სივრცით ორგანზომილებიანი ევოლუციური განტოლებისთვის შეშფოთებათა ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაცია

ეკატერინე გულუა

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია შეშფოთებათა ალგორითმი სივრცით ორგანზომილებიანი ევოლუციური განტოლებისათვის. სამშრიანი სქემა დაიყვანება ორ ორშრიან სქემაზე. ამ ორშრიანი სქემების ამონახსნთა კომბინაციით მიიღება საწყისი ამოცანის ამონახსნი. მეორე ორშრიანი სქემის ამონახსნი აუმჯობესებს პირველის ამონახსნის ხდომილებას ერთი რიგით. საბოლოო ამონახსნი ინარჩუნებს საწყისი სამშრიანი სქემის სიზუსტეს. მიღებულია ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაციის შედეგები.

საკვანძო სიტყვები: ევოლუციური ამოცანა. სხვაობიანი ნახევრადდისკრეტული სქემა. მცირე პარამეტრის ალგორითმი. რიცხვითი რეალიზაცია.

1. შესავალი

ევოლუციური ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება და გამოკვლევა განხილულია მრავალ სახელმძღვანელოსა თუ მონოგრაფიებში. მათ შორის ისეთ კარგად ცნობილ წიგნებში, როგორებიც არიან მაგალითად, ს.კ. გოდუნოვი და ვ.ს. რიაბენკი [1], გ.ი. მარჩუკი [2], რ.რიხტმაიერი და კ.მორტონი [3], ა.ა. სამარსკი [4], ნ.ნ. იანენკო [5] და სხვა.

ცნობილია, რომ მრავალშრიანი სხვაობიანი სქემების რეალიზაციის სირთულე იზრდება როგორც შრეების ზრდასთან ერთად, აგრეთვე პარაბოლური განტოლებების სივრცითი ცვლადების ზრდასთან ერთად. ამ სირთულეების გადალახვის ერთ-ერთ ქმედით მეთოდათ მიიჩნევა რთული სქემის დაყვანა მარტივ სქემებზე.

წარმოდგენილი ნაშრომი ეძღვნება სივრცით ორგანზომილებიან ევოლუციური მაოცანის მიახლოებით ამოხსნას [6], [7] ნაშრომებში შემოთავაზებული მეთოდით. ნაშრომში მოყვანილია რიცხვითი გათვლები და მათი ანალიზი. შესაბამისი ალგორითმი რეალიზებულია MatLab გარემოში,

2. ევოლუციური განტოლებისათვის ალგორითმის ფორმულირება და მეთოდის ცდომილების შეფასება

განვიხილოთ შეშფოთებათა ალგორითმი შემდეგი ევოლუციური ამოცანისთვის

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad t \in]0,T], \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2}$$

სადაც A დიფერენციალური ოპერატორია X ბანახის სივრცეში; $f(t)$ – უწყვეტად დიფერენცირებადი ფუნქციაა; u_0 –მოცემული ვექტორია; $u(t)$ –საძიებო ფუნქციაა.

შემოვიღოთ $[0,T]$ -ზე ბადე $t_k = k^2$, $k = 0,1,\dots,n$, $^2 = T/n$ ბიჯით. შეშფოთებათა ალგორითმის გამოყენებით (იხ.[7]) მივიღებთ (1)-(2) ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს

$$v_k = u_k^{(0)} + \frac{2}{2} u_k^{(1)}, \quad k = 2, \ldots, n, \tag{3}$$

სადაც $u_k^{(0)}$, $u_k^{(1)}$ სიდიდეებს განვსაზღვრავთ შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან :

$$\frac{u_k^{(0)} - u_{k-1}^{(0)}}{2} + Au_k^{(0)} = f_k, \tag{4}$$

$$\frac{u_k^{(1)} - u_{k-1}^{(1)}}{2} + Au_k^{(1)} = -\frac{u_k^{(0)} - 2u_{k-1}^{(0)} + u_{k-2}^{(0)}}{2^{\,2}}, \tag{5}$$

ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას (იხ.[7]):

$$\left\| u(t_k) - v_k \right\| = O(2^{\,2}), \qquad k = 2, \ldots, n-1. \tag{6}$$

შევნიშნოთ, რომ (5) განტოლებაში სასტარტო ვექტორი $u_1^{(1)}$ განისაზღვრება ტოლობიდან $v_1 = u_1^{(0)} + \frac{2}{2} u_1^{(1)}$, სადაც $u_1^{(0)}$ ვპოულობთ (4) განტოლებიდან, v_1 - ის მნშვნელობათ კი შეიძლება ავიღოთ $u(t_1)$ -ს მნიშვნელობა $O(2^{\,2})$ სიზუსტით (მაგალითად შესაძლებელია ვისარგებლოთ კრანკ-ნიკოლსონის სქემით (იხ.მაგ.[2])).

3. ალგორითმის ფორმულირება სივრცით ორგანზომილებიანი პარაბოლური განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანის რიცხვითი ამოხსნისათვის

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + f(x,y,t), \tag{7}$$

$$x \in [0,1], \quad y \in [0,1], \quad t \in]0,1],$$

$$u(x,y,0) = \text{¨}\,(x,y), \quad u(0,y,t) = u(1,y,t) = u(x,0,t) = u(y,1,t) = 0 \tag{8}$$

სადაც $f(x,y,t),\ \text{¨}\,(x,y)$ უწყვეტია თავისი არგუმენტის მიმართ, $u(x,y,t)$ საძიებო ფუნქციაა. იგულისხმება, რომ დაცულია შეთანხმებულობის პირობა

$$\text{¨}\,(0,y) = \text{¨}\,(1,y) = \text{¨}\,(x,0) = \text{¨}\,(x,1) = 0 .$$

ვიპოვოთ (7), (8) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი შეშფოთებათა ალგორითმის გამოყენებით (იხ.პ.2). შემოვიღოთ $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ -ზე ბადე $^2 = 1/n_t$, $h_x = 1/n_x$, $h_y = 1/n_y$ ბიჯებით შესაბამისად t, x და y ცვლადებისათვის, $t_k = k^2$, $x_i = ih$, $y_j = jh_j$, $k = 0,1,\ldots,n_k$, $i = 0,1,\ldots,n_x$, $j = 0,1,\ldots,n_j$. გამოვიყენოთ პირველი რიგის წარმოებულის აპროქსიმაცია შესაბამისად x და y ცვლადების მიმართ

$$\left. \frac{d^2 u(t_k, x, y_j)}{dx^2} \right|_{x = x_i} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_x^{\,2}} + O(h_x^{\,2}), \tag{9}$$

$$\left. \frac{d^2 u(t_k, x_i, y)}{dy^2} \right|_{y = y_j} = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_y^{\,2}} + O(h_y^{\,2}), \tag{10}$$

სადაც $u^k{}_{i,j} = u(t_k, x_i, y_j)$.

მაშინ (4),(5) -დან, (9),(10) აპროქსიმაციის გათვალისწინებით, შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგი განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{u_{i,j}^{k\,(0)} - u_{i,j}^{k-1\,(0)}}{{}^{2}} = \frac{u_{i+1,j}^{k\,(0)} - 2u_{i,j}^{k\,(0)} + u_{i-1,j}^{k\,(0)}}{h_i^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k\,(0)} - 2u_{i,j}^{k\,(0)} + u_{i,j-1}^{k\,(0)}}{h_j^2} + f_{i,j}^{k}, \qquad (11)$$

$$k = 1,\dots,n_t\,, \quad i = 1,\dots,n_x - 1, \quad j = 1,\dots,n_y - 1,$$

$$\frac{u_{i,j}^{k\,(1)} - u_{i,j}^{k-1\,(1)}}{{}^{2}} = \frac{u_{i+1,j}^{k\,(1)} - 2u_{i,j}^{k\,(1)} + u_{i-1,j}^{k\,(1)}}{h_i^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k\,(1)} - 2u_{i,j}^{k\,(1)} + u_{i,j-1}^{k\,(1)}}{h_j^2} - \frac{u_{i,j}^{k\,(0)} - 2u_{i,j}^{k-1\,(0)} + u_{i,j}^{k-2\,(0)}}{{}^{2}\,{}^{2}}, \qquad (12)$$

$$k = 2,\dots,n_t\,, \quad i = 1,\dots,n_x - 1, \quad j = 1,\dots,n_y - 1,$$

სადაც $f_{i,j}^{k} = f(t_k, x_i, y_j)$.

ნაშრომში [7] დამტკიცებული შეფასების თანახმად (იხ.პ.1)

$$v_{i,j,k} = u_{i,j}^{k\,(0)} + \frac{{}^{2}}{2} u_{i.j}^{k\,(1)}, \qquad i = 1,\dots,n_x - 1, \;\; j = 1,\dots,n_y - 1, \;\; k = 2,\dots,n_t \qquad (13)$$

არის (7),(8) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი და ადგილი აქვს შეფასებას

$$|\, u(x_i, y_j, t_k) - v_{i,j,k} \,| = O({}^{2}\,{}^{2} + h_x^2 + h_y^2)\,,$$

სადაც $u(x_i, y_j, t_k)$ არის (7)-(8) უწყვეტი ამოცანის ამონახსნი ჩვენს მიერ შემოღებული ბადის (x_i, y_j, t_k) წერტილებში.

განვიხილოთ, სამოდელო ამოცანებზე MatLab გარემოში (7)–(8) ამოცანისათვის (11)–(13) შეშფოთებათა ალგორითმის რიცხვითი რეალიზაცია.

ამოცანა 1: $u(x, y, t) = 4xy \sin 3®t\ (x^2 - 1)(y^2 - 1)$

ბადის ბიჯი $^{2} = 0{,}125, \quad h_x = h_y = 0{,}1$.

პროგრამის რეალიზაციის შედეგად გვაქვს:

$$\Delta_1 = 0.1269, \;\; \Delta_2 = 0.0784.$$

ამოცანა 2: $u(x, y, t) = 5 \sin 2®x\ \sin 4®y \sin 3®t$,

ბადის ბიჯი $^{2} = 0{,}125, \quad h_x = h_y = 0{,}02$.

გათვლების შედეგად მივიღებთ:

$$\Delta_1 = 0.1128, \;\; \Delta_2 = 0.0820.$$

აქ Δ_1, Δ_2, (11)–(13) შეშფოთებათა ალგორითმით, (7)–(8) ამოცანების ამოხსნის რიცხვითი რეალოზაციის შედეგად პირველ $(u_{i,j}^{k\,(0)})$ და მეორე $(u_{i,j}^{k\,(0)} + \frac{{}^{2}}{2} u_{i.j}^{k\,(1)})$ ეტაპებზე მიღებული მიახლოებითი ამონახსნის ცდომილებებია.

4. დასკვნა

შეშფოთებათა ალგორითმი ჩამოყალიბებულია სივრცით ორგანზომილებიანი პარაბოლური განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის. რიცხვითი რეალიზაციიდან ჩანს მისი შედეგების თანხვედრა თეორიულ შედეგებთან. ალგორითმი საშუალებას გვაძლევს პარაბოლური განტოლების სამშრიანი სქემიდან გადავიდეთ (ორი) იდენტური მარჯვენა მხარის მქონე ორშრიან სქემებზე ცდომილების სიზუსტის შენარჩუნებით. ყოველივე ეს გაცილებით ამარტივებს, როგორც ალგორითმიზაციის პროცესს, აგრეთვე ეკონომიურია კომპიუტერული რესურსების გამოყენების

თვალსაზრისით. ალგორითმი აგრეთვე საინტერესოა პარალელური გამოთვლების წარმოების თვალსაზრისითაც.

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Годунов С.К., Рябенький В.С. (1973). Разностные схемы. -М.: Наука

2. Марчук Г.И. (1977). Методы вычислительной математики. -М.: Наука

3. Рихтмайер Р., Мортон К. (1972). Разностные методы решения краевых задач. -М.: Мир

4. Самарский А.А. (1977). Теория разностных схем. -М.: Наука

5. Яненко Н.Н. (1967). Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука

6. Агошков В.И., Гулуа Д.В. (1990). Алгоритм возмущений для реализации конечномерных аппроксимаций задач. -М.: OBM AH CCCP.

7. Gulua D.V., Rogava J.L. (2016). On the Perturbation Algorithm for the Semidiscrete Scheme for the Evolution Equation and Estimation of the Approximate Solution Error Using Semigroups.// Comp.Math. and Math. Phys. Vol. 56, No. 7, pp. 1269-1292.

THE NUMERICAL REALIZATION OF THE PERTURBATION ALGORITHM FOR THE THREE-LEVEL SCHEME FOR SPATIAL TWO DIMENSIONAL EVOLUTIONARY EQUATION

Gulua Ekaterine

Georgian Technical University

Summury

In the present paper is considered the perturbation algorithm for the three-level scheme for spatial two dimensional variable parabolic equation. Using the perturbation algorithm, the three-level scheme is reduced to two two-level schemes. An approximate solution of the original problem is constructed by means of the solutions of these schemes. Note that the first two-layer scheme gives an approximate solution to an accuracy of first order, whereas the second scheme is the refinement of the preceding solution by one order. We also consider the results of the numerical experiments.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННО ДВУМЕРНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Гулуа Е.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Рассмотрен алгоритм возмущений для трёхслойной схемы параболического уравнения. Трёхслойная схема сведена к двум двухслойным схемам. Комбинацией решений этих схем получаем приближённое решение исходной задачи. Решение первой двухслойных схемы есть приближённое решение с первым порядком аппрксимации. С помощью решения второй схемы улучшаем порядок апроксимации до второго порядка. Получены результаты численной реализации рассматриваемого алгоритма.