

გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი და ცოცხალი სისტემების მოდელირების საკითხები

თამაზ ოზგაძე, ვერა ქორთიევა
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

რეზიუმე

განხილულია გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალები. მოცემულია მათი აგებისა და სტრუქტურირების სხვადასხვა მეთოდი. გაანალიზებულია მათი გამოყენების საზღვრები ცოცხალი სისტემების ევოლუციის მოდელირებისათვის. განხილულია დენდრიტების ზრდის მექანიზმები როგორც იდეალურ, ასევე, ღია სისტემებში. შემოთავაზებულია გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალის ფორმალური განსაზღვრება.

საკვანძო სიტყვები: ფრაქტალი. ცოცხალი სისტემა. დენდრიტი.

1. შესავალი

გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ ზოგადი ფორმულით:

$$GKIFRACTAL \stackrel{\text{def}}{=} Fr(m, f, gekev), \quad (1)$$

სადა m - დედა-ფრაქტალი (საწყისი სიმრავლე), f - მამა-ფრაქტალი (ყოველ ბიჯზე დამატებადი გეომეტრიული აგრეგატი), ხოლო პარამეტრი $gekev$ ფრაქტალის ევოლუციის გენეტიკური კოდი, რომელიც მიუთითებს თუ, რამდენი ბიჯი კეთდება თვითმსგავსების პრინციპით აგებისას და როგორია ფრაქტალის ზრდის კანონის გენეტიკა (ევოლუციის წესი).

ფრაქტალს ვუწოდებთ იდეალურს, როცა არ მიიღება მხედველობაში გარემო პირობების შემთხვევითი RND ზემოქმედება ფრაქტალის გეომეტრიის ევოლუციაზე. ამგვარად, წარმოდგენილი ფრაქტალები, ფართოდ გამოიყენება ცოცხალი სისტემების მოდელირებისას.

თუ ვიცით დედა-ფრაქტალის, მამა-ფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის სახე, მაშინ შეგვიძლია ავაგოთ გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალი. ასეთი ამოცანის ამოსახსნელად, არსებობს შესაბამისი ალგორითმებიც. გაცილებით მნიშვნელოვანია ისეთი ალგორითმის დამუშავება, რომელიც ამოგვიხსნის შებრუნებულ ამოცანას: ანუ როცა ვიცით ცოცხალი სისტემის გეომეტრიული ფორმა, როგორ დავადგინოთ შესაბამისი დედა-ფრაქტალი, მამა-ფრაქტალი და გენეტიკური კოდი.

მართლაც, ცნობილია რომ ადამიანის შინაგანი ორგანოები გეომეტრიულად, წარმოადგენენ ფრაქტალებს, რომელთაგან თითოეულს აქვს თავისი დედა-ფრაქტალი, მამა-ფრაქტალი და გენეტიკური კოდი. მათი ცოდნა გაგვიადვილებდა შინაგანი ორგანოების ლაბორატორიულ პირობებში აღდგენის პრობლემას და დაავადებული ორგანოების შეცვლას. ცნობილია, რომ კიბოსაც ფრაქტალური სტრუქტურა აქვს. თუ შევძლებთ მისი დედა-ფრაქტალის, მამა-ფრაქტალისა და გენეტიკური კოდის დადგენას, მაშინ გვეცოდინება თუ როგორ ვებრძოლოთ ამ დაავადებას უფრო ეფექტურად, ვიდრე ეს დღესაა შესაძლებელი.

ამრიგად, მეტად მნიშვნელოვანია გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალის სახეთა გამოცნობის ამოცანის ამოხსნა, რაც ამ შემთხვევაში ნიშნავს მისი აგების შებრუნებული ალგორითმის დადგენას.

ფრაქტალების აგებისას, ფართოდ გამოიყენება მეტრიკული სივრცის აფინური გარდაქმნის თეორია.

2. მეტრიკული სივრცის აფინური გარდაქმნა

განვიხილოთ X სივრცე. ვთქვათ, ამ სივრცეში გვაქვს $X \times X$ დეკარტულ ნამრავლზე განსაზღვრული ნამდვილი ცვლადის $d(x, y)$ ფუნქცია, ისე რომ, ადგილი აქვს აქსიომებს:

$$a) d(x, y) \geq 0; \forall (x, y) \in X \times X; \quad (2)$$

$$b) d(x, y) = 0 \Rightarrow (x = y); \quad (3)$$

$$g) d(x, y) = d(y, x); \quad (4)$$

$$d) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z); \forall x, y, z \in X. \quad (5)$$

მაშინ (X, d) წყვილს მეტრიკულ სივრცეს უწოდებენ. სხვანაირად რომ ვთქვათ, მეტრიკული სივრცე არის სიმრავლე, მასზე განსაზღვრული მეტრიკის (მანძილის) ცნებით.

ვთქვათ მოცემულია (X, d) მეტრიკული სივრცე. T ასახვას ეწოდება კუმშვადი, თუ არსებობს ისეთი $0 < s < 1$ რიცხვი, რომ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$d(T(x), T(y)) \leq s \cdot d(x, y), \quad (6)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ კუმშვად ასახვას ნებისმიერი ორი წერტილი გადაყავს ისეთ სხვა ორ წერტილში, რომელთა შორისაც მანძილი უფრო ნაკლებია, ვიდრე იყო ის ასახვამდე. კუმშვადი ასახვები საშუალებას გვაძლევს ვიმსჯელოთ ასახვათა უძრავ წერტილებზე. $f(x)$ ასახვის უძრავი წერტილი ეწოდება ისეთ $x = x_0$ წერტილს, რომლისთვისაც ადგილი აქვს ტოლობას:

$$f(x_0) = x_0. \quad (7)$$

ადგილი მისახვედრია, რომ $f(x)$ ფუნქცია მოგვცემს კუმშვით ასახვას, თუ ადგილი აქვს უტოლობას:

$$|f'(x)| < s < 1. \quad (8)$$

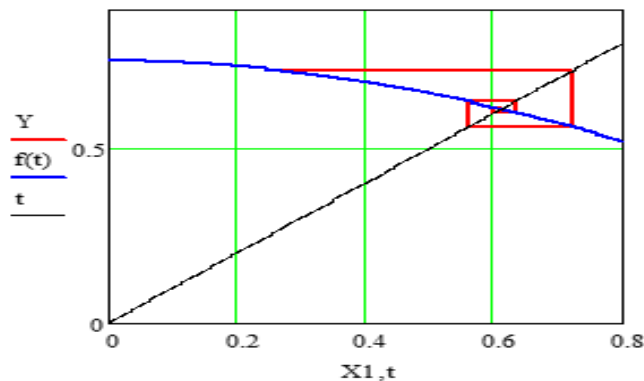
ცხადია რომ, თუ $f(x)$ კუმშვითი ასახვაა, მაშინ ერთბიჯიან იტერაციულ სქემას, ცნობილი საწყისი x_0 მიახლოებით:

$$x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

აქვს უძრავი წერტილი $x = \xi$ ანუ $f(\xi) = \xi$, სადაც

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi. \quad (10)$$

მაგალითისათვის: განვიხილოთ $f(x) = 0.75 \cdot \cos x$ ფუნქცია $[0; \frac{\pi}{4}]$ შუალედში. ეს ფუნქცია შემოსაზღვრულია და უწყვეტი ამ შუალედში. ამასთან ერთად $|f'(x)| = 0.75|\sin x| \leq 0.75 < 1$, რაც იმას ნიშნავს რომ, შესაბამისი ერთბიჯიანი იტერაციული სქემა $x_n = f(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}, x_0 = 0.26$ საწყისი მიახლოებით, კრებადია უძრავი წერტილისაკენ (ნახ.1).



ნახ.1. ობობას ქსელისებრი დიაგრამა ერთბიჯიანი იტერაციული სქემისათვის

ახლა გადავიდეთ მეტრიკული სივრცის აფინურ გარდაქმაზე. მეტრიკული სივრცის წრფივ გარდაქმნას შემდგომი გადატანის ასახვით, აფინური გარდაქმნა ეწოდება.

მეტრიკული \mathbb{R}^n სივრცის L გარდაქმნას ეწოდება წრფივი, თუ მეტრიკული სივრცის ნებისმიერი ორი x და y ელემენტისათვის და λ, μ ნამდვილი რიცხვებისათვის, ადგილი აქვს ტოლობას:

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y). \quad (11)$$

თუ L წრფივი გარდაქმნაა, მაშინ ადგილი აქვს მის მატრიცულ წარმოდგენას:

$$L(x) = A \cdot x. \quad (12)$$

გადატანის T გარდაქმნა განისაზღვრება ტოლობით:

$$T(x) = x + a, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (13)$$

სადაც a გადატანის მუდმივი ვექტორია.

ამგვარად, აფინური გარდაქმნა საზოგადოდ, შეგვიძლია ჩავწეროთ სახით:

$$T(x) = A \cdot x + a. \quad (14)$$

\mathbb{R}^2 სივრცის გარდაქმნის შემთხვევაში აფინური გარდაქმნა მოიცემა ექვსი მუდმივის $(\alpha_1; \beta_1; \alpha_2; \beta_2; \gamma_1; \gamma_2)$ საშუალებით:

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

გარდაქმნა (15) ადიდებს ($\delta > 1$) ან ამცირებს მრავალკუთხედის ფართობს ($\delta < 1$) შესაბამისად δ -ჯერ, იმის მიხედვით თუ, როგორია გარდაქმნის

$$\delta = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

მატრიცის დეტერმინანტი.

3. მანძილი მეტრიკული სივრცის ქვესიმრავლებს შორის

განვიხილოთ (X, d) მეტრიკული სივრცე.

განსაზღვრება: ვიტყვი, რომ X მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ კრებადია $a \in X$ წერტილისაკენ, თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, a) = 0$.

განსაზღვრება: ვიტყვი, რომ, X მეტრიკული სივრცის წერტილთა მიმდევრობა $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ არის ფუნდამენტური ანუ კოშის მიმდევრობა, თუ $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$.

ცხადია, რომ მეტრიკულ სივრცეში ყოველი კრებადი მიმდევრობა კოშის მიმდევრობაა, თუმცა, შებრუნებული დებულებაა, საზოგადოდ, არ სრულდება.

განსაზღვრება: მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება სრული, თუ მასში ყოველი ფუნდამენტური მიმდევრობა კრებადია.

განსაზღვრება: (X, d) მეტრიკული სივრცის A ქვესიმრავლეს ეწოდება ჩაკეტილი (X, d) სივრცეში, თუ ის შეიცავს მისი ფუნდამენტური მიმდევრობების ყველა ზღვართა წერტილს.

განსაზღვრება: (X, d) მეტრიკულ სივრცეს ეწოდება კომპაქტური, თუ მისი წერტილების ნებისმიერი $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ მიმდევრობიდან შეგვიძლია გამოვყოთ მასში კრებადი ქვემიმდევრობა.

P.S. თუ საწყისი მეტრიკული სივრცეა \mathbb{R}^n , მაშინ მისი ქვესიმრავლის კომპაქტურობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ ის იყოს ჩაკეტილი და შემოსაზღვრული.

ვთქვათ მოცემულია (X, d) სრული მეტრიკული სივრცე. $K(X)$ -ით აღვნიშნოთ X სიმრავლის ყველა კომპაქტური ქვესივრცე. განვსაზღვროთ მანძილის ცნება X სიმრავლის რაიმე $x \in X$ წერტილსა და $K(X)$ -ის რაიმე $B \in K(X)$ კომპაქტურ ქვესიმრავლეს შორის, როგორც უმოკლესი მანძილი ტოლობით:

$$d(x; B) = \min\{d(x; y) : y \in B\}. \quad (17)$$

ახალ უკვე შეგვიძლია განვსაზღვროთ მანძილი ორ კომპაქტურ **A** და **B** სიმრავლეს შორის ტოლობით:

$$d(A; B) = \max\{d(x; B): x \in A\}. \quad (18)$$

ადვილი შესამოწმებელია რომ, საზოგადოდ,

$$d(A; B) \neq d(B; A). \quad (19)$$

ამ ფაქტის გამოსწორება შესაძლებელია, თუ შემოვიღებთ მანძილის ახალ $h(A; B)$ ცნებას ფორმულით:

$$h(A; B) = \max\{d(A; B); d(B; A)\}. \quad (20)$$

ახლა უკვე სრულდება მეტრიკის სიმეტრიულობის თვისება

$$d(A; B) = d(B; A) \quad (21)$$

და $h(A; B)$ არის $K(X)$ სივრცის მეტრიკა. ამ მეტრიკას ხაუსდორფის მეტრიკა ჰქვია, ხოლო $(K(X), h)$ სივრცეს ხაუსდორფის მეტრიკული სივრცე ეწოდება. ბარნსლიმ ამ სივრცეს „ფრაქტალების საცხოვრისი“ უწოდა. ეს სრული მეტრიკული სივრცეა. იმ შემთხვევაში, როცა საწყისი მეტრიკული სივრცეა \mathbb{R}^2 შესაბამის კომპაქტურ ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს აღნიშნავენ მოკლედ სიმბოლოთი $K(\mathbb{R}^2)$.

4. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების გარდაქმნათა ანალიზი

კომპიუტერზე გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების ასაგებად, ხშირად, გამოიყენება აფინურ გარდაქმნათა ნახევარჯგუფი. სიბრტყეზე აფინური გარდაქმნაა: გაჭიმვა-კუმშვის, მობრუნებისა და სიმეტრიის ასახვა.

4.1. ინვარიანტული გარდაქმნა

უმარტივეს შემთხვევაში, აფინური გარდაქმნა მოიცემა როგორც მასშტაბში შემცირებისა და მობრუნების წრფივ ასახვათა კომპოზიცია:

$$T: (x; y) \rightarrow (x'; y'), \quad (22)$$

რომელიც მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y \\ y' = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (23)$$

(23) გაედაქმნას შესაბამისი A მატრიცით ავლნიშნავთ მოკლედ T ასოთი.

თუ, სიბრტყე ასახება თავის თავზე ისე რომ, $x' = x$ და $y' = y$, მაშინ (23) გარდაქმნის ფორმულებიდან მივიღებთ რომ

$$\begin{cases} x = a \cdot x + b \cdot y \\ y = c \cdot x + d \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1) \cdot x + b \cdot y = 0 \\ c \cdot x + (d-1) \cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (24)$$

მაშასადამე, სიბრტყის თავის თავზე ასახვისას, გვაქვს ერთადერთი უძრავი წერტილი $O(0; 0)$. ამ უძრავი წერტილის ტიპის დასადგენად, უნდა ამოვხსნათ A მატრიცის მახასიათებელი განტოლება:

$$\lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda + \Delta = 0, \quad (25)$$

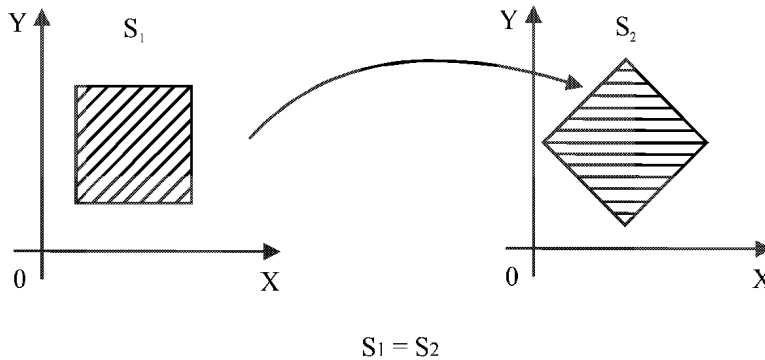
სადა $\Delta = \det A$.

გვაქვს ოთხი შემთხვევა:

1. თუ $|\lambda_1| < 1$ და $|\lambda_2| < 1$, მაშინ O წერტილი მდგრადია;
2. თუ $|\lambda_1| < 1$ და $|\lambda_2| > 1$, მაშინ O უნაგირა (ჰიპერბოლური) წერტილია;
3. თუ $|\lambda_1| = 1$ და $|\lambda_2| = 1$, მაშინ O ელიფსური წერტილია;
4. თუ $|\lambda_1| > 1$ და $|\lambda_2| > 1$, მაშინ O არამდგრადი წერტილია.

ამბობენ რომ, T ასახვა ინახავს ფართობს თუ $|det A| = 1$. ამ შემთხვევაში, ცხადია რომ $|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = 1$. ფართობის შემნახველი ასახვის უძრავი წერტილი, შეიძლება იყოს მხოლოდ ელიფსური ან ჰიპერბოლური ტიპის.

განვიხილოთ ფართობის შემნახველი ასახვა (ნახ.2).



ნახ.2. ფართობის შემნახველი ასახვა

თეორემა: არსებობს არაგადაგვარებული წრფივი ასახვა $(x; y) \rightarrow (x'; y')$, რომელიც შეგვიძლია ჩავწეროთ ფორმით:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (26)$$

სადა α - მობრუნების კუთხეა, თუ $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$ და $\Delta = 1$.

4.2. მობრუნება

განვიხილოთ, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით (გაჭიმვა-შეკუმშვის გარეშე) α კუთხით მობრუნების გარდაქმნა. ასეთი გარდაქმნა მოიცემა ფორმულებით (26). ამ გარდაქმნის იაკობიანი ცხადია, რომ ტოლია 1-ის. ეს ფორმულები ასახვენ სიბრტყის მობრუნებას კოორდინატთა სათავის გარშემო.

ასახვა, რომელიც მდგომარეობს სიბრტყის რაიმე (x_0, y_0) (უძრავი) წერტილის გარშემო, საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით α კუთხით მობრუნებაში, ჩაიწერება ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cdot \cos \alpha - (y - y_0) \cdot \sin \alpha + x_0 \\ y' = (x - x_0) \cdot \sin \alpha + (y - y_0) \cdot \cos \alpha + y_0 \end{cases} \quad (27)$$

4.3. გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა

გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა დაკავშირებულია მასშტაბის ცვლილებასთან. ცენტრალური გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა $O(0; 0)$ კოორდინატთა სათავის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის k მახასიათებ-ლით, მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = k \cdot y \end{cases} \quad (28)$$

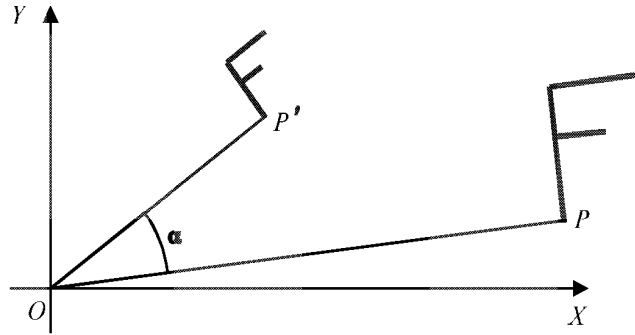
ხოლო, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა $M(x_0; y_0)$ წერტილის მიმართ, k მახასიათებლით, მოიცემა ფორმულებით:

$$\begin{cases} x' = k \cdot (x - x_0) + x_0 \\ y' = k \cdot (y - y_0) + y_0 \end{cases} \quad (29)$$

როცა $|k| > 1$ ეს გარდაქმნები აღწერენ გაჭიმვის ასახვას, ხოლო როცა $|k| < 1$ გვაქვს შეკუმშვის ასახვა. თუ $k = -1$ გვაქვს არეკვლა $M(x_0; y_0)$ წერტილის მიმართ ანუ მობრუნება 180° -იანი კუთხით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

4.4. მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია

კომპიუტერზე, გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების ასაგებად, ხშირად გამოიყენება მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია. აქ განსაზღვრელია: მობრუნების კუთხე, ცენტრის მდებარეობა და მასშტაბირების კოეფიციენტი. მე-3 ნახაზზე მოცემულია მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის ოპერაციის შედეგი კოორდინატა $O(0; 0)$ სათავის მიმართ:



ნახ. 3. მობრუნებისა და ცენტრის მიმართ გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნათა კომპოზიცია

რომელიც მოიცემა(30)გარდაქმნით:

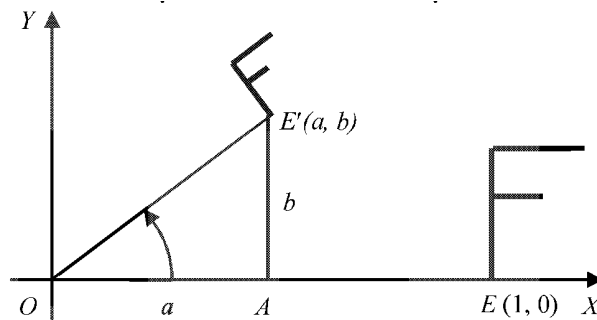
$$\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y \\ y' = b \cdot x + a \cdot y \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Δ სიდიდეახასიათებს გაჭიმვა-შეკუმშვის სიდიდეს. როცა $\Delta > 1$ გვაქვს გაჭიმვა, ხოლო $\Delta < 1$ -ის შემთხვევაში გვაქვს შეკუმშვა. თუ გვაქვს მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა, რომელის დროსაც $E(1; 0)$ აისახება $E'(a; b)$ წერტილში (ნახ.4), მაშინ მასშტაბირების კოეფიციენტი იქნება:

$$k = \frac{OE'}{OE} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (31)$$

ამ სახვისას, მობრუნების კუთხეა α , რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობებს:

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OE'} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{AE'}{OE'} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (32)$$

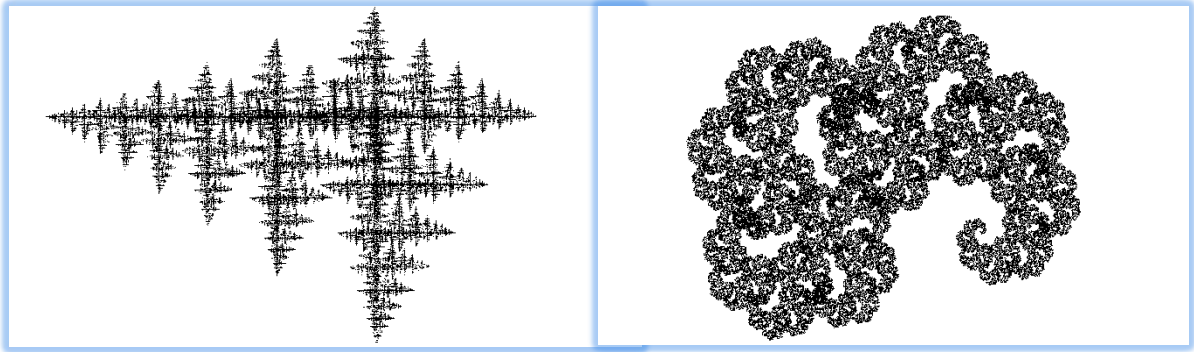


ნახ. 4. მობრუნება, გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა

თუ გვინდა ჩავწეროთ მობრუნება-გაჭიმვა-შეკუმშვის გარდაქმნა ნებისმიერი $M(x_0; y_0)$ წერტილის მიმართ, მაშინ უნდა ვისარგებლოთ გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = a \cdot x - b \cdot y + x_0 \\ y' = b \cdot x + a \cdot y + y_0 \end{cases} \quad (33)$$

ამ გარდაქმნების საფუძველზე იგება ფრაქტალები (ნახ. 5 და 6).



ნახ. 5. მოზრუნება-შეკუმშვის გარდაქმნით მიღებული ფრაქტალი

ნახ. 6. ორმაგი მოზრუნება-შეკუმშვის გარდაქმნით მიღებული ფრაქტალი

ბუნებაში გვხვდება მსგავსი ფრაქტალებიც (ნახ.7).



ნახ.7. კაქტუსი

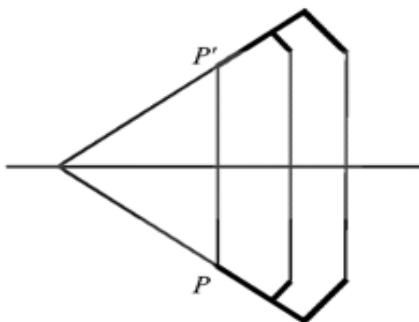
4.5. სიმეტრიის გარდაქმნა

სიმეტრიის S ასახვა შეგვიძლია განვმარტოთ ტოლობით:

$$S^2 = E, \tag{34}$$

სადაც E იგივეური გარდაქმნაა. მართლაც, მოცემული ფიგურის სიმეტრიული ფიგურის სიმეტრიის გარდაქმნა გვაბრუნებს მოცემულ ფიგურასთან (ნახ.8).

ფრაქტალების კონსტრუირების დროს სიმეტრიის გარდაქმნა უმეტესწილად, გვხვდება შეკუმშვის ასახვასთან კომპოზიციაში. შეკუმშვის ასახვისას გვაქვს შეკუმშვის უძრავი ცენტრი და მასშტაბირების კოეფიციენტი, ხოლო სიმეტრიის ასახვისას - უძრავი ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წრფე.



თუ უძრავი ცენტრია კოორდინატა სათავე $O(0; 0)$, მაშინ გვაქვს გარდაქმნა:

$$\begin{cases} x' = k \cdot x \\ y' = -k \cdot y \end{cases} \tag{35}$$

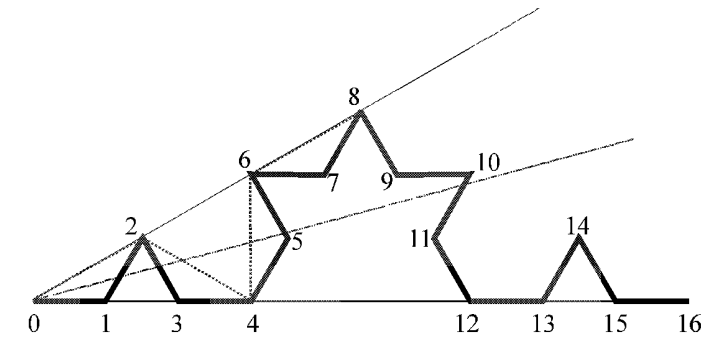
ნახ.8. ღერძის მიმართ სიმეტრიის გარდაქმნა

უფრო ზოგად შემთხვევაში, როცა გვაქვს უძრავი $M(x_0; y_0)$ ცენტრი, კუმშვა-სიმეტრიის ასახვა მოიცემა გარდაქმნებით:

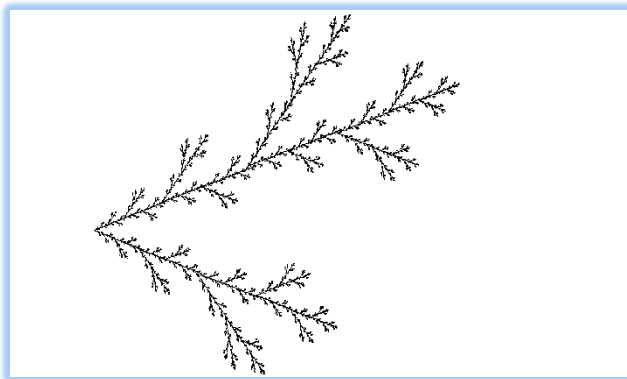
$$\begin{cases} x' = a \cdot x + b \cdot y + x_0 \\ y' = b \cdot x - a \cdot y + y_0 \end{cases} \quad (36)$$

სადაც მასშტაბირების კოეფიციენტი $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

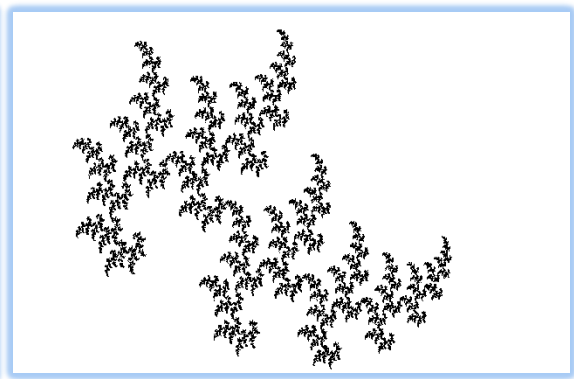
შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია ფართოდ გამოიყენება ფრაქტალების აგებისას (ნახ.9-11).



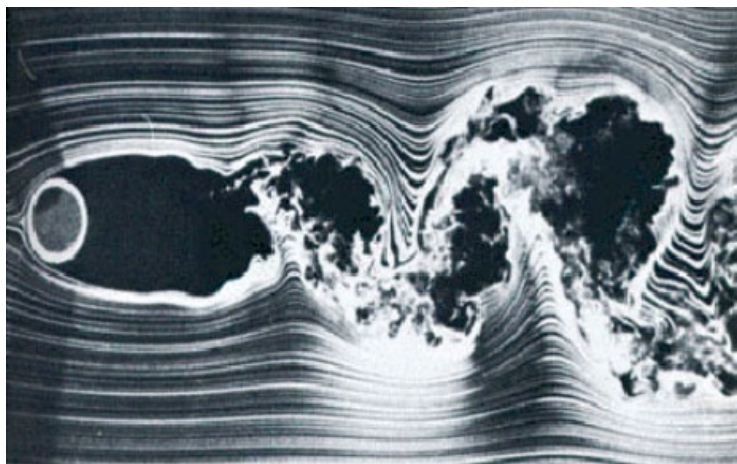
ნახ.9. შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია კოხის ფრაქტალში



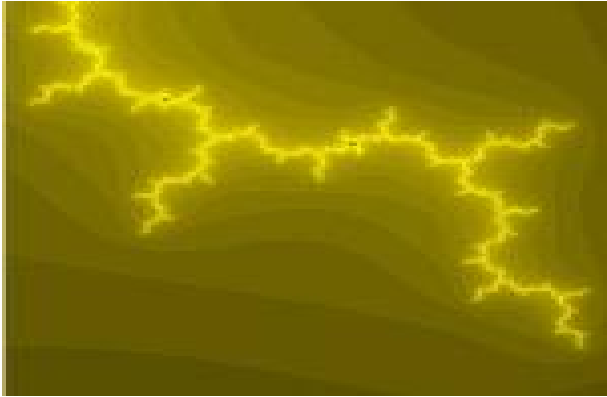
ნახ.10. შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიცია დენდრიტის ფრაქტალში



ნახ.11. ფრაქტალი რომელიც მიიღება მობრუნება-შეკუმშვისა და შეკუმშვა-სიმეტრიის ასახვათა კომპოზიციით



ნახ.12. ბლანტი სითხით ცილინდრის გარსდენისას მიიღება ტურბულენტური კვალი, რომელიც რღვევის უბნებში ქმნის ბუნებრივ ფრაქტალს



ნახ.13. ჭექა-ქუხილის დროს ცაზე გამოსახული ფრაქტალი



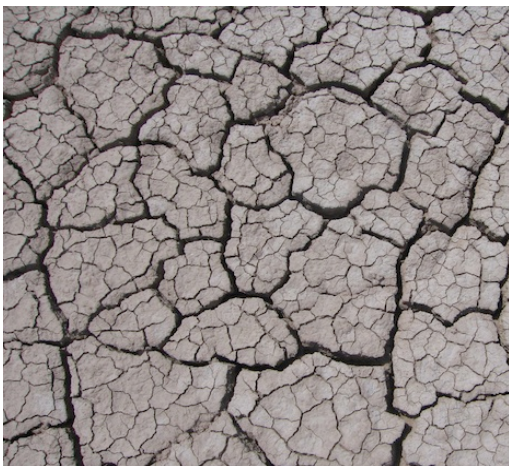
ნახ.14. თოვლის ზვავის ფრაქტალიც ცოცხალი სისტემაა



ნახ.15. თერგის ჩანჩქერის ფრაქტალი



ნახ.16. ლორწომის კლდის დაფრაქტალეზული ზედაპირი ქსნის ხეობაში



ნახ.17. ცხავატის გამშრალი თიხის ზედა ფენის ფრაქტალი, რომელიც ძალიან წააგავს კანის ტექსტურასა და მცენარეთა ფოთლის აღნაგობას

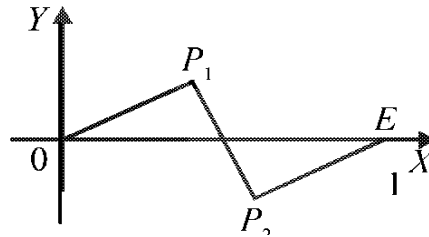


ნახ.18. წყლის და მიწის ურთიერთქმედებით ჩამოყალიბებული კავკასიონის მთათა ფრაქტალური ლანდშაფტი

5. გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალის აგების ალგორითმი

უკვე განხილული გეომეტრიულად კონსტრუირებადი ფრაქტალების აგების მაგალითებიდან გამომდინარე, ავაგოთ ასეთი ფრაქტალების აგების ზოგადი ალგორითმი.

ვთქვათ დედა-ფრაქტალი შედგება n რაოდენობის მონაკვეთებისაგან, ხოლო მამა-ფრაქტალის ფრაგმენტი მოიცავს m მონაკვეთს. დედა-ფრაქტალისა და მამა-ფრაქტალის მონაკვეთების ბოლოების კოორდინატები, ითვლება, რომ წინასწარაა განსაზღვრული. ვთქვათ, მოცემულია მამა-ფრაქტალი (ნახ.19).



ნახ.19. მამა-ფრაქტალი

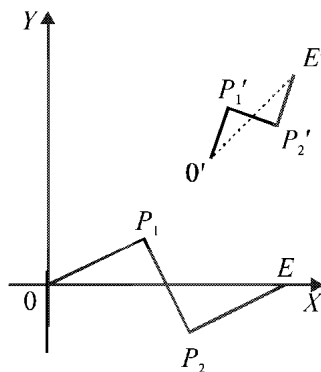
O წერტილი კოორდინატა სათავეა კოორდინატებით $(0; 0)$, ხოლო E წერტილის კოორდინატებია $(1; 0)$. შუალედური წვეროების კოორდინატებია $P_1(0.4; 0.2)$, $P_2(0.6; -0.2)$. მაშინ გვექნება, რომ $OP_1 = P_1P_2 = P_2E = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

დედა-ფრაქტალად განვიხილოთ კვადრატი წვეროებით $(1; 1)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$. თუ ბიჯების რაოდენობაა k , მაშინ OE მამა-ფრაქტალის მოქმედებით დედა-ფრაქტალის ყოველ მონაკვეთზე მივიღებთ $m^k - 1$ წვეროს მქონე ტეხილს. ამ ტეხილის წვეროების კოორდინატები გამოითვლება მსგავსების გარდაქმნით:

$$\begin{cases} x' = (x_2 - x_1) \cdot x - (y_2 - y_1) \cdot y + x_1 \\ y' = (y_2 - y_1) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y + y_1 \end{cases} \quad (37)$$

ამ გარდაქმნის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ნათლად ჩანს მე-20 ნახაზზე. შესაბამისად, გვაქვს ასახვა: $O(0; 0) \rightarrow O'(x_1; y_1)$,

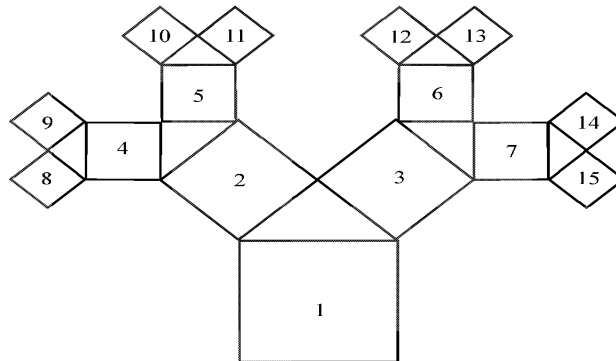
$$E(1; 0) \rightarrow E'(x_2; y_2), P(x; y) \rightarrow P'(x'; y').$$



ნახ.20. მსგავსების გარდაქმნა

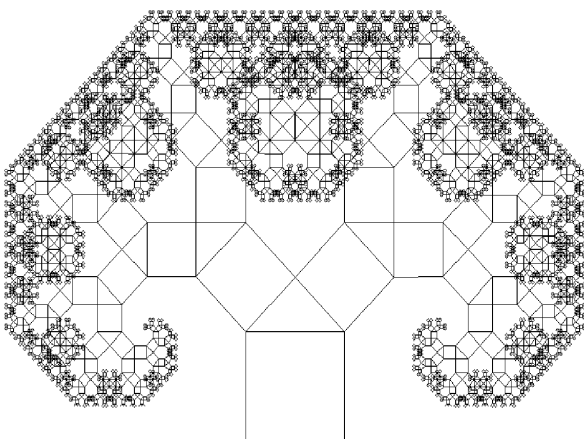
5.1. პითაგორას ფრაქტალური ხე

განვიხილოთ ერთეულოვანი ფართობის მქონე კვადრატები, როგორც დედა-ფრაქტალი ნომრით 1, (ნახ.21), ხოლო მამა-ფრაქტალი იყოს მის ზედა გვერდზე ჰიპოტენუზით დაყრდნობილი ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, მის კათეტებზე აგებული კვადრატებით, ნომრით 2 და 3. შემდეგ ეს პროცესი მეორდება თითოეული ამ ახალი კვადრატისათვის და ა.შ. ადვილი მისახვედრია, რომ 2 და 3 ნომრის მქონე კვადრატების ფართობთა ჯამიც იქნება 1. იგივე ფაქტს ადვილი აქვს სხვა კვადრატებისთვისაც.



ნახ.21. პითაგორას ფრაქტალური ხის აგების დაწყებითი ეტაპები

თუ დავაკვირდებით ამ ნახაზს, დავინახავთ, რომ კვადრატზე ინდექსით n , დაყრდნობილია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებზე იზრდება უფრო მცირე სიდიდის ორი კვადრატი. მარცხნივ მდგომი კვადრატის ინდექსია $2n$, ხოლო მარჯვნივ მდგომი კვადრატისა- $(2n + 1)$. მაშინ ყოველ დონეზე არსებული კვადრატების ფართობთა ჯამი, საწყისი კვადრატის ფართობის ტოლია ანუ თუ განვიხილავთ კვადრატებს ნომრით 8;9;10;11;12;13;14;15 აღმოვაჩინოთ, რომ მათი ფართობთა ჯამიც ერთის ტოლია. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, მაშინ მივიღებთ პითაგორას ფრაქტალურ ხეს (ნახ.22).



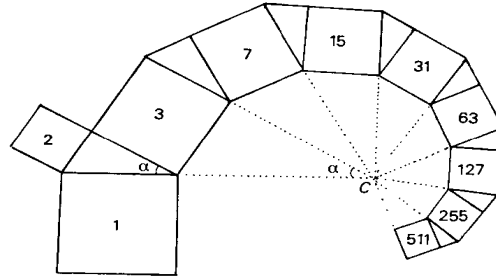
ნახ. 22. პითაგორას ფრაქტალური ხე



ნახ.23. მაგნიუმის ხელოვნური დენდრიტი, რომელიც მიიღება მაგნიუმის ორთქლის კონდენსაციით ცივ ზედაპირზე. ძალიან ჰგავს ნაძვის გირჩების გროვას

5.2. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე

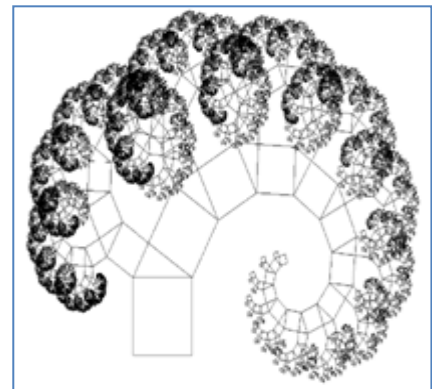
პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხე არის პითაგორას ფრაქტალური ხის განზოგადება. მისი აგების ალგორითმი მოცემულია 24-ე ნახაზზე.



ნახ.24. პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმი.

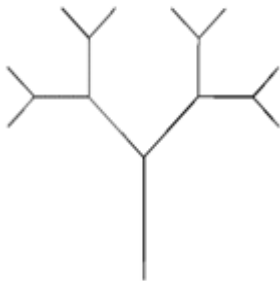
ფრაქტალი წარმოიქმნება თითოეულ ბიჯზე, მარჯვენა მხრიდან კვადრატის დამატებით.

ლოგარითმული სპირალი წარმოიქმნება მსგავსების გარდაქმნით, რომელიც წარმოადგენს მობრუნებას α კუთხით და მასშტაბური შემცირებით $\cos \alpha$ - ჯერ. ერთდროულად, შეგვიძლია განვიხილოთ მსგავსების გარდაქმნა, რომელიც მოქმედებს მარცხენა მხრიდან: მობრუნება $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ -კუთხით და მასშტაბური შემცირება $\sin \alpha$ - ჯერ. მაშინ მივიღებთ სპირალურ ფრაქტალურ ხეს (ნახ.25), სადაც $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

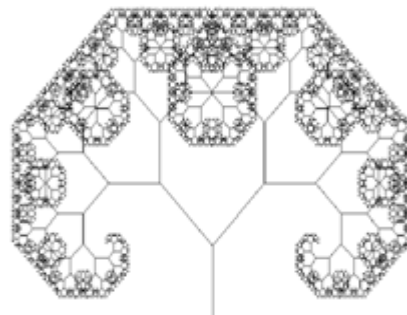


ნახ.25. სპირალური ფრაქტალური ხე

თუ გავამარტივებთ პითაგორას სპირალური ფრაქტალური ხის აგების ალგორითმს, რისთვისაც უკუვაგდებთ კვადრატებს და დავხატავთ მხოლოდ იმ მონაკვეთებს. რომლებიც აერთებს სამკუთხედების ცენტრებს, ხოლო სამკუთხედებს ასევე, აღარ დავიტანთ ნახაზზე, მივიღებთ პითაგორას სპირალურ, გამიშვლელ ფრაქტალურ ხეს, რომელიც გამოსახულია 26-27 ნახაზებზე.



ნახ.26. პითაგორას სპირალური, გამიშვლელ ფრაქტალური ხის აგების საწყისი ბიჯები

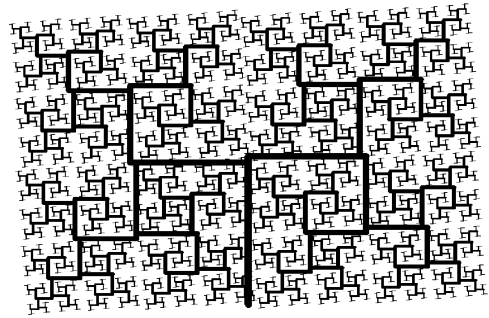


ნახ.27. პითაგორას სპირალური, გამიშვლელ ფრაქტალური ხე

მანდელბროტის წიგნში განხილულია ფრაქტალური ხის ხსენებული ვარიანტებიც (ნახ.28,29) [1].

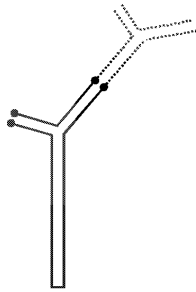


ნახ.28. მანდელბროტის ფრაქტალური ხის დედა-ფრაქტალი და ზემოთა აგრეგატი (მამა-ფრაქტალი)

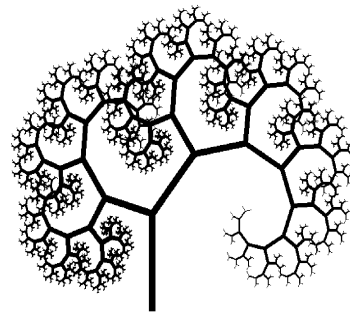


ნახ.29. მანდელბროტის ფრაქტალური ხე

მანდელბროტმა ააგო რეალური ფრაქტალური ხის მოდელიც (ნახ.30,31).



ნახ.30. რეალური ფრაქტალური ხის მოდელი



ნახ.31. რეალური ფრაქტალური ხე

განვიხილოთ შესაბამისი ბუნებრივი ფრაქტალების სურათები (ნახ. 10-23).



ნახ.32. დედამიწის ზედაპირის სურათები კოსმოსიდან გვამღევენ ფრაქტალური ფორმის ლანდშაფტს



ნახ.33. თხევადი ან გაზობრივი ნივთიერების კრისტალიზაციით წარმოქმნილი მინერალის ფრაქტალი



ნახ.34. ქვიშის დიუნის წყლით ნაწილობრივი მორეცხვის შედეგად წარმოქმნილი ფრაქტალი



ნახ.35. ხის ტოტები - ბუნებრივი ფრაქტალი



ნახ.36. ხის ტოტები იყოფა ორად, შემდეგ ბიჯზე, თითოეული ტოტი კვლავ იყოფა და ა.შ. გარკვეულ სასრულ რაოდენობამდე (როგორც მის გენეტიკურ პროგრამაშია ჩადებული) ესაა დენდრიტის ტიპის ფრაქტალი



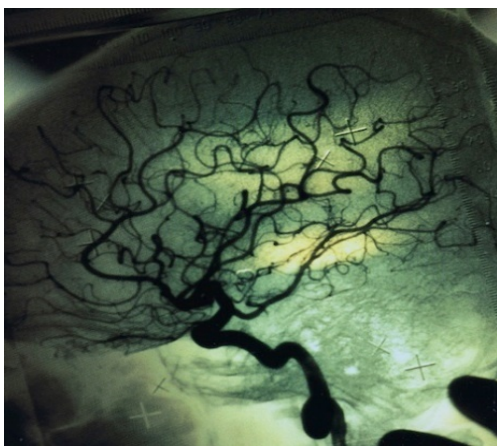
ნახ.37. ბაობაბი, აგრეთვე, ფრაქტალური კანონით იტოტება, თუმცა ყველა ხეს აქვს თავისი გენეტიკური კოდი (დატოტვის წესი)



ნახ.38. ამოფრქვეული ვულკანის გაცივებული ლავა ინარჩუნებს დინების ფრაქტალურ ფორმას



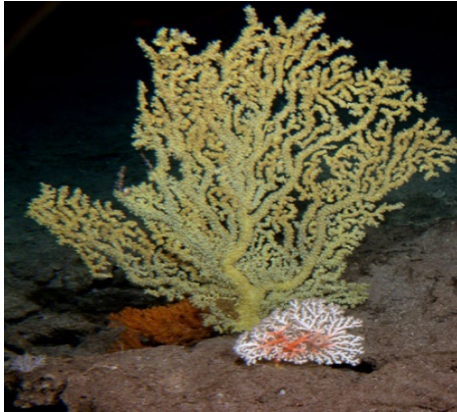
ნახ.39. მცენარეთა ფრაქტალური ფორმაა - დენდრიტი



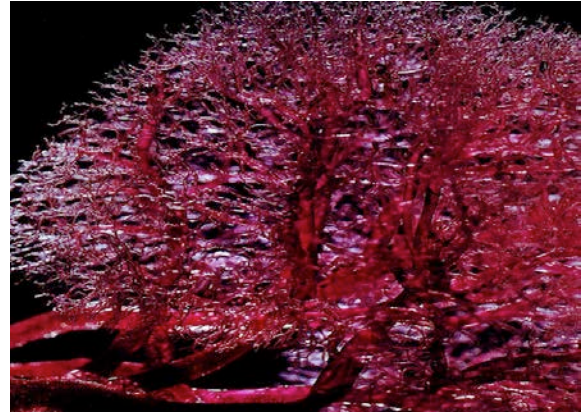
ნახ.40. ადამიანის ტვინის სისხლძარღვთა სისტემაც დენდრიტია



ნახ.41. მდინარეთა დატოტვის ფრაქტალიც დენდრიტია



ნახ.42. მარჯუნის ფრაქტალიც დენდრიტია



ნახ.43. ფილტვი შეიცავს ერთმანეთში გადაჯაჭვულ სამ ფრაქტალს: სასუნთქი ფრაქტალი, სისხლძარღვთა ვენოზური სისხლის და არტერიული სისხლძარღვების ფრაქტალები



ნახ.44. ამაზონის წყლის შროშანის ფრაქტალი



ნახ.45. ბაობაბის დატოტვის სისტემა მოგვაგონებს სისხლძარღვთა სისტემას

6. დასკვნა

როგორც ვხედავთ, ცოცხალი სისტემების მოდელირებისათვის საკმაოდ კარგად მუშაობს გეომეტრიულად კონსტრუირებადი იდეალური ფრაქტალები, რომელთათვისაც დამახასიათებელია თვითმსგავსების თვისება, ანუ მასშტაბური. თუმცა გარემო პირობების სისტემატიურად ცვლილების გამო, იცვლება ცოცხალი სისტემების ზრდის (ეკოლუციის) ტემპიც და ზოგჯერ ხდება გენეტიკური მუტაციაც, რაც თავის მხრივ განაპირობებს მისი დინამიკის მცირედ განსხვავებას იდეალური ფრაქტალური კანონისაგან. ამ პრობლემის ამოსახსნელად ზოგჯერ იყენებენ შემთხვევით პროცესებსაც. თუმცა, ბუნება იმდენად მრავალფეროვანია და საიდუმლოებებით სავსე, რომ ცოცხალი სისტემების საბოლოოდ ფორმალიზაცია ჯერ-ჯერობით ვერ ხერხდება.

ლიტერატურა:

1. МандельбротБ. (2002). Фрактальная геометрия природы. Пер. сангл., Ижевск.
2. Lauwerier H.A. (1991). Fractals – images of chaos. Princeton Univ., press.
3. Кроновер Р.М. (2000). Фракталы и хаос в динамических системах. Пер. сангл., Москва.

4. Julia G. (1918). Memoir sur l'iteration des fonctions rationnels. J. de Mathematiques pures et appliquees, v. 1, Paris.
5. Пайтген Х.О., Рихтер П.Х. (1993). Красота фракталов. Пер. с англ., Мир, Москва.
6. Мандельброт Б. (2004). Фракталы, случай и финансы. Пер. с франц., Ижевск, Москва.
7. Мандельброт Б. (2009). Фракталы и хаос. Множество Мандельброта и другие чудеса. Пер. с англ., Ижевск, Москва.
8. Richardson LF. (1922). Weather prediction by numerical process. Cambridge University press.
9. Морозов А.Д. (2002). Введение в теорию фракталов. Институт компьютерных исследований, Ижевск, Москва.
10. Божокин С.В., Паршин Д.А. (2001). Фракталы и мультифракталы. НИЦ «регулярная и хаотическая динамика», Ижевск.
11. ობგაძე თ. (2016). მათემატიკური მოდელირება, მონოგრაფია, სტუ, თბილისი.

GEOMETRICALLY CONSTRUCTED BY COMMON FRACTALS AND QUESTIONS OF MODELING OF LIVING SYSTEMS

Obgadze Tamaz, Kortieva Vera

Georgian Technical University

Summary

We consider the ideal geometrically constructed by fractals. Give different ways of designing and structuring. We analyzed the limits of their applicability for modeling the evolution of living systems. Dendrite growth mechanisms are considered, as in the ideal, and in open systems. It proposed a formal definition of a geometrically constructed a perfect fractal.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ КОНСТРУИРУЕМЫЕ ИДЕАЛЬНЫЕ ФРАКТАЛЫ И ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЖИВЫХ СИСТЕМ

Обгадзе Тамаз, Кортиева Вера

Грузинский Технический Университет

Резюме

В работе рассматриваются идеальные геометрически конструируемые фракталы. Даются различные способы их конструирования и структурирования. Проанализированы границы их применимости для моделирования эволюции живых систем. Рассматриваются механизмы роста дендритов, как в идеальных, так и в открытых системах. Предлагается формальное определение геометрически конструируемого идеального фрактала.