მეოთხე რიგის განტოლების ფესვური ჰოდოგრაფების აგება

ომარ კოტრიკაძე, ქეთევან კოტრიკაძე,
ალექსანდრე დემეტრაშვილი
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

ფესვური ჰოდოგრაფი არის (ბერძ. Hodos – გზა, გრაფიკი) ალგებრული განტოლების ფესვების მოძრაობის ტრაექტორიები, როცა იცვლება განტოლების ერთი ან რამდენიმე კოეფიციენტი. ფესვური ჰოდოგრაფები შესაძლებელია გამოყენებული იქნას ავტომატური რეგულირების სისტემების ანალიზის და სინთეზის ამოცანებში. სტატიაში განხილულია მეოთხე რიგის პოლინომის ფესვური ჰოდოგრაფი (ფჰ). ფჰ-ების ასაგებად გამოიყენება გრაფო-ანალიზური მეთოდი, რაც აიოლებს ფესვების ტრაექტორიების დადგენას. სტატიაში პოლინომის ფესვების მნიშვნელობების საპოვნელად შემოთავაზებულია ფესვების ჩაწერა ტრიგონომეტრიული ფორმაში, რაც ამარტივებს ფჰ-ების კვლევას. აღნიშნულ ნაშრომში ჩვენს მიერ განხილული სამწევრა, მეოთხე რიგის განტოლების ფჰ-ების კვლევა და აგება, როცა ადგილი აქვს ამ განტოლების ერთი კოეფიციენტის ცვლილებას.

საკვანძო სიტყვები: მეოთხე რიგის განტოლება. ფესვური ჰოდოგრაფი. ფესვების ტრიგონომეტრიული ფორმა. ორჯერადი ფესვი.

1. შესავალი

ფესვური ჰოდოგრაფის მეთოდის გამოყენება განტოლების ფესვების მნიშვნელობათა არის დასადგენად, როცა ადგილი აქვს პარამეტრების ცვლილებას, აადვილებს განტოლების ფესვების კვლევას. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ასეთი კვლევები რობასტული სისტემების კვლევისას. რობასტული სისტემების ქვეშ იგულისხმება ე. წ. უხეში სისტემა. კერძოდ, სისტემა, რომლის პარამეტრებიც იცვლებიან დიდ საზღვრებში. ამ დროს ფესვების ტრაექტორიების ანუ ფესვური ჰოდოგრაფების დადგენა, განსაკუთრებულ სირთულეებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ ფჰ-ს ასაგებად გამოიყენება კომბინირებული მეთოდი, როცა იყენებენ ფესვყური ჰოდოგრაფების ანალიზურ გამოსახულებებს და ამავე დროს ფჰ-ების გრაფიკულ თვისებებსაც.

2. ძირითადი ნაწილი

ჩვენი კვლევის ობიექტია:

$$S^4 + \alpha S + 1 = 0 \tag{1}$$

სამწევრის ფჰ-ის დადაგენა, როცა $\alpha \in]-\infty; +\infty[$. (1) განტოლების ფესვების ტრაექტორიების განტოლება იქნება:

$$r^3 Sin3\varphi = Sin\varphi. \tag{2}$$

აქედან მივიღებთ ორ განტოლებას:

$$Sin\varphi = 0 \text{ და } r^4 = 4Cos^2\varphi - 1, \tag{3}$$

რომელთაგან პირველი (1) განტოლების ნამდვილი ფესვების განტოლებაა, ხოლო მეორე - (1) განტოლების კომპლექსური ფესვების მოძრაობის ტრაექტორიების განტოლებაა. (3) განტოლებით შეგვიძლია დავადგინოთ კომპლექსური ფესვების განლაგების არეები; (3) განტოლებაში აუცილებლად მარჯვენა მხარე უნდა იყოს უარყოფითი ე. ი.

$$4Cos^2\varphi - 1 > 0 \text{ ანუ } |\cos\varphi| > 0{,}5\sqrt{2}.$$

ამ უტოლობის ამონახსნია:

$$\varphi \in]-225^0; -135^0[\cup]-45^0; -45^0[.$$

ახლა დავადგინოთ (1) განტოლების ორჯერადი ფესვები, რომლებიც უნდა იყოს

$$(S^4+1)'S^3 - (S^3)'(S^4+1) = 0$$

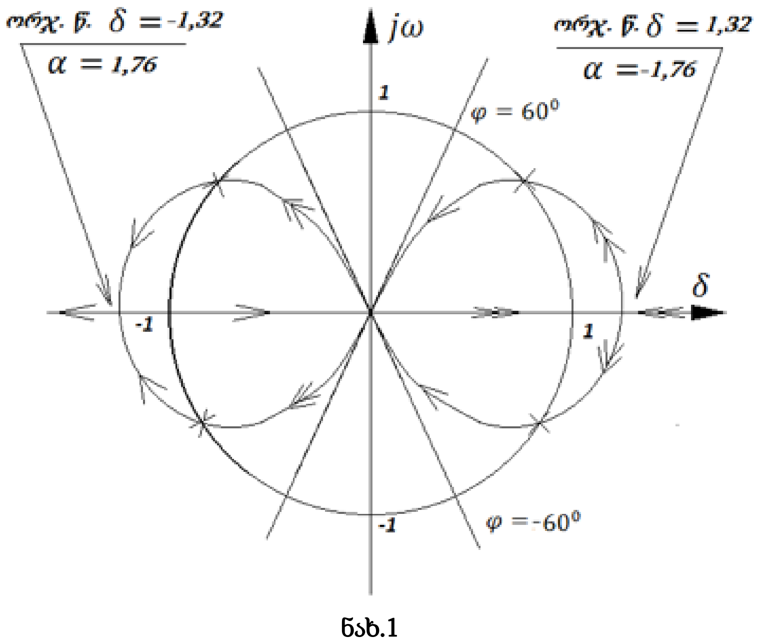
განტოლების ნამდვილი ფესვები [1]; ე. ი.

$$4S^6 - 3S^6 - 3S^2 = 0.$$

აქედან $S = 0$ ან $S^4 = 3$; $S = 0$ ამ განტოლების ორჯერადი ფესვია, ხოლო (1) განტოლებისთვის იქნება სამჯერადი საბოლო წერტილი. (1) განტოლების ორჯერადი ფესვი იქნება $S = \pm\sqrt[4]{3} = \pm 1,32$; ამ წერტილები

$$\alpha = -\frac{S^4+1}{S^3} = -\frac{4}{(1\sqrt[4]{3})^3} = \mp 1{,}755. \text{ ე. ი. } \propto\left(-\sqrt[4]{3}\right) = 1{,}755 \text{ და } \propto\left(\sqrt[4]{3}\right) = -1{,}755.$$

ცხადია, რომ (1) განტოლების ფჰ-ები სიმეტრიული იქნება წარმოსახვითი ღერძის მიმართ და სიმეტრიულ წერტილებში α-ს ექნება საპირისპირო ნიშნები; ფჰ-ები გამოსახულია 1-ელ ნახაზზე, სადაც მითითებულია ორჯერადი ფესვები და შესაბამისი α-ს მნიშვნელობები [2,3].



ნახ.1

ყველა განხილულ შემთხვევაში ფჰ-ები შეიძლება აგებული იქნას სიზუსტით (საწყისი ცვლადების სათანადო ბიჯის შერჩევით).

ამ შემთხვევაში ფჰ-ების აგების მიმდევრობა ასეთია:

1. ვირჩევთ საწყისის ცვლადის ცვალებადობის Δ ბიჯს გრადუსებში ან რადიანებში;
2. ვიღებთ φ-ს საწყისს მნიშვნელობას ინტერვალიდან $[\Delta; 60^0 - \Delta]$;
3. თითოეული φ-ისთვის ვანგარიშობთ:

$$r = \sqrt[4]{4\,(\cos\varphi)^2 - 1},$$
$$\alpha = -r\frac{\sin 4\varphi}{\sin 3\varphi}$$

ან

$$\alpha = -\frac{4\cos\varphi\left(4\,(\cos\varphi)^2-1\right)}{4\,(\cos\varphi)^2-1}.$$

ამგვარად, მივიღებთ ფჰ-ის I მეოთხედში (ნახ. 1) მოდიფიცირებულ ნაწილს, რომლიდანაც ფჰ-ის სრული სურათის მიღება რთული არ არის.

ახლა გამოვიკვლიოთ

$$S^4 + \alpha S^3 - 1 = 0 \tag{4}$$

აქედან,

$$Sin\varphi = 0 \text{ ან } r^4 = 1 - 4Cos^2\varphi \tag{5}$$

ჰოდოგრაფების საწყისი წერტილებია $S^4 - 1 = 0$ განტოლების ფესვები:

$$S_1 = 1\ , S_3 = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad S_2 = e^{j\pi} = -1 \text{ და } S_4 = e^{j\frac{3\pi}{2}}.$$

ფჰ-ს ორჯერადი ნამდვილი ფესვები არა აქვს, გარდა სამჯერადი საბოლოო წერტილისა $S = 0$.

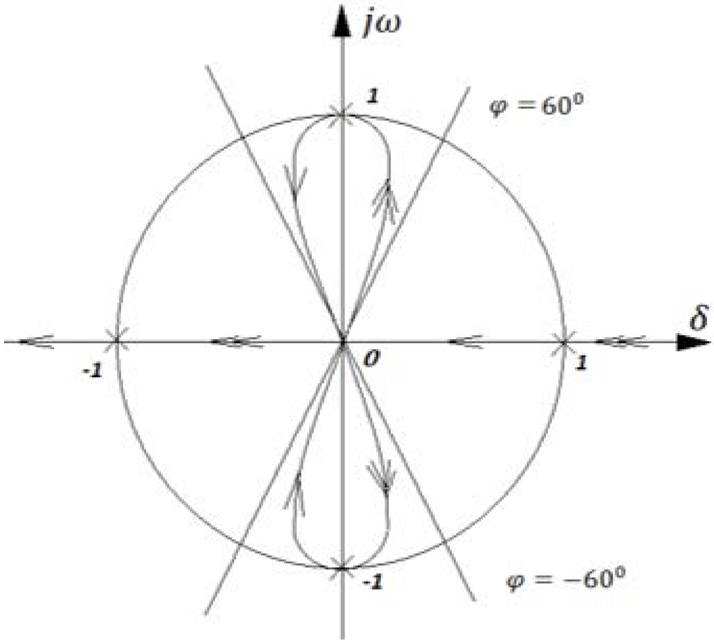
დავადგინოთ ფჰ-ების განლაგების არეები, რისთვისაც ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა:

$$\begin{cases}\sin 3\varphi > 0\\ \sin\varphi < 0\end{cases} \quad \text{ან} \begin{cases}\sin 3\varphi < 0\\ \sin\varphi > 0\end{cases},$$

რომელთა ამონახსნების გაერთიანება იქნება (4) განტოლების ფჰ-ების განლაგების არე.

$$\varphi \in]60^0; 120^0[\cup]240^0; 300^0[.$$

(4) განტოლების ფჰ-ები აგებულია მე-2 ნახაზზე [4].



ნახ.2

3. დასკვნა

ამრიგად, მიღებული შედეგების მიხედვით შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ფესვური ჰოდოგრაფების აგება გრაფო-ანალიზური მეთოდის საშუალებით, საკმაოდ რთულია. თუმცა, პოლინომის ფესვების ტრიგონომეტრიულ ფორმაში ჩაწერა, გაცილებით აიოლებს ფესვების ტრაექტორიების დადგენას.

ლიტერატურა:

1. კოტრიკაძე ო. (2004). ფესვური ჰოდოდგრაფების აგების ანალიზური საფუძვლები. ა.ელიაშვილის სახ. მართვის სისტ. ინსტ., საერთაშ. კონფ. „მართვის და ენერგეტიკის პრობლემები". მოხსენებათა კრებული. თბილისი.

2. Evans G.W. (2004). The story of Walter R. Evans and his textbook Control-System Dynamics. IEEE Control Systems Magazine.

3. L.H.A Monteiro, J. D. (2008). Simple answers to usual questions about unusual forms of the evans' root locus plot. Revista Controle & Automacao.

4. Richard C. Dorf, R.H. (2008). Modern Control Systems. USA: Pearson Education Inc.

BUILDING A ROOT LOCUS FOR FOURTH-ORDER EQUATIONS

Kotrikadze Omar, Kotrikadze Ketevan, Demetrashvili Alexander

Georgian Technical University

Summary

Root locus are the trajectories of the roots movement (gr. hodos – road, diagram) of an algebraic equation, when change of one or more of the coefficients. Root locus (RL) can be used for analysis and synthesis problems of automatic control systems. The article discusses root locus polynomial of the fourth degree. To construct the RL used graph-analytic method, which simplifies the determination of root paths. To find the roots values of a polynomial, used subscribe roots in the trigonometric form. In this paper we consider root locus trinomial equation fourth degree, when changing one coefficients of this equation.

ПОСТРОЕНИЕ КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Котрикадзе О., Котрикадзе К., Деметрашвили А.

Грузинский Технический Университет

Резюме

Кореневые годографы являються траекториями движения корней (Гр. hodos - дорога, диаграмма) алгебраического уравнения, при изменении одного или нескольких коэффициентов уравнения. Корневые годографы (КГ) могут использоваться для анализа и синтеза задач систем автоматического управления. В статье рассматривается кореневые годографы полиномов четвертой степени. Для построения КГ используется графо-аналитический метод, что упрощает определение траекторий корней. Для нахождения значений корней полинома используется запись корней в тригонометрической форме. В данной работе рассматриваются кореневые годографы трёхчленного уравнения четвертой степени, когда меняется один коэффициент данного уравнения.