ფიბონაჩის რიცხვები და მათი როლი ბუნების მოვლენებში

რუსუდან გოგიბერიძე
სსიპ აფხაზეთის N2 საჯარო სკოლა

რეზიუმე

განხილულია შუა საუკუნეების ევროპის პირველი უდიდესი მეთემატიკოსის ლეონარო პიზელის - ფიბონაჩის სახელით ცნობილი რიცხვები, მიმდევრობა. ფიბონაჩიმ ჩამოაყალიბა ამოცანა ბოცვრების პოპულაციის იდეალიზებული გამრავლების შესახებ, რომელმაც დაუდო სათავე ფიბონაჩის რიცხვებს: ყველა მხრიდან შემოღობილ ვაგონში მოათავსეს ერთი წყვილი დედალ-მამალი ბოცვერი, ცნობილია, რომ ყოველი წყვილი ყოველი თვის განმავლობაში მეორე თვიდან დაწყებული კიდევ ერთ წყვილს წარმოშობს. რამდენი წყვილი ბოცვერი იქნება ერთი წლის შემდეგ თუ იგულისხმება, რომ ბოცვრები არ იღუპებიან (ბიოლოგიურად არარეალურია). ნაშრომში ნაჩვენებია კანონზომიერებანი ბუნების მოვლენებში, რომლებშიც ფიბონაჩის რიცხვები თამაშობს მნიშველოვან როლს, ერთ-ერთია ფილოტაქსისი - ფოთლების განლაგების წესი.

საკვანძო სიტყვები: ფიბონაჩის მიმდევრობა. ფილოტაქსისი. ფოთლების განლაგების ფორმა. ფოთლების სპირალური ფორმა. ოქროს კვეთა.

1. შესავალი

სამყარო, რომელშიც ჩვენ ვცხოვრობთ, საოცრებებითაა აღსავსე, მისგან მდიდრდება ადამიანი ახალი და, ზოგჯერ გასაოცარი, ცოდნით. კაცობრიობის უდიდესი მოაზროვნეები ცდილობდნენ გაეაზრებინათ გარემომცველი სამყაროს საყოველთაო ჰარმონიის ფენომენი. ყველაზე არგუმენტირებულია მათემატიკოსების შეხედულებები, მათ რიცხვების ენით გამოხატეს ეს საუკუნოვანი ძიებანი. სამყაროს შემეცნების ერთ-ერთი საოცრების „ოქროს კვეთის“ („ოქროს შეფარდების“, „ღვთაებრივი პროპორციის“) მათემატიკური თეორიის სისტემატიზირებულ საფუძვლებს უკავშირებენ შუა საუკუნეების ევროპელი მათემატიკოსის **ლეონარდო ფიბონაჩის** სახელს (სურ.1).

სურ.1. ლ. ფიბონაჩი

ტრადიციულადაა მიღებული, რომ ცნება „ოქროს კვეთა“ პირველად შემოიღო პითაგორამ და ეს ცოდნა მან ძველი ბაბილონელებისა და ეგვიპტელებისაგან შეიძინა. ფარაონის ხეოფსის პირამიდის ტაძრის აგებულება, სამკაულებისა და საყოფაცხოვრებო ნივთების პროპორციები ცხადყოფენ, რომ უძველესი ეგვიპტელები კარგად ფლობდნენ და აქტიურად იყენებდნენ ოქროს კვეთის პრინციპებს. ზოგიერთი ვერსიით ტერმინი „ოქროს კვეთა“ შემოიღო ლეონარდო და ვინჩიმ. მან აღმოაჩინა, რომ ამ პროპორციის პირობებში სისტემის ელემენტები ქმნიან ყველაზე უფრო სრულყოფილ ფორმებს და აღწევენ უმაღლეს ჰარმონიას ფერწერის, ქანდაკებისა თუ არქიტექტურის შედევრებში. შუა საუკუნეების ევროპის პირველი უდიდესი მათემატიკოსი **ლეონარდო პიზელი** დაიბადა დაახლოებით 1170 წელს პიზის რესპუბლიკის ქ. პიზაში. იგი

ცნობილია ფიბონაჩის სახელით. ფიბონაჩი სავარაუდოდ „ბონაჩის შვილს“ უნდა ნიშნავდეს. მისი მამა **გილერმო ბონაჩი** (კეთილის მყოფელი) იყო პიზელი კომერსანტი. ამის გამო იგი ხშირად ჩადიოდა ალჟირში, ხოლო 1152 წლიდან წარმოადგენდა პიზის სავაჭრო კოლონიას ჩრდილოეთ აფრიკაში. მამის სურვილით ლეონარდო სწავლობდა მათემატიკას არაბ მასწავლებლებთან. მან ბევრი იმოგზაურა ეგვიპტეში, სირიასა და ბიზანტიაში, ეცნობოდა არაბი მათემატიკოსების მუჰამედ ბენ მურა ალ-ხვარაზმისა და აბუ კამილის მიღწევებს.

მოგვიანებით იგი ეწვია ეგვიპტეს, სირიას, ბიზანტიას, სიცილიას. შეისწავლა აგრეთვე ანტიკური სამყაროს და ინდოეთის მათემატიკოსების ნაშრომები. მათემატიკის სიყვარული განპირობებული იყო პრაქტიკული მოთხოვნილებებით, დაემყარებინა საქმიანი კონტაქტები, საქმიან საზოგადოებასთან მიღებული ცოდნის საფუძველზე ფიბონაჩიმ დაწერა რიგი მათემატიკური ტრაქტატები, რომლებიც წარმოადგენდნენ შუა საუკუნეების დასავლეთ ევროპის მეცნიერების მიღწევებს. ფიბონაჩიმ გამოსცა წიგნები: არითმეტიკაში, ალგებრასა და მათემატიკის სხვა დისციპლინებში. მისი ძირითადი შრომებია:

1. აბაკის წიგნი - „liber abacci” - არითმეტიკის ტრაქტატი, დათვლის დაფა, 1202 წელი, დამატებებით გამოცემულია 1228 წელს.
2. პრაქტიკული გეომეტრია - 1220 წელი.
3. კვადრატული განტოლებები - „liber quadratorum” , 1225 წელი.
4. ყვავილი - „Flor“, 1225 წელი.

მასში ფიბონაჩიმ გააანალიზა კუბური განტოლება $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, რომელიც მას იოანე პალერმომ შესთავაზა იმპერატორ ფრიდრიხის მათემატიკურ შეჯიბრზე. თვით პალერმომ ეს ამოცანა გადმოიტანა ომარ ხაიამის ტრაქტატიდან „ალგებრის ამოცანების დამტკიცება“. ლეონარდო პიზელმა გამოიკვლია ეს განტოლება და უჩვენა, რომ მისი ფესვი არ შეიძლება იყოს რაციონალური ან ჰქონდეს კვადრატული ირაციონალობის სახე, რომლებიც გვხვდება ევკლიდეს საწყისების მეათე წიგნში, შემდეგ კი მოძებნა მისი ფესვის მიახლოებითი მნიშვნელობა 60 ციფრის სიზუსტით, თუმცა არ აჩვენა მისი პოვნის მეთოდი.

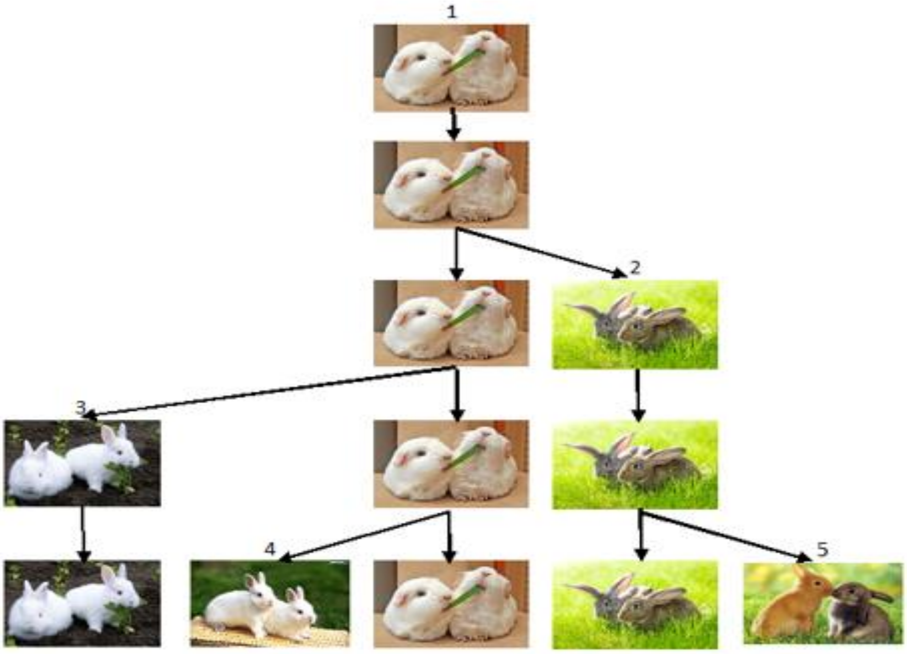
5. „Di minor guista“, დაკარგულია.
6. კომენტარები ევკლიდეს საწყისების მე-10 წიგნთან დაკავშირებით, დაკარგულია.
7. წერილი თეოდოროკოს, 1225 წელი.
8. კუბური განტოლებების ანალიზი.

1202 წელს გამოცემულ წიგნში „liber abacci“-ს მან ჩამოაყალიბა ამოცანა ბოცვრების გამრავლების შესახებ, რომელმაც სათავე დაუდო დღეს ფიბონაჩის სახელით ცნობილ რიცხვებს. იგი განიხილავს ბოცვრების პოპულაციის იდეალიზირებულ განვითარებას (ბიოლოგიურად არარეალურს). ყველა მხრიდან შემოღობილ ვაგონში მოათავსეს ერთი წყვილი დედალ-მამალი ბოცვერი. ცნობილია, რომ ყოველი წყვილი ყოველი თვის განმავლობაში (მეორე თვიდან დაწყებული) კიდევ ერთ წყვილს წარმოშობს. რამდენი ბოცვერი იქნება ერთი წლის შემდეგ (იგულისხმება, რომ ბოცვრები არ იღუპებიან) [6,7].

წყვილთა რაოდენობის ცვლილება ასე მიმდინარეობს :

- პირველი თვის დასაწყისში არის მხოლოდ ერთი ახალშობილი წყვილი (1);
- პირველი თვის ბოლოს კვლავ ბოცვრების ერთი წყვილია, რომლებიც შეწყვილდება (ნახ.1-1);
- მეორე თვის ბოლოს წყვილი წარმოშობს ახალ წყვილს და კვლავ შეწყვილდება (2);

- მესამე თვის ბოლოს პირველი წყვილი წარმოშობს კიდევ ერთ ახალ წყვილს და შეწყვილდება, მეორე წყვილი კი მხოლოდ შეწყვილდება (3);
- მეოთხე თვის ბოლოს პირველი წყვილი წარმოშობს ერთ ახალ წყვილს და კვლავ შეწყვილდება, მეორე წყვილი წარმოშობს ახალ წყვილს და შეწყვილდება, მესამე წყვილი მხოლოდ შეწყვილდება (5).



ნახ.1.

ესე იგი

1.	1	+	1	=	2																
2.			1	+	2	=	3														
3.					2	+	3	=	5												
4.							3	+	5	=	8										
5.									5	+	8	=	13								
6.											8	+	13	=	21						
7.													13	+	21	=	34				
8.															21	+	34	=	55		
9.																	34	+	55	=	89

შეგვიძლია დავრწმუნდეთ, რომ ბოცვრების წყვილების რაოდენობა 12 თვის განმავლობაში იქნება: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. მათი ჯამი ტოლია 376.

როგორც ვხედავთ $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = 1 + 2 = 3$, ე.ი.
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, n≥ 2. ფიბონაჩის ყოველი რიცხვი ტოლია წინა ორი რიცხვის ჯამისა.

ფიბონაჩის მიმდევრობა ასე გამოიყურება 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10976, ... , თითოეული რიცხვი კი ფიბონაჩის რიცხვს წარმოადგენს.

ზოგჯერ ფიბონაჩის რიცხვები განიხილება n-ის უარყოფითი მნიშვნელობებისთვისაც, როგორც ორმხრივი უსასრულო მიმდევრობა. წევრები მიიღება ექვივალენტური ფორმულით „უკან“: $F_n = F_{n+2} - F_{n-1}$.

n	⋯	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	5
F_n	⋯	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21

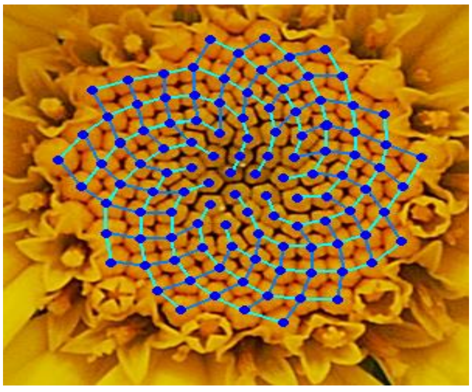
ადვილი შესამჩნევია, რომ $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ [6].

ინდოელი მათემატიკოსები გოპალა და ხემაჩანდრა რიცხვთა ამ მიმდევრობას ახსენებდნენ ლექსებში, რომლებიც მონაცვლეობდა მოკლე და გრძელი მარცვლების რითმულ სურათებში, ან მუსიკაში ძლიერი და სუსტი ნაწილების ცვალებადობისას. ასეთი სურათების რაოდენობა n ნაწილიან ნაწარმოებში არის F_n.

2. ძირითადი ნაწილი

ამრიგად, თავისი ტრაქტატით რიცხვთა თანმიმდევრობის შესახებ, შეიძლება ითქვას, კაცობრიობას შეახსენა ოქროს შუალედის თეორია, რომელიც კარგად იყო ცნობილი ძველი ეგვიპტელებისა და ბერძნებისთვის. მისი ნაშრომების გამოქვეყნების შედეგად სპეციალის-ტებმა აღმოაჩინეს მნიშვნელოვანი კანონზომიერებები მათემატიკაში, ფიზიკაში, ასტრონომიაში, ზოოლოგიაში, არქიტექტურაში, სახვით და მუსიკალურ ხელოვნებასა და მრავალ სხვა სფეროში. არ იქნება გადამეტებულად ნათქვამი, რომ მისი თეორია არ არის რიცხვებთან უბრალო თამაში, არამედ წარმოადგენს ბუნებრივ მოვლენებში მნიშვნელოვან უპრეცედენტო აღმოჩენას და მათ მათემატიკურ გამოხატულებას, ანუ, სწორედ ფიბონაჩი მოევლინა სამყაროს ცოდნის გამავრცელებლად ოქროს პროპორციის პრინციპების თაობაზე.

მას შემდეგ, რაც ფიბონაჩიმ აღმოაჩინა მისი მიმდევრობა, აღმოჩენილი იქნა ბუნების მოვლენები, რომლებშიც ეს მიმდევრობა თამაშობს მნიშვნელოვან როლს, ერთ-ერთი მათგანია ფილოტაქსისი - ფოთლების განლაგების წესი. სპირალის ფორმა საკმაოდ არის გავრცელებული ბუნებაში და კოსმოსში. ადამიანებმა დიდი ხნის წინ შენიშნეს ხის ტოტზე ფოთლების ხვეული და სპირალური მოწყობა. გოეთეც აღნიშნავდა ბუნების მიდრეკილებას სპირალური ფორმისადმი. ბოტანიკოსებისა და მათემატიკოსების ერთობლივმა მცდელობამ ნათელი მოჰფინა ბუნების ამ საოცარ მოვლენას. სპირალისებური ფორმა, ფიბონაჩის რიგის და ოქროს კვეთის პრინციპი ვლინდება, მაგალითად, მზესუმზირის მარცვლების წყობაში, ფიჭვებში, ანანასის ქერქის მოხატულობაში, კაქტუსში და ა.შ. (ნახ.2).



ნახ.2

მაგალითად, მზესუმზირის მარცვლები განლაგებულია სპირალისებურ ორ მწკრივად, რომლთაგან ერთნი ჩახვეული არიან საათის ისრის მიმართულებით, მეორენი- საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმათულებით, რის ტოლია მარცვლეულების რაოდენობა ყველა შემთხვევაში? პასუხია 43 და 55, ეს რიცხვები კი ფიბონაჩის რიცხვებია, ან 89 და 144.

იგივე პრინციპით აგებულია ლოკიკინას ნაჭუჭიც . პატარა 10 სანტიმეტრიან ნაჭუჭს გააჩნია 35 სანტიმეტრიანი სპირალი.

თუმცა, უნდა აღვნიშნოთ, რომ არის ასევე ისეთი მცენარეები, რომლებშიც ზემოთ აღწერილი წესი იძლევა სულ სხვა მიმდევრობებს, ამიტომ არ შეიძლება ვთქვათ, რომ **ფილოტაქსისი არის კანონი მცენარეებისათვის, ეს უფრო გასართობი ტენდენციაა.**

სურ.2. ფიბონაჩის ძეგლი

ფიბონაჩს პიზის მოსახლეობამ ძეგლი დაუდგა. ადრე ძეგლი მდებარეობდა Giardino Scotto-ზე (სურ.2). მას შემდეგ, რაც 1978 წელს ფრანკ ჯონსონმა ამ ძეგლიდან დახატა ფიბონაჩის სურათი, ძეგლი გადატანილ იქნა კამპოსანტოს სასაფლაოზე, რომელიც მდებარეობს ქალაქ პიზაში დეი მირაგოლის პიაცაზე. ფიბონაჩის სახელით პიზაში - Lungarno Fibonacci და ფლორენციაში - Via Fibonacci ქუჩებია, ფიბონაჩის სახელს ატარებს ასოციაცია - Fibonacci Association და მის მიერ გამოცემული ფიბონაჩის რიცხვებისადმი მიძღვნილი ჟურნალი Quarterly, მის სახელზეა ევროკავშირის პროექტი განათლების სფეროში და მრავალი სხვა პროგრამა.

ფიბონაჩის ამოცანები:

ცნობილია, რომ შემდეგი ამოცანები ფიბონაჩის მიერ იქნა ჩამოყალიბებული:

1. საწონების საუკეთესო არჩევის ამოცანა:

ა) მარტივი ვარიანტი: უნდა ვიპოვოთ პინებიანი სასწორისათვის 5 გირი, რომელთა საშუალებით შეგვიძლია ვიპოვოთ 30-ზე ნაკლები წონები, ამავე დროს გირები უნდა დავაწყოთ მხოლოდ ერთ პინაზე (პასუხი: 1, 2, 4, 8, 16, ამოხსნა ჩატარებული იქნა ფუძით 2).

ბ) უნდა ვიპოვოთ გირების უმცირესი რაოდენობა, რომელთა საშუალებით შეძლება აიწონოს მოცემულ *A* რიცხვზე ნაკლები წონები (პასუხი: 1, 3, 9, 27, 81. ამოხსნა ჩატარებული იქნა ფუძით 3).

2. ამოცანები რიცხვით თეორიასთან დაკავშირებით:

ა) იპოვეთ რიცხვი, რომელიც იყოფა 7-ზე, ხოლო 2, 3, 4, 5, 6-ზე გაყოფისას ნაშთში გვაძლევს 1-ს.

ბ) იპოვეთ რიცხვი, რომლის 7-ზე ნამრავლი 2, 3, 4, 5, 6 რიცხვებზე გაყოფისას გვაძლებს ნაშთებს შესაბამისად 1, 2, 3, 4, 5.

3. იპოვეთ რიცხვი, რომლის $\frac{19}{20}$ არის ამავე რიცხვის კვადრატი.

4. 30 გრამის ტოლი შენადნობი შეიცავს 3 მეტალს. პირველი მეტალი, რომლის თითო ნაწილი 3 მონეტის ღირებულებისაა, მეორე მეტალის თითო ნაწილი 2 მონეტის

ღირებულებისაა, ხოლო მესამე მეტალის ყოველი ორი ნაწილი 1 მონეტის ღირებულებისაა. მთელი 30 ერთეულის ღირებულება 30 მონეტაა. თითოეული მეტალის რამდენ ნაწილს შეიცავს შენადნობი? (პასუხი: პირველი მეტალი - 3 ნაწილი, მეორე - 5 ნაწილი, მესამე - 22 ნაწილი). ეს ამოცანა ცნობილი იყო „ფრინველების ამოცანის" სახელწოდებით: სამი სახის 30 ფრინველი ღირს 30 მონეტა. პირველი სახის ერთი ფრინველი ღირს 3 მონეტა, მეორის - 2 მონეტა, მესამის ყოველი ორი ფრინველი ღირს 1 მონეტა. იპოვეთ თითოეული სახის ფრინველების რაოდენობები.

5. სახუმარო ამოცანა 7 მოხუცის შესახებ, რომლებიც მიდიოდნენ რომში. თითოეულს ჰქონდა 7-7 ურემი, თითოეულზე 7-7 ტომარა, ყოველ მათგანში 7-7 პური, თითოეულ პურზე კი 7-7 ყველი. იპოვეთ ყველა საგნის რაოდენობა. (ეს ამოცანა ცნობილი გახდა მრავალ ქვეყანაში. პირველად იგი მოიხსენიება ეგვიპტეში ახმესის პაპირუსში, (პასუხი: 137256))

6. „კვადრატების წიგნში" ფიბონაჩის მოცემული აქვს განუსაზღვრელი კვადრატული განტოლებების ამოხსნები. იგი ეძებდა რიცხვებს, რომლებიც დაემატებოდა კვადრატულ რიცხვს და კვლავ მოგვცემდა კვადრატს, აღნიშნავდა, რომ (x^2+y^2) და (x^2-y^2) ერთდროულად არ შეიძლება იყოს კვადრატები, თუმცა 1 225 წელს ქ. პიზაში რომის იმპერატორის თანდასწრებით, ერთ-ერთი ტურნირის დროს, იმ დროისთვის უკვე ცნობილ მათემატიკოს ფიბონაჩის დაუსვეს ამოცანა : იპოვეთ სრული კვადრატი, რომელიც სრულ კვადრატში დარჩება, როგორც მისი 5-ით გადიდების, ასევე მისი 5-ით შემცირების შემდეგაც. გარკვეული ფიქრის შემდეგ ფიბონაჩმა მონახა ამოცანის პასუხი :

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2, \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2$$

ეს ამოცანა რომ ჩავწეროთ ზოგადი სახით, მივიღებთ სამ რიცხვს:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-z; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^2; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^2+z;$$

რომლებიც წარმოადგენს სრულ კვადრატულ და არითმეტიკული პროგრესიის მიმდევრობით წევრებს სხვაობით Z. ეს რიცხვები ფიბონაჩის რიცხვებია [8].

ფიბონაჩის ამოცანებს ხშირად ვხვდებით მათემატიკის სახელმძღვანელოებში რამდენიმე ასწლეულებში: პაჩიოლი - არითმეტიკის ჯამები, 1584 წ., ბაშე დე მიზიკიაკი - სახალისო ამოცანები, 1612 წ., მაგნიცკი - არითმეტიკა, 1703 წ., ეილერი - ალგებრა, 1760 წ. და სხვ. [2,3].

ფიბონაჩის რიცხვების თვისებები

ფიბონაჩის რიცხვები აკმაყოფილებენ მრავალ საინტერესო მათემატიკურ თვისებას, მოვიყვანთ ზოგიერთ მათგანს.

1. დავამტკიცოთ, რომ

$$F_2+F_4+\cdots+\ F_{2n}=F_{2n+1}-1$$

დამტკიცება. ვიცით, რომ $F_{k+1}=F_k+F_{k-1}$, საიდანაც $F_k=F_{k+1}-F_{k-1}$. ამოვწეროთ ეს ტოლობა $K=2,4,6,\ldots\ ,2n-2,2n$ ინდექსებისთვის და შევკრიბოთ მათი მარცხენა და მარჯვენა მხარეები:

$\mathrm{F}_2=\mathrm{F}_3-\mathrm{F}_1;$

$\mathrm{F}_4=\mathrm{F}_5-\mathrm{F}_3;$

$\mathrm{F}_6=\mathrm{F}_7-\mathrm{F}_5$

$F_8=F_9-F_7$

… … … … ….
$F_{2n-2} = F_{2n-1} - F_{2n-3}$
$F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}$
$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+1} - F_1$

მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეს ყველა შესაკრები ბათილდება, გარდა F_{2n+1} და F_1 შესაკრებებისა. თუ F_1-ის შეცვლით $F_1 = 1$ მნიშვნელობით, მივიღებთ რ.დ.გ.

2. დავამტკიცოთ, რომ

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

დამტკიცება. ვიცით, რომ $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, საიდანაც $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$. ამოვიწეროთ ეს ტოლობა $k = 1,2,3, \ldots\ , n$ ინდექსებისთვის და შევკრიბოთ მიღებული ტოლობების მარჯვენა და მარცხენა მხარეები:

$F_1 = F_3 - F_2$
$F_2 = F_4 - F_3$
$F_3 = F_5 - F_4$
$F_4 = F_6 - F_5$
… … … … … … … ….
$F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$
$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$
$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$

მივიღებთ: $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2$,

მარჯვენა მხარეების შეკრებისას დანარჩენი წევრები გაბათილდა, რადგან $F_2 = 1$, ვღებულობთ დასამტკიცებელ ტოლობას.

3. დავამტკიცოთ, რომ

$$F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2 + \cdots + F_n{}^2 = F_n F_{n+1}$$

დამტკიცება. ფიბონაჩის რიცხვების განსაზღვრების თანახმად გვაქვს $F_1 = F_2$, გავამრავლოთ F_1-ზე,

$F_1{}^2 = F_1 \cdot F_2$
$F_k{}^2 = F_k F_k = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1}$
$k = 2,3, \ldots\ , n$

ე.ი გვაქვს

$F_1{}^2 = F_1 F_2$
$F_2{}^2 = F_2 F_3 - F_2 F_1$
$F_3{}^2 = F_3 F_4 - F_3 F_2$
$F_4{}^2 = F_4 F_5 - F_4 F_3$
… … … … … … … ….
$F_{n-1}{}^2 = F_{n-1} F_n - F_{n-1} F_{n-2}$
$F_n{}^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}$

შევკრიბოთ ამ ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა მხარეები, მიღებული ტოლობის მარჯვენა მხარეში ყველა შესაკრები ბათილდება, გარდა $F_n F_{n+1}$ შესაკრებისა, მივიღებთ : $F_1{}^2 + F_2{}^2 + F_3{}^2 + \cdots + F_n{}^2 = F_n F_{n+1}$.

4. დავამტკიცოთ, რომ

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

დამტკიცება.

$F_1 = F_1$
$F_1 = F_2$
$F_3 = F_4 - F_2$
$F_5 = F_6 - F_4$
$F_7 = F_8 - F_6$
…………………………….
$F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$
$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$

ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ: $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$. (მარჯვენა მხარეს ყველა შესაკრები ბათილდება, გარდა F_{2n} შესაკრებისა).

5. ვაჩვენოთ, რომ $F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$ (კასინის თანაფარდობა).

დამტკიცება. გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი. $n = 2$-ისთვის გვექნება:

$$F_3F_1 - {F_2}^2 = (F_1 + F_2)F_1 - {F_2}^2 = {F_1}^2 + F_1F_2 - {F_2}^2 = 1 + 1 \cdot 1 - 1 = 1 = (-1)^2$$

დავუშვათ მისი მართებულობა $n = (k+1)$-ისთვის:

$$F_{k+2}F_k - {F_{k+1}}^2 = (F_{k+1} + F_k) \cdot F_k - {F_{k+1}}^2 =$$
$$= F_kF_{k+1} + {F_k}^2 - {F_{k+1}}^2 = F_{k+1}(F_k - F_{k+1}) + {F_k}^2 =$$
$$= F_{k+1} \cdot (F_k - F_k - F_{k-1}) + {F_k}^2 =$$
$$= -F_{k+1}F_{k-1} + {F_k}^2 = -\left(F_{k+1}F_{k-1} - {F_k}^2\right) =$$
$$= -(-1)^k \qquad \text{რ.დ.გ}$$

6. ვაჩვენოთ, რომ $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$

დამტკიცება (ინდუქციით). ვაჩვენოთ დასამტკიცებელი ტოლობის მართებულობა $n = 1$ - ისთვის: $F_2F_3 - F_1F_4 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -1 = (-1)^1$;

დავუშვათ მისი მართებულობა $n = k$-სთვის

$$F_{k+2}F_{k+3} - F_{k+1}F_{k+4} = F_{k+2}F_{k+3} - F_{k+1}(F_{k+3} + F_{k+2}) =$$
$$= -F_{k+1}F_{k+2} + F_{k+3}(F_{k+2} - F_{k+1}) = -F_{k+1}F_{k+2} + F_{k+3}F_k =$$
$$= -(F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3}) = -(1)^k = (-1)^{k+1} \qquad \text{რ.დ.გ}$$

7. ვაჩვენოთ, რომ $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ („შეკრების“ წესი).

დამტკიცება გამოვიყენოთ ინდუქციის მეთოდი m-ის მიმართ. $m = 1$-ისთვის დასამტკიცებელი ტოლობა ღებულობს სახეს:

$F_{n+1} = F_{n-1}F_1 + F_n\,F_2 = F_{n-1} \cdot 1 + F_n \cdot 1 = F_{n-1} + F_n$ რაც ჭეშმარიტია.

როცა $m = 2$, დასამტკიცებელი ფორმულა კვლავ მართებულია, რადგან

$$F_{n+2} = F_{n-1}F_2 + F_n\,F_3 = F_{n-1} \cdot 1 + F_n \cdot 2 = F_{n-1} + F_n + F_n = F_{n+1} + F_n$$

ამრიგად, დასამტკიცებელი ტოლობა მართებულია, როცა $\mathrm{m} = 1$, $\mathrm{m} = 2$, ახლა საჭიროა ვაჩვენოთ მისი ჭეშმარიტება, როცა $\mathrm{m} = \mathrm{k}$ და $\mathrm{m} = \mathrm{k} + 1$, მაშინ ის მართებული იქნება $\mathrm{m} = (\mathrm{k} + 2)$-ისთვისაც. ე.ი ვთქვათ:

$\mathrm{F}_{\mathrm{n+k}} = \mathrm{F}_{\mathrm{n-1}}\mathrm{F}_{\mathrm{k}} + \mathrm{F}_{\mathrm{n}}\mathrm{F}_{\mathrm{k+1}}$ და

$\mathrm{F}_{\mathrm{n+k+1}} = \mathrm{F}_{\mathrm{n-1}}\mathrm{F}_{\mathrm{k+1}} + \mathrm{F}_{\mathrm{n}}\mathrm{F}_{\mathrm{k+2}}$

ამ ორი იგივეობის შეკრებით მიიღება:

$\mathrm{F}_{\mathrm{n+k+2}} = \mathrm{F}_{\mathrm{n-1}}\mathrm{F}_{\mathrm{k+2}} + \mathrm{F}_{\mathrm{n}}\,\mathrm{F}_{\mathrm{k+3}}$. რ.დ გ.

თუ დამტკიცებულ (1) ტოლობაში დავუშვებთ $\mathrm{m} = \mathrm{n}$, მივიღებთ

$\mathrm{F}_{2\mathrm{n}} = \mathrm{F}_{\mathrm{n-1}}\mathrm{F}_{\mathrm{n}} + \mathrm{F}_{\mathrm{n}}\mathrm{F}_{\mathrm{n+1}}$ ანუ

$\mathrm{F}_{2\mathrm{n}} = \mathrm{F}_{\mathrm{n}}(\mathrm{F}_{\mathrm{n-1}} + \mathrm{F}_{\mathrm{n+1}})$

რადგან $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$,

ამიტომ $F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n+1} + F_{n-1})$;

ე.ი $F_{2n} = {F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2$ (2)

ანალოგიურად, თუ დამტკიცებულ ტოლობაში („შეკრების“ წესში) ავიღებთ $m = 2n$, მიიღება

$$F_{3n} = F_{n-1}F_{2n} + F_nF_{2n+1} = F_{n-1}\left({F_{n+1}}^2 - {F_{n-1}}^2\right) + F_nF_{2n+1}\ ;$$

(2)-ის გათვალისწინებით

$F_{3n} = F_{n-1}{F_{n+1}}^2 + F_nF_{2n+1} - {F_{n-1}}^3$,

მაგრამ $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$,

ამიტომ $F_{3n} = (F_{n+1} - F_n){F_{n+1}}^2 + F_nF_{2n+1} - {F_{n-1}}^3 =$

$= {F_{n+1}}^3 - F_n{F_{n+1}}^2 + F_nF_{2n+1} - {F_{n-1}}^3 =$

$= {F_{n+1}}^3 + F_n(F_{2n+1} - {F_{n+1}}^2) - {F_{n-1}}^3 = {F_{n+1}}^3 + F;$

ასევე ცნობილია, რომ $F_{2n+1} = {F_n}^2 + {F_{n+1}}^2$,

ამიტომ $F_{3n} = {F_{n+1}}^3 + F_n\left({F_n}^2 + {F_{n+1}}^2 - {F_{n+1}}^2\right) - {F_{n-1}}^3 = {F_{n+1}}^3 + {F_n}^3 - {F_{n-1}}^3$, ამრიგად, $F_{3n} = {F_{n+1}}^3 + {F_n}^3 - {F_{n-1}}^3$;

ასევე შეიძლება ვაჩვენოთ რომ F_{nk} ყოველთვის ჯერადია F_n-ის, ასევე მართებულია შებრუნებული დებულებაც: თუ F_m ჯერადია F_n-ის, მაშინ m ჯერადია n-ის.

ფიბონაჩის მიმდევრობა და ოქროს წესი

ფიბონაჩის მიმდევრობის ერთერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა ის ფაქტი, რომ a_{n+1}-ის a_n-ზე ფარდობის ზღვარი წარმოადგენს ოქროს კვეთას. ესე იგი ვაჩვენოთ, რომ ერთმანეთის მომდევნო ფიბონაჩის რიცხვთა წყვილების შეფარდებათა მიმდევრობა კლებადია და მისი ზღვარია ოქროს კვეთა:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803\ldots$ რიცხვს ოქროს კვეთას (ოქროს შეფარდებას, ღვთაებრივ პროპორციას) უწოდებენ. იგი წარმოადგენს

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad (3)$$

განტოლების ფესვს.

შევნიშნოთ, რომ $\frac{F_{14}}{F_{13}} = \frac{377}{233} \approx 1{,}618025$ უკვე ძალზედ ახლოსაა ф-თან.

დამტკიცება. განვიხილოთ მიმდევრობა $R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$; $n = 1,2,3\ldots$

ფიბონაჩის რიცხვების განსაზღვრების თანახმად გვაქვს:

$$R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{R_{n-1}} \quad (4)$$

(3) და (4)-დან დავასკვნით, რომ ნებისმიერი $n = 1,2,3\ldots$ რიცხვებისთვის

$$|R_n - \phi| = \left|\left(1 + \frac{1}{R_{n-1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\phi}\right)\right| = \left|\frac{1}{R_{n-1}} - \frac{1}{\phi}\right| =$$

$$= \left|\frac{\phi - R_{n-1}}{R_{n-1}\phi}\right| \le \frac{1}{\phi}|R_{n-1} - \phi| \le \left(\frac{1}{\phi}\right)^{n-1}|R_1 - \phi|.$$

რადგან $0 < \frac{1}{\phi} < 1$, ამიტომ $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\phi})^{n-1} = 0$,

$$\lim_{n\to\infty}|R_n - \phi| = 0$$

ანუ $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$ რ.დ.გ [5]

ლიტერატურა - References – Литература:

1. Воробёвь Н.Н. (1978). Числа Фибоначчи. -М., „Наука“, т.39.
2. Маркушевич А.И. (1950). Возвратные последовательности, Гос. Изд. Технико-теоретической литературы, т.1 (популярные лекции по математике).
3. Рудаковю А.Н. (2000). Числа Фибоначчи и простые числа. Мат. Просвещение, т.4.
4. Карпушина Н. (2008). Liber abaci, Леонардо Фибоначчи. Математика в школе, г. 4.
5. История математики. (1970) в 3-х томах, под ред. Юшкевича. „Мат.наука“. т.1.
6. Яглом И. (1984). Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики. Квант, N7.
7. ბეიტრიშვილი თ., ბერიკელაშვილი გ. (2006). მათემატიკა 10 (მოსწავლის წიგნი), თბ., „დიოგენე“.
8. მახვილაძე ნ. (2012). მათემატიკური ენციკლოპედია მოსწავლეთათვის. თბილისი.

FIBONACCI NUMBERS AND ITS ROLE IN NATURAL PHENOMENA

Gogiberidze Rusudan

Teacher of mathematics at LEPL Public School N2 of Abkhazia

Summary

The paper reviews the Fibonacci numbers, sequence named after Leonardo Pisano Bigollo - the foremost European mathematicians of the Middle Ages. Fibonacci formed the original problem about idealized development of rabbit population originating the Fibonacci numbers: A pair of rabbits, one male and one female, are put in ring-fenced wagon. It is known that rabbits are able to mate at the age of one month so that at the end of its second month a female can produce another pair of rabbits. How many rabbits will there be in one year, if it is supposed that rabbits never die (Biologically unreal). The paper shows patterns in natural developments in which the Fibonacci numbers play significant role. One of it is phyllotaxis - arrangement of leaves on trees.

ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ И ЕГО РОЛЬ В ПРИРОДНЫХ ЯВЛЕНИЯХ

Гогиберидзе Р.

Публичная школа N2 Абхазии

Резюме

Рассмотрены числа, последовательность Фибоначчи, первого великого европейского математика Леонардо Пизанского-Фибоначчи. Он сформулировал задачу по размножении кроликов, которая довела его до чисел Фибоначчи. В вагон, ограниченный со всех сторон поместили пару кроликов, которая каждый месяц даёт ещё пару кроликов. Сколько кроликов будут через год если учесть, что кролики не погибают (биологически не реально). В работе дана закономерность в явлениях природы в которых числа Фибоначчи играют значительную роль, одна из них филлотаксис – правило и форма расположения листьев на растениях.