

ფუნდამენტური კვლევებისათვის სახელმწიფო სამეცნიერო გრანტების კონკურსი

ხელშეკრულების ნომერი:

FR/74/5-100/12

131/25

საგრანტო პროექტის სათაური:

„სიმრავლებისა და ფუნქციების ზომადობის ცნების ზოგიერთი მოდიფიკაცია და მათი გამოყენებები“

წამყვანი ორგანიზაცია: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გრანტის შემსრულებლები:

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: გოგი ფანცულაია - სტუ-ს პროფესორი

ძირითადი შემსრულებლები:

2015-2016 წლებში: ალექსი კირთაძე -სტუ-ს პროფესორი

2017-2018 წწ. ალექსანდრე ხარაზიშვილი (ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერ-თანამშრომელი);

მარიამ ბერიაშვილი-ამჟამად სტუ-ს მოწვეული ასოცირებული პროფესორი.

რეზიუმე

სიმრავლეთა და ფუნქციათა ზომადობის ფუნდამენტურ კონცეფციებთან დაკავშირებული სხვადასხვა საკითხების კვლევა არის მნიშვნელოვანი თანამედროვე მათემატიკის მთელი რიგი ისეთი განშტოებების შემდგომი განვითარებისათვის, როგორცაა: ნამდვილი და კომპლექსური ანალიზი, აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი, უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეთა ანალიზი, ერგოდულობის თეორია, ალბათობის თეორია, შემთხვევით პროცესთა თეორია, თამაშთა თეორია, ზოგადი ტოპოლოგია და სხვა. ამასთან დაკავშირებით, განსახილველი ამოცანების სპეციფიკიდან გამომდინარე, ზომადობის ცნება შეიძლება განხილულ ან შემოღებულ იქნას განსხვავებული ან მოდიფიცირებული სახით. პროექტის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს უსასრულო-განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში ზომადობისა და ზომის თვალსაზრისით მცირე (უგულებელყოფადი) სიმრავლეთა ცნებებთან დაკავშირებული სხვადასხვა კონცეფტუალური მიდგომების შემუშავება. პროექტის უმთავრესი ნაწილი ეძღვნება ასეთ სივრცეებში სჰყ-სიმრავლეთა გამოკვლევასა და შესწავლას. shy-სიმრავლეთა თვისებების შესასწავლად და მათი დახასიათების მისაღებად განვითარებული იქნება შესაბამისი მეთოდები. განსაკუთრებული ყურადღება დაეთმობა ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეთა კონკრეტულ კლასებში ზომის თვალსაზრისით მცირე სიმრავლეებს შორის ურთიერთმიმართებების აღწერას.

პროექტის დიდი ნაწილი აგრეთვე დაეთმობა ზომადობის კონცეფციის ერთ მოდიფიცირებულ ვერსიას, რომლის თანახმადაც, იმის ნაცვლად, რომ განვიხილოთ ზომადობის ცნება ბაზისურ სივრცეზე განსაზღვრული ერთი კონკრეტული ზომის მიმართ, ჩვენ ვიხილავთ ზომადობის განზოგადებულ ცნებას E-ზე მოცემულ რაიმე ზომათა M კლასის მიმართ. ამ მოდიფიცირებული ვერსიის თანახმად, E-ს ყოველი ქვესიმრავლე (შესაბამისად, E-ზე განსაზღვრული ყოველი ნამდვილ-მნიშვნელობიანი ფუნქცია) ხდება ან აბსოლუტურად ზომადი კლასის მიმართ, ან ფარდობითად ზომადი M კლასის მიმართ, ან აბსოლუტურად არაზომადი იმავე ზომათა კლასის მიმართ. კერძოდ, M კლასის როლში შესამღებელია აღებულ იქნას E-ზე განსაზღვრულ ყველა არანულოვან სიგმა-სასრულო უწყვეტ (ე.ი. დიფუზიურ) ზომათა კლასი (). ბევრ მნიშვნელოვან შემთხვევაში, ამოსავალი სიმრავლე აღჭურვილია დამატებითი მათემატიკური სტრუქტურებით, მაგალითად, რაიმე ტოპოლოგიით ან გარდაქმნათა ჯგუფით. პირველ შემთხვევაში, ბუნებრივია განვიხილოთ სიმრავლეთა და ფუნქციათა ზომადობა განსაზღვრულ ყველა არანულოვან სიგმა-სასრულო ბორელის უწყვეტ ზომათა გასრულებების კლასის მიმართ. მეორე შემთხვევაში, ბუნებრივია განვიხილოთ ზომადობა E-ზე განსაზღვრულ ყველა არანულოვან სრულ სიგმა-სასრულ ზომათა ისეთი კლასის მიმართ, რომელშიც შემავალი ყოველი ზომა არის ინვარიანტული (ან, უფრო ზოგადად, კვაზინვარიანტული) ჯგუფის ყველა ელემენტის მიმართ.

პროექტი ახდენს ასეთი კონცეფციის მნიშვნელობის ილუსტრირებას და წარმოადგენს ზემოთ მოყვანილი მიდგომის მთელ რიგ გამოყენებებს მათემატიკური ანალიზის კონკრეტულ საკითხებში. პროექტის ჩარჩოებში ჩვენ ვგეგმავთ შემდეგი შედეგების მიღებას:

(1) უსასრულოგანზომილებიან ბანახის სივრცეთა საკმარისად ფართე კლასებისათვის ბორელის ინვარიანტული ზომების არსებობისა და ერთადერთობის ეფექტური კრიტერიუმების პოვნა;

(2) მიმართების დადგენა -სივრცეზე განსაზღვრულ არატრივიალურ სიგმა-სასრულ (ყველგან მკვრივი ქვესივრცის მიმართ) ინვარიანტულ ბორელის ზომებსა და ნამდვილ ღერძზე განსაზღვრული ნორმირებული დიფუზიური ბორელის ზომების -ხარისხებს შორის;

(3) უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში მეტრიკული ტრანზიტულობისა და ერთადერთობის თვისებების მქონე ინვარიანტული ზომების არასეპარაბელურ გაგრძელებათა ფართე კლასის აგება;

(4) კლასიკურ სიმრავლეთა (ბერშტეინის სიმრავლეები, ვიტალის სიმრავლეები, ლუზინის სიმრავლეები, სერპინსკის სიმრავლეები, და სხვა) ზოგიერთი თვისების დადგენა და მათი გამოყენება ფუნქციათა აბსოლუტურად ზომადობის, ფარდობითად ზომადობისა და აბსოლუტურად არაზომადობის საკითხებში;

(5) ამოხსნად ჯგუფებზე განსაზღვრული არასეპარაბელური ზომების ნამრავლის ერთადერთობის სხვადასხვა კრიტერიუმის დადგენა;

(6) ინვარიანტული (კვაზინვარიანტული) ზომების მეტრიკული ტრანზიტულობისა და სუსტად მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისებებს შორის ურთიერთმიმართების დადგენა;

(7) სივრცეში ზოგიერთი ფაზური მოძრაობის დახასიათება სტანდარტული და ორდინალური “ლებეგის ზომების” ტერმინებში;

(8) გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფებით აღჭურვილ სივრცეებში აბსოლუტურად უგულვებელყოფადი სიმრავლეების სტრუქტურის აღწერა და ასეთ სიმრავლეთა გამოყენებები ინვარიანტული (კვაზინვარიანტული) ზომების გაგრძელებების ასაგებად;

(9) არათვლად კომპუტატიურ ჯგუფებზე აბსოლუტურად არაზომადი ჰომომორფიზმების არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობების დადგენა;

(10) გარდაქმნათა სხვადასხვა ჯგუფებით აღჭურვილ სივრცეებში თითქმის ინვარიანტულ სიმრავლეთა ზოგიერთი თვისების დადგენა და ამ თვისებების გამოყენებები სიგმა-სასრული ინვარიანტული ან კვაზინვარიანტული ზომების გაგრძელებადობის საკითხში.

პროექტის ფარგლებში გამოქვეყნდა სამეცნიერო შრომები შემდეგ ჟურნალებში:

Communications in Mathematical Analysis; Functiones et Approximatio; Journal of Statistics: Advances in Theory and Applications; Monte Carlo Methods Applications; Georgian Mathematical Journal; Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute, Elsevier; Proceedings A. Razmadze Mathematical Institute, TSU; Reports of Enlarged Sessions of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, TSU და სხვა.

პროექტის ფარგლებში გრანტის შემსრულებლებმა მონაწილეობა მიიღეს შემდეგ საერთაშორისო კონფერენციებში:

International Conference on Geometry and Applications, Vanna (Bulgaria), 2015, 2017; Winter School in Abstract Analysis, Prague, 2016, 2017; საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირისა და მექანიკოსთა კავშირის მე-6 საერთაშორისო კონფერენცია, ბათუმი, 2015; თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის გაფართოებული სხდომები, 2014, 2015, 2016, თბილისი.

გამოცემული იქნა ერთი მონოგრაფია:

A. Kharazishvili, Set Theoretical Aspects of Real Analysis, Chapman and Hall/CRC, 2014.