთ, რომ ორივე ცხრილში შესაბამისი სვეტები შედგებიან ერთი და იგივე სიმრავლეებისაგან; ამავდროულად მე-2 ცხრილის სიმრავლეების ელემენტები ქმნიან

არაკლებად მიმდევრობებს. $\left\{\tilde{R}_{1,}\tilde{R}_{2,}\tilde{R}_{3,}\tilde{R}_{4}\right\}$ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის რეგულაციის ქვეშ ჩვენ ვგულისხმობთ $\left\{\tilde{R}_{1,}^{'}\tilde{R}_{2,}^{'}\tilde{R}_{3,}^{'}\tilde{R}_{4}^{'}\right\}$ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრულ ერთობლიობას. რეგულაციის მკაცრი განმარტება მოყვანილი იქნება ქვემოთ, მანამ კი ჩვენ უნდა ვუპასუხოთ ერთ კითხვას, სახელდობრ: არიან თუ არა რეგულაციის წევრები აგრეთვე ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვები? ეს შეკითხვა შეიძლება დაისვას ამგვარადაც: ეს უტოლობები $a_j^{'} \le b_j^{'} \le c_j^{'} \le d_j^{'}$ ($j=\overline{1,m},\ m=2,3,\ldots$) შესრულდება? მომდევნო წინადადება იძლევა დადებით პასუხს ამ შეკითხვაზე.

წინადადება 3.2 *განვიხილოთ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობები* $\left\{\tilde{R}_j\right\}=\left\{\left(a_j,b_j,c_j,d_j\right)\right\}$ *და* $\left\{\tilde{R}_j^{'}\right\}=\left\{\left(a_j^{'},b_j^{'},c_j^{'},d_j^{'}\right)\right\}$, *სადაც სიმრავლეები* $\{a_j\}$ *და* $\{a_j^{'}\}$, $\{b_j\}$ *და* $\{b_j^{'}\}$, $\{c_j\}$ *და* $\{c_j^{'}\}$, $\{d_j\}$ *და* $\{d_j^{'}\}$ *არიან წყვილ-წყვილად ტოლები და* $a_1^{'} \le a_2^{'} \le \ldots \le a_m^{'}$, $b_1^{'} \le b_2^{'} \le \ldots \le b_m^{'}$, $c_1^{'} \le c_2^{'} \le \ldots \le c_m^{'}$, $d_1^{'} \le d_2^{'} \le \ldots \le d_m^{'}$, $j=\overline{1,m},\ m=2,3,\ldots$. *მაშინ* $a_j^{'} \le b_j^{'} \le c_j^{'} \le d_j^{'}$, *ე.ი.* $\left\{\tilde{R}_j^{'}\right\}\in\Psi\left(X\right)$.

დამტკიცება. ჩვენ დავამტკიცებთ წინადადებას $\{a_j\}$, $\{a_j^{'}\}$ და $\{b_j\}$, $\{b_j^{'}\}$ $j=\overline{1,m},\ m=2,3,\ldots$ სიმრავლეებისათვის. დამტკიცება ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების წვეროების დანარჩენ სიმრავლეთათვის არის ანალოგიური. დამტკიცებას ვაწარმოებთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით.

(i) $m = 2$. გვაქვს $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$, სადაც $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$; $\{a_j\} = \{a_j^{'}\}$, $\{b_j\} = \{b_j^{'}\}$, j ™ $\{1,2\}$, და $a_1^{'} \le a_2^{'}$, $b_1^{'} \le b_2^{'}$. ცხადია, რომ $a_1^{'}=\min\left\{a_1,a_2\right\}\le\min\left\{b_1,b_2\right\}=b_1^{'}$ და $a_2^{'}=\max\left\{a_1,a_2\right\}\le\max\left\{b_1,b_2\right\}=b_2^{'}$;

(ii) დავუშვათ, რომ $a_j^{'} \le b_j^{'}$ ყველა $j \in \{3,4,\ldots,m-1\}$, $m = 4,5,\ldots$;

(iii) განვიხილოთ $a_m^{'}$ და $b_m^{'}$. ფაქტია, რომ $a_m^{'} = \max\{a_j\}$ და $b_m^{'} = \max\{b_j\}$. აქედან და (ii) გამომდინარეობს, რომ $a_m^{'} \le b_m^{'}$. □

ახლა ჩვენ გვძალუძს მოვიყვანოთ რეგულაციის მკაცრი განმარტება.

განმარტება 3.4. ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობა $\left\{\tilde{R}_j^{'}\right\}$ წარმოადგენს ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობა $\left\{\tilde{R}_j\right\}$-ის რეგულაციას, თუ სასრული სიმრავლეები $\{a_j\}$ და $\{a_j^{'}\}$, $\{b_j\}$ და $\{b_j^{'}\}$, $\{c_j\}$ და $\{c_j^{'}\}$, $\{d_j\}$ და $\{d_j^{'}\}$ არიან წყვილ-წყვილად ტოლები და $a_1^{'} \le a_2^{'} \le \ldots \le a_m^{'}$, $b_1^{'} \le b_2^{'} \le \ldots \le b_m^{'}$, $c_1^{'} \le c_2^{'} \le \ldots \le c_m^{'}$, $d_1^{'} \le d_2^{'} \le \ldots \le d_m^{'}$, $j=\overline{1,m}, m=2,3,\ldots$.

ამ განმარტებიდან და (3.4) ფორმულიდან თვალნათლივია, რომ მეტრიკულ სივრცეში ნებისმიერი $\tilde{S}\in\Psi\left(X\right)$ და $\left\{\tilde{R}_j\right\}$, $j=\overline{1,m},\ m=2,3,\ldots$ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობისათვის სრულდება ტოლობა

$$\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{S},\tilde{R}_j\right)=\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{S},\tilde{R}_j^{'}\right). \tag{3.6}$$

(3.6) ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ *ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის და მისი რეგულაციის წარმომადგენლები ერთმანეთის ტოლია.*

განმარტება 3.4. და ფორმულა (3.1) ადასტურებენ შემდეგი წინადადების მართებულებას.

წინადადება 3.3. *რეგულაცია წარმოადგენს ჩალაგებული ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრულ ერთობლიობას:*

$$\tilde{R}_1^{'} \subseteq \tilde{R}_2^{'} \subseteq \ldots \subseteq \tilde{R}_m^{'},\ \ m = 2,3,\ldots\ .$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2 \Rightarrow \rho\left(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2\right) = v\left(\tilde{R}_2\right) - v\left(\tilde{R}_1\right). \tag{3.7}$$

თეორემა 3.2. *ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების მეტრიკულ სივრცეში* $\left\{\tilde{R}_j\right\},\ j = \overline{1,m},$ *m*=2,3,… *ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის წარმომადგენელი* $\tilde{R}^*$ *განისაზღვრება შემდეგნაირად:*

$$\tilde{R}_{m/2}^{'} \subseteq \tilde{R}^* \subseteq \tilde{R}_{m/2+1}^{'} \quad \text{თუ } m \text{ ლუწია;}$$
$$\tilde{R}^* = \tilde{R}_{(m+1)/2}^{'} \quad \text{თუ } m \text{ კენტია.}$$

დამტკიცება. პირველად ვაჩვენოთ შემდეგი გამოსახულების მართებულობა

$$\tilde{R}_p^{'} \subseteq \tilde{R}^* \subseteq \tilde{R}_{p+1}^{'},\quad p\ ™\{1,2,\ldots m\text{-}1\}. \tag{*}$$

დავუშვათ, რომ $\tilde{R}_k^{'} \nsubseteq \tilde{R}^* \wedge \tilde{R}^* \nsubseteq \tilde{R}_k^{'},\ \ k \in \{1,2,\ldots,m\}$.

(a) $m = 2$.

განვიხილოთ $\rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j^{'}\right) - \rho\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_1^{'}, \tilde{R}_j^{'}\right) + \rho\left(\tilde{R}^*\right) - \rho\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_2^{'}, \tilde{R}_j^{'}\right)$. v იზოტონური შეფასების თვისებების, (3.4) და (3.3) გამოსახულებების საშუალებით მივიღებთ

$$-2v\left(\tilde{R}^*\right) + 2v\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_j^{'}\right) + v\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_1^{'}\right) - v\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_2^{'}\right) \geq -2v\left(\tilde{R}^*\right) + 2v\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_j^{'}\right) > 0\,.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\sum_{j=1}^{2} \rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j^{'}\right) - \sum_{j=1}^{2} \rho\left(\tilde{R}^* \cup \tilde{R}_k^{'}, \tilde{R}_j^{'}\right) > 0,\ \ k = 1,2$ რაც ეწინააღმდეგება (3.5)-ს. ე.ი. $m = 2$ შემთხვევისათვის ზემოთ მოყვანილი დაშვება არასწორია.

(b) $m > 2$.

ვთქვათ $k \leq (m+1)/2$. მაშინ ნებისმიერი $j \in \{1,2,\ldots,k-1\}$, v იზოტონური შეფასების თვისებების, (3.4) და (3.3) გამოსახულებებით ჩვენ მივიღებთ

$$\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)=2\nu\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\nu\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right)-\nu\left(\tilde{R}^{*}\right)\ \geq\nu\left(\tilde{R}^{*}\right)-\nu\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)\geq-\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right). \qquad (**)$$

შემდეგ , ნებისმიერი $j\in\{k,\,k+1,\ldots,\,m\}$ ჩვენ ანალოგიურად მივიღებთ

$$\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)=\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right). \qquad (***)$$

(**) და (***) საფუძველზე

$$\sum_{j=1}^{k-1}\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\sum_{j=1}^{k-1}\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)\geq(1-k)\,\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right),$$
$$\sum_{j=k}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\sum_{j=k}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)=(m-k+1)\,\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right).$$

ეს ორი ბოლო გამოსახულება გვაძლევს

$$\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)\ \geq(m-2k+2)\,\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}^{*}\Cup\tilde{R}_{k}^{'}\right)>0\,,$$

რაც აგრეთვე ეწინააღმდეგება (3.5)-ს.

ახლა ვთქვათ $k>(m+1)/2$. მაშინ, ანალოგიურად ზემომოყვანილისა, გვექნება

$$\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*}\Cap\tilde{R}_{k}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)\geq(2k-m)\,\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}^{*}\Cap\tilde{R}_{k}^{'}\right)>0\,,$$

რაც ისევ ეწინააღმდეგება (3.5)-ს.

ჩვენ დაგვრჩა, რომ ვაჩვენოთ $\tilde{R}_{1}^{'}\sqsubseteq\tilde{R}^{*}\sqsubseteq\tilde{R}_{m}^{'}$. ვთქვათ $\tilde{R}^{*}\sqsubset\tilde{R}_{1}^{'}$. არ არის ძნელი $\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\rho\left(\tilde{R}_{1}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)>0$ სისწორის შემოწმება და შესაბამისად, $\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)-\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}_{1}^{'},\tilde{R}_{j}^{'}\right)>0$, რაც კვლავ (3.5)-ის საწინააღმდეგოა. დამტკიცება შემთხვევისათვის როცა $\tilde{R}^{*}\sqsubseteq\tilde{R}_{m}^{'}$ ანალოგიურია. ამგვარად, (*) დამტკიცებულია. აქედან და (3.7)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{j=1}^{m}\rho\left(\tilde{R}^{*},\tilde{R}_{j}^{'}\right)=\sum_{j=1}^{m}\left|\nu\left(\tilde{R}^{*}\right)-\nu\left(\tilde{R}_{j}^{'}\right)\right|.$$

როგორც ცნობილია, ბოლო გამოსახულება აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას როცა $\nu\left(\tilde{R}^{*}\right)$ არის მედიანა $\left\{\nu\left(\tilde{R}_{j}^{'}\right)\right\}$, $j=\overline{1,m}$, $m=2,3,\ldots$ არაკლებადი რიცხვითი

მიმდევრობისა. ამგვარად, თუ m არის ლუწი, მაშინ $v\left(\tilde{R}'_{m/2}\right) \le v\left(\tilde{R}^*\right) \le v\left(\tilde{R}'_{m/2+1}\right)$, ხოლო თუ m არის კენტი $v\left(\tilde{R}^*\right) = v\left(\tilde{R}'_{(m+1)/2}\right)$. რადგანაც საქმე გვაქვს ჩალაგებულ ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვების სასრულ ერთობლიობასთან, ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ $v\left(\tilde{R}_k\right) \le v\left(\tilde{R}_l\right) \Rightarrow \tilde{R}_k \subseteq \tilde{R}_l$, $v\left(\tilde{R}_k\right) = v\left(\tilde{R}_l\right) \Rightarrow \tilde{R}_k = \tilde{R}_l$ და თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. □

ჩვენი მიდგომის რეალიზაციისათვის გვესაჭიროება აგრეგირების სპეციალური ოპერატორი, რომელიც დააკმაყოფილებს გარკვეულ მოთხოვნებს. დღეს-დღეისობით, არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიაში არსებობს მრავალი კარგად ცნობილი არამკაფიო აგრეგირების ოპერატორები, ისეთი როგორიცაა, ტრიანგულარული ნორმები და კონორმები (triangular norms, conorms) გასაშუალებული, წონითი კოეფიციენტებით და ა.შ.

ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების მეტრიკულ სივრცეში ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის წარმომადგენელი, როგორც ეს აღნიშნულია განმარტემა (3.3)-ში, წარმოადგენს არამკაფიო აგრეგირების ოპერატორის ახალ ნაირსახეობას. თეორემა (3.2)-ის მიხედვით $\left\{\tilde{R}_j\right\}$, $j = \overline{1,m}$, $m = 2,3,...$ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული წარმომადგენელი აკმაყოფილებს $\tilde{R}'_{m/2} \subseteq \tilde{R}^* \subseteq \tilde{R}'_{m/2+1}$ თუ m არის ლუწი და $\tilde{R}^* = \tilde{R}'_{(m+1)/2}$ - თუ m არის კენტი. ახლა ჩვენ შემოვიყვანთ არამკაფიო აგრეგირების ისეთ ოპერატორს, რომელიც ყოველთვის აკმაყოფილებს ამ მოთხოვნებს.

თეორემა 3.2 -დან გამომდინარეობს, რომ თუ m არის ლუწი და $\tilde{R}'_{m/2} \subset \tilde{R}'_{m/2+1}$ მაშინ წარმომადგენელმა შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობათა უსასრულო რაოდენობა (თუ $\tilde{R}'_{m/2} = \tilde{R}'_{m/2+1}$ მაშინ განვიხილავთ ინტერვალს $[\tilde{R}'_{m/2-1}; \tilde{R}'_{m/2+2}]$ და გამოვიყენებთ წვემოთ შემოთავაზებულ მიდგომას კენტი m -სათვის და ამავდროულად $\tilde{R}'_{m/2}$ იქნება მიღებული მხედველობაში 2-ჯერ და ა.შ.). განვიხილოთ ეს შემთხვევა დეტალურად.

ვთქვათ m ლუწია: $m = 2p$, $p = 1,2,\ldots$. მაშინ წარმომადგენელმა შეიძლება მიიღოს უამრავი მნიშვნელობა $[\tilde{R}'_p; \tilde{R}'_{p+1}]$ ინტერვალიდან. მოდით განვსაზღვროთ ერთი ასეთი მნიშვნელობა, რომელიც გაითვალისწინებს ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების განხილული სასრული ერთობლიობის რეგულაციის ყველა დანარჩენი წევრების მნიშვნელობებს. გამოვთვალოთ მანძილების ჯამი $\tilde{R}'_p$ -სა და მის მარცხნივ მდებარე რეგულაციის ყველა დანარჩენ წევრებს შორის. გავაკეთოთ იგივე $\tilde{R}'_{p+1}$ -სა და მის მარჯვნივ მდებარე რეგულაციის ყველა დანარჩენ წევრებს შორის. რადგან ჩვენი არგუმენტაცია (მსჯელობა) დაფუძნებულია მეტრიკულ მიდგომაზე ბუნებრივია დავუშვათ, რომ წარმომადგენელი უნდა იყოს განლაგებული „უფრო ახლოს" $[\tilde{R}'_p; R'_{p+1}]$ ინტერვალის იმ ბოლოსკენ, რომელამდეც ან რომლის შემდეგაც გამოთვლილ ჯამს აქვს მინიმალური მნიშვნელობა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, წარმომადგენელი უნდა იყოს განლაგებული „უფრო ახლოს" $[\tilde{R}'_p; \tilde{R}'_{p+1}]$ ინტერვალის იმ ბოლოსთან რომელამდეც ან რომლის შემდეგაც რეგულაციის წევრები განლაგებულნი არიან „უფრო ახლოს" ერთმანეთთან.

ამგვარად, როცა ეს ჯამები ერთმანეთის ტოლია მივიღებთ, რომ წარმომადგენელი უდრის $\tilde{R}'_p = (a_{p,i})$, $\tilde{R}'_{p+1} = (a_{p+1,i})$ არამკაფიო ტრაპეციული რიცხვების გაფართოებულ

საშუალო არითმეტიკულს: $\tilde{R}^* = (a^* = (a_{p,i} + a_{p+1,i})/2),\ i = \overline{1,4}$. თუ, მანძილების ჯამი ამ ინტერვალის მარცხენა ბოლოსა და მისგან მარცხნივ მდებარე რეგულაციის ყველა წევრს შორის 0-ის ტოლია, მაშინ წარმომადგენელი უდრის $\tilde{R}_p^{'}$. თუ, მანძილების ჯამი ამ ინტერვალის მარჯვენა ბოლოსა და მისგან მარჯვივ მდებარე რეგულაციის ყველა წევრს შორის 0-ის ტოლია, მაშინ წარმომადგენელი უდრის $\tilde{R}_{p+1}^{'}$. ამ არგუმენტის თანახმად ჩვენ შეგვიძლია ცალსახად განვსაზღვროთ წარმომადგენელი:

$$\tilde{R}^* = \begin{cases} \left(a_{p,i}^{'} + a_{p+1,i}^{'}\right)/2 \ \ if \ \ \sum\limits_{j=1}^{p-1} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_p^{'}\right) = \sum\limits_{j=p+2}^{m} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_{p+1}^{'}\right), \\ a_{p,i}^{'} + \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p-1} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_p^{'}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{p-1} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_p^{'}\right) + \sum\limits_{j=p+2}^{m} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_{p+1}^{'}\right)} \left(a_{p+1,i}^{'} - a_{p,i}^{'}\right) \right) \ \ otherwise \end{cases} \quad i = \overline{1,4}. \tag{3.8}$$

ახლა ვთქვათ m კენტია: $m=2p+1$, $p=1,2,\ldots$. ასეთ შემთხვევაში, თეორემა 2.2 -ის თანახმად წარმომადგენელი უდრის $\tilde{R}_{p+1}^{'}$. თუ ჩვენ უგულებელვყოფთ მის მნიშვნელობას $\tilde{R}_p^{'} \subset \tilde{R}_{p+2}^{'}$, მაშინ, ნებისმიერი სხვა ფიქსირებული ტრაპეციული რიცხვი ინტერვალიდან $[\tilde{R}_p^{'}; \tilde{R}_{p+2}^{'}]$, რომელიც მოიცავს ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების უსასრულო რაოდენობას, ასევე არის წარმომადგენელი. საკითხი მდგომარეობს იმაში, რომ განვსაზღვროთ ერთადერთი წარმომადგენელი ისე, რომ გავითვალისწინოთ მოცემული ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის რეგულაციის ყველა წევრის „წონა“. ამისათვის ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ზემოთ მოყვანილი მიდგომა $\tilde{R}_{p+1}^{'}$-ის დამატებითი „წონის“ გათვალისწინებით. გამოვთვალოთ მანძილების ჯამი $\tilde{R}_p^{'}$-სა და რეგულაციის ყველა დანარჩენ წევრებს შორის რომლებიც ნაკლებია ან ტოლია $\tilde{R}_{p+1}^{'}$. გავაკეთოთ იგივე $\tilde{R}_{p+2}^{'}$ და რეგულაციის ყველა დანარჩენ წევრებს შორის, რომელიც მეტია ან ტოლია $\tilde{R}_{p+1}^{'}$. შედეგად მივიღებთ ერთადერთ წარმომადგენელს:

$$\tilde{R}^* = \begin{cases} \left(a_{p,i}^{'} + a_{p+2,i}^{'}\right)/2 \ \ if \ \ \sum\limits_{j=1}^{p+1} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_p^{'}\right) = \sum\limits_{j=p+1}^{m} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_{p+2}^{'}\right), \\ a_{p,i}^{'} + \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{p+1} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_p^{'}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{p+1} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_p^{'}\right) + \sum\limits_{j=p+1}^{m} \rho\left(\tilde{R}_j^{'}, \tilde{R}_{p+2}^{'}\right)} \left(a_{p+2,i}^{'} - a_{p,i}^{'}\right) \right) \ \ otherwise \end{cases} \quad i = \overline{1.4}. \tag{3.9}$$

(3.8) და (3.9)-ს საგულდაგულო შედარება გვაძლევს კარგ შესაძლებლობას ეს ორი ფორმულა გავაერთიანოთ. შეიძლება ადვილად დავრწმუნდეთ, რომ შემდეგი ტოლობები მართებულია (აქ და შემდგომ სიმბოლო [ ] აღნიშნავს რიცხვის მთელ ნაწილს):

$\sum_{j=1}^{p-1}\rho(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_p^{'})=\sum_{j=1}^{p}\rho(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_p^{'}),\ \sum_{j=p+2}^{m}\rho(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{p+1}^{'})=\sum_{j=p+1}^{m}\rho(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{p+1}^{'})$, $m=2p \Rightarrow [m/2]=p$, $[(m+1)/2]=p$, $[(m+3)/2]=p+1$; $m=2p+1 \Rightarrow [m/2]=p$; $[(m+1)/2]=p+1$; $[(m+3)/2]=p+2$.

აქედან მივიღებთ წარმომადგენლის ზოგად ფორმულას:

$$\tilde{R}^{*}=\begin{cases}\left(a_{[m/2],i}^{'}+a_{[(m+3)/2],i}^{'}\right)\ if\ \sum\limits_{j=1}^{[(m+1)/2]}\rho\left(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{[m/2]}^{'}\right)=\sum\limits_{j=[m/2]+1}^{m}\rho\left(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{[(m+3)/2]}^{'}\right), \\ a_{[m/2],i}^{'}+\left(\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{[(m+1)/2]}\rho\left(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{[m/2]}^{'}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{[(m+1)/2]}\rho\left(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{[m/2]}^{'}\right)+\sum\limits_{j=[m/2]+1}^{m}\rho\left(\tilde{R}_j^{'},\tilde{R}_{[(m+3)/2]}^{'}\right)}\left(a_{[(m+3)/2],i}^{'}-a_{[m/2],i}^{'}\right)\right) otherwise\end{cases}\quad i=\overline{1,4} \tag{3.10}$$

შენიშვნა 3.1. ადვილია იმის ჩვენება, რომ (3.10) ფორმულით განსაზღვრული წარმომადგენელი წარმოადგენს ტრაპეციულ არამკაფიო რიცხვს.

IV ამოცანა: <u>ახალი მეთოდის დეტალური აღწერა</u>

ვთქვათ ექსპერტთა ჯგუფი აფასებს რაიმე ალტერნატივის წონას მოცემული კრიტერიუმით. მიუხედავად იმისა, რომ ექსპერტები არიან ერთი და იგივე დონის პროფესიონალები მათი სუბიექტური შეფასებები შესაძლოა იყოს არსებითად განსხვავებული. პრობლემა მდგომარეობს ამ შეფასებების დამუშავებაში ისე, რომ მივაღწიოთ კონსესუსს. ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა მიღების აგრეგაციის ნებისმიერი მეთოდის აგებისას ძირითად ამოცანას წარმოადგენს ყოველი ექსპერტის კარგად დასაბუთებული მნიშვნელოვანების წონა. ჩვენი აზრით, ამ ერთობლიობის წარმომადგენელი, ანუ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვი, ისეთი რომ, მანძილების ჯამი მასსა და მოცემული სასრული ერთობლიობის ყველა დანარჩენ წევრებს შორის არის მინიმალური, წარმოადგენს განსაკუთრებულ ინტერესს. წარმომადგენელი შეიძლება განხილული იქნას როგორც ჯგუფური კონსესუსის ნაირსახეობა, მაგრამ ამ შემთხვევაში ექსპერტების მნიშვნელოვანების წონა არ არის გათვალისწინებული. წარმომადგენელი რაიმე სახით შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, როგორც სტანდარტი განსახილველი ერთობლიობის წევრებისათვის. როგორც ფიზიკური სხეულების წონები იზომება მათი შედარებით პარიზის სტანდარტულ კილოგრამთან, ჩვენ გვეჩვენება, რომ ექსპერტების მნიშვნელოვანების წონების განსაზღვრა დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად ახლოა (მანძილი) ექსპერტის შეფასება წარმომადგენელთან.

ამგვარად, შემოთავაზებული მეთოდის ძირითადი იდეა მდგომარეობს შემდეგში. ყონელი ექსპერტის მნიშვნელოვანების წონა განისაზღვრება ფუნქციით, რომელიც უკუპროპორციულია მანძილის, მისი შეფასებისა და წარმომადგენელს შორის. ანუ რაც უფრო მცირეა მანძილი ექსპერტის შეფასებასა და წარმომადგენელს შორის, მით უფრო დიდია მისი მნიშვნელოვანების წონა.

ახლა გადავიდეთ მეთოდის ფორმალურ აღწერაზე. ვთქვათ $\tilde{R}_j,\ j \in \{1, 2, ..., m\},\ m = 2, 3, ...$ წარმოადგენს რაიმე ალტერნატივის მიკუთვნებას მოცემული კრიტერიუმისათვის *j*-იური ექსპერტის შეფასებას ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვის სახით. ყველა ექსპერტის შეფასებები ჰქმნიან ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრულ ერთობლიობას $\{\tilde{R}_j\}$. განმარტება 3.4 და ფორმულა (3.10)-ის საშუალებით განვსაღვრავთ რეგულაცია $\{\tilde{R}_j^{'}\}$-ს და ამ ერთობლიობის წარმომადგელ $\tilde{R}^*$-ს.

ავღნიშნოთ *j*-იური ექსპერტის აგრეგაციის წონა (მნიშვნელოვანების წონა) და აგრეგაციის რეზულტატი ω_j და $\tilde{R} = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$ შესაბამისად.

ზემოთ მოყვანილი არგუმენტაციის თანახმად მნიშვნელოვანების წონები და აგრეგაციის საბოლოო შედეგი შეგვიძლია გამოვსახოთ შემდეგნაირად:

$$\omega_j = \frac{\left(\rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j\right)\right)^{-1}}{\sum_{j=1}^{m}\left(\rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j\right)\right)^{-1}} \tag{4.1}$$

და

$$\tilde{R} = \sum_{j=1}^{m}(\omega_j \,\Box\, \tilde{R}_j)\,. \tag{4.2}$$

აქ □ წარმოადგენს არამკაფიო გამრავლების ოპერატორს [7]. თვალნათლივია, რომ $\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1$.

ეს მიდგომა მოქნილად და მოხერხებულად გამოიყურება, მაგრამ თუ ექსპერტების შეფასებების სასრული ერთობლიობის ერთი წევრი მაინც დაემთხვევა წარმომადგენელს, მაშინ ფუნქცია ω_j განიცდის წყვეტას. განვიხილოთ ის შემთხვევები, როდესაც ფუნქცია ω_j განიცდის წყვეტას. სიმარტივისათვის გამოვიყენებთ ასეთ აღნიშვნას: $\rho_j = \rho\left(\tilde{R}_j, \tilde{R}^*\right),\ \ j = \overline{1, m},\ \ m = 2, 3, ...$.

ვთქვათ $\left\{\tilde{R}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1), \tilde{R}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2), \tilde{R}_3 = (a_3, b_3, c_3, d_3)\right\}$ არის სამი ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებისაგან შემდგარი ერთობლიობა, ხოლო $\tilde{R}^* = \left(a^*, b^*, c^*, d^*\right)$ მისი წარმომადგენელია. განვიხილოთ შემდეგი 3 შემთხვევა:

(i) დავუშვათ, რომ ამ სასრული ერთობლიობის ზუსტად ერთი წევრი ემთხვევა წარმომადგენელს, ვთქვათ $\tilde{R}_3 = \tilde{R}^*$. ეს განტოლება შეიძლება გადავწეროთ ასე:

$a_3 = a^* \pm \varepsilon_1,\ b_3 = b^* \pm \varepsilon_2,\ c_3 = c^* \pm \varepsilon_3,\ d_3 = d^* \pm \varepsilon_4;\ \ \varepsilon_k \to 0,\ \ k = \overline{1, 4}$ უსასრულოდ მცირე სიდიდეებია.

აქედან გამომდინარე $\rho_3 = \pm\delta \to 0$ წარმოადგენს უსასრულოდ მცირე სიდიდეს. ზოგადობის დაურღვევლად აქ და შემდგომ ჩვენ ოპერირებას მოვახდენთ მხოლოდ დადებით უსასრულოდ მცირე სიდიდეებთან.

განვიხილოთ

$$\sum_{j=1}^{3}\omega_j=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\delta}=\frac{\delta\rho_2+\delta\rho_1+\rho_1\rho_2}{\delta\rho_1\rho_2}$$

$$\Rightarrow \omega_1=\frac{\delta\rho_2}{\delta\rho_2+\delta\rho_1+\rho_1\rho_2},\ \omega_2=\frac{\delta\rho_1}{\delta\rho_2+\delta\rho_1+\rho_1\rho_2},\ \omega_3=\frac{\rho_1\rho_2}{\delta\rho_2+\delta\rho_1+\rho_1\rho_2}.$$

(4.2)-ის საშუალებით განვსაზღვროთ აგრეგირების რეზულტატ $\tilde{R}=\left(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}\right)$-ის პირველი კოორდინატი:

$$\tilde{a}=\frac{a^*\rho_1\rho_2+\varepsilon_1\rho_1\rho_2+\delta\rho_2a_1+\delta\rho_1a_2}{\rho_1\rho_2+\delta\rho_2+\delta\rho_1}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ეს გამოსახულება უწყვეტია და მიისწრაფის a^* ზღვრისაკენ. ანალოგიურრად მივიღებთ, რომ $\tilde{R}=\left(a^*,b^*,c^*,d^*\right)=\tilde{R}^*$.

(ii) ახლა დავუშვათ, რომ ამ სასრული ერთობლიობის ორი წევრი ემთხვევა წარმომადგენელს, ვთქვათ $\tilde{R}_1=\tilde{R}_2=\tilde{R}^*$. ამ შემთხვევაში ბოლო განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად

$$a_1=a^*+\varepsilon_1,\ a_2=a^*+\varepsilon_2,\ ...,\ d_1=d^*+\varepsilon_7,\ d_2=d^*+\varepsilon_8;\ \ \varepsilon_k\to 0,\ k=\overline{1,8}.$$

აქედან გამომდინარე $\rho_1=\delta_1,\ \rho_2=\delta_2,\ \delta_1,\delta_2\to 0$.

განვიხილოთ

$$\omega_1=\frac{\delta_2\rho_3}{\delta_2\rho_3+\delta_1\rho_3+\delta_1\delta_2},\ \omega_2=\frac{\delta_1\rho_3}{\delta_2\rho_3+\delta_1\rho_3+\delta_1\delta_2},\ \omega_3=\frac{\delta_1\delta_2}{\delta_2\rho_3+\delta_1\rho_3+\delta_1\delta_2}.$$

(4.2)-ის საშუალებით მივიღებთ

$$\tilde{a}=\frac{a^*\left(\delta_2\rho_3+\delta_1\rho_3\right)+\varepsilon_1\delta_2\rho_3+\varepsilon_2\delta_1\rho_3+\delta_1\delta_2a_3}{\left(\delta_2\rho_3+\delta_1\rho_3\right)+\delta_1\delta_2}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ეს გამოსახულება უწყვეტია და მიისწრაფის a^* ზღვრისაკენ. ანალოგიურრად მივიღებთ, რომ $\tilde{R}=\left(a^*,b^*,c^*,d^*\right)=\tilde{R}^*$.

(iii) ახლა დავუშვათ, რომ ამ სასრული ერთობლიობის სამივე წევრი ემთხვევა წარმომადგენელს: $\tilde{R}_1=\tilde{R}_2=\tilde{R}_3=\tilde{R}^*$. ამ შემთხვევაში ბოლო განტოლება შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$a_1=a^*+\varepsilon_1,\ a_2=a^*+\varepsilon_2,\ a_3=a^*+\varepsilon_3,\ ...,\ d_1=d^*+\varepsilon_{10},\ d_2=d^*+\varepsilon_{11},d_3=d^*+\varepsilon_{12};\ \varepsilon_k\to 0,\ k=\overline{1,12}$$

აქედან გამომდინარე $\rho_1=\delta_1,\ \rho_2=\delta_2,\ \rho_3=\delta_3,\ \delta_1,\delta_2,\delta_3\to 0$.

განვიხილოთ

$$\omega_1 = \frac{\delta_2\delta_3}{\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_2}, \ \omega_2 = \frac{\delta_1\delta_3}{\delta_2\rho_3 + \delta_1\rho_3 + \delta_1\delta_2}, \ \omega_3 = \frac{\delta_1\delta_2}{\delta_2\rho_3 + \delta_1\rho_3 + \delta_1\delta_2}.$$

(4.2)-ის საშუალებით მივიღებთ

$$\tilde{a} = \frac{a^*\left(\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_2\right) + \varepsilon_1\delta_2\delta_3 + \varepsilon_2\delta_1\delta_3 + \varepsilon_3\delta_1\delta_2}{\delta_2\delta_3 + \delta_1\delta_3 + \delta_1\delta_2}.$$

ადვილი დასანახია, რომ ეს გამოსახულება უწყვეტია და მიისწრაფის a^* ზღვრისაკენ. ანალოგიურრად მივიღებთ, რომ $\tilde{R} = \left(a^*, b^*, c^*, d^*\right) = \tilde{R}^*$.

თვალნათლივია, რომ ზემოთ მოყვანილი არგუმენტაცია შეიძლება განზოგადოებული იქნას ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვებისაგან შემდგარი ნებისმიერ სასრულ ერთობლიობაზე. ამგვარა ჩვენ ახლახან დავამტკიცედ შემდეგი წინადადების სამართლიანობა.

წინადადება 4.1. $\left\{\tilde{R}_j\right\}$, $j = \overline{1,m}$, $m = 2,3,\ldots$ *ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების ნებისმიერი სასრული ერთობლიობისათვის მართებულია შემდეგი რეზულტატები:*

(a) $\tilde{R} = \sum_{j=1}^{m}(\omega_j \square \tilde{R}_j)$ *ყოველთვის უწყვეტია (აქ* ω_j *მოცემულია (4.1) ფორმულით);*

(b) თუ კი არსებობს ერთი მაინც j *ისეთი, რომ* $\rho\left(\tilde{R}_j, \tilde{R}^*\right) = 0$ *მაშინ* $\tilde{R} = \tilde{R}^*$*.*

შედეგი 4.1. *თუ ყველა* $t, j \in \{1,2,\ldots,m\}$ $\tilde{R}_t = \tilde{R}_j \Rightarrow \tilde{R} = \tilde{R}^*$

შედეგი 4.2. *თუ ყველა შეფასება ერთმანეთის ტოლია, მაშინ* $\omega_j = 1/m$.

დამტკიცება. ეს შედეგი უშუალოდ გამომდინარეობს (4.2)-იდან. □

V ამოცანა: <u>შემოთავაზებული მეთოდის რეალიზაციისთვის საჭირო ალგორითმის დამუშავება</u>

ახლა კი წარმოვადგინოთ არამკაფიო აგრეგირების მეთოდის ალგორითმი.

ბიჯი 0: *ინიციალიზაცია: ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობა* $\left\{\tilde{R}_j\right\}$, *მისი რეგულაცია* $\left\{\tilde{R}_j^{'}\right\}$, $j = \overline{1,m}$, $m = 2,3,\ldots$. *ავღნიშვნოთ j-იური ექსპერტის აგრეგაციის წონა* ω_j*-ით, ხოლო საბოლოო რეზულტატი* $\tilde{R}$ *-ით.*

ბიჯი 1: *გამოვთვალოთ რეგულაცია* $\left\{\tilde{R}_j^{'}\right\}$, $j = \overline{1,m}$, $m = 2,3,\ldots$*-ის წარმომადგენელი ფორმულა* (3.10)*-ის საშუალებით.*

ბიჯი 2: *შევასრულოთ ბიჯი* 3 $j = \overline{1,m}$ *-სათვის.*

ბიჯი 3: *გამოვთვალოთ* $\Delta_j = \rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j\right)$:

- *თუ ერთი მაინც* $\Delta_j = 0$, *მაშინ* $\tilde{R} = \tilde{R}^*$;

- *თუ ყველა j-ისათვის $\Delta_j > 0$, მაშინ გამოვთვალოთ ω_j (4.1)-ის მეშვეობით და მივიღოთ საბოლოო რეზულტატი (4.2)-ის საშუალებით.*

VI ამოცანა: <u>მეთოდის ზოგადი თვისებების განსაზღვრა</u>

აგრეგირების ახალი მეთოდების კორექტულობის შემოწმება საკმაოდ რთული საქმეა. ბოლო დროს საერთაშორისო სამეცნიერო საზოგადოებამ შემოიღო რამოდენიმე კრიტერიუმი, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ახალი მეთოდები. ამ კრიტერიუმების თანახმად ახლად წარმოდგენილი მეთოდი უნდა მოიცავდეს შემდეგ მნიშვნელოვან თვისებებს (იხილე მაგალითად [6, 8]):

- შეთანხმების შენარჩუნება;
- რიგითობის დამოუკიდებლობა;
- განუზღვრელობის ზომა $H(\tilde{R})$ უნდა აკმაყოფილებდეს ტოლობას

$$H(\tilde{R}) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \times H(\tilde{R}_j)\,;$$

- ყველა ექსპერტის შეფასებების თანაკვეტა უნდა წარმოადგენდეს აგრეგირების რეზულტატის ქვესიმრავლეს;
- თუ ყველა ექსპერტის შეფასებების თანაკვეტა ნულის ტოლია, კონსენსუსი მაინც მიღწევადია.

დამატებით შემოგვაქვს ასეთი თვისება:

- რაც უფრო შორსაა განლაგებული ექსპერტის შეფასება წარმომადგენელისაგან, მით უფრო ნაკლებად მნიშვნელოვანია მისი შეფასება.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში ტრაპეციული არამკაფიო შეფასებების აგრეგირების ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდი ინარჩუნებს შემდეგ მნიშვნელოვან თვისებებს.

თვისება 4.1. (შეთანხმების შენარჩუნება [1]). *თუ ყველა t,j-ისათვის $\tilde{R}_t = \tilde{R}_j$ მაშინ. $\tilde{R} = \tilde{R}_j$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ ყველა ექსპერტის შეფასება ერთმანეთის ტოლია, მაშინ აგრეგირების რეზულტატი უდრის თითოეულ შეფასებას.*

დამტკიცება. ეს პირდაპირ გამომდინარეობს შედეგი 4.2 და (4.2) ფორმულიდან. □.

ცხადია, რომ ქვემოთ მოყვანილი თვისება მართებულია.

თვისება 4.2. (რიგითობის დამოუკიდებლობა [1]). *ცხადია, რომ ჯგუფურ გადაწყვეტილებათა მიღების პროცესში ტრაპეციული არამკაფიო შეფასებების აგრეგირების მეთოდი არაა დამოკიდებული იმაზე თუ რა თანმიმდევრობით არის წარმოდგენილი ინდივიდუალური თვალსაზრისები ან შეფასებები მათი კომბინირების დროს. ეს ნიშნავს რომ, თუ* $\{(1), (2),\ldots, (m)\}$ *წარმოადგენს* $\{1,2,\ldots, m\}$*-ის*

გადანაცვლებას მაშინ $\tilde{R} = f\left(\tilde{R}_1, \tilde{R}_2, ..., \tilde{R}_m\right) = f\left(\tilde{R}_{(1)}, \tilde{R}_{(2)}, ..., \tilde{R}_{(m)}\right)$. *რეზულტატი აგრეთვე წარმოადგენს. რეზულტატი აგრეთვე შეთავსების მოთხოვნას წარმოადგენს.*

თვისება 4.3. *ვთქვათ ინდივიდუალური შეფასება* $\tilde{R}_j,\ j = \overline{1,m},\ m = 2,3,...$ *-ის განუზღვრელობის ზომა განსაზღვრულია რაღაც არეში შემდეგნაირი მიკუთვნების ფუნქციით* [1]:

$$H(\tilde{R}_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\tilde{R}_j}(x)dx\,. \tag{4.3}$$

განუზღვრელობის ზომა H,რომელიც განმარტებულია (4.3)*-ის მეშვეობით აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებას*:

$$H(\tilde{R}) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \times H(\tilde{R}_j)\,. \tag{4.4}$$

თვისება 4.4. *ყველა ექსპერტის შეფასებების საერთო თანაკვეთა ჩართულია აგრეგირების რეზულტატში. ეს ნიშნავს, რომ* $\bigcap_{j=1}^{m} \tilde{R}_j \subseteq \tilde{R}$

დამტკიცება. აქ ჩვენ გამოვიყენებთ 3.4 თვისების დამტკიცებას, რომელიც მოცემულია [8]-ში. ვთქვათ $\tilde{R}_j$ -ის α - ჭრილი იყოს $\tilde{R}_j^{\alpha} = \left[a_j^{\alpha}, b_j^{\alpha}\right]$ და $\bigcap_{j=1}^{m} \tilde{R}_j^{\alpha}$ არის $\left[a^{\alpha}, b^{\alpha}\right]$. მაშინ მივიღებთ

$$\tilde{R}^{\alpha} = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \cdot \tilde{R}_j^{\alpha} = \left[\sum_{j=1}^{m} \omega_j a_j^{\alpha}, \sum_{j=1}^{m} \omega_j b_j^{\alpha}\right].$$

რადგანაც

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j a_j^{\alpha} \le \max_j \left\{a_j^{\alpha}\right\} \le a^{\alpha} \text{ and } \sum_{j=1}^{m} \omega_j b_j^{\alpha} \ge \min_j \left\{b_j^{\alpha}\right\} \ge b^{\alpha}\,,$$

საბოლოოდ გვაქვს $\bigcap_{j=1}^{m} \tilde{R}_j \subseteq \tilde{R}$. □

თვისება 4.5 [8]. *თუ* $\bigcap_{j=1}^{m}\left(\tilde{R}_j\right) = 0$, *ამ შემთხვევაშიც კონსენსუსი* $\tilde{R}$ *მიღწევადია.*

თვისება 4.6. *რაც უფრო შორსაა განლაგებული ექსპერტის შეფასება წარმომადგენელისაგან, მით უფრო ნაკლებად მნიშვნელოვანია მისი შეფასება.*

დამტკიცება. ეს წინადადება უშუალოდ გამომდინარეობს ფორმულა (4.1)-იდან. □

VII ამოცანა: <u>წარმოდგენილი მეთოდის აგრეგირების არსებულ მეთოდებთან შედარებითი ანალიზის ჩატარება</u>

უპირველეს ყოვლისა შევასრულოთ რიცხობრივი შედარება ჩვენს მიერ შემოთავაზებული და [6]-ში და [8]-ში მოცემული მეთოდებით მიღებულ შედეგებს შორის. ამ ამოცანის გადასაწყვეტად გამოვიყენებთ მეტრიკას, დაფუძნებულ შემდეგნაირ იზოტონურ შეფასებაზე: $v\left(\tilde{R}\right)=\sum_{i=1}^{4} a_i$, სადაც $\tilde{R}=\left(a_i\right)$. მივიღებთ

$$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \left(\max\left\{a_1,b_1\right\},...,\max\left\{a_4,b_4\right\}\right),\ \ \tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \left(\min\left\{a_1,b_1\right\},...,\min\left\{a_4,b_4\right\}\right).$$

ადვილი დასანახია, რომ

$$v\left(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2\right)+v\left(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2\right)=v\left(\tilde{R}_1\right)+v\left(\tilde{R}_2\right)$$

და, ამავდროულად

$$\tilde{R}_1 \sqsubseteq \tilde{R}_2 \Rightarrow v\left(\tilde{R}_1\right) \le v\left(\tilde{R}_2\right).$$

აქედან გამომდინარე მეტრიკა განისაზღვრება ასეთი ფორმით:

$$\begin{aligned}\rho\left(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\right) &= v\left(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2\right)-v\left(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{4}\max\left\{a_i,b_i\right\}-\sum_{i=1}^{4}\min\left\{a_i,b_i\right\}\\ &= \sum_{i=1}^{4}\left|a_i-b_i\right|.\end{aligned}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ასე განსაზღვრული მეტრიკა ემთხვევა *ტონგის* და *ბონისონის* მიერ შემოთავაზებულ მეტრიკას, როცა $p=1$ [10]:

$$\rho\left(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2\right)=\left(\sum_{i=1}^{4}\left(|\,a_i-b_i\,|\right)^p\right)^{1/p}.$$

ახლა მივყვეთ მაგალითს, რომელიც შემოგვთავაზეს *ჰსუ* და *ჩენის* მიერ [6] და გამოყენებული იქნა *ლიის* პუბლიკაციაში [8].

მაგალითი 5.1

$\tilde{R}_1=(1,2,3,4),\ \tilde{R}_2=(1.5,2.5,3.5,5),\ \tilde{R}_3=(2,2.5,4,6)$.

ექსპერტების მნიშვნელოვანების წინასწარი გათვალისწინების გარეშე [6]-ში მიღებული აგრეგაციის რეზულტატი ასეთია:

(1.519, 2.356, 3.519, 5.038).

ექსპერტების მნიშვნელოვანების წინასწარი გათვალისწინების გარეშე [8]-ში მიღებული აგრეგაციის რეზულტატი ასეთია (p = 1):

(1.5005964, 2.3370414, 3,5005965, 5.0011930).

ახლა ჩავატაროთ გამოთვლები ჩვენს მიერ შემოთავაზებული ალგორითმის შესაბამისად:

ბიჯი 0: *ინიციალიზაცია:* $\left\{\tilde{R}_j\right\} = \left\{(1,\ 2, 3,\ 4),\ (1.5,\ 2.5,\ 3.5,\ 5),\ (2,\ 2.5,\ 4,\ 6)\right\}$ *, მისი რეგულაციის განსაზღვრა* $\left\{\tilde{R}_j^{'}\right\} = \left\{(1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (1.5,\ 2.5,\ 3.5,\ 5),\ (2,\ 2.5,\ 4,\ 6)\right\},\ \ j = \overline{1,3}$.
ავღნიშვნოთ j-იური ექსპერტის აგრეგაციის წონა ω_j-ით, ხოლო საბოლოო რეზულტატი $\tilde{R}$ *-ით.*

ბიჯი 1: *გამოვთვალოთ რეგულაციის- ის წარმომადგენელი ფორმულა* (3.10)*-ის საშუალებით* $\tilde{R}^* = \left(1.(5),\ 2.2(7),\ 3.(5),\ 5.(1)\right)$.

ბიჯი 2: *შევასრულოთ ბიჯი* 3 $\ j = \overline{1,3}$ *-სათვის.*

ბიჯი 3: *გამოვთვალოთ* $\Delta_j = \rho\left(\tilde{R}^*, \tilde{R}_j\right)$: Δ_1 = 2.4(9), Δ_2 = 0.(4), Δ_3 = 2. *რადგანაც ყველა* $\Delta_j > 0$ *მაშინ ფორმულა* (4.1*)-ის საშუალებით გამოვთვალოთ* ω_1 = 0.127, ω_2 = 0.714, ω_3 = 0.159 *და ფორმულა* (4.2*)-ის გამოყენებით მივიღებთ საბოლოო რეზულტატს:*

$\tilde{R}$ **= (1.516, 2.4365, 3.516, 5.032).**

ქვემოთ მოცემული ცხრილი წარმოგვიდგენს რეზულტატებს, რომლებიც მიღებულია [6], [8] -ის და ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ მეთოდების მიერ.

№	მეთოდი	$\tilde{R}$
1	ჰსუ, ჩენი [6]	**(1.519, 2.356, 3.519, 5.038**)
2	ლი [8]	**(1.5005964, 2.3370414, 3,5005965, 5.0011930)**
3	ცაზაძე	**(1.516, 2.4365, 3.516, 5.032)**

როგორც ვხედავთ სხვაობა ამ სამი მეთოდის გამოყენებით მიღებულ რეზულტატებს შორის უმნიშვნელოა.

5.1 მაგალითში ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების ერთობლიობა ემთხვევა მის რეგულაციას, ანუ ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების ერთობლიობა წარმოადგენს ერთმანეთში „ჩადგმული" რიცხვების ერთობლიობას. ჩვენს შემდგომ მაგალითში ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების ერთობლიობა განსხვავდება თავისი რეგულაციისაგან.

მაგალითი 5.2

დავუშვათ ექსპერტების შეფასებები ასეთია

$\tilde{R}_1 = (1.5, 2, 4, 5),\ \tilde{R}_2 = (1, 2, 3, 4),\ \tilde{R}_3 = (1, 1.5, 2.5.4.5)$.

ექსპერტების მნიშვნელოვანების წინასწარი გათვალისწინების გარეშე *ჰსუს* და *ჩენის* მეთოდით მიღებული აგრეგაციის რეზულტატი ასეთია (აღნიშვნებისთვისა და ალგორითმისათვის იხილე [6]):

$S(\tilde{R}_1,\tilde{R}_2)=S(\tilde{R}_2,\tilde{R}_1)=0.583,\ S(\tilde{R}_1,\tilde{R}_3)=S(\tilde{R}_3,\tilde{R}_1)=0.538,\ S(\tilde{R}_2,\tilde{R}_3)=S(\tilde{R}_3,\tilde{R}_2)=0.789$.
$A(E_1)$ = 0.5609, $A(E_2)$ = 0.6864, $A(E_3)$ = 0.664. RAD_1 = 0.293469, RAD_2 = 0.359135, RAD_1 = 0.347396.

$$\tilde{R} = (\mathbf{1.147, 1.83, 3.12, 4.467}).$$

ექსპერტების მნიშვნელოვანების წინასწარი გათვალისწინების გარეშე *ჰსუ-ს* და *ჩენის* მეთოდით მიღებული აგრეგაციის რეზულტატი ასეთია (აღნიშვნებისთვისა და ალგორითმისათვის იხილე [8]):

l	$W^{(l)}$	$\tilde{R}^{(l+1)}$
0	(1.0000000, 0.0000000, 0.0000000)	(1.5000000, 2.0000000, 4.0000000, 5.0000000)
1	(0.3510506, 0.3279889, 0.3209605)	(1.1845800, 1.8457060, 3.2148670, 4.5234550)
2	(0.3303143, 0.3363209, 0.3333647)	(1.1636520, 1.8331100, 3.1606160, 4.4939940)
3	(0.3289229, 0.3368307, 0.3342463)	(1.1622700, 1.8324350, 3.1569750, 4.4921040)
4	(0.3288307, 0.3368636, 0.3343057)	(1.1621780, 1.8323760, 3.1567330, 4.4919800)
5	(0.3288245, 0.3368658, 0.3343097)	(1.1621720, 1.8323730, 3.1567160, 4.4919710)
6	(0.3288241, 0.3368660, 0.3343099)	(1.1621720, 1.8323720, 3.1567150, 4.4919710)
7	(0.3288241, 0.3368660, 0.3343099)	(1.1621720, 1.8323720, 3.1567150, 4.4919710)

$$\tilde{R} = (\mathbf{1.162172, 1.832372, 3.156715, 4.491971}).$$

ახლა ჩავატაროთ გამოთვლები ჩვენს მიერ შემოთავაზებული ალგორითმის შესაბამისად:

ბიჯი 0: *ინიციალიზაცია:* $\{\tilde{R}_j\}=\{(1.5,\ 2,\ 4,\ 5),\ (1,\ 2,\ 3,\ 4),\ (1,\ 1.5,\ 2.5,\ 4.5)\}$, *მისი რეგულაციის განსაზღვრა* $\{\tilde{R}_j^{'}\}=\{(1,\ 1.5,\ 2.5,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3,\ 4.5),\ (1.5,\ 2,\ 4,\ 5)\},\ \ j=\overline{1,3}$. *ავღნიშვნოთ j-ური ექსპერტის აგრეგაციის წონა ω_j-ით, ხოლო საბოლოო რეზულტატი $\tilde{R}$ -ით.*

ბიჯი 1: *გამოვთვალოთ რეგულაციის-ის წარმომადგენელი ფორმულა* (3.10)*-ის საშუალებით* $\tilde{R}^*=(1.2142857,\ 2.2142857,\ 3.6428571,\ 4.4285714)$.

ბიჯი 2: *შევასრულოთ ბიჯი* 3 $j=\overline{1,3}$ *-სათვის.*

ბიჯი 3: *გამოვთვალოთ* $\Delta_j=\rho(\tilde{R}^*,\tilde{R}_j)$: Δ_1 = 1.4285715, Δ_2 = 1.4(9), Δ_3 = 2.1428571. *რადგანაც ყველა* $\Delta_j>0$ *მაშინ ფორმულა* (4.1*)-ის საშუალებით გამოვთვალოთ* ω_1 = 0.381818, ω_2 = 0.363636, ω_3 = 0.254546 *და ფორმულა* (4.2*)-ის გამოყენებით მივიღებთ საბოლოო რეზულტატს:*

$$\tilde{R} = (\mathbf{1.190909, 1.872727, 3.254545, 4.509091}).$$

ქვემოთ მოცემულ ცხრილში წარმოდგენილია რეზულტატები, რომლებიც მიღებულია [6], [8] -ის და ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ მეთოდების მიერ.

№	მეთოდი	$\tilde{R}$
1	ჰსუ, ჩენი [6]	**(1.147, 1.83, 3.12, 4.467)**
2	ლი [8]	**(1.162172, 1.832372, 3.156715, 4.491971)**
3	ცაბაძე	**(1.190909, 1.872727, 3.254545, 4.509091)**

როგორც ვხედავთ სხვაობა ამ სამი მეთოდის გამოყენებით მიღებულ რეზულტატებს შორის უმნიშვნელოა.

ახლა შევეცადოთ ჩვენს მიერ შემოთავაზებული მეთოდის ეფექტიანობის განსაზღვრა. უნდა ითქვას, რომ ჯგუფური გადაწყვეტილებების სხვადასხვა მეთოდების ეფექტიანობის შეფასება არაა რეგლამენტირებული და წარმოადგენს საკმაოდ რთულ პრობლემას.

ახლა ჩვენ ვაპირებთ ჯგუფური გადაწყვეტილებების მეთოდის ეფექტიანობის შეფასების რამოდენიმე დასაბუთებული კრიტერიუმის შემოღებას.

ჩვენი აზრით აგრეგირების მეთოდის ეფექტიანობის განსაზღვრელი კრიტრრიუმების რაოდენობა უნდ იყოს მინიმუმ ოთხი:

- პირველ რიგში მეთოდის უნივერსალობა, ანუ მისი შესაძლებლობა ძლევამოსილი იყოს იმ შემთხვევებში, როცა ექსპერტების შეფასებებს არ გააჩნიათ საერთო თანაკვეთა (თუ გააჩნია "+", ხოლო თუ არა "-");
- მეორე, საწყისი მონაცემების მინიმალური რაოდენობა. ვერსად ვერ გავექცევით ექსპერტების მიერ დასახელებულ ტრაპეციების წვეროების კოორდინატებს, ავღნიშნოთ მათი რაოდენობა *n* - ით, ვუწოდოთ მას ობიექტური მონაცემი. დავუმატოთ მას შეფასებათა შორის მსგავსების ზომა - *m* და მეთოდის ავტორის (ავტორების) მიერ შემოტანილი დამატებითი მონაცემები – *t*. ვფიქრობთ, რომ რაც უფრო ნაკლებია ავტორების მიერ შემოტანილი (არაექსპერტული) საწყისი მონაცემები, მით უფრო მაღალია მეთოდის ეფექტიანობა (იზომება $n+m+t$ საშუალებით);
- მესამე, ალბათ უნდა გავითვალისწინოთ მეთოდის ავტორის (ავტორების) მიერ შემოტანილი დამატებითი საწყისი მონაცემების ზემოქმედება საბოლოო რეზულტატზე (არა აქვს ზემოქმედება "+", საკმარისად მოქმედებს "-").
- მეოთხე, შემოთავაზებული მეთოდის რეალიზაციის ალგორითმის სიმარტივე (წარმოდგენილია წამებში (*s*) საყოველთაოდ ცნობილი პროგრამა MATLAB-ის მეშვეობით).

ამგვარად, ჩვენ განვსაზღვრეთ მეთოდის ეფექტიანობის შემდეგი ოთხი კტიტერიუმი:

I *უნივერსალობა* (*თვისებრივი კრიტერიუმი*);

II *საწყის მონაცემთა რაოდენობა* (*რაოდენობრივი კრიტერიუმი*);

III *საბოლოო მონაცემების საწყის მონაცემებზე დამოკიდებულების ხარისხი* (*თვისებრივი კრიტერიუმი*);

IV *ალგორითმის სიმარტივე* (*რაოდენობრივი კრიტერიუმი*).

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში წარმოდგენილია სამი მეთოდის შედარებითი ანალიზის საფუძველზე ზემოთ შემოთავაზებული კრიტერიუმების გამოყენებით მიღებული რეზულტატები:

მეთოდი/კრიტერიუმი	I	II	III	IV
ჰსუ, ჩენი [6]	"-"			
ლი [8]	"+"	n+m+2	"-"	მაგალითი 5.1: 2.103 s [15]
				მაგალითი 5.2: 2.104 s
ცაბაძე	"+"	n+m	"+"	მაგალითი 5.1: 0.061 s
				მაგალითი 5.2: 0.068 s

რადგანაც *ჰსუს* და *ჩენის* მეთოდი [6] ვერ აკმაყოფილებს I კრიტერიუმის მოთხოვნებს (ანუ ის ვერ მუშაობს ისეთ შემთხვევებში, როცა ექსპერტების შეფასებებს არ გააჩნია საერთო თანაკვეთა), მისი შედარება ჩვენს მეთოდთან სხვა კრიტერიუმებით არაა საჭირო და ჩვენ ვასკვნით, რომ ჩვენი მეთოდი უფრო ეფექტიანია. რაც შეეხება *ლის* მეთოდს [8], იგი უფრო სუსტია ჩვენს მეთოდზე **II**, **III**, **IV** კრიტერიუმების თანახმად (მაშინ როცა **I** კრიტერიუმის მიხედვით ორივე მეთოდი თანაბრად ფასეულია), ამითომ ჩვენი მეთოდი უფრო ეფექტიანია.

დისკუსია

აქ ჩვენ მიმოვიხილავთ შემოთავაზებული მეთოდის არსის მოკლე რეზიუმეს. ჩვენი მეთოდი დაფუძნებულია ზოგად მეტრიკაზე, რომელიც ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სიმრავლეზე ფარავს მეტრიკების მთელ კლასს.

შემოთავაზებულია ექსპერტების მნიშვნელოვანების ხარისხის განსაზღვრისათვის ახალი მიდგომა, რომელიც დამოკიდებულია ექსპერტების შეფასებების სიახლოვეზე ყველა ტრაპეციული არამკაფიო რიცხვების სასრული ერთობლიობის წარმომადგენელთან. შემოღებული მიდგომის რეალიზაციისათვის აგებულია არამკაფიო აგრეგირების ახალი სპეციალური ოპერატორი.

ნაჩვენებია, რომ მიუხედავად თავის სიმარტივისა, მეთოდი ინარჩუნებს დანარჩენი კარგად ცნობილი აგრეგირების მეთოდების ისეთ მნიშვნელოვან თვისებებს როგორიცაა: შეთანხმების შენარჩუნება, რიგითობის დამოუკიდებლობა, განუზღვრელობის ზომის სტანდარტული გამოთვლა და სხვა.

სხვადასხვა მეთოდების ეფექტიანობის დასადგენად შემოღებულია ოთხი კრიტერიუმი. აგრეთვე ჩატარებულია რამოდენიმე სხვა და ჩვენი მეთოდის მეშვეობით მიღებული რეზულტატების შედარებითი ანალიზი. დასაბუთებულია, რომ შემოღებული კრიტერიუმების მიხედვით ჩვენი მეთოდი უფრო ეფექტიანია, ვიდრე [6]-ში და [8]-ში წარმოდგენილი მეთოდები. მართლაც მცირე ან/და საშუალო განზომილების ამოცანებისათვის ჩვენი ალგორითმის რეალიზაცია შესაძლოა უბრალო კალკულატორის საშუალებით.

შემოთავაზებული მიდგომა შეიძლება გამოყენებული იქნას იმ შემთხვევებშიც, როდესაც ექსპერტების შეფასებები მოცემულია სამკუთხა ან ინტერვალური არამკაფიო რიცხვების სახით.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] A. Bardossy, L. Duckstein and I. Bogardi, Combination of fuzzy numbers representing expert opinions, Fuzzy Sets and Systems 57 (1993) 173-181.
[2] G. Beliakov, Definition of general aggregation operators through similarity relations, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000) 437-453.
[3] D. Dubois, E. Kerre, R. Mesiar, Fuzzy interval analysis, in: D. Dubois, H. Prade (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000, pp. 483–581.
[4] D. Dubois, H. Prade, Systems on linear fuzzy constraints, Fuzzy Sets and Systems 3(1) (1980) 37-48.
[5] S. Heilpern, Representation and application of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 91 (1997) 259–268.
[6] H.-M. Hsu, C.-T. Chen, Aggregation of fuzzy opinions under group decision making, Fuzzy Sets and Systems 79 (1996) 279-285.
[7] A. Kauffman and M.M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1985).
[8] H.-S. Lee, Optimal consensus of fuzzy opinions under group decision making environment, Fuzzy Sets and Systems 132 (2002) 303 – 315.
[9] M. Mizumoto, K. Tanaka, Algebraic properties of fuzzy numbers, in: *Proc. IEEE Int. Conf. Cybernetics and Society* (1976) 559-563..
[10] R.M. Tong, P.P. Bonissone, A linguistic approach to decision making with fuzzy sets, IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 10 (1980) 716–723.
[11] T. Tsabadze, The coordination index of finite collection of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 107 (1999) 177-185.
[12] T. Tsabadze, A method for fuzzy aggregation based on grouped expert evaluations, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 1346-1361.
[13] T. Tsabadze, A new approach to the establishment of electricity tariffs based on fuzzy sets, Georgian Engineering News, 1 (2007) 113-119.
[14] J. Vaníček, I. Vrana and S. Aly, Fuzzy aggregation and averaging for group decision making: A generalization and survey, Knowledge-Based Systems 22 (2009) 79-84.
[15] Y.-M. Wang, C. Parkan, Two new approaches for assessing the weights of fuzzy opinions in group decision analysis, Information Sciences, 176 (2006) 3538-3555.
[16] Y.-M. Wang, C. Parkan, A general multiple attribute decision-making approach for integrating subjective preferences and objective information, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 1333-1345.